

# Generalizacija Apolonijeva problema

---

**Guberina, Antonija**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2018**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:773802>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-14**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ANTONIJA GUBERINA

**GENERALIZACIJA APOLONIJEVA  
PROBLEMA**

DIPLOMSKI RAD

Split, veljača 2018.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

# GENERALIZACIJA APOLONIJEVA PROBLEMA

DIPLOMSKI RAD

Studentica:  
Antonija Guberina

Mentor:  
prof. dr. sc. Nikola  
Koćić Bilan

Split, veljača 2018.

# Uvod

Apolonije iz Perge (ca. 262. pne. - 190. pne.) je grčki matematičar nazvan "veliki geometar". Studirao je u Aleksandriji, gdje je učio od Euklidovih sljedbenika, radio u Efezu i Pergamu. U svom glavnom djelu *Elementi konika* u 15 knjiga temeljito je obradio teoriju presjeka stošca i to čisto geometrijskim pristupom. Njegovi su rezultati bili toliko potpuni i detaljni da se današnja euklidska geometrija nije mnogo odmakla od njegovih spoznaja. Sačuvane su prve četiri knjige na grčkom, tri na arapskom prijevodu, dok su ostale izgubljene. Prvi je za konike upotrijebio nazive elipsa i hiperbola (naziv parabola je prvi upotrijebio Arhimed) i ustanovio da se sve tri vrste presjeka mogu dobiti presijecanjem stošca ravninom.

Uz Apolonija su vezani pojmovi kao Apolonijeva kružnica, Apolonijeva mreža i Apolonijev problem. Geometrijsko mjesto točaka za koje je omjer udaljenosti od dvije različite točke konstantan je kružnica čije središte leži na pravcu  $AB$  i prolazi točkama  $M$  i  $N$  na pravcu  $AB$  koje dijele dužinu  $\overline{AB}$  (iznutra i izvana) u danom omjeru. Kružnicu s tim svojstvom nazivamo Apolonijeva kružnica. U slučaju kada je omjer udaljenosti od dvije točke jednak 1, tada govorimo o simetrali dužine  $\overline{AB}$ .

U kombinatorici, Apolonijeva mreža je neusmjereni graf koji se dobije rekursivnim dijeljenjem trokuta na tri manja trokuta. Može se geometrijski realizirati i to na način da se započme s tri kružnice koje se međusobno do-

diruju, zatim upisati u prazninu koju čine još jednu koja dodiruje sve tri (Apolonijev problem), dalje se nastavlja rekurzivno za nove praznine koje kružnice čine.

Apolonijev problem je konstruktivni geometrijski zadatak što ga je prvi postavio i riješio Apolonije u djelu *Elementi konika*, a glasi:

*Konstruiraj sve kružnice u ravnini koje dodiruju tri zadane kružnice.*

Promatrajući uz kružnice još točke i pravce, Apolonijev problem možemo generalizirati na sljedeći način. Definirat ćemo Apolonijev problem reda  $n$ :

Neka je  $M = \{K_\infty, P_\infty, T_\infty\}$  multiskup koji se sastoji od tri različita elementa beskonačne kratnosti:  $K$  koji označava kružnicu,  $P$  pravac i  $T$  točku.

**Apolonijev problem reda  $n, n \in \mathbb{N}$** , je konstruktivna zadaća u kojoj se traži kružnica koja dodiruje  $n$  zadanih elemenata multiskupa  $M$ . Ukupan broj različitih problema za Apolonijev problem reda  $n$  jednak je broju kombinacija s ponavljanjem  $n - tog$  razreda multiskupa od 3 različita elementa  $\binom{3+n-1}{n}$ .

Za  $n = 1$  tražimo kružnicu koja dodiruje samo jedan od elemenata multiskupa  $M$ . Za ovaj red dobijemo tri različita problema ( $\binom{3+1-1}{1} = \binom{3}{1} = 3$ ) i to: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu"; "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac"; "Konstruiraj kružnicu koja prolazi zadanom točkom".

Za  $n = 2$  tražimo kružnicu koja dodiruje elemente određene kombinacijom s ponavljanjem reda 2 multiskupa  $M$  i to njih šest ( $\binom{3+2-1}{2} = \binom{4}{2} = 6$ ):  $(K, K), (P, P), (T, T), (K, P), (K, T), (P, T)$ . Npr. za kombinaciju  $(K, K)$  problem glasi: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje dvije zadane kružnice"; za kombinaciju  $(P, T)$  problem glasi: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac i prolazi zadanom točkom".

Za  $n = 3$  tražimo kružnicu koja dodiruje elemente određene kombina-

jom s ponavljanjem reda 3 multiskupa  $M$  i to njih deset ( $\binom{3+3-1}{3} = \binom{5}{3} = 10$ ):  
( $K, K, K$ ), ( $P, P, P$ ), ( $T, T, T$ ), ( $K, P, T$ ), ( $K, T, T$ ), ( $P, T, T$ ), ( $K, P, P$ ),  
( $P, K, K$ ), ( $P, P, T$ ), ( $T, K, K$ ). Npr. za kombinaciju ( $K, K, K$ ) imamo originalni Apolonijev problem: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje tri zadane kružnice"; za kombinaciju ( $K, T, P$ ) problem glasi: "Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu, zadani pravac i prolazi zadanom točkom".

Za  $n \geq 4$  problem je analogan prijašnjim slučajevima.

U ovom radu ćemo promatrati Apolonijev problem reda  $n = 1, 2, 3$  i pokazati zašto nije interesantno promatrati Apolonijeve probleme reda većeg od 3. Zadaće je moguće riješiti euklidskom konstrukcijom (koristeći ravnalo i šestar), što ćemo u ovom radu pokazati i to koristeći metodu inverzije.

Međutim, razmatranje ovih problema, napose određivanje središta rješenja uz korištenje metode geometrijskih mjesta točaka, donijet će nam vrlo zanimljive i vrijedne geometrijske rezultate i izvan konteksta konstruktivne geometrije. Pokazat će se da dobivena geometrijska mjesta središta rješenja većine Apolonijevih problema predstavljaju jednu koniku. Stoga se svaka konika može alternativno definirati kao geometrijsko mjesto središta kružnica koje su rješenje određenog Apolonijevog problema.

