

# Kvantno tuneliranje u reakcijama nuklearne fuzije

---

Louis, Kristina

Master's thesis / Diplomski rad

2018

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:789002>

Rights / Prava: [In copyright](#) / [Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-09-12**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Odjel za fiziku

Kristina Louis

# **KVANTNO TUNELIRANJE U REAKCIJAMA NUKLEARNE FUZIJE**

Diplomski rad

MENTOR: prof. dr. sc. Dragan Poljak

Split, rujan 2018

Ovaj rad, izrađen u Splitu, pod mentorstvom prof. dr. sc. Dragana Poljaka, predan je na ocjenu Odjelu za fiziku Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Sveučilišta u Splitu radi stjecanja zvanja magistra (mag.) fizike, smjera biofizike.

# TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno-matematički fakultet  
Odjel za fiziku

Diplomski rad

## KVANTNO TUNELIRANJE U REAKCIJAMA NUKLEARNE FUZIJE

Kristina Louis  
Ruđera Boškovića 33, 21 000 Split

### Sažetak

Nuklearnu fuziju, koja se u Suncu konstantno odvija priskrbajući nam ogromne količine energije, nije moguće objasniti klasičnom mehanikom obzirom na to da čestice u procesu fuzije moraju prijeći energetska barijeru za koju nemaju dovoljno energije. Temperature na kojima se u Suncu odvijaju reakcije nuklearne fuzije su mnogo niže od onih koje su nam potrebne kako bi iste reakcije ostvarili na Zemlji. Razlog leži u ogromnom broju atoma vodika koji se nalaze u Suncu i sudjeluju u ovom procesu, pa se iznimno malo vjerojatni prijelazi energetske barijere odvijaju stalno i Sunce proizvodi energiju. Kvantni efekt koji objašnjava ovaj proces se zove tuneliranje.

( 47 stranica, 22 slike, 18 literaturnih navoda, jezik izvornika: hrvatski)

Ključne riječi: fuzija, kvantna mehanika, tuneliranje, energija Sunca, nuklearne reakcije  
Voditelj: prof. dr. sc. Dragan Poljak  
Ocjenitelji: prof. dr. sc. Dragan Poljak , prof. dr. sc. Franjo Sokolić, dr. sc. Bernarda Lovrinčević

# BASIC DOCUMENTATION CARD

University of Split  
Faculty of Science  
Department of Physics

Graduation Thesis

## QUANTUM TUNNELING IN NUCLEAR FUSION REACTIONS

Kristina Louis  
Ruđera Boškovića 33, 21 000 Split

### Summary

Nuclear fusion, which occurs constantly in the Sun and supplies us with enormous amounts of energy, can't be explained in terms of classical mechanics since particles which participate in the fusion process must tunnel through energy barrier without enough energy to do so. The temperatures at which nuclear reactions are taking place in the Sun are much lower than those we need to accomplish the same reactions on Earth. The explanation lies in the huge number of hydrogen atoms that are involved in this process in the Sun, so extremely unlikely transitions of energy barriers take place all the time and the Sun produces energy. The quantum effect that explains this process is called tunneling.

( 47 pages, 22 figures, 18 references, original in: croatian)

Key words: fusion, quantum mechanics, tunneling, Sun energy, nuclear reactions

Supervisor: prof. dr. sc. Dragan Poljak

Reviewers: prof. dr. sc. Dragan Poljak , prof. dr. sc. Franjo Sokolić, dr. sc. Bernarda Lovrinčević

# SADRŽAJ

<b>UVOD</b>	1
<b>1. FUZIJA</b>	1
1.1. Fuzijski reaktor i ITER	1
1.2. Oblici fuzije	7
1.2.1. Fuzija deuterija i tricija	7
1.2.2. Fuzija deuterija i deuterija	9
1.2.3. Fuzija deuterij – helij-3	10
<b>2. FORMALIZAM KVANTNE MEHANIKE</b>	12
2.1. Postulati kvantne mehanike	12
2.2. Valna funkcija	14
2.2.1. Valna funkcija u potencijalnoj barijeri	16
2.3. Schrodingerova jednačba	18
2.3.1. Rješenje Schrodingerove jednačbe za česticu u potencijalnoj jami	20
2.4. Heisenbergovo načelo neodređenosti	22
2.4.1. Heisenbergov princip i tuneliranje	28
<b>3. KVANTNA FIZIKA FUZIJE</b>	32
3.1. Tunel-efekt u fuziji	32
3.2. Termonuklearne reakcije u zvijezdama	40
<b>ZAKLJUČAK</b>	44
<b>LITERATURA</b>	45

## UVOD

Suvremenom modernizacijom i razvojem sve su veće potrebe za energijom, a zalihe fosilnih goriva su se već poprilično iscrpile. Sada je već očito da je nuklearna fuzija jedno od rješenja koje bi osiguralo potrebne izvore energije u budućnosti. Nuklearna fuzija je proces u kojem se više lakših atomskih jezgara spaja u jednu, težu, a ovaj je proces popraćen oslobađanjem energije. Nuklearna energija dobivena fisijom urana oslobađa velike količine energije jer se teža jezgra cijepa na dvije lakše, a potrebna je veća energija za formiranje jedne teže nego dvije lakše jezgre. Izotop uranija-235 je jedini fisilni izotop koji se nalazi u prirodi, međutim, fisija urana, obzirom na radioaktivne nusprodukte, nije najbolje rješenje. S druge strane, ogromne mogućnosti nam pruža energija Sunca, koja je zapravo nuklearna fuzija.

Sjaj zvijezda i eksplozija nuklearne bombe su primjeri manifestacije oslobođenja energije nastale nuklearnom fuzijom. Kako bi došlo do nuklearne fuzije potrebno je da se savlada energetska barijera između čestica koje se fuziraju. S obzirom na to da među česticama istog naboja postoji odbojna električna sila, Coulombova barijera, potrebno je postići da jaka privlačna nuklearna sila nadvlada onu odbojnu kako bi se jezgre mogle spojiti. Ako pritom razmatramo samo temperaturu, potrebno je postići vrlo visoke temperature. Iako su sa stajališta klasične fizike za fuziranje jezgara potrebne temperature reda veličine  $10^9$  °C, u prirodi se fuzija ipak događa na oko 150 milijuna °C [1]. Naime, u zvijezdama, energetska barijera se prevladava efektom tuneliranja. Time je omogućena reakcija fuzije pri znatno nižim temperaturama.

Kvantno tuneliranje u nuklearnoj fizici omogućuje fuziju uz relativno niske temperature. Pomoću tuneliranja nastupa fuzija jezgara unatoč tome što nemaju dovoljnu kinetičku energiju da pri neposrednom sudaru savladaju međusobno odbojnu električnu silu. Kroz ovaj rad ću objasniti koncepte kvantne fizike kojima se objašnjava fenomen tuneliranja i način na koji ono dolazi do izražaja u procesima nuklearne fuzije.

U prvom poglavlju ću pisati o fuzijskim reakcijama i o oblicima fuzije koji bi se mogli iskoristiti u nuklearnim reaktorima. Usredotočit ću se na osnovne ideje i probleme u eksperimentalnom pristupu fuziji u kontroliranim uvjetima. Ukratko ću opisati i projekt ITER koji trenutno gradi najveći i najnapredniji nuklearni reaktor dosad, a koji bi trebao proizvoditi 10 puta veću energiju

od one uložene [5]. Obzirom na to da je cilj ovog rada objasniti kvantne efekte koji su zaslužni za fuziju, u drugom ću poglavlju pisati o formalizmu kvantne mehanike u kojem ću ukratko opisati najvažnije pojmove. Vidjet ćemo važnost Heisenbergovog principa u interpretaciji kvantnog tuneliranja i što implicira valna funkcija različita od nule s druge strane potencijalne barijere.

U trećem poglavlju ću objasniti na koji je način kvantna mehanika zaslužna za odvijanje fuzije u prirodi. Usporedit ću ishode nailaska čestice na potencijalnu barijeru (koju u slučaju fuzije predstavlja odbojna sila među istim nabojima dva protona) u klasičnoj fizici s mogućim ishodima koje predviđa kvantna fizika. Objasnit ću kako u Suncu dolazi do tuneliranja unatoč vrlo niskoj vjerojatnosti da ono nastupi. Na kraju rada ću opisati i objasniti koje se nuklearne reakcije odvijaju u zvijezdama i kako nastaje energija.



# 1. FUZIJA

## 1.1. Fuzijski reaktor i ITER

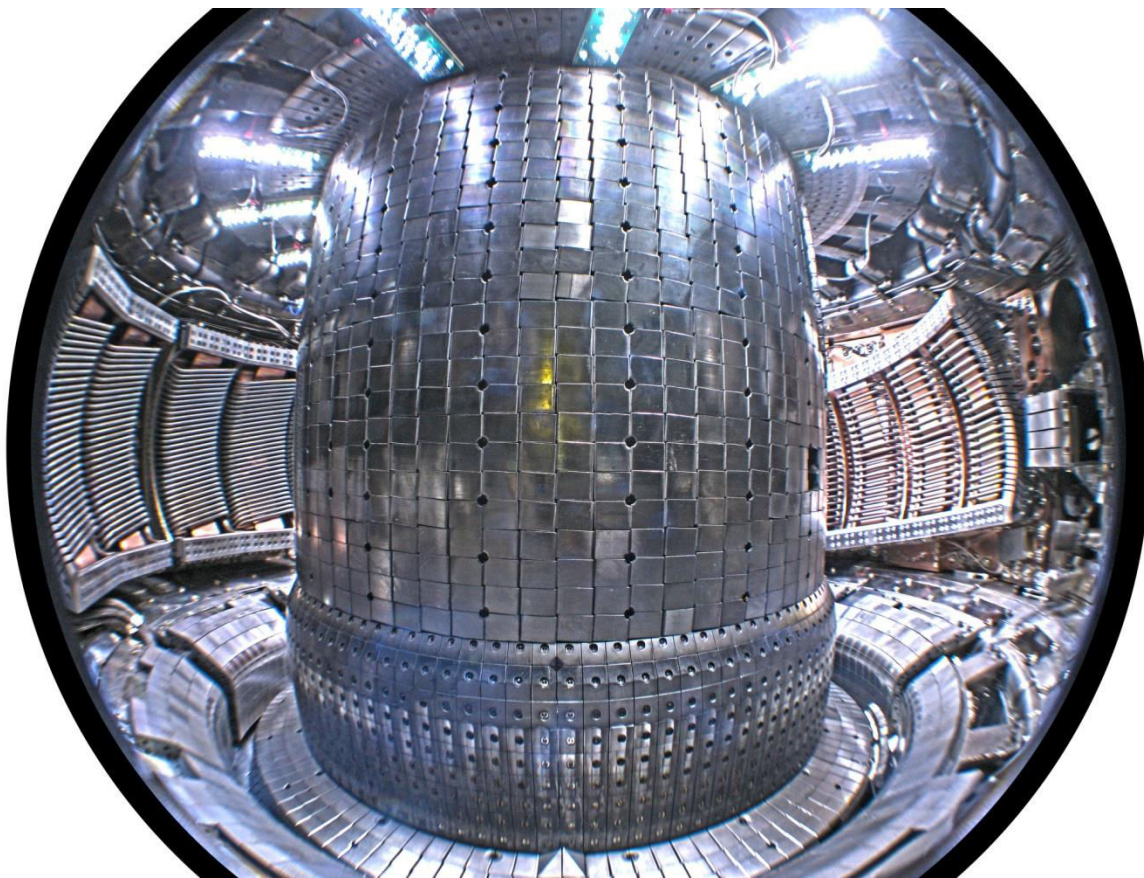
Na Suncu, zvijezdama i u nuklearnim eksplozijama odvijaju se fuzijske reakcije s jezgrama vodika. Takve fuzijske reakcije nije moguće postići na kontrolirani način. Fuzijski reaktor je uređaj u kojem se kontinuirano odvija kontrolirana nuklearna reakcija fuzije, iako do sada, unatoč intenzivnim istraživanjima, nisu ostvareni uvjeti potrebni za kontinuirano odvijanje fuzijskih reakcija. Fuzijom se dvije lake jezgre atoma spajaju u težu jezgru, pri čemu je zbroj masa dviju lakših jezgara veći od mase teže jezgre. Očito je da se ostatak mase manifestira kroz energiju, a upravo je ta energija ono što se želi dobiti fuzijskim reaktorom. Da bi došlo do spajanja dviju lakih jezgara koje nose pozitivan naboj potrebno je savladati njihovu odbojnu električnu silu. Zato jedna ili obje lake jezgre moraju imati dovoljno veliku brzinu da se mogu približiti jedna drugoj toliko da bi jaka privlačna nuklearna sila prevladala odbojnu električnu silu. Radi se o udaljenosti od jednog fm ( $10^{-15}$ m). Kada se na visokim temperaturama elektroni počnu odvajati od jezgre, plin prelazi u agregatno stanje poznato pod nazivom plazma [3]. Plazma predstavlja vodljivi fluid u kojem se postiže velika brzina lakih jezgara. Njen sastav čine pozitivno nabijeni slobodni ioni i slobodni elektroni pa je plazma električki neutralan medij. Vrlo je razrijeđena pa tako zrak ima približno milijun puta veću gustoću.

Potrebno je ispuniti tri uvjeta kako bi se laboratorijski postigla fuzija:

1. VISOKU TEMPERATURU u svrhu postizanja sudara uz visoku energiju
2. VISOKU GUSTOĆU PLAZME kako bi se povećala vjerojatnost da dođe do sudara
3. DOVOLJNO VRIJEME ZADRŽAVANJA PLAZME kako ne bi eksandirala

Kako bi došlo do reakcije fuzije potrebno je povećati energiju iona, a to se postiže podizanjem temperature plazmi dovođenjem energije. Reakcije nuklearne fuzije nije moguće koristiti kao izvor energije ako se te reakcije ne odvijaju kontinuirano. Kontrolirane fuzijske reakcije se mogu odvijati korištenjem lakih jezgara deuterija i tricija. Deuterij je izotop vodika čija se jezgra sastoji od jednog protona i jednog neutrona, a tricij je također izotop vodika, ali se sastoji od jednog protona i dva neutrona. Kako bi se mogle odvijati reakcije nuklearne fuzije potrebno je postići vrlo visoke temperature, više od 100 000 000 kelvina. Na tim temperaturama plazma je nestabilna i širi se, stoga je potrebno ograničiti plazmu, odnosno držati je na mjestu. Na Suncu se to postiže djelovanjem jakog gravitacijskog polja, dok se na Zemlji to ostvaruje snažnim magnetskim poljem ili inercijskim ograničavanjem plazme. Kod inercijskog ograničavanja plazme potrebno je vrlo brzo zagrijati plazmu kako bi se fuzijska reakcija odvila prije ekspanzije zagrijane plazme ispod gustoće potrebne da bi došlo do fuzije. Magnetskim ograničavanjem se pomoću magnetskog i električnog polja zagrijava i stišće plazma. Na taj način se postiže da se plazma drži u cilindrične ili toroidalne posude. Reaktor ovakvog oblika se zove tokamak. Tokamak je ruski akronim za toroidalnu komoru s aksijalnim magnetskim poljem, a svrha mu je dobivanje energije pomoću nuklearne fuzije.

2008. godine u Francuskoj u Cadaracheu je pokrenuta izgradnja prvog fuzijskog nuklearnog reaktora u sklopu internacionalnog projekta ITER (eng. International Thermonuclear Experimental Reactor). U projektu sudjeluje velik broj znanstvenika i inženjera u sjevernoj Francuskoj, a cilj je da se izgradi najveći tokamak na svijetu. Na slici 1.1 je prikazana unutrašnjost tokamaka koji se gradi u Francuskoj. Fotografija cijelog kompleksa se nalazi na slici 1.2.



Slika 1.1: Unutrašnjost tokamaka (preuzeto s <https://www.iter.org/sci/tkmkresearch>)

Unutar tokamaka nalazi se vakuumska komora u kojoj se pod visokim tlakom i temperaturom stvara plazma od plinovitog vodikovog goriva. U tim uvjetima se dovode do ekspanzije plazme, stoga se mora ograničiti njeno širenje. U ITER-ovom tokamaku plazma će se ograničiti magnetskim poljem [5]. Kada se plazma izloži magnetskom polju, u njoj se inducira struja koja nastoji poništiti vanjsko magnetno polje, odnosno potisnuti ga izvan plazme. Tako dolazi do toga da magnetske silnice obilaze plazmu te magnetsko polje pritišće plazmu ograničavajući njeno širenje.



Slika 1.2: Tokamak kompleks (preuzeto s <https://www.iter.org/construction/tkmcomplex>)

U ITER-u će se fuzija odvijati u tokamaku. Prilikom fuzije deuterija i tricija nastaju jezgra helija, neutron i velike količine energije. Naboj jezgre helija, obzirom na izloženost magnetskom polju, ostaje zadržan unutar plazme omogućujući kontinuirano zagrijavanje. Međutim, obzirom da neutroni nemaju naboj, na njih ne utječe magnetsko polje, pa se čak oko 80% energije izgubi iz plazme [5]. Zbog toga bi se neutroni trebali apsorbirati u zidove s unutarnje strane tokamaka, a njihova će se kinetička energija tamo konvertirati u toplinu. Ta će se toplina u ITER-u zadržati cirkuliranjem hladne vode u cijevima zidova. Ovakav način proizvodnje energije je iznimno povoljniji od ijednog drugog izvora energije na Zemlji. Trenutna su predviđanja se da će 2035. godine sve biti spremno da kompleks započne s radom.

## 1.2. Oblici fuzije

Kako bi se oslobodila energija fuzijom potrebno je kombinirati dvije male jezgre u jednu veliku. Energija koja se oslobađa kao razlika u masama je ekvivalentna slavnoj Einsteinovoj relaciji  $E=mc^2$ . Da bi se reakcija mogla odvijati kontinuirano u kontroliranim uvjetima nužno je održavati gorivo na visokoj temperaturi, što se postiže korištenjem proizvedene energije kako bi fuzija sama sebe održavala. Glavne ideje stvaranja energije nuklearne fuzije u reaktoru se svode na nekoliko oblika fuzijskih reakcija, a to su deuterij-tricij, deuterij-deuterij i deuterij-helij-3.

### 1.2.1. Fuzija deuterija i tricija

Fuzija deuterija i tricija se smatra vrlo obećavajućim oblikom fuzijske reakcije. Deuterij je zastupljen na Zemlji, ali triciju nije toliko jednostavno pristupiti jer ima vrijeme radioaktivnog raspada od 12,32 godine, pa ga je potrebno dobiti obogaćenjem litija:



Ova reakcija bi se mogla postići pomoću sporih neutrona kada bi litij bio korišten kao sredstvo za hlađenje i za prijenos topline oko reakcijske komore fuzijskog reaktora. Bogatijim litijem se može dobiti tricij uz brze neutrone, kako slijedi:



Tricij bi se zatim koristio u fuzijskoj reakciji:



Na ovaj način bi se dobila energija fuzijom deuterija i tricija (slika 1.3). Energija koja nastaje, 17.56 eV [17], se dobije kao posljedica deficita mase koji je dan kao razlika zbroja masa reaktanata i zbroja masa produkata. Dobiveni deficit mase se potom uvrsti u Einsteinovu relaciju  $E=mc^2$ .

Mase deuterija, tricija, helija i neutrona možemo prikazati u odnosu na masu vodika:

$$m_D = 1.999 m_H$$

$$m_T = 2.9937 m_H$$

$$m_{He} = 3.9726 m_H$$

$$m_n = 1.0014 m_H$$

Pritom je  $m_H = 1.627 \cdot 10^{-27}$  kg. Deficit mase je:

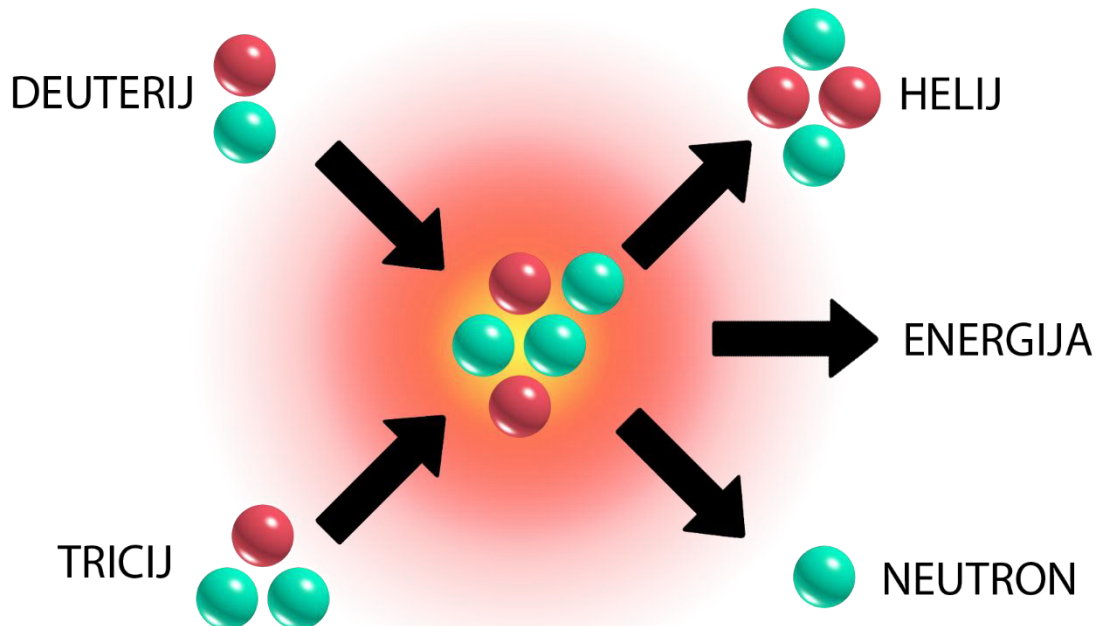
$$\Delta m = (4.9927 - 4.974) m_H = 0.0187 m_H$$

Sada energiju računamo preko Einsteinove formule:

$$E = mc^2 = 0.0187 m_H c^2 = 2.814 \cdot 10^{-12} \text{ J}$$

Da bi dobili iznos energije u eV pretvaramo J u eV:

$$E = \frac{2.814 \cdot 10^{-12} \text{ J}}{1.6022 \cdot 10^{-19}} \text{ eV} = 17.56 \text{ MeV}$$



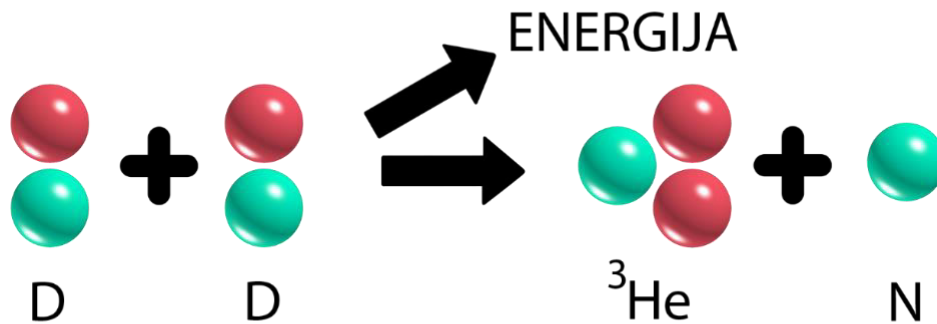
Slika 1.3: Fuzija deuterija i tricija

### 1.2.2. Fuzija deuterija i deuterija

Slika 1.4 ilustrira fuziju dva deuterija. Ishod fuzije deuterija i deuterija može poprimiti sljedeća dva oblika:



Za svaki od ovih ishoda gotovo su jednake vjerojatnosti. Reakcijom (1.4) neće nastati neutroni, već tricij, zahvaljujući čemu nije potrebno obogaćenje litija kako bi se dobio tricij. Jedan od problema kod fuzije deuterija i tricija je pohrana tricija jer bi mogućnost dospjeća tricija u prirodu moglo imati velike ekološke posljedice zbog radioaktivnog zagađenja. Taj je problem puno manji u slučaju deuterij-deuterij jer bi većina tricija trebala izgorjeti još u reaktoru. Reakcijom (1.5) se dobiju neutroni koji imaju dosta nižu energiju od neutrona stvorenih fuzijom deuterij-tricij. Energija dobivena ovim procesom je 3.269 MeV [17].