U svrhu lakšeg praćenja teksta i njemu odgovarajućih slika, zadani elementi će biti plave, geometrijsko mjesto središta kružnica odgovarajućeg Apolonijevog problema tamnozeleno, rješenje konstruktivne zadaje crveno, geometrijsko mjesto središta Apolonijevog reda nižeg od promatranog zeleno i pomoćni elementi crne boje.

# Sadržaj

Uvod	iii
Sadržaj	vi
<b>1 Metode konstruktivne geometrije</b>	<b>1</b>
1.1 Konstruktivna geometrija u matematici . . . . .	1
1.2 Inverzija . . . . .	3
<b>2 Apolonijevi problemi</b>	<b>13</b>
2.1 Apolonijev problem reda 1 . . . . .	13
2.2 Apolonijev problem reda 2 . . . . .	14
2.3 Apolonijev problem reda 3 . . . . .	23
2.4 Apolonijev problem reda $n \geq 4$ . . . . .	50
2.5 Daljnje generalizacije Apolonijeva problema . . . . .	51
<b>3 Zaključak</b>	<b>52</b>
Literatura	54

# Poglavlje 1

## Metode konstruktivne geometrije

### 1.1 Konstruktivna geometrija u matematici

Prije Euklida stari su Grci u geometriji koristili isključivo tehnike konstruktivne geometrije, pri čemu određene tvrdnje nisu dokazivali već su ih smatrali neupitno istinitima i iz tih istina izvodili ostale zaključke. Euklid je sva ta znanja sistematizirao i postavio geometriju deduktivno uzimajući te neupitne istine za aksiome pomoću kojih je potom dokazivao sve ostale tvrdnje. Definirajući geometriju ravnine aksiomatski, Euklid ju je apstrahirao i odvojio od klasičnog modela u kojem je početno bila realizirana.

Tako je konstruktivna geometrija postala tek jedna od mogućih realizacija klasičnog modela geometrije, a klasični model tek jedan od mogućih modela geometrije.

Označimo sa  $\pi$  ravninu u klasičnom modelu euklidske geometrije. Bilo koji podskup ravnine  $\pi$  nazivamo geometrijskom figurom ili kraće figurom ravnine  $\pi$ . Konstruirati neku figuru znači "nacrtati" tu figuru na crtaćoj plohi.



## Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije

Svaki problem u kojem se traži konstrukcija figure sa zadanim svojstvima nazivamo konstruktivnom zadaćom. Rješenjem konstruktivne zadaće smatramo svaku figuru koja ima tražena svojstva postavljena u toj konstruktivnoj zadaći. Pri rješavanju konstruktivnih zadaća koristimo se nekim standardnim metodama koje uspješno pomažu pri konstrukciji rješenja konstruktivnih zadaća određenog tipa. To su: metoda presjeka (geometrijskih mjesta točaka), metoda izometrija (osna simetrija, centralna simetrija, translacija, rotacija), metoda homotetije, metoda sličnosti, algebarska metoda i metoda inverzije.

Rješavanje nekih geometrijskih problema može biti poprilično mukotrpno, dok rješavajući isti problem koristeći neku od prethodno navedenih metoda možemo uvelike pojednostavniti postupak rješavanja.

**Primjer.** Konstruiraj trokut kojemu su zadane duljine  $t_a, t_b$  i  $t_c$  njegovih težišnica.

**Analiza:** Neka je  $T$  težište trokuta  $\triangle ABC$  i neka su  $P_1, P_2$  i  $P_3$  polovišta stranica  $\overline{AB}, \overline{BC}$  i  $\overline{CA}$  redom. Translatirajmo točku  $T$  za vektor  $\overrightarrow{AT}$ , tj. neka je  $T' = t_{AT}(T)$ . Budući da je  $|AT| = 2|TP_2|$  to je i  $|TT'| = 2|TP_2|$  pa se četverokutu  $TBT'C$  dijagonale raspolavljaju. Zaključujemo da je on paralelogram. Slijedi  $|CT'| = |TB| = \frac{2}{3}t_b$ ,  $|TT'| = \frac{2}{3}t_b$  i  $|CT| = \frac{2}{3}t_c$ . Trokut  $\triangle TT'C$  možemo konstruirati.

**Konstrukcija:** Zadane su duljine težišnica  $t_a, t_b$  i  $t_c$ .

1° Podijelimo dužine duljina  $t_a, t_b$  i  $t_c$  na tri jednaka dijela.

2° Konstrukcija trokuta  $\triangle TT'C$ .

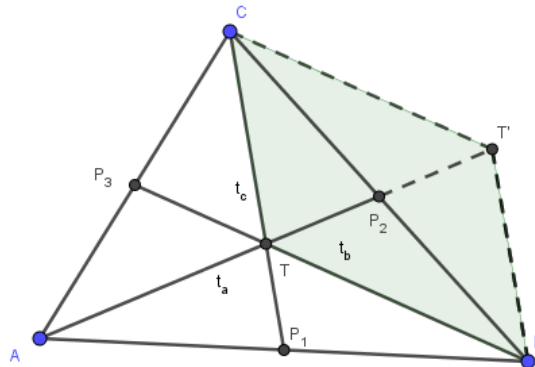
3° Konstrukcija paralelograma  $TBT'C$ .

4°  $A$  je centralno simetrična slika od  $T'$  s obzirom na  $T$

Trokut  $\triangle ABC$  je traženi trokut.

Na elegantan način smo riješili ovaj problem koristeći metodu translacije.

## Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije



Slika 1.1: Konstrukcija trokuta

Da smo problem rješavali koristeći alate trigonometrije, naišli bismo na nepotrebno dugi račun.

Konstruktivna geometrija nam pruža novi pogled na rješavanje problema, originalnost, logičko i stvaralačko mišljenje. Nije svrha samoj sebi, kao nešto lijepo nacrtati, već riješiti zadani zadatak. Često je konstruktivno rješenje i najelegantnije i ono obično daje putokaz za rješavanje i drugim tehnikama. U ovom radu se bavimo rješavanjem konstruktivnih zadataka metodom inverzije.

## 1.2 Inverzija

**Definicija 1.1** Neka je u ravnini  $\pi$  dana kružnica  $c=k(O,r)$  i neka je  $\pi^*$  ravnina  $\pi$  bez središta kružnice  $c$ . Preslikavanje  $i: \pi^* \rightarrow \pi^*$  naziva se inverzijom obzirom na kružnicu  $c$  ako vrijedi:

- (a) točke  $O$ ,  $T$  i njoj pridružena točka  $T'$  su kolinearne
- (b) točke  $T$  i  $T'$  su s iste strane točke  $O$
- (c)  $|OT| \cdot |OT'| = r^2$

**Uvodimo oznake:**  $c$  za kružnicu inverzije,  $O$  za središte ili pol inverzije,

**Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije**

$r$  za radijus inverzije,  $r^2$  za potenciju inverzije.

**Konstrukcija pridružene točke:**

Razlikujemo dva slučaja:

(a) Neka je  $T \in \pi^*$  izvan kružnice inverzije  $c$ :

1°  $c=k(O, r), r > 0$

2°  $\overline{OT}$

3°  $P$  polovište dužine  $\overline{OT}$

4°  $k = k(P, \frac{1}{2}|OT|)$

5°  $\{C, D\} = k \cap c$

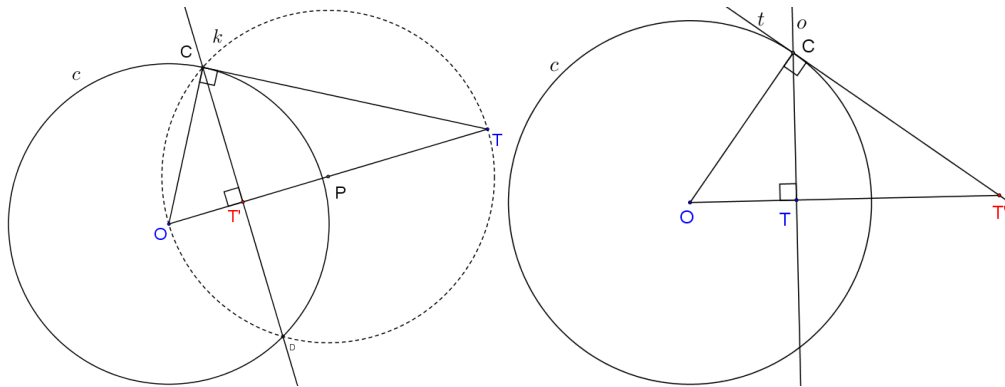
6°  $p = CD$

7°  $\{T'\} = p \cap OT$

**Dokaz.** Po poučku  $K - K$  o sličnosti trokuta vrijedi  $\triangle OTC \sim \triangle OT'C$

( $\angle CT'O = \angle OCT = 90^\circ$  te zajednički kut  $\angle TOC$ ). To povlači  $\frac{|OT|}{|OC|} = \frac{|OC|}{|OT'|}$ , iz

čega slijedi  $|OT| \cdot |OT'| = |OC|^2 = r^2$ . ■



(a) točka  $T$  izvan kružnice

(b) točka  $T$  unutar kružnice

Slika 1.2: Konstrukcija točke inverzije

(b) Neka je  $T \in \pi^*$  unutar kružnice inverzije  $c$ :

1°  $c=k(O, r), r > 0$

**Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije**

2°  $\overline{OT}$

3°  $o$  okomica kroz  $T$  na dužinu  $\overline{OT}$

4°  $C \in k \cap o$

5°  $t$  okomica kroz  $C$  na dužinu  $\overline{OC}$

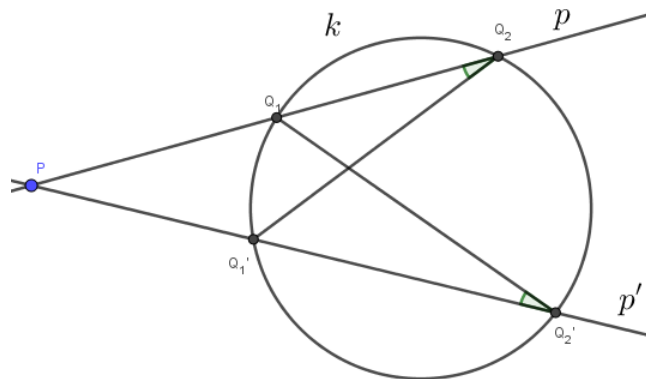
6°  $\{T'\} = t \cap OT$

**Dokaz.** Analogan slučaju (a). ■

**Propozicija 1.2** *Neka je  $k = k(S, r)$  kružnica i  $P \in \pi \setminus k$  točka. Neka je  $p$  proizvoljan pravac koji siječe kružnicu  $k$  u točkama  $Q_1$  i  $Q_2$  i prolazi kroz  $P$ . Tada umnožak  $|PQ_1| \cdot |PQ_2|$  ne ovisi o pravcu  $p$ .*

**Dokaz.** Razlikujemo više slučajeva:

a) Neka se  $P$  nalazi izvan kružnice i neka je  $p'$  pravac koji prolazi točkom  $P$  i siječe kružnicu  $k$  u točkama  $Q'_1$  i  $Q'_2$ .

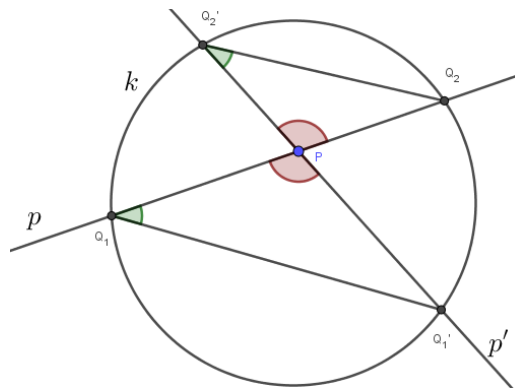


Slika 1.3: Slučaj a)

Budući da su kutovi  $\angle Q_1Q'_2P$  i  $\angle PQ_2Q'_1$  obodni kutovi nad istom tetivom  $\overline{Q_1Q'_1}$ , to vrijedi  $\angle PQ_2Q'_1 = \angle Q_1Q'_2P$ . Po poučku  $K - K$  o sličnosti slijedi  $\triangle PQ'_2Q_1 \sim \triangle PQ'_1Q_2$  (zajednički kut  $Q'_1PQ_1$ ) pa vrijedi  $\frac{|PQ'_2|}{|PQ_2|} = \frac{|PQ_1|}{|PQ'_1|}$ . Zaključujemo  $|PQ'_2| \cdot |PQ'_1| = |PQ_2| \cdot |PQ_1|$ .

## Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije

b) Neka se  $P$  nalazi unutar kružnice i neka je  $p'$  pravac koji prolazi točkom  $P$  i siječe kružnicu  $k$  u točkama  $Q'_1$  i  $Q'_2$ .



Slika 1.4: Slučaj b)

Budući da su kutovi  $\angle Q'_1Q_1P$  i  $\angle PQ'_2Q_2$  obodni kutovi nad istom tetivom  $\overline{Q'_1Q_2}$ , to vrijedi  $\angle PQ_2Q'_1 = \angle Q_1Q'_2P$ . Kutovi  $\angle Q_2PQ'_2$  i  $\angle Q_1PQ'_1$  su vršni pa su jednake veličine. Po poučku  $K - K$  o sličnosti slijedi  $\triangle PQ_2Q'_2 \sim \triangle PQ_1Q'_1$  pa vrijedi  $\frac{|PQ'_2|}{|PQ_2|} = \frac{|PQ_1|}{|PQ'_1|}$ . Zaključujemo  $|PQ'_2| \cdot |PQ'_1| = |PQ_2| \cdot |PQ_1|$ .

c) Neka se  $P$  nalazi izvan kružnice i neka vrijedi da je  $p$  tangenta kružnici  $k$  i da je  $p'$  pravac koji prolazi središtem kružnice  $k$ . Označimo dodirnu točku pravca  $p$  i  $k$  sa  $Q_1 (= Q_2)$ . Budući da je  $\angle PQ_1S = 90^\circ$ , to vrijedi Pitagorin poučak za  $\triangle PSQ_1$ :  $|PQ_1|^2 = |PS|^2 - r^2 = (|PS| - r)(|PS| + r) = |PQ'_1| \cdot |PQ'_2|$ . Ako promatramo proizvoljni pravac  $p''$  koji prolazi kroz  $P$  i siječe kružnicu u dvije točke, po 1° (promatrajući pravce  $p'$  i  $p''$ ), tvrdnja vrijedi. ■

Umnožak duljina odsječaka iz propozicije nazivamo **potencija točke P obzirom na kružnicu**.

**Svojstva inverzije:**

**Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije**

(1) **Svaka točka kružnice inverzije je fiksna.**

Slijedi iz definicije, tj. svojstava (a), (b) i (c).

(2) **Inverzija je involucija, odnosno vrijedi  $i \circ i = \mathbb{1}_{\pi^*}$  pa je stoga i bijekcija.**

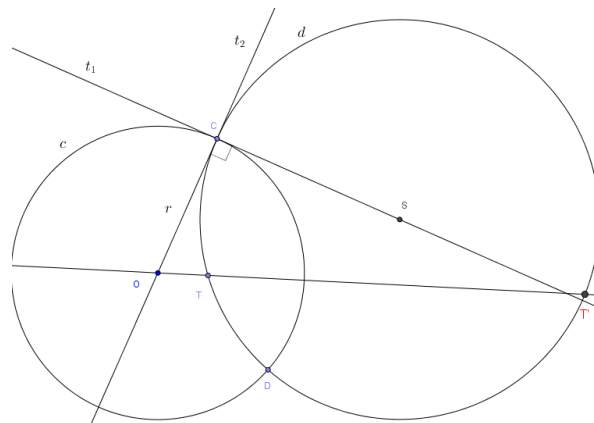
Slijedi iz same definicije inverzije, a i iz same konstrukcije inverznih točaka te svojstva (1).

(3) **Pravac koji prolazi polom inverzije (osim samog pola) preslikava se u samog sebe kao figura.**

Slijedi iz svojstva (a).

(4) **Kružnica koja je ortogonalna na kružnicu inverzije preslikava se u samu sebe kao figura.**

**Dokaz.** Neka je  $c = k(O, r)$  kružnica inverzije i kružnica  $d$  sa središtem u



Slika 1.5: Svojstvo inverzije (4)

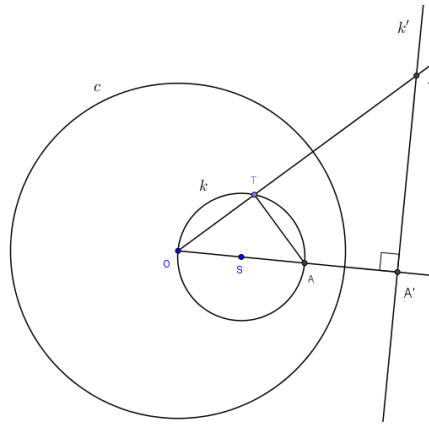
S njoj ortogonalna. Neka je  $T$  proizvoljna točka kružnice  $d$  te  $T' \in d \cap OT$ .

Svojstva (a) i (b) vrijede. Pokažimo za svojstvo (c): Po Propoziciji 1.2 slijedi

$|OC| \cdot |OC| = |OT| \cdot |OT'|$  pa je  $|OT| \cdot |OT'| = r^2$ . ■

Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije

(5) Svaka kružnica koja prolazi polom inverzije i ne siječe kružnicu inverzije preslikava se u pravac koji je paralelan tangenti te kružnice u polu i udaljen od  $O$  za  $\frac{r^2}{2p}$ , gdje je  $p$  polumjer kružnice  $k$ .