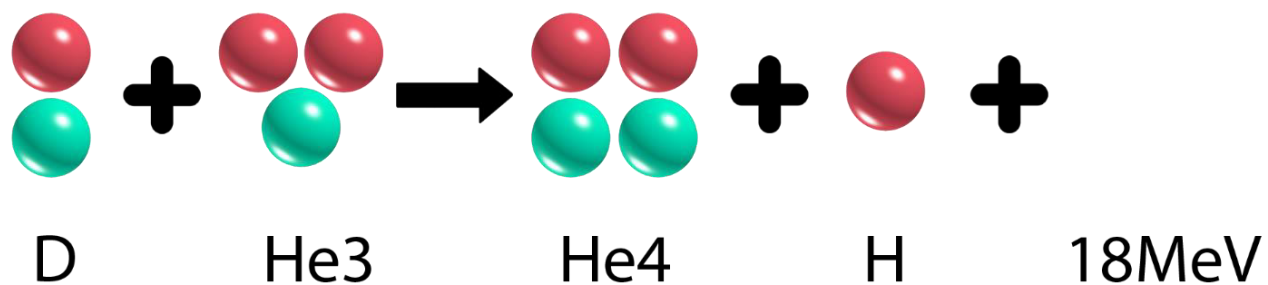
Slika 1.4: Fuzija deuterij – deuterij

### 1.2.3. Fuzija deuterij – helij-3

Produkti kombinacije jezgara deuterija i helija-3 su vodik, helij i energija po reakciji, a ovakav tip fuzije se naziva antineutronska fuzijom. Antineutronska fuzija je svaki oblik reakcije fuzije u kojem neutroni ne nose više od 1% ukupne oslobođene energije. Prednost ovog tipa fuzije leži u činjenici da se produkti reakcije, koji su nabijene čestice, električnim i magnetskim poljem mogu iskoristiti u svrhu direktne pretvorbe energije. Količina topline potrebne da bi došlo do ove



reakcije iznosi 100 keV, što je oko 10 puta više od one potrebne da bi se odvijala fuzija deuterija i tricija. Reakcija fuzije deuterija i helija-3 je prikazana na slici 1.5. Energija od 18.353 MeV [17] nastaje na već opisani način za slučaj fuzije deuterija i tricija.



Slika 1.5: Fuzija Deuterija i helija-3

## 2. FORMALIZAM KVANTNE MEHANIKE

U kvantnoj fizici su sadržane brojne teorije i objašnjenja eksperimenata za koje se može reći da nisu zdravorazumski jer odstupaju od uobičajenih i svakodnevnih opažanja. Unatoč tome, kvantna fizika vrlo dobro predviđa ponašanje svih vrsta materije, poput molekula, atoma i elementarnih čestica.

S obzirom na tematiku ovog rada, u ovom ću se poglavlju fokusirati na objašnjenje onih aspekata kvantne teorije koji su nužni za tumačenje tuneliranja u fuzijskim reakcijama, stoga ću naglasak biti na Heisenbergovom principu neodređenosti, valnoj funkciji i Schrodingerovoj jednažbi.

### 2.1. Postulati kvantne mehanike

Formalizam kvantne mehanike se bazira na brojnim pretpostavkama koje se ne mogu izvesti, već se eksperimentalno dokazuju. Pokazalo se da su postulati kvantne mehanike valjani i eksperimentalno se iznimno dobro slažu s predviđanjima, zbog čega se kvantna mehanika smatra najtočnijom fizikalnom teorijom s obzirom na podudaranje ishoda eksperimenata i predviđenih rezultata. Temelji kvantne mehanike su postulati koje ću ukratko predstaviti u ovom potpoglavlju.

#### 1. Stanje sustava

Stanje sustava je u potpunosti opisano valnom funkcijom  $\Psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, t)$ , pri čemu su  $\mathbf{r}_1$  i  $\mathbf{r}_2$  prostorne koordinate čestica 1 i 2 koje tvore sustav, a  $t$  je vrijeme. Ako nas ne zanima kako se sustav ponaša u vremenu, valnu funkciju pišemo kao  $\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$  i tada govorimo o vremenski neovisnoj valnoj funkciji.

## 2. Observable i operatori

Svakoj fizikalnoj veličini  $A$  (observabli) koja se može mjeriti pridružen je hermitski operator  $\hat{A}$ . Ako s  $q$  i  $q'$  označimo koordinate, a s  $p$  i  $p'$  njima odgovarajuće linearne momente, tada možemo napisati komutacijske relacije koje vrijede za hermitske operatore:

$$[q, p_q] = i\hbar\delta_{qq'}, \quad [q, q'] = 0, \quad [p_q, p_q] = 0 \quad (2.1)$$

## 3. Mjerenja i svojstvene vrijednosti operatora

Mjerenje neke observable je predstavljeno djelovanjem njoj pridruženog operatora na vektor stanja  $|\Psi(t)\rangle$ . Rezultat ovog mjerenja su svojstvene vrijednosti danog operatora. Ako je rezultat mjerenja djelovanja operatora  $\hat{A}$  na stanje  $|\Psi(t)\rangle$  dano kao  $a_n$ , gdje je  $a_n = \langle \Psi_n | \Psi(t) \rangle$ , tada se stanje odmah nakon izvršenja mjerenja mijenja u  $|\Psi_n\rangle$ , pa vrijedi:

$$\hat{A}|\Psi(t)\rangle = a_n|\Psi_n\rangle \quad (2.2)$$

## 4. Interpretacija valne funkcije (Bornova interpretacija)

Vjerojatnost da će se čestica naći u elementu volumena  $d\tau$  u točki definiranoj vektorom  $\mathbf{r}$  je dana kao  $|\Psi(\mathbf{r})|^2 d\tau$ . Dio  $|\Psi(\mathbf{r})|^2$  nazivamo gustoćom vjerojatnosti. Sama valna funkcija nema direktno fizikalno značenje.

## 5. Razvoj valne funkcije u vremenu

Razvoj valne funkcije u vremenu je određen Schrodingerovom jednačinom:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}|\Psi(t)\rangle \quad (2.3)$$

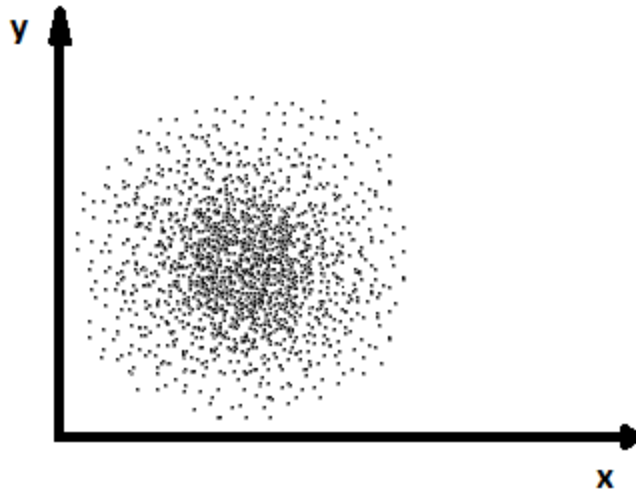
gdje je  $\hbar$  reducirana Planckova konstanta dana kao  $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ , a  $\hat{H}$  je operator ukupne energije sustava.

## 2.2 Valna funkcija

Proučavanjem kvantnih sustava, lako se dođe do zaključka da se Newtonovi zakoni koji klasično opisuju sustave ne mogu koristiti za opis ponašanja kvantnih čestica. Čestice nemaju određene vrijednosti položaja, brzine ili momenta, već su te observable opisane valnom funkcijom koju ima svaka čestica. Valna funkcija je kontinuirana funkcija koja sadrži o čestici sve informacije koje je moguće izmjeriti. Valna funkcija i njene derivacije po položaju su kontinuirane jer su gustoća vjerojatnosti i linearni moment kontinuirane funkcije. Gustoća vjerojatnosti da se čestica pronađe u nekom malom dijelu prostora kontinuirano varira od jedne do druge točke, pa valna funkcija mora biti kontinuirana funkcija položaja. Slično vrijedi za linearni moment koji je dan kao:

$$\hat{P}\Psi(x) = -i\hbar \frac{d\Psi(x)}{dx} \quad (2.4)$$

Linearni moment mora biti kontinuirana funkcija s obzirom na gibanje čestice s jedne strane na drugu. Stoga i prva derivacija valne funkcije po položaju mora biti kontinuirana funkcija. Kvadrat apsolutne vrijednosti valne funkcije  $|\Psi|^2$  prikazuje vjerojatnost da se čestica nađe na nekom položaju. Slika 2.1 prikazuje proizvoljnu valnu funkciju. Tamnijim područjima su označena mjesta na kojima je veća vjerojatnost da nađemo česticu. Tim područjima odgovara veća apsolutna vrijednost valne funkcije.



Slika 2.1: Vizualizacija proizvoljne valne funkcije

Ako izvršimo mjerenje položaja čestice, mjerenje će utjecati na valnu funkciju i ona će sada biti sužena na element volumena na koji je ograničen položaj, tj. reducira se neodređenost položaja. Ono što uvijek znamo o čestici je to da se sigurno negdje nalazi. To znači da vjerojatnost da se čestica nađe, integrirana po cijelom prostoru, mora biti 100% sigurna. Zbog toga je valna funkcija normalizirana:

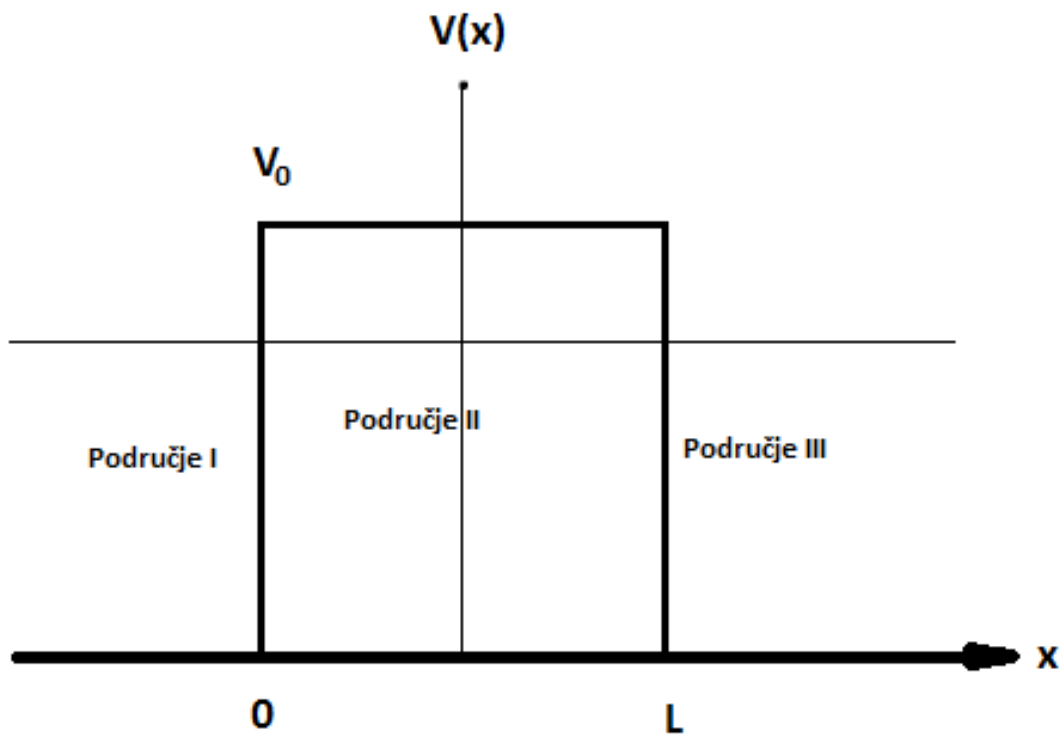
$$\langle \Psi | \Psi \rangle = 1 \quad (2.5)$$

### 2.2.1 Valna funkcija u potencijalnoj barijeri

U 20. stoljeću se pokazalo da klasična fizika ne može dati opis zbivanja na atomskoj razini. Fizikalne zakone mikrosvijeta opisuje kvantna fizika, koju je ponekad teško shvatiti s obzirom da se smatra vrlo neintuitivnom. Louise de Broglie je 1924. godine postavio hipotezu po kojoj svaka čestica koja se giba, uz čestična, posjeduje i valna svojstva. Klasični način opisivanja gibanja tijela u makrosvijetu nije moguće primijeniti i na gibanje elektrona, tj. na mikroskopskoj razini, stoga kvantna mehanika koristi Schrodingerovu jednadžbu koja prikazuje prostorno i vremensko ponašanje čestice u okvirima kvantne mehanike. Rješenje Schrodingerove jednadžbe je valna funkcija koja predstavlja valna svojstva kvantnih čestica. Valna duljina valne funkcije je dana de Broglievom jednadžbom:

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (2.6)$$

U kvantnoj fizici, stanje čestice je nepoznato sve dok se ne izvrše mjerenja, a u međuvremenu čestica je u superpoziciji svih mogućih stanja [16]. Za elektron ne možemo reći da se nalazi na nekim određenim mjestima, već da postoji određena vjerojatnost da elektron nađemo na tim određenim mjestima. Točna rješenja Schrodingerove jednadžbe je moguće dobiti samo za određene oblike potencijalne energije kao funkcije položaja. Slika 2.2 prikazuje potencijalnu barijeru visine  $V_0$ .



Slika 2.2: Ilustracija potencijalne barijere

U području u kojem je  $x < 0$  ulazni val (čestica) prolazi kroz dio prostora koji je neometan potencijalom i tu koegzistira s reflektiranim valom. Dio vala koji se nije reflektirao u  $x=0$  prolazi kroz područje II kao transmitirani val i tunelira do područja III. U dijelu gdje je  $x > L$  val transmitirane čestice se slobodno giba u prostoru bez potencijala. Nuklearna fuzija se u Suncu odvija upravo zahvaljujući tom fenomenu tuneliranja, a u daljnjem tekstu ću obrazložiti kako.