Slika 1.6: Svojstvo inverzije (5)

**Dokaz.** Neka je  $c = k(O, r)$  kružnica inverzije i  $k$  kružnica sa središtem u  $S$  koja prolazi polom inverzije i ne siječe  $c$ . Neka je  $A \in k \cap OS$  te  $A'$  njoj inverzna točka. Kroz  $A'$  povucimo okomicu  $k'$  na pravac  $OS$ . Pokažimo da vrijedi  $i(k) = k'$ :

Neka je  $T \in k \setminus \{O, A\}$  i  $T' \in k' \cap OT$ . Po poučku  $K - K$  o sličnosti trokuta vrijedi  $\triangle OAT \sim \triangle OA'T'$  ( $\angle OTA = \angle T'A'O = 90^\circ$  i zajednički kut  $\angle AOT$ ). Stoga je  $\frac{|OA|}{|OT|} = \frac{|OT'|}{|OA'|}$ , to povlači  $|OT'| \cdot |OT| = |OA'| \cdot |OA| = r^2$ . Dakle,  $T' = i(T)$ . Slijedi  $|OA'| = \frac{r^2}{|OA|} = \frac{r^2}{2p}$ . ■

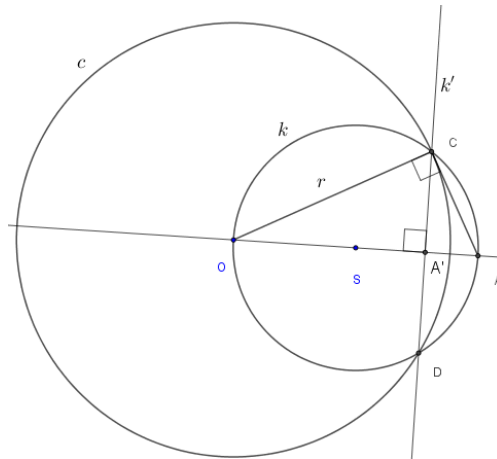
(6) Svaki pravac koji ne siječe kružnicu inverzije preslikava se u kružnicu koja prolazi polom inverzije.

Vrijedi po (5) jer je inverzija involucija.

Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije

(7) Svaka kružnica koja prolazi polom inverzije i siječe kružnicu inverzije preslikava se u pravac koji prolazi sjecištima.

**Dokaz.** Neka je  $c = k(O, r), r > 0$  kružnica inverzije i  $k$  kružnica koja ju



Slika 1.7: Svojstvo inverzije (7)

siječe u točkama  $C$  i  $D$ . Povucimo pravac  $OS$  i neka je  $\{O, A\} = k \cap OS$ . Budući da je  $S$  polovište dužine  $\overline{OA}$ , a  $k = (S, |OS|)$  po konstrukciji inverzne točke,  $CD \cap OA = \{A'\}$  je inverzna točka od  $A$ .

Budući da je  $\triangle DCO$  jednakokratan i  $|DA'| = |A'C|$ , to je  $\angle OA'D = \angle CA'O = 90^\circ (*)$ . Po K - K poučku o sličnosti trokuta slijedi  $\triangle OAC \sim \triangle OA'C$  ((\*) i zajednički kut  $\angle AOC$ ). To povlači  $\frac{|OC|}{|OA|} = \frac{|OA'|}{|OC|}$  pa je  $|OA| \cdot |OA'| = |OC| \cdot |OC| = r^2$ .

Neka je  $T \in k$  proizvoljna točka i  $\{T'\} = OT \cap CD$ . Lako se pokaže da je  $\triangle OTA \sim \triangle OT'A'$  pa vrijedi  $\frac{|OA|}{|OT|} = \frac{|OT'|}{|OA'|} = |OA| \cdot |OA'| = |OT| \cdot |OT'| = r^2$  iz čega slijedi  $T' = i(T)$ . ■

(8) Svaki pravac koji siječe kružnicu inverzije i ne prolazi polom preslikava se u kružnicu koja prolazi polom inverzije i sjecištima tog pravca s kružnicom inverzije.

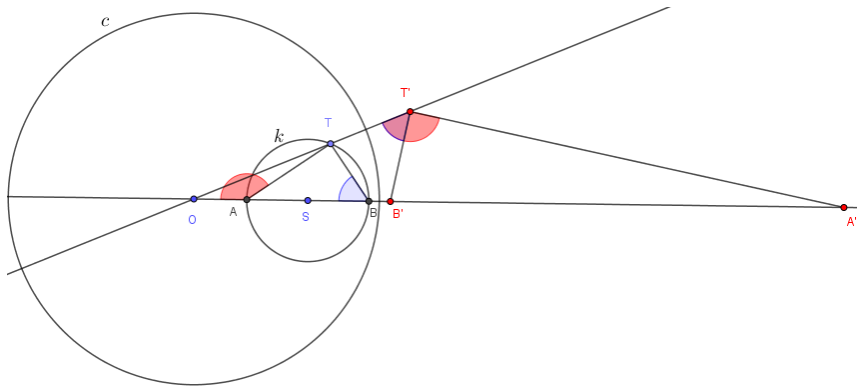


## Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije

Vrijedi zbog (7) jer je inverzija involucija.

(9) Svaka kružnica koja ne prolazi polom inverzije preslikava se opet u kružnicu.

**Dokaz.** Neka je  $c = k(O, r)$ ,  $r > 0$  kružnica inverzije,  $k$  kružnica sa središtem u  $S$  koja ne prolazi kroz  $O$ . Neka je  $\{A, B\} = OS \cap k$  te  $A' = i(A)$ ,  $B' = i(B)$  i  $T' = i(T)$ , za proizvoljan  $T \in k$ .



Slika 1.8: Svojstvo inverzije (9)

Pokažimo da je  $\angle B'T'A' = 90^\circ$ .

Iz  $|OT| \cdot |OT'| = |OA| \cdot |OA'| = r^2$ , slijedi  $\frac{|OT|}{|OA|} = \frac{|OA'|}{|OT'|} (*)$ . Po  $S - K - S$  poučku o sličnosti trokuta zaključujemo  $\triangle OTA \sim \triangle OA'T'$  ( $*$ ) i zajednički kut  $\angle AOT$ ) to povlači  $\angle TAO = \angle OT'A'$ . Analogno se pokaže da vrijedi  $\angle TBO = \angle OT'B'$ . Sada je  $\angle B'T'A' = \angle OT'A' - \angle OT'B' = (180^\circ - \angle BAT) - \angle TBO = \angle ATB = 90^\circ$ . Stoga  $T'$  leži na kružnici s promjerom  $\overline{B'A'}$ . Dakle,  $k$  se preslikava u kružnicu s promjerom  $\overline{B'A'}$ .

■

(10) Inverzija je konformno preslikavanje (čuva kut između krivulja).

**Dokaz.** Dovoljno je pokazati da inverzija čuva kut između pravaca. Razli-

## Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije

kujemo tri slučaja:

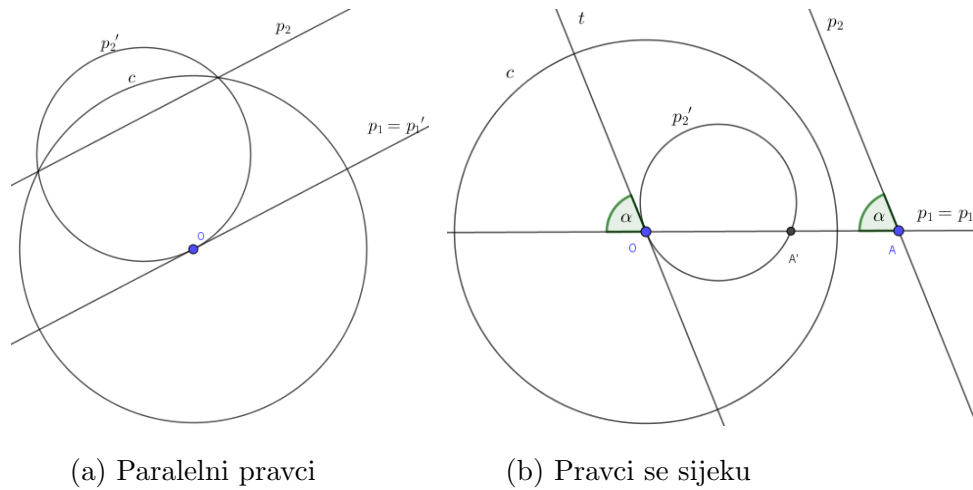
1. Pravci prolaze polom inverzije  $O$ .

Tvrdnja za ovaj slučaj slijedi po svojstvu (3).

2. Jedan pravac prolazi polom inverzije  $O$ , a drugi ne.

Neka je  $p_1$  pravac koji prolazi, a  $p_2$  pravac koji ne prolazi polom inverzije.

Neka su  $p'_1 = i(p_1)$  i  $p'_2 = i(p_2)$ . Po svojstvu (3) je  $p_1 = p'_1$  te , a  $p'_2$  je po svojstvu (8) (ili (6)) kružnica koja prolazi polom inverzije.



Slika 1.9: Slučaj 2

Razlikujemo dva podslučaja:

2a) Pravci  $p_1$  i  $p_2$  su paralelni. Tada je kut  $\angle(p_1, p_2) = 0^\circ$ . Budući da  $p'_2$  prolazi kroz  $O$ , po svojstvima inverzije (2) i (5) slijedi da je pravac  $i(p'_2) = p_2$  paralelan s tangentom kružnice  $p'_2$  koja prolazi kroz  $O$ , a time i s pravcem  $p_1$ . Sada iz  $p_1 = p'_1$  slijedi da je  $\angle(p'_1, p'_2) = 0^\circ$ .

2b) Pravci  $p_1$  i  $p_2$  se sijeku. Neka je  $A$  njihovo sjecište i neka je  $\angle(p_1, p_2) = \alpha$ . Po svojstvu (5),  $p_2$  je paralelan s tangentom  $t$  kružnice  $p'_2$  u točki  $O$ . Dakle,  $\angle(t, p_1) = \angle(p_1, p_2) = \alpha$ , odnosno  $\angle(p'_1, p'_2) = \alpha$ .

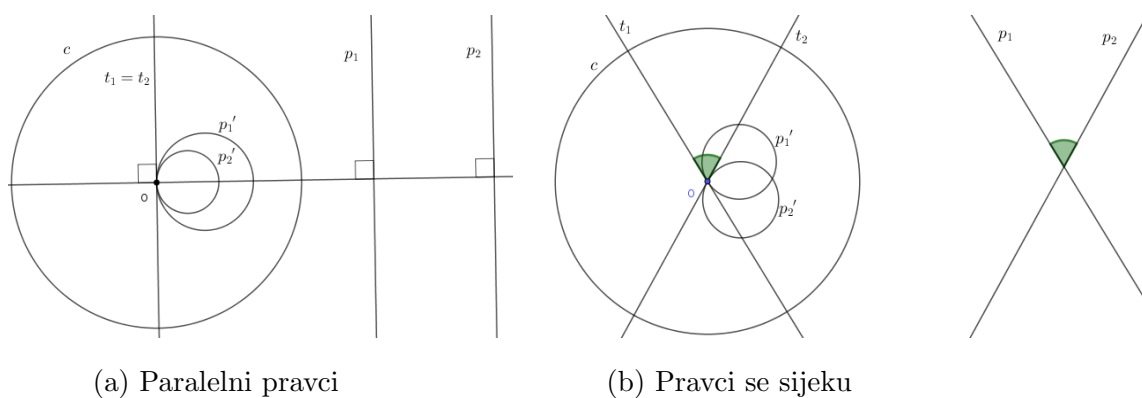
3. Niti jedan od pravaca ne prolazi centrom inverzije. I ovdje ralikujemo

## Poglavlje 1. Metode konstruktivne geometrije

dva podslučaja:

3a) Pravci su paralelni. U tom slučaju je tvrdnja trivijalna, jer je  $\angle(p_1, p_2) = \angle(t_1, t_2) = \angle(p'_1, p'_2) = 0^\circ$ , gdje su  $t_1$  i  $t_2$  tangente u točki  $O$  na kružnice  $p_1$  i  $p_2$  redom. Naime,  $t_1 \parallel p_1$  i  $t_2 \parallel p_2$  pa zbog  $p_1 \parallel p_2$  vrijedi  $t_1 \parallel t_2$ .

3b) Pravci se sijeku. Tada su  $p'_1$  i  $p'_2$  kružnice koje prolaze polom inverzije, a pravci  $p_1$  i  $p_2$  paralelni s tangentama  $t_1$  i  $t_2$  kružnica  $p'_1$  i  $p'_2$ , redom. Dakle,  $\angle(p_1, p_2) = \angle(t_1, t_2) = \angle(p'_1, p'_2)$ .