### 2.3 Schrodingerova jednađba

Spomenuta Schrodingerova jednađba se mođe smatrati kvantnim analogom onoga što u klasičnoj mehanici predstavlja Newtonova jednađba gibanja. Razvio ju je Erwin Schrodinger jer je u 20. stoljeću već postajalo jasno da se kvantni svijet ne vodi klasičnim zakonima fizike te je nastala potreba za definiranjem zakona po kojima se ponaša mikrosvijet. Schrodingerova jednađba je parcijalna diferencijalna jednađba čije je rješenje valna funkcija sustava.

Ako potencijalna energija ne ovisi o vremenu Schrodingerova jednađba se mođe separirati na valne funkcije koje se razvijaju ovisno o vremenu i prostoru, odvojeno. Općenita Schrodingerova jednađba je vremenski ovisna i opisuje kako se sustav razvija u vremenu:

$$i\hbar \frac{\partial |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle}{\partial t} = \hat{H} |\Psi(\mathbf{r}, t)\rangle \quad (2.7)$$

Ovakva vremenski ovisna Schrodingerova jednađba pretpostavlja da valna funkcija formira stojne valove koji predstavljaju atomske ili molekularne orbitale. Stacionarna stanja se mogu opisati i vremenski neovisnom Schrodingerovom jednađbom, koja je jednostavnijeg oblika:

$$\hat{H} |\Psi\rangle = E |\Psi\rangle \quad (2.8)$$

Ovdje je  $\Psi$  valna funkcija,  $E$  predstavlja energiju kvantne čestice mase  $m$  koja se giba u intervalu  $[0, L]$ . U linearnoj algebri ovakva se jednađba naziva svojstvenom jednađbom, u kojoj je valna funkcija svojstvena funkcija operatora Hamiltonijana. Značenje ove jednađbe se iskazuje kroz djelovanje operatora Hamiltonijana na valnu funkciju  $\Psi$ . Ako je rezultat tog djelovanja proporcionalan valnoj funkciji  $\Psi$ , tada je valna funkcija  $\Psi$  stacionarno stanje, a energija tog stanja je konstanta proporcionalnosti  $E$ .



Hamiltonijan je dan izrazom:

$$\hat{H} = -\frac{\hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(X) \quad (2.9)$$

$V(x)$  je potencijalna funkcija,  $\hbar$  je reducirana Planckova konstanta.

Moguće je izvesti Schrodingerovu jednadžbu počevši od Helmholtzove jednadžbe [2]:

$$\nabla^2 \psi + k^2 \psi = 0 \quad (2.10)$$

gdje je  $\psi$  valna funkcija, a  $k$  je valni broj dan kao  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ . Koristeći izraz za valni broj i de Broglievu relaciju (2.6), slijedi:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{2\pi mv}{h} \quad (2.11)$$

Uvrštavanjem ove relacije u (2.10):

$$\nabla^2 \psi + \frac{4(\pi mv)^2}{h^2} \psi = 0 \quad (2.12)$$

Ukupna energija čestice je dana zbrojem njene potencijalne i kinetičke energije:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + V \quad (2.13)$$

Iz relacija (2.12) i (2.13) slijedi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V\psi = E\psi \quad (2.14)$$

Jednadžba (2.14) je trodimenzionalna Schrodingerova jednadžba. U jednoj dimenziji jednadžba glasi:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + V(x)\psi(x) = E(x)\psi(x) \quad (2.15)$$

### 2.3.1 Rješenje Schrodingerove jednadžbe za česticu u potencijalnoj jami

Tražimo analitičko rješenje Schrodingerove jednadžbe za slučaj čestice koja se ne može naći izvan intervala  $[0, L]$  i koja se nalazi unutar potencijalne jame u kojoj vrijedi  $V=0$  [2]. Za rubne uvjete vrijedi izraz:

$$\psi(0) = \psi(L) = 0 \quad (2.16)$$

Pojednostavljeni izraz za jednodimenzionalnu Schrodingerovu jednadžbu je:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = k^2 \psi \quad (2.17)$$

Analitičko rješenje relacije (2.17) je:

$$\psi(x) = A\sin(kx) + B\cos(kx) \quad (2.18)$$

Pomoću izraza za rubne uvjete (2.16) dobijemo da je  $B=0$ , a zatim dobijemo  $k$  iz relacije:

$$\sin(kL) = 0 \quad (2.19)$$

Tada slijedi da je valni broj  $k$  dan kao:

$$k = \frac{n\pi}{L} \quad (2.20)$$

Uvrštavajući dobivene izraze za  $B$  i  $k$  dobijemo izraz za valnu funkciju:

$$\psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (2.21)$$

Obzirom na to da je čestica ograničena na interval  $[0, L]$ , znamo da se sigurno nalazi unutar potencijalne jame, pa je vjerojatnost da se čestica pronađe u potencijalnoj jami jednaka:

$$\int_0^L |\psi(x)|^2 dx = 1 \quad (2.22)$$

Uvrštavanjem dobivene valne funkcije u izraz (2.22) dobije se:

$$A^2 \int_0^L \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = 1 \quad (2.23)$$

Iz izraza (2.23) slijedi izraz za A:

$$A = \sqrt{\frac{2}{L}} \quad (2.24)$$

Uvrštavanjem dobivenih izraza za A, B i k dobijemo rješenje Schrodingerove jednačbe za ovaj problem:

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad (2.25)$$

## 2.4 Heisenbergovo načelo neodređenosti

Jedna od najzanimljivijih karakteristika kvantne mehanike je izostanak determinizma. Eksperimentalno je dokazano da je priroda mikrosvijeta nepredvidiva i to je svojstvo po kojem ona najviše odudara od klasične mehanike u kojoj je moguće predvidjeti ponašanje sustava ako su poznati početni uvjeti i sile koje na njega djeluju. Ovakvi eksperimentalni rezultati su potaknuli Heisenberga da postulira svoje poznato načelo neodređenosti po kojem nisu valjani klasični koncepti mogućnosti određivanja točnog položaja ili momenta. Na mikroskopskoj skali, možemo mjeriti samo vjerojatnosti za položaj čestice ili za zakone po kojima će se ponašati.

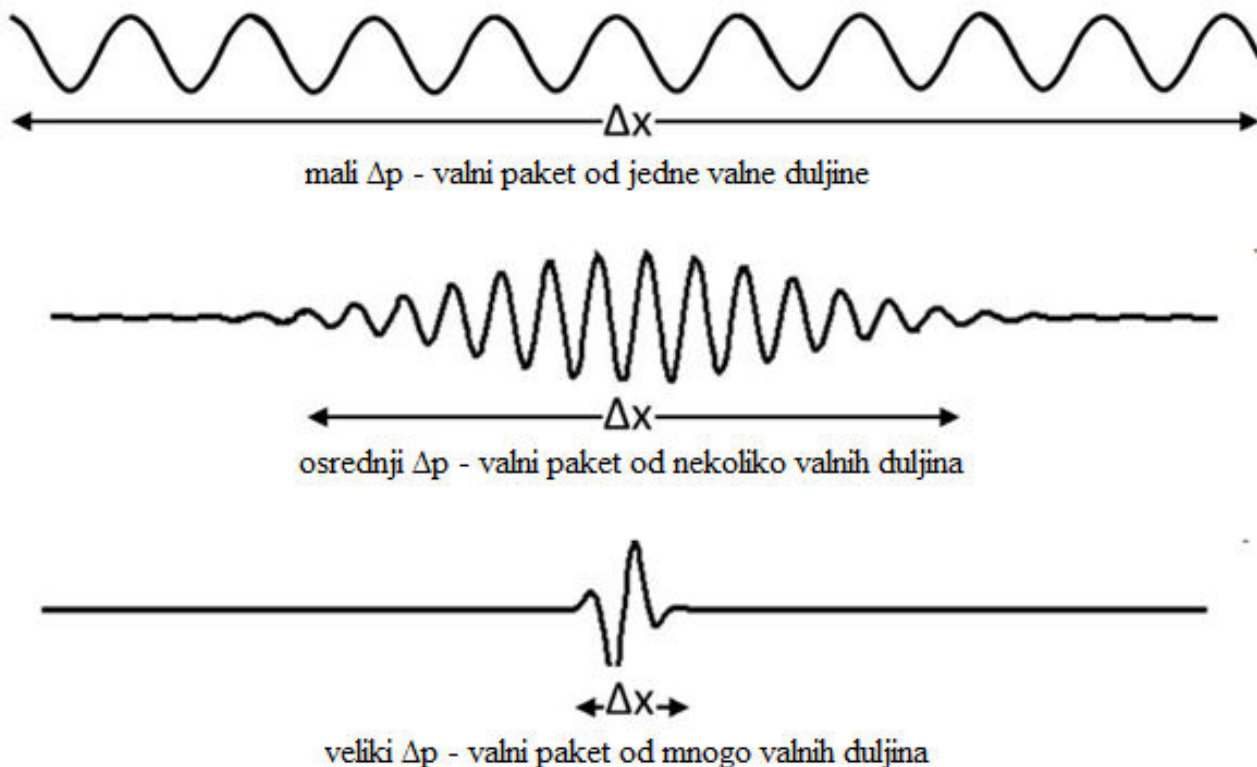
Werner Heisenberg je 1927. svojim principom dao odgovore na pitanja poput zašto elektroni ne padnu na jezgru ili, ono što je upravo i tema ovog rada, kako Sunce proizvodi toliku energiju. Za razliku od makrosvijeta, stvari u mikrosvijetu funkcioniraju znatno drugačije. S obzirom na dualnu prirodu kvantnih čestica, znamo da su one opisane valnom funkcijom koje ne mogu biti lokalizirane, pa time ne može biti lokalizirana ni čestica. Heisenbergovo načelo, u svom originalnom obliku, nalaže sljedeće: *“Ako je x-komponenta momenta čestice izmjerena s*

neodređenosti  $\Delta p_x$ , tada  $x$ -komponenta njezinog položaja ne može istovremeno biti izmjerena s većom točnom od  $\Delta x = \frac{\hbar}{2\Delta p_x}$ ”.

Općenito, Heisenbergovo načelo možemo izraziti u obliku:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.26)$$

Poanta Heisenbergovog načela je da iako je moguće točno odrediti položaj i moment kvantne čestice, nije moguće istovremeno odrediti obje observable uz proizvoljnu preciznost. Što preciznije odredimo jednu observablu, manje precizno možemo odrediti drugu. Ono što dobijemo kada pomnožimo dvije neodređenosti, odnosno pogreške u mjerenju, je veće ili jednako polovici konstante  $\hbar$ , koja odgovara Planckovoj konstanti podijeljenoj s  $2\pi$ . Na slici 2.3 je ilustrirano kako su neodređenost položaja i neodređenost momenta povezani.



Slika 2.3: Prikaz međusobne ovisnosti neodređenosti položaja i momenta

Na slici 2.3 vidimo da kada je moment poznat, odnosno onda kada je neodređenost momenta mala, tada nam je poznata i valna duljina. S obzirom na to da tada imamo samo jednu valnu duljinu, prošireno je područje na kojem se čestica može nalaziti, stoga je neodređenost položaja velika. Ako se neodređenost momenta poveća, smanjit će se područje na kojem se čestica može nalaziti, tj. neodređenost položaja. Ako je položaj dobro određen porast će neodređenost momenta.

Način na koji mjerimo i promatramo u makrosvijetu nije isti kao u mikrosvijetu. Svakodnevna jednostavna radnja kao što je promatranje objekata nije tako jednostavna ako se radi o kvantnom svijetu. Prilikom promatranja fotoni se odbijaju od promatrani objekt i dolaze do naših očiju omogućujući nam da ga vidimo. Tako malene čestice kao što su fotoni ne utječu na predmete iz svakodnevnog života i na nikakav mjerljiv način ne utječu na mjerenja koja nad njima vršimo. Ali što se događa ako želimo pogledati npr. elektron? Klasično „bezazleni“ fotoni sada imaju i te kakav utjecaj na promatranje i mjerenje. Ako se foton odbije od elektron, on će dio svog momenta predati elektronu i automatski mu time promijeniti observable koje mjerimo. Stoga, nije moguće odrediti položaj elektrona bez da mu se mjerenjem preda velik moment. Osim toga, ako uzmemo u obzir da se kvantne čestice jako brzo kreću možemo očekivati da će elektron promijeniti svoj položaj od trenutka kada započnemo mjerenje do trenutka kada ga završimo. Očito je da sam čin mjerenja utječe na promatranu česticu. Kada bi mogli odrediti točan položaj elektrona ili neke druge kvantne čestice, tada bi valna funkcija čestice postala jednaka nuli u svakoj drugoj točki prostora pa bi val imao vrlo malu valnu duljinu, a tada bi moment trebao biti jako visok s obzirom na de Broglievu relaciju

$$p = \frac{h}{\lambda}. \quad (2.27)$$

U okviru Heisenbergova načela možemo objasniti kako to da se pozitivno nabijena jezgra i negativno nabijeni elektron ne privuku i ne kolapsiraju. Naime, kada bi elektron prišao jezgri toliko blizu tada bi nam njegov položaj bio vrlo precizno poznat pa bi neodređenost u mjerenju položaja bila iznimno mala čime bi neodređenost njegova momenta bila ogromna [18]. Tada bi se elektron mogao gibati brzinom koja se može usporediti s brzinom svjetlosti i mogao bi “odletjeti” iz cijelog atoma.

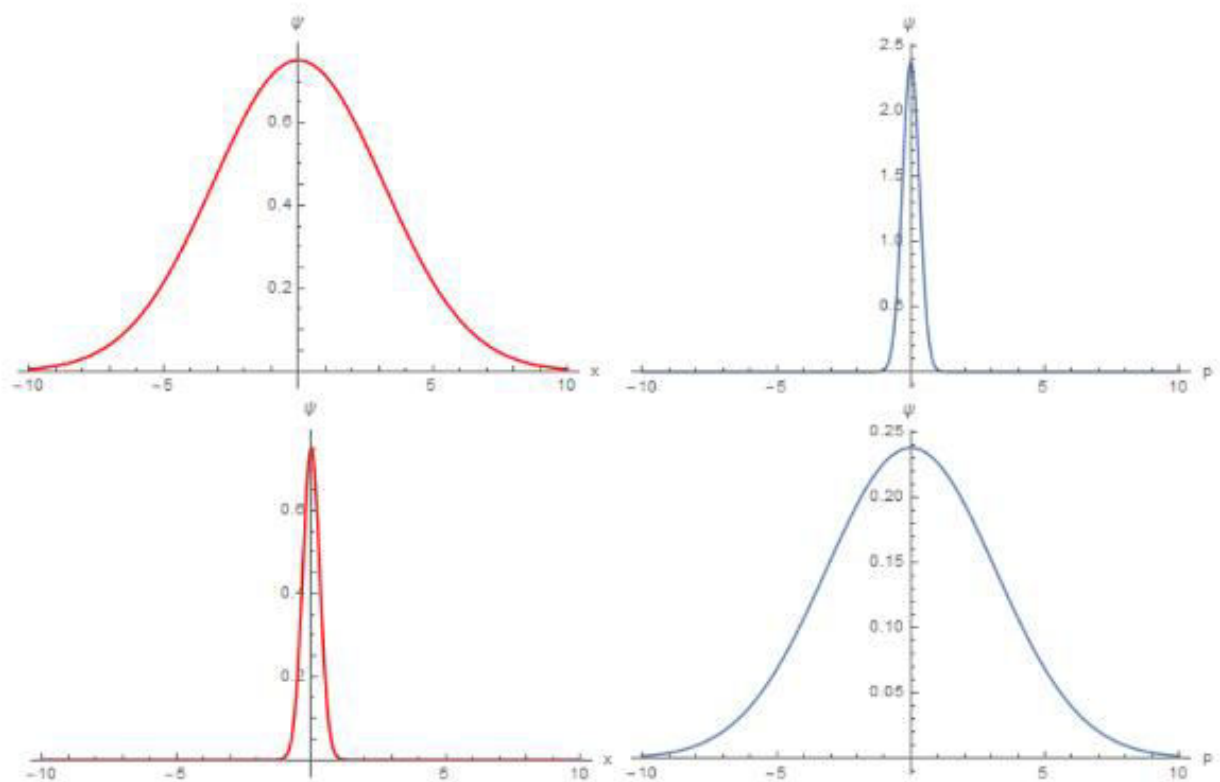
Heisenbergovo načelo nije ograničeno samo položajem i momentom već i svakim drugim parom komplementarnih observabli pa nije moguće istovremeno mjeriti dvije komplementarne varijable do na proizvoljnu točnost. Jedna od poznatijih i često korištenih relacija je i ona koja povezuje energiju i vrijeme:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{\hbar}{2} \quad (2.28)$$

Iz navedene relacije je očito da ako izvršimo dva mjerenja energije sustava u razmaku koji odgovara vremenskom intervalu  $\Delta t$  dva mjerenja će odstupati jedno od drugog za veličinu  $\Delta E$  koja ne može nikako biti manja od  $\frac{\hbar}{\Delta t}$ . Što je vremenski razmak veći, to će odstupanje u izmjerenim energijama biti manje. Ovo pravilo objašnjavamo činjenicom da je sustav ometan nakon prvog mjerenja i potrebno je vrijeme da se vrati u početno stanje kada perturbacije više nema.

Ovakva ovisnost između dvije komplementarne varijable se matematički objašnjava Fourierovom transformacijom. Općenito, kada Fourierovom transformacijom djelujemo na neku usku funkciju rezultat će biti široka funkcija i obrnuto. Širina dvije takve funkcije je u obrnuto proporcionalnom odnosu, kao što su obrnuto proporcionalne neodređenosti momenta i položaja. Slika 2.4 prikazuje kako su širine funkcija položaja i momenta povezane principom neodređenosti.



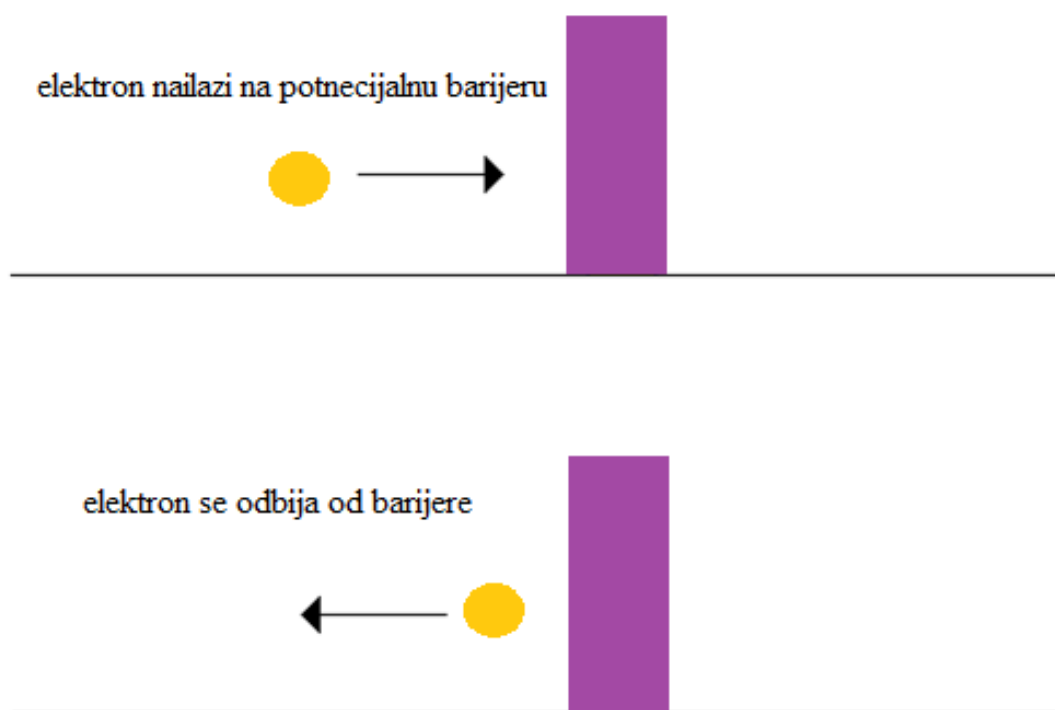


Slika 2.4: Širina funkcija položaja i momenta (preuzeto s <https://brilliant.org/wiki/heisenberg-uncertainty-principle/>)

Očigledno je da Heisenbergovo načelo objašnjava mnoge fenomene kvantne fizike koji se ne bi mogli objasniti u okviru klasične mehanike. Kvantna fizika je, za razliku od klasične, nedeterministička teorija u kojoj se komplementarne observable poput položaja i momenta mogu odrediti samo u okviru vjerojatnosti.

### 2.4.1 Heisenbergov princip i tuneliranje

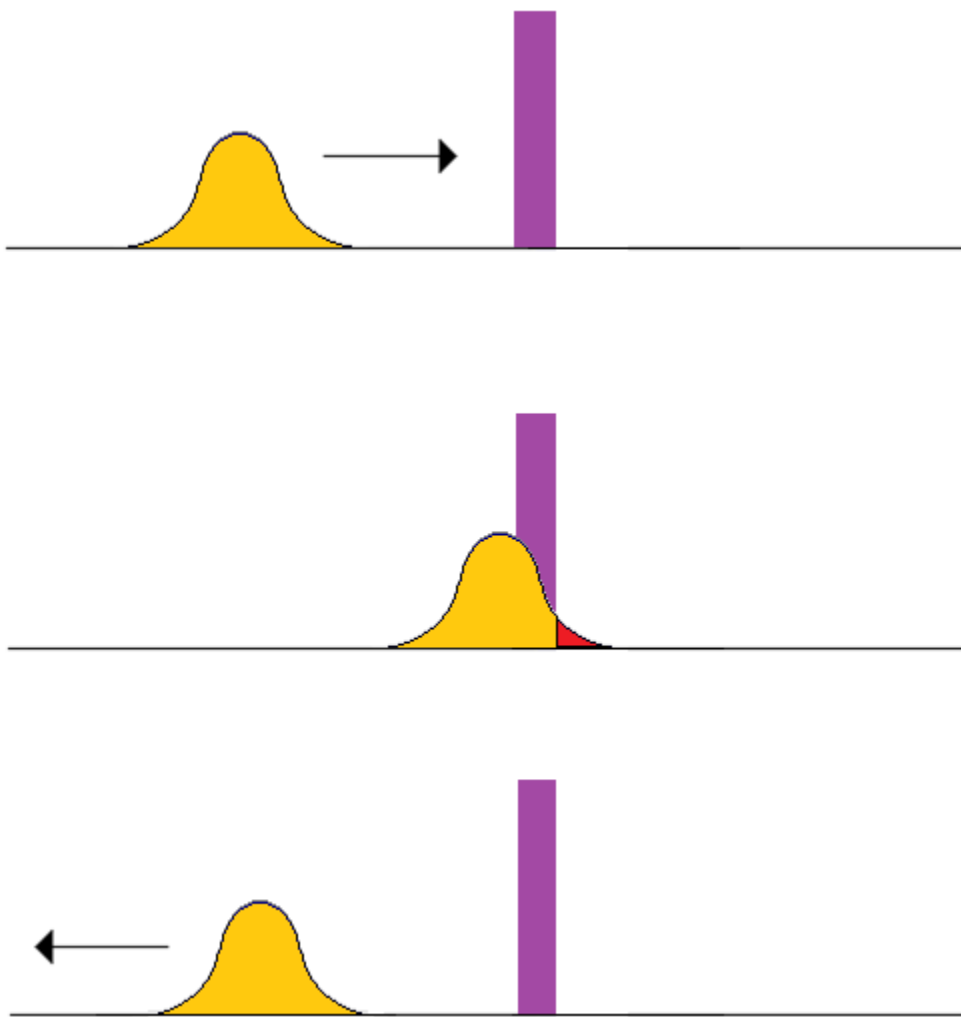
U klasičnoj fizici elektron promatramo kao materijalnu točku pa promatramo elektron koji dolazi do barijere, a potom se od nje odbija (Slika 2.5). Situacija je drugačija kada promatramo sa stajališta kvantne fizike.



Slika 2.5: Klasična fizika: elektron nailazi na barijeru

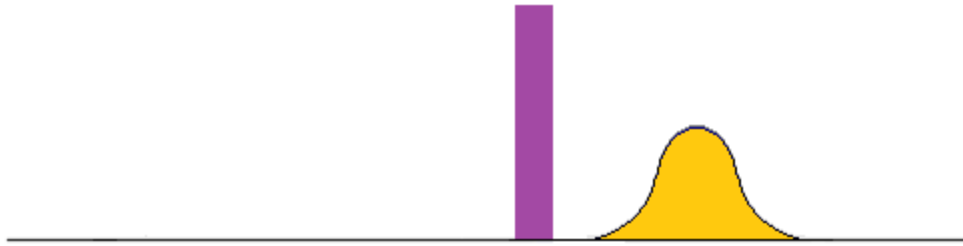
Elektron u kvantnoj fizici više ne promatramo kao materijalnu točku, nego kao val, te tada više ne govorimo o točnom položaju elektrona, već govorimo o vjerojatnosti da taj elektron nađemo u

određenom položaju. Elektron se kao val giba do barijere i postoji velika vjerojatnost da neće prijeći barijeru, međutim postoji i mala vjerojatnost da će je prijeći.