Slika 1.10: Slučaj 3

■

# Poglavlje 2

## Apolonijevi problemi

### 2.1 Apolonijev problem reda 1

U ovom odjeljku razmatramo probleme koji spadaju u Apolonijev problem reda 1. Za svaki problem ćemo odrediti geometrijsko mjesto središta svih rješenja.

**1. Konstruiraj kružnicu koja prolazi zadanom točkom i odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.**

Neka je  $A$  zadana točka te  $T \neq A$  proizvoljna točka ravnine  $\pi$ . Kružnica s traženim svojstvom je  $k = k(T, |AT|)$ . Budući da je  $T$  proizvoljna točka ravnine, kružnica s traženim svojstvom ima beskonačno mnogo, a geometrijsko mjesto središta tih kružnica je  $\pi \setminus \{A\}$ .

**2. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac i odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.**

Neka je  $p$  zadani pravac i  $T \notin p$ . Iz točke  $T$  spustimo okomicu  $o$  na  $p$  te sjecište tih pravaca označimo sa  $P$  ( $p \cap o = \{P\}$ ). Kružnica s traženim svojstvom je  $k = k(T, |PT|)$ . Budući da je  $T$  proizvoljna točka ravnine, kružnica

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

s traženim svojstvom ima beskonačno mnogo, a geometrijsko mjesto središta tih kružnica je  $\pi \setminus p$ .

### 3. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu i odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka je  $k = k(S, r)$ , gdje je  $r$  proizvoljan pozitivan realan broj, zadanu kružnicu te  $T$  proizvoljna točka ravnine  $\pi \setminus k$ . Neka je  $ST \cap k = \{T_1, T_2\}$ . Neka je  $T_1$  s iste strane točke  $S$  kao i  $T$ . Kružnica s traženim svojstvom je  $k_1 = k(T, |T_1T|)$ . Budući da je  $T$  proizvoljna točka ravnine, kružnica s traženim svojstvom ima beskonačno mnogo, a geometrijsko mjesto središta tih kružnica je  $\pi \setminus k$ .

## 2.2 Apolonijev problem reda 2

U ovom odjeljku razmatramo probleme koji spadaju u Apolonijev problem reda 2. Za svaki problem ćemo odrediti geometrijsko mjesto središta svih rješenja.

### 1. Konstruiraj kružnicu koja prolazi dvjema zadanim točkama i odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

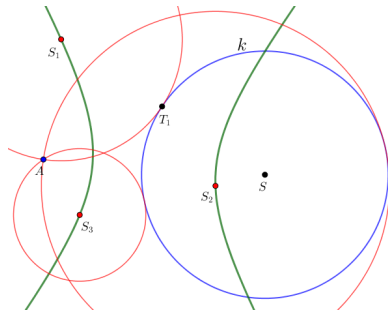
Neka su  $A$  i  $B$  zadane točke te  $A \neq B$ . Kako središte tražene kružnice treba biti jednako udaljeno od  $A$  i  $B$ , to središte leži na simetrali dužine  $\overline{AB}$ , iz čega slijedi da tih kružnica ima beskonačno mnogo. Neka je  $T$  proizvoljna točka simetrale dužine  $\overline{AB}$ . Tada je  $k(T, |TA|)$  kružnica s traženim svojstvom. Dakle, geometrijsko mjesto središta rješenja je simetrala dužine  $\overline{AB}$ . U slučaju kada je  $A = B$  zadatak se svodi na prvi slučaj Apolonijeva problema reda 1.

**2. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadanu kružnicu i prolazi zadanom točkom te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.**

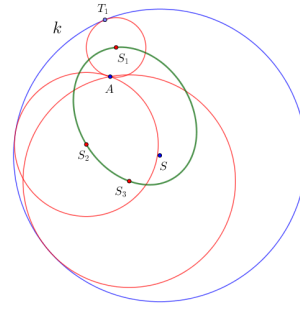
Neka je zadana točka  $A$  i kružnica  $k = k(S, r)$ , gdje je  $r$  proizvoljan pozitivan realan broj te neka se  $A$  nalazi izvan  $k$ . Neka je  $T_1 \in k$  proizvoljna točka. Neka je  $ST_1 \cap s = \{S_1\}$ , gdje je  $s$  simetrala dužine  $\overline{AT_1}$ . Tada je  $k_1 = k(S_1, |S_1T_1|)$  kružnica s traženim svojstvom. Budući da je  $T_1$  proizvoljna točka kružnice  $k$ , to takvih kružnica ima beskonačno mnogo i vrijedi  $\|S_1A\| - \|S_1S\| = \|S_1A\| - (\|S_1T_1\| + \|T_1S\|) = \|T_1S\| = r$ , za svaki  $T_1 \in k$  i  $S_1$  konstruiranu na prethodno opisani način. Taj zaključak nam govori da je geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom podskup hiperbole  $H(A, S, \frac{r}{2})$  sa žarištima  $A$  i  $S$  i realnom poluosi  $\frac{r}{2}$ :  $H = \{T \in \pi : \|AT\| - \|ST\| = r\}$ . Pokažimo drugu inkluziju, tj. neka je  $T \in H(A, S, \frac{r}{2})$ . Tada je  $r = \|TS\| - \|TA\|$ , odnosno  $r = \|TS\| - \|TA\|$  ili  $r = -\|TS\| + \|TA\|$  iz čega slijedi  $\|TS\| = \|TA\| + r$  ili  $\|TA\| = \|TS\| + r$ . U oba slučaja je  $k_1 = k(T, \|TA\|)$  kružnica s traženim svojstvom (u prvom slučaju dodiruje zadanu kružnicu izvana, a u drugom iznutra) pa vrijedi da je hiperbola  $H(A, S, \frac{r}{2})$  podskup geometrijskih mjesta središta rješenja.

U slučaju kada se  $A$  nalazi unutar kružnice  $k$  geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom je elipsa sa žarištima  $A$  i  $S$ ,  $E(A, S, \frac{r}{2})$ :  $E = \{T \in \pi : \|AT\| + \|ST\| = r\}$ . Naime, neka je  $T$  središte kružnice  $k_2 = k(T, r_1)$  s traženim svojstvom koja  $k$  dodiruje u  $P$ . Tada vrijedi  $r = \|PT\| + \|TS\| = \|AT\| + \|TS\|$  jer  $k_2$  prolazi kroz  $A$ . Dakle,  $T$  pripada elipsi  $E(A, S, \frac{r}{2})$ . Pokažimo i drugu inkluziju, tj. neka je  $T \in E(A, S, \frac{r}{2})$ . Tada je  $\|TA\| + \|TS\| = r$ . Kružnica  $k_1 = k(T, \|TA\|)$  je kružnica s traženim svojstvom pa je  $T$  središte tražene kružnice.