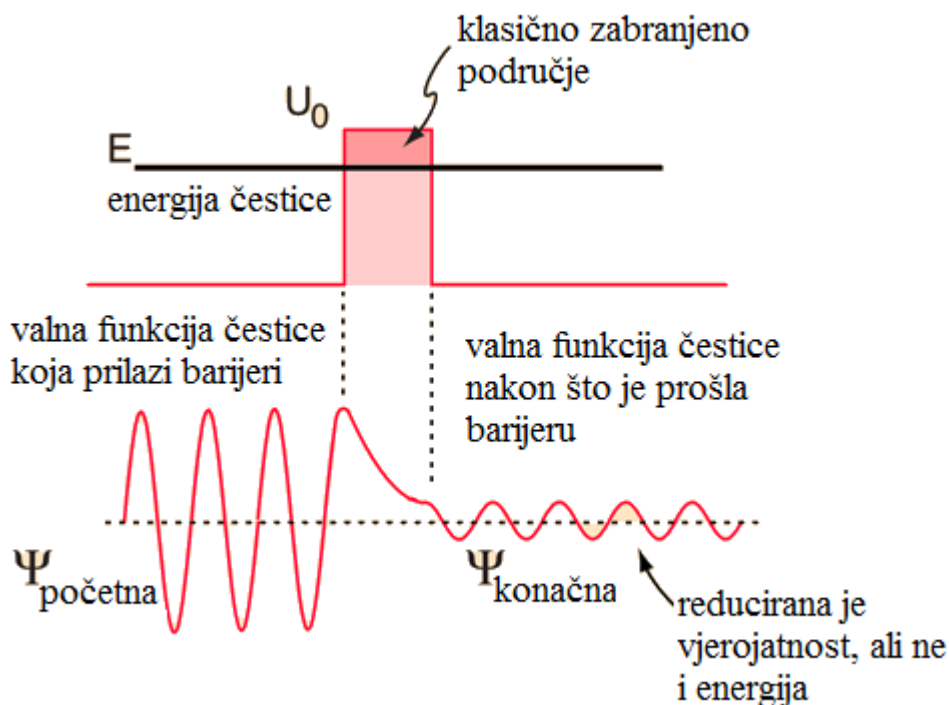
Slika 2.6: Kvantna fizika: elektron nailazi na barijeru

U većini slučajeva, elektron neće uspjeti prijeći barijeru, ali ponekad će doći do kvantnog tuneliranja i tada će elektron prijeći potencijalnu barijeru, tj. njegova valna funkcija neće iščeznuti s druge strane.



Slika 2.7: Kvantno tuneliranje

Slično se događa u nuklearnoj fuziji. Princip neodređenosti nam daje objašnjenje za to kako je moguće da je valna funkcija protona s energijom nižom od energije odbojne sile (potencijalna barijera), različita od nule unutar barijere i s druge strane barijere. S obzirom na to da Heisenbergov princip kaže da nije moguće istovremeno znati položaj i moment čestice do na proizvoljnu točnost, očito je da moment ne može biti jednak nuli jer bi tada znali i točan položaj i obrnuto, što narušava neodređenost. Ako je moment poznat, onda neodređenost položaja mora biti beskonačna. Zbog toga ne možemo reći da je vjerojatnost nalaženja protona na nekom položaju jednaka nuli, pa tako ta vjerojatnost ne iščezava niti unutar područja odbojne Coulombove sile na temperaturi na kojoj protoni nemaju dovoljnu energiju da nadvladaju taj potencijal i fuziraju. Ta vjerojatnost je svakako jako mala, zbog toga valna funkcija s druge strane barijere ima manju amplitudu (Slika 2.8).



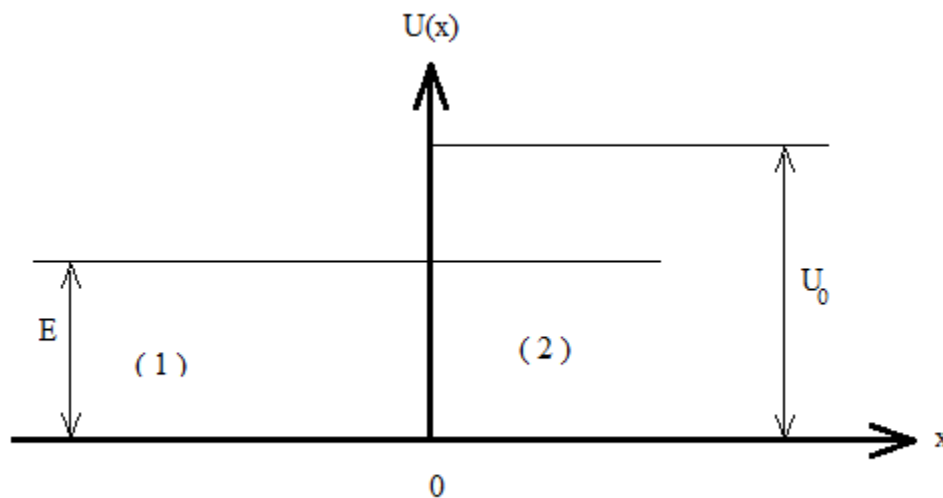
Slika 2.8: Ponašanje valne funkcije u potencijalnoj barijeri (preuzeto s: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/barr.html>)

Međutim, koliko god ta vjerojatnost bila mala, ona postoji. Stoga, što je veći broj protona koji se pokušavaju spojiti, veća je vjerojatnost da će doći do fuzije. Zvijezde poput Sunca, iako nemaju dovoljnu temperaturu na kojoj bi protoni imali dovoljnu energiju da prijeđu barijeru odbojne sile, imaju jako velik broj protona koji u tom procesu mogu sudjelovati pa se fuzija konstantno odvija i daje nam energiju jer je moguće narušiti pravilo da je potrebna veća energija od energije prepreke da bi se ona prešla. Ako pogledamo izraz neodređenosti energije i vremena, vidimo da je smanjenjem vremenskog intervala moguće upravljati energijom, ali, što više izbacujemo energiju iz ravnoteže, to nam je manji vremenski interval za to dan na raspolaganje. Recimo da čestica ima energiju  $E$ , tada za vrlo kratak period  $\Delta t$ , neodređenost energije je  $\Delta E$ , pa za dovoljno kratak interval  $\Delta t$ , energija čestice poraste za neodređenost u energiji i ima energiju danu sa  $E + \Delta E$ . Ovo znači da tijekom vrlo kratkog perioda čestica može imati energiju veću od energije prepreke.

### 3 KVANTNA FIZIKA FUZIJE

#### 3.1 Tunel-efekt u fuziji

Klasično gledano, bez dovoljno energije nije moguće prijeći određenu barijeru čija je energija veća od one kojom raspolaže promatrani objekt. Čestica ne može proći kroz barijeru u kojoj bi imala negativnu kinetičku energiju pa se ona nailaskom na barijeru odbija. Dakle, ukoliko je ukupna energija čestice ( $E$ ) manja od potencijalne energije barijere ( $U_0$ ), klasično, ta čestica ne može prodrijeti kroz potencijalnu barijeru, već će se vratiti u suprotnom smjeru. S druge strane, u kvantnoj mehanici, čestica može prijeći potencijalnu barijeru zahvaljujući svojoj dualnoj prirodi.



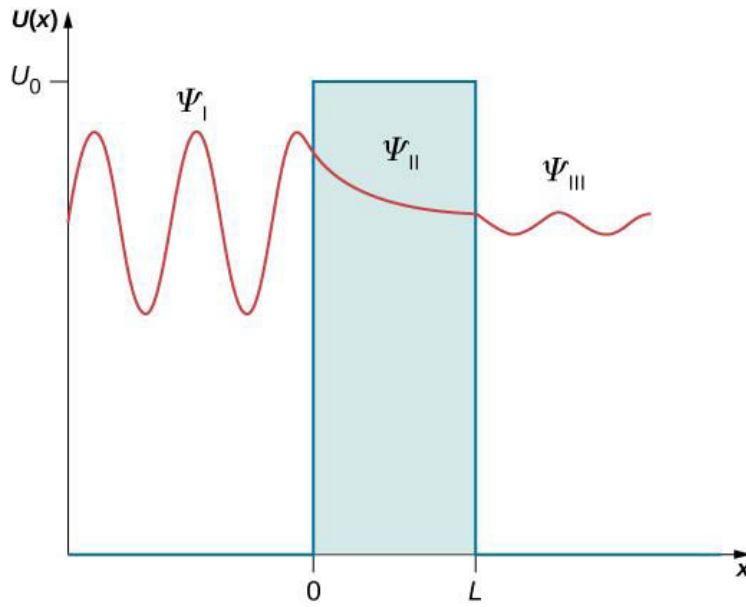
Slika 3.1: Energija čestice naspram potencijalne energije potencijalne barijere

U kvantnoj fizici, česticama je omogućen prolaz kroz područje koje je klasično zabranjeno zahvaljujući svojstvima valne funkcije čestice pa čestica može prijeći potencijalnu barijeru. Prije prolaska kroz barijeru valna funkcija čestice ima sinusni oblik, a kada čestica uđe u potencijalnu barijeru, njena valna funkcija počinje trnuti i kontinuirano prelazi u eksponencijalni oblik. Ono što se potom dogodi, nakon što valna funkcija izađe iz barijere, je ključno za proces fuzije. Naime, s druge strane prepreke, valna funkcija ne iščezava, već ponovno prelazi u sinusni oblik, ali manjeg intenziteta, što je i prikazano na slici (3.2). Rješenja Schrodingerove jednadžbe

$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = k^2 \psi$  za sva područja potencijalne barijere širine  $L$  su:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \Psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x}, & x \leq 0 \\ \Psi_2(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x}, & 0 < x < L \\ \Psi_3(x) = Ee^{ik_1x}, & x \geq L \end{cases} \quad (3.1)$$

Izgled ovih valnih funkcija po područjima potencijalne barijere je prikazan na slici 3.2. Bitno je napomenuti da sama čestica ne prolazi kroz barijeru. Ona može egzistirati samo s jedne ili s druge strane prepreke. Kroz barijeru prolazi samo valna funkcija, s tim da ona unutar potencijalne barijere eksponencijalno opada dok ne izađe iz nje. Nakon toga valna funkcija ponovno poprima isti oblik, ali uz manju amplitudu jer je u području iza potencijalne barijere smanjena mogućnost pronalaska čestice.



Slika 3.2: Valna funkcija čestice pri prolasku kroz potencijalnu barijeru (preuzeto s [https://phys.libretexts.org/TextBooks\\_and\\_TextMaps/University\\_Physics/Book%3A\\_University\\_Physics\\_\(OpenStax\)/Map%3A\\_University\\_Physics\\_III\\_-\\_Optics\\_and\\_Modern\\_Physics\\_\(OpenStax\)/7%3A\\_Quantum\\_Mechanics/7.6%3A\\_The\\_Quantum\\_Tunneling\\_of\\_Particles\\_through\\_Potential\\_Barriers](https://phys.libretexts.org/TextBooks_and_TextMaps/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_III_-_Optics_and_Modern_Physics_(OpenStax)/7%3A_Quantum_Mechanics/7.6%3A_The_Quantum_Tunneling_of_Particles_through_Potential_Barriers))

U izrazima za valnu funkciju (3.1) za valni broj  $k$  općenito vrijedi:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3.2)$$

Za naš slučaj čestice bez potencijalne energije relacija (3.2) postaje:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \quad (3.3)$$

Pa onda vrijedi:

$$k_1^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \quad (3.4)$$



Uz potencijal  $V_0$  izraz za valni broj je:

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{p}{\hbar} = \frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar} \quad (3.5)$$

Tako dobijemo izraz za  $k_2$ :

$$k_2^2 = \frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2} \quad (3.6)$$

Kako bi dobili sve koeficijente koristimo uvjet kontinuiranosti valne funkcije i njene derivacije u točkama  $x=L$  i  $x=0$ :

Za  $x=0$ :

$$\Psi_1(0) = \Psi_2(0) \quad (3.7)$$

$$Ae^0 + Be^0 = Ce^0 + De^0 \quad (3.8)$$

$$\Psi'_1(0) = \Psi'_2(0) \quad (3.9)$$

$$Aik_1e^0 - ik_1Be^0 = k_2Ce^0 - k_2De^0 \quad (3.10)$$

Za  $x=L$ :

$$\Psi_2(L) = \Psi_3(L) \quad (3.11)$$

$$Ce^{k_2L} + De^{-k_2L} = Ee^{ik_1L} \quad (3.12)$$

$$\Psi'_2(L) = \Psi'_3(L) \quad (3.13)$$

$$Ce^{k_2L} + De^{-k_2L} = Ee^{ik_1L} \quad (3.14)$$

Koristeći relacije od (3.7) do (3.14) dobijemo

$$A + B = C + D \quad (3.15)$$

$$ik_1(A - B) = k_2(C - D) \quad (3.16)$$

$$Ce^{k_2L} + De^{-k_2L} = Ee^{ik_1L} \quad (3.17)$$

$$k_2(Ce^{k_2a} - De^{-k_2a}) = ik_1 Ee^{ik_1a} \quad (3.18)$$

Iz relacija (3.17) i (3.18) proizlaze izrazi za C i D:

$$C = \frac{E}{2} \left(1 + i \frac{k_1}{k_2}\right) e^{(ik_1 - k_2)L} \quad (3.19)$$

$$D = \frac{E}{2} \left(1 - i \frac{k_1}{k_2}\right) e^{(ik_1 + k_2)L} \quad (3.20)$$

Daljnjim kombiniranjem relacija (3.15), (3.16), (3.19) i (3.20) dobiju se izrazi:

$$\frac{|B|^2}{|A|^2} = \frac{T}{4\varepsilon(1-\varepsilon)} \sinh^2(\lambda\sqrt{1-\varepsilon}) \quad (3.21)$$

$$\frac{|E|^2}{|A|^2} = \left[1 + \frac{1}{4\varepsilon(1-\varepsilon)} \sinh^2(\lambda\sqrt{1-\varepsilon})\right]^{-1} \quad (3.22)$$

Relacije (3.21) i (3.22) su izrazi za koeficijente refleksije i transmisije:

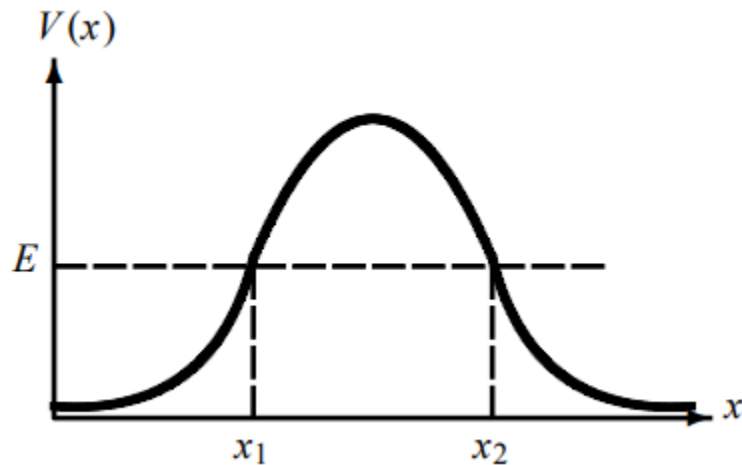
$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2} \quad (3.23)$$

$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} \quad (3.24)$$

Tu su se za  $\lambda$  i  $\varepsilon$  koristili izrazi  $\lambda = \sqrt{\frac{2mV_0}{\hbar^2}}$  i  $\varepsilon = \frac{E}{V_0}$ .

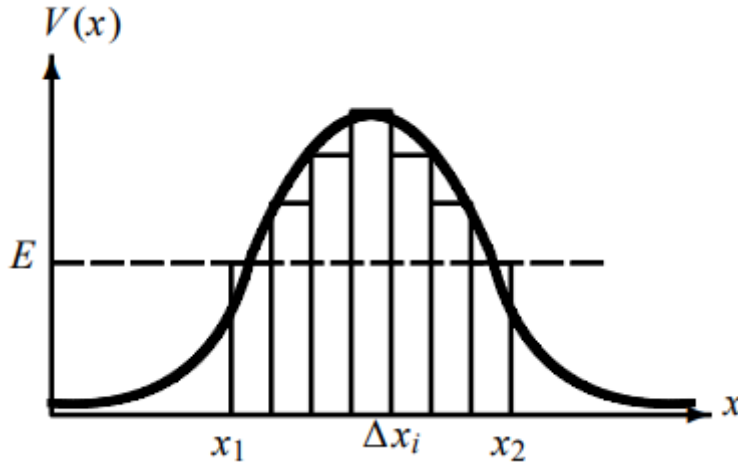
Za potencijal proizvoljnog oblika nije moguće koristiti isti izraz za koeficijent transmisije kao onaj koji je dobiven za slučaj jednostavnog kvadratnog potencijala. Sada je potrebno uvesti aproksimaciju koristeći WKB metodu. Wentzel-Kramers-Brillouinova metoda ili WKB metoda se koristi za aproksimiranje sustava u kojima potencijali sporo variraju u vremenu. Tu se radi o potencijalima koji su gotovo konstantni u području de Broglievih valnih duljina [3]. Valna duljina klasičnih sustava se približava nuli, stoga je uvjet sporo varirajućeg potencijala uvijek zadovoljen u klasičnim sustavima. Zbog toga se ova metoda smatra semiklasičnom aproksimacijom.

Na slici 3.3 je prikazano klasično zabranjeno područje čestice u potencijalu  $V > E$ . To je područje  $x_1 < x < x_2$ , a točke  $x_1$  i  $x_2$  se zovu točke okreta.



Slika 3.3: Klasično zabranjeno područje (Zettili, 2009)

Proizvoljni potencijal se aproksimira kvadratnim potencijalom tako da se klasično zabranjeno područje podijeli na dovoljno male intervale  $\Delta x_i$  (slika 3.4). Tada je moguće potencijale  $V(x_i)$  u svakoj točki područja aproksimirati kvadratnim potencijalom.



Slika 3.4: WKB aproksimacija za potencijalnu barijeru proizvoljnog oblika (Zettili, 2009)

Valna funkcija u području koje je klasično zabranjeno je dano relacijom:

$$\Psi_2(x) = \frac{c}{\sqrt{|p(x)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{x_1}^x |p(x')| dx'} \quad (3.25)$$

Koeficijent transmisije daje vjerojatnost da čestica prođe kroz barijeru:

$$T = \frac{v_{trans} |\psi_{trans}(x)|^2}{v_{inc} |\psi_{inc}(x)|^2} \quad (3.26)$$

Pritom su  $v_{trans}$  i  $v_{inc}$  brzine transmitirane i upadne čestice respektivno i one su jednake, pa se izraz (3.26) svodi na:

$$T = \frac{|\psi_{trans}(x)|^2}{|\psi_{inc}(x)|^2} \quad (3.27)$$

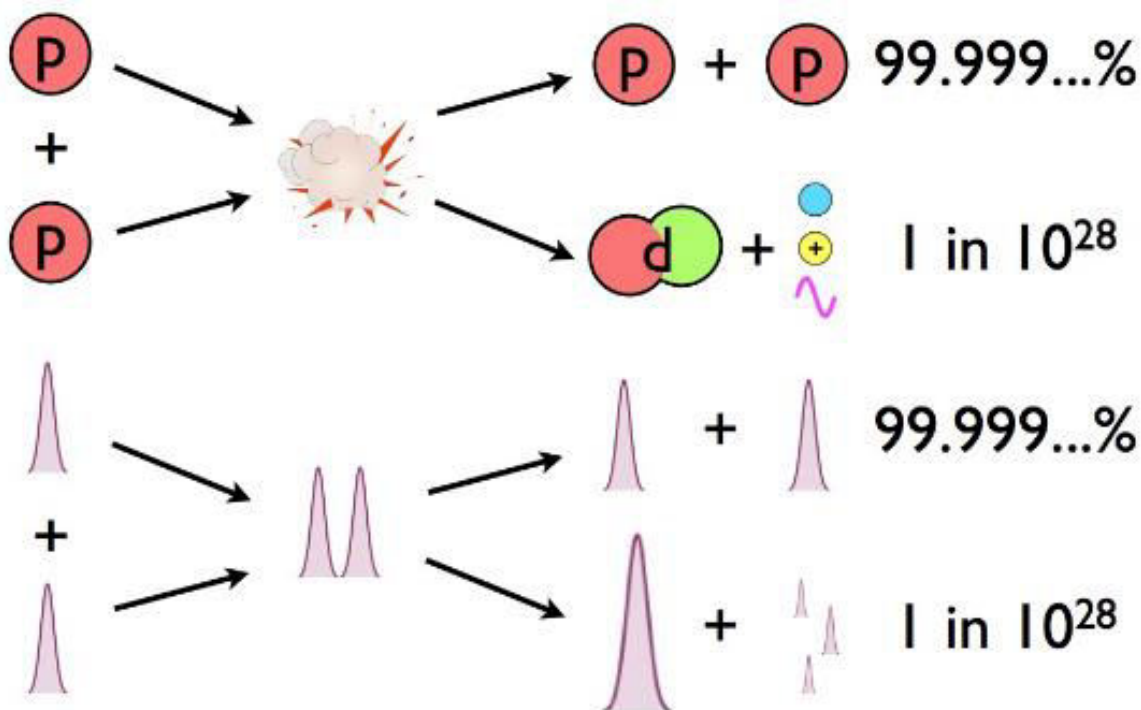
Koristeći postupak analogan onom kojeg smo koristili za dobivanje relacija (3.21) i (3.22), dobijemo aproksimativni izraz za koeficijent transmisije kroz potencijalnu barijeru:

$$T \sim \exp \left\{ \frac{-2}{\hbar} \int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m[V(x) - E]} \right\} \quad (3.28)$$

S obzirom na to da valna funkcija čestice s druge strane nije zanemariva, možemo govoriti o određenoj vjerojatnosti da se ona nađe i s druge strane potencijalne barijere, a ta vjerojatnost je veća što je širina prepreke manja. Ovaj fenomen (zahvaljujući kojem naše Sunce neprestano proizvodi energiju), se zove tunel efekt i nema analogiju u klasičnoj mehanici, već se radi o isključivo kvantnoj prirodi čestica. Primjer kvantnog tuneliranja koje se odvija u Suncu je fuzija dvije jezgre na temperaturi koja klasično ne bi omogućila fuziju, i to svake sekunde oko  $4 \cdot 10^{38}$  [14] protona tvori jezgre helija. U ovom slučaju čestice koje prelaze potencijalnu barijeru su protoni, a sama barijera je odbojna sila između dva protona, tzv. Coulombova sila. Tuneliranje je moguće zahvaljujući dualnoj prirodi čestica. S obzirom na to da protoni imaju i valnu, a ne samo čestičnu prirodu, njihov položaj u prostoru nije točno određen te se njihove valne funkcije mogu „preklopiti“ u prostoru. Tako jedan proton može proći kroz Coulombovu barijeru drugog protona čak i onda kada ima energiju nižu od energije barijere, odnosno od odbojne električne sile koja je toliko jaka da bi inače protone držala odvojeno. Vjerojatnost da se to dogodi je jako mala, otprilike  $1/10^{28}$ , ali i tako rijetka interakcija protona je dovoljna da se objasni odakle dolazi energija Sunca. U sljedećem potpoglavlju će biti detaljnije objašnjeno na koji se način odvija fuzija u zvijezdama.

### 3.2 Termonuklearne reakcije u zvijezdama

Kada se dva protona približe, najčešće će se ponovno razdvojiti, i to u čak 99.999...% slučajeva. Međutim, jako rijetko, samo jednom u  $10^{28}$  puta [14], će doći do fuzije dva protona. U tom se slučaju valne funkcije protona međusobno preklape kako je i prikazano na slici 3.5.

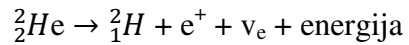
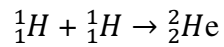


Slika 3.5: Odvijanje nuklearne fuzije u Suncu (preuzeto s:

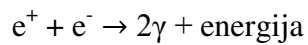
<https://www.forbes.com/sites/ethansiegel/2015/06/22/its-the-power-of-quantum-mechanics-that-allow-the-sun-to-shine/#87c5b0043f7e>)

Zvijezde veličine Sunca i manje proizvode helij iz vodika u procesu koji se zove proton-proton niz. Prvi korak je fuzija dva protona (slika 3.6), koju omogućuje kvantno tuneliranje. Produkt takvog spoja je obično helij-2, koji je jako nestabilan, pa se obično taj par ponovno rastavi, ali

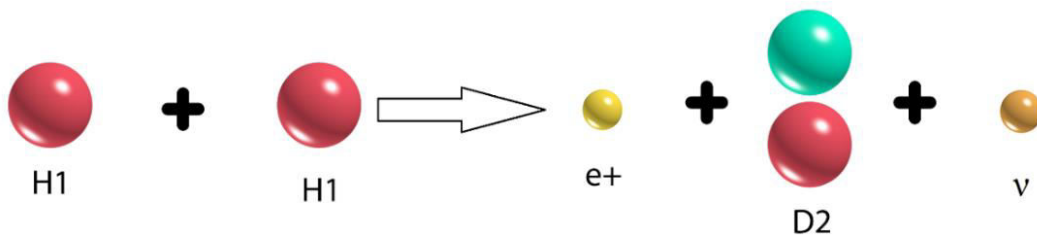
ponekad, iako rijetko, dogodi se da se proton transmudira u neutron čime nastaje proton-neutron, poznat kao deuterij. Tada dolazi do emisije pozitrona i neutrina.



Energija koja se pritom oslobađa je 0.42 MeV [15], a nastaje kao razlika u masi reaktanata i produkata. Kada pozitron nađe elektron, svoju antičesticu, par elektron-pozitron anihilira i nastaje gama zračenje jer se višak mase oslobodi kao dvije gama čestice:

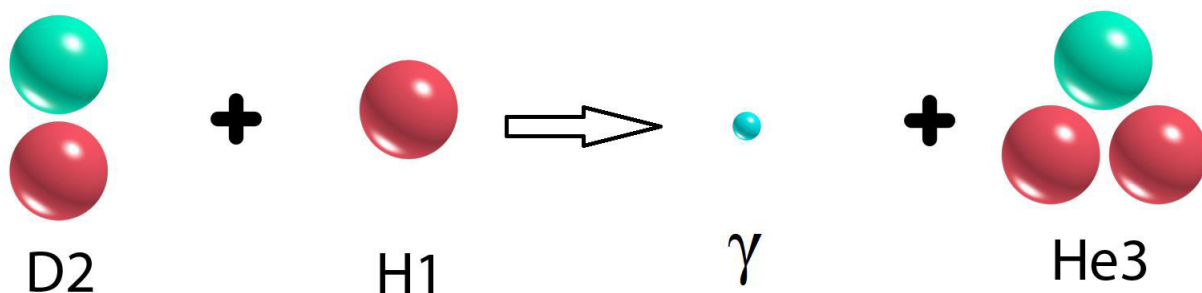
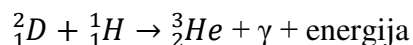


Energija koja ovom reakcijom nastaje je 1.02 MeV [15].



Slika 3.6: Fuzija dva protona

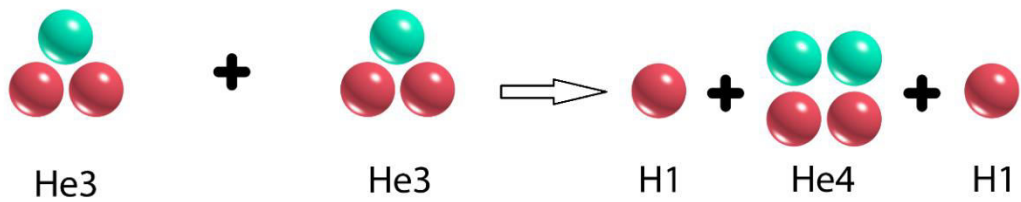
Zatim se drugi proton, tj. jezgra vodika, sudara s nastalim deuterijem pri čemu nastaje izotop helija,  ${}^3\text{He}$ , koji ima dva protona i jedan neutron (slika 3.7). Proces je ponovno popraćen oslobađanjem gama zračenja i energijom od 5.49 MeV [15] jer je zbroj masa deuterija i tricija veća od mase produkata:



Slika 3.7: Fuzija deuterija i protona

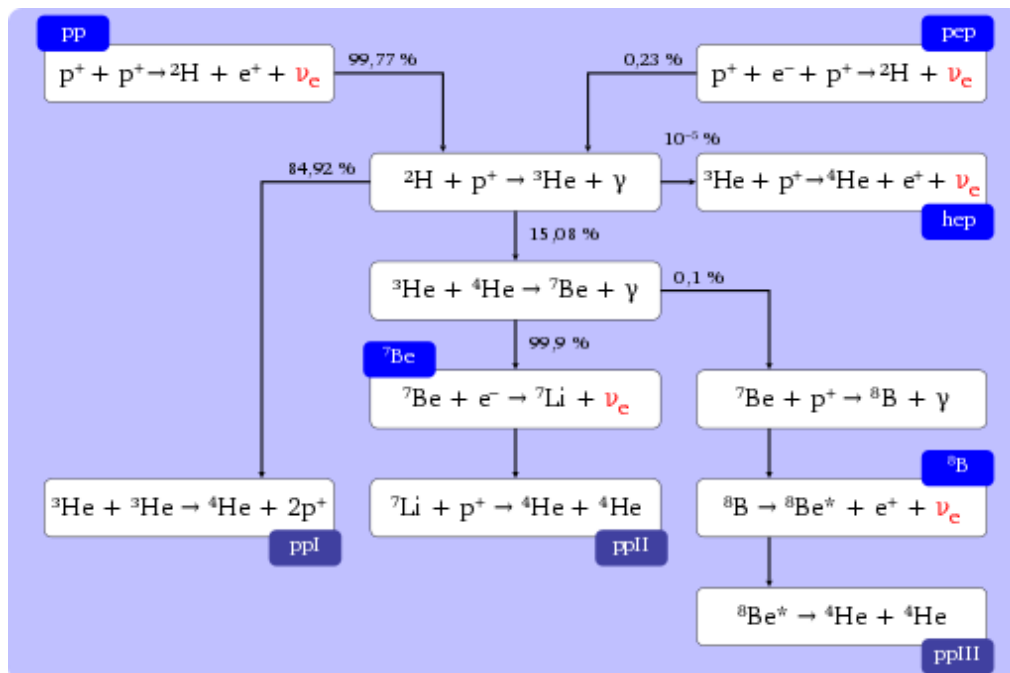
Sljedeći korak je dobivanje  ${}^4\text{He}$  uz oslobađanje energije, a postoje tri moguća načina da do toga dođe – p-p I, p-p II i p-p III niz. Kod p-p I niza dolazi do sudara dva  ${}^3\text{He}$ , pri čemu nastaju  ${}^4\text{He}$  i dva protona (slika 3.8). U p-p II i p-p III nizu helij-4 se dobije iz berilija. Vrlo malu vjerojatnost ima proces hep, u kojem se helij-4 dobije reakcijom helija i protona. Od navedenih, najveću vjerojatnost ima p-p I niz





Slika 3.8: Fuzija dva helija-3

Na slici 3.9 su prikazane navedene reakcije. Možemo vidjeti da osim putem proton-proton niza, deuterij je moguće dobiti i proton-elektron-proton reakcijom, ali vrlo rijetko.



Slika 3.9: Moguće reakcije fuzije u zvijezdama (preuzeto s [https://en.wikipedia.org/wiki/Proton%E2%80%93proton\\_chain\\_reaction](https://en.wikipedia.org/wiki/Proton%E2%80%93proton_chain_reaction))

## ZAKLJUČAK

U ovom radu sam pisala o tome kako u zvijezdama kao što je naše Sunce, ekstremne temperature razaraju atom na komponente - protone, elektrone i neutrone, uz stvaranje energije. S obzirom na to da su istog naboja, između dva protona postoji snažna odbojna sila, a energija koja je potrebna kako bi se ta sila prevladala je prevelika. U drugom poglavlju sam objasnila postulate kvantne fizike i pomoću principa kvantne mehanike vidjeli smo da je potencijalnu barijeru moguće prijeći, bez obzira na nedovoljnu energiju. Još se 1920-tih smatralo da Sunce nema dovoljnu temperaturu da se nadvlada odbojnu Coulombovu silu. Ipak, kao što je objašnjeno u radu, fuzija se u zvijezdama konstantno odvija, i to zahvaljujući kvantnoj fizici i njenom fenomenu – tuneliranju čestice kroz prepreku veće energije od one koju ima sama čestica. Dualna priroda omogućuje česticama da njihova valna funkcija ne iščezava s druge strane potencijalne barijere, a ako postoji valna funkcija postoji i vjerojatnost da se s te strane prepreke nalazi i čestica. Vjerojatnost da do toga dođe je jednaka onoj da dobijemo loto tri puta zaredom, ali ako se uzme u obzir ogroman broj čestica koje u zvijezdama sudjeluju u tom procesu, očito je da se on konstantno odvija. Iako se u velikoj većini slučajeva tuneliranje neće realizirati, taj malen postotak čestica koje će prijeći na drugu stranu je dovoljan da nastane energija. Zahvaljujući ovom fenomenu, poznatom kao tunel-efekt, naše Sunce konstantno stvara energiju nuklearnom fuzijom. Vidjeli smo i da nuklearne reakcije imaju ogroman potencijal kao izvor energije, a obzirom na projekt ITER koji će uskoro započeti s radom preostaje nam još samo da vidimo koliko su iste reakcije obećavajuće i iskoristive na Zemlji.

## LITERATURA

- [<sup>1</sup>] Flanagan M. (29.07.2010) What Happens at 150 Million Degrees. Pristupljeno 26. kolovoza 2018. URL: <http://neinuclearnotes.blogspot.com/2010/07/what-happens-at-150-million-degrees.html>
- [<sup>2</sup>] Poljak D., Sesnić S., Rubić A., Maze E. (2017). A note on the use of analytical and domain discretisation methods for the analysis of some phenomena in engineering physics. UDC 537.84:533.9]:519.63
- [<sup>3</sup>] Zetilli N. (2009). Quantum Mechanics Concepts and Applications. John-wiley, Chichester
- [<sup>4</sup>] Atkins P., Friedman R. (2005). Molecular Quantum Mechanics, fourth edition. Oxford University Press, New York
- [<sup>5</sup>] What is ITER. Pristupljeno 18. kolovoza 2018. URL: <https://www.iter.org/proj/inafewlines>
- [<sup>6</sup>] Making it work. Pristupljeno 18. kolovoza 2018. URL: <https://www.iter.org/sci/makingitwork>
- [<sup>7</sup>] What will ITER do? Pristupljeno 19. kolovoza 2018. URL: <https://www.iter.org/sci/Goals>
- [<sup>8</sup>] International tokamak research. Pristupljeno 02. rujna 2018. URL: <https://www.iter.org/sci/tkmresearch>
- [<sup>9</sup>] The tokamak complex. Pristupljeno 20. rujna 2018. URL: <https://www.iter.org/construction/tkmcomplex>
- [<sup>10</sup>] van Dommelen L., (2007). Fundamental Quantum Mechanics for Engineers.
- [<sup>11</sup>] Ellinor A., De Cross M., Dash S. Heisenberg Uncertainty Principle. Brilliant.org. Pristupljeno 05. rujna 2018. URL: <https://brilliant.org/wiki/heisenberg-uncertainty-principle/>
- [<sup>12</sup>] Barrier Penetration. Pristupljeno 15. kolovoza 2018. URL: <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/quantum/barr.html>

- [13] Urone P. P., Hinrich R. (25.01.2018) The Quantum Tunneling of Particles through Potential Barriers. Pristupljeno 11. kolovoza 2018. URL: [https://phys.libretexts.org/TextBooks\\_and\\_TextMaps/University\\_Physics/Book%3A\\_University\\_Physics\\_\(OpenStax\)/Map%3A\\_University\\_Physics\\_III\\_-\\_Optics\\_and\\_Modern\\_Physics\\_\(OpenStax\)/7%3A\\_Quantum\\_Mechanics/7.6%3A\\_The\\_Quantum\\_Tunneling\\_of\\_Particles\\_through\\_Potential\\_Barriers](https://phys.libretexts.org/TextBooks_and_TextMaps/University_Physics/Book%3A_University_Physics_(OpenStax)/Map%3A_University_Physics_III_-_Optics_and_Modern_Physics_(OpenStax)/7%3A_Quantum_Mechanics/7.6%3A_The_Quantum_Tunneling_of_Particles_through_Potential_Barriers)
- [14] Siegel E. (22.06.2015) It's The power of Quantum Mechanics That Alllows The Sun To Shine. Pristupljeno 20. rujna 2018. URL: <https://www.forbes.com/sites/ethansiegel/2015/06/22/its-the-power-of-quantum-mechanics-that-allow-the-sun-to-shine/#1332a31a43f7>
- [15] Proton-proton chain reaction (28.08.2018) Pristupljeno: 07. rujna 2018. URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Proton%E2%80%93proton\\_chain\\_reaction](https://en.wikipedia.org/wiki/Proton%E2%80%93proton_chain_reaction)
- [16] What is superposition? Pristupljeno 12. rujna 2018. URL: <http://www.physics.org/article-questions.asp?id=124>
- [17] Maron J. Nuclei and stellar fusion. Pristupljeno 20. rujna 2018. URL: <http://www.jaymaron.com/nuclear/nuclear1.copy2.html>
- [18] Quantum tunneling and the uncertainty principle. Pristupljeno 20. rujna 2018. URL: [https://www.physicsoftheuniverse.com/topics\\_quantum\\_uncertainty.html](https://www.physicsoftheuniverse.com/topics_quantum_uncertainty.html)