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



(a) Točka A je izvan kružnice k



(b) Točka A je unutar kružnice k

Slika 2.1: Konstrukcija kružnice koja dodiruje kružnicu k i prolazi točkom A

U slučaju kada vrijedi  $A \in k$ , geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom je pravac  $AS$  bez točke A.

Inverzijom možemo jednostavnije konstruirati rješenje na sljedeći način: Neka je  $c = k(A, \rho)$ , gdje je  $\rho$  proizvoljan pozitivan realan broj i  $k' = i(k)$ . Inverzna slika bilo koje tangente na  $k'$ , koja ne prolazi kroz A, je rješenje problema. Zaista, neka je  $t$  tangenta kružnice  $k'$  koja ne prolazi kroz A. Tada je kut koji zatvaraju  $t$  i  $k'$  jednak  $0^\circ$  i  $i(t) = t'$  kružnica koja prolazi polom inverzije A. Budući da je inverzija konformno preslikavanje i involucija, vrijedi  $\angle(t, k') = \angle(i(t), i(k')) = \angle(t', k)$ . U slučaju da je  $A \in k$  tražena rješenja su inverzne slike pravaca paralelnih s  $k' = i(k)$ .

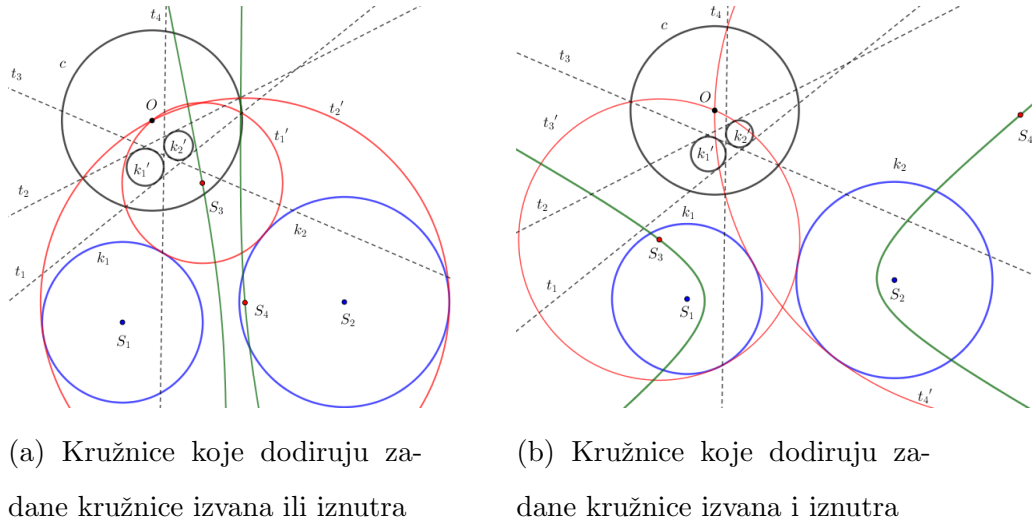
### 3. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje dvije zadane kružnice te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka su  $k_1 = k(S_1, r_1)$ ,  $k_2 = k(S_2, r_2)$ , gdje su  $r_1, r_2$  pozitivni realni brojevi, zadane kružnice te neka se ne sijeku i ne leže jedna unutar druge. Odaberimo proizvoljnu točku O izvan tih kružnica i označimo s  $c = k(O, \rho)$ , gdje je  $\rho$  pozitivan realan broj, kružnicu inverzije. Neka su  $k'_1$  i  $k'_2$  inverzne slike kružnica  $k_1$  i  $k_2$  redom te  $t_1, t_2, t_3$  i  $t_4$  zajedničke tangente kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$ .

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

Kružnice s traženim svojstvom su inverzne slike tih tangenti, označimo ih  $t'_1, t'_2, t'_3$  i  $t'_4$ . Neka  $t'_1$  dodiruje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  izvana,  $t'_2$  iznutra,  $t'_3$  i  $t'_4$  jednu od kružnica izvana, a drugu iznutra. Budući da je  $O$  proizvoljna točka izvan zadanih kružnica, zaključujemo da svakom točkom izvan  $k_1$  i  $k_2$  prolazi neko rješenje zadatice.

Središta kružnica  $t'_1$  i  $t'_2$  leže na hiperboli sa žarištima  $S_1$  i  $S_2$  i realnom poluosi  $\frac{|r_1-r_2|}{2}$ ,  $H(S_1, S_2, \frac{|r_1-r_2|}{2})$ :  $H = \{T \in \pi : ||TS_1| - |TS_2|| = |r_1 - r_2|\}$ . Naime, neka je  $T$  središte kružnice koja dodiruje zadane kružnice izvana (iznutra), radijusa  $r$ . Tada vrijedi  $||TS_1| - |TS_2|| = ||r + r_1| - |r + r_2|| = |r_1 - r_2|$  ( $||TS_1| - |TS_2|| = ||r - r_1| - |r - r_2|| = |-r_1 + r_2| = |r_1 - r_2|$ ), tj.  $T \in H = \{T \in \pi : ||TS_1| - |TS_2|| = |r_1 - r_2|\}$ . Lako se pokaže i druga inkluzija, tj. da je hiperbola  $H = \{T \in \pi : ||TS_1| - |TS_2|| = |r_1 - r_2|\}$  podskup geometrijskih mjesta središta rješenja.



Slika 2.2: Konstrukcija kružnice koja dodiruje dvije zadane kružnice

Središta kružnica  $k'_3$  i  $k'_4$  leže na hiperboli sa žarištima  $S_1$  i  $S_2$  i realnom poluosi  $\frac{r_1+r_2}{2}$ ,  $H(S_1, S_2, \frac{r_1+r_2}{2})$ . Naime, neka je  $T$  središte kružnice koja dodiruje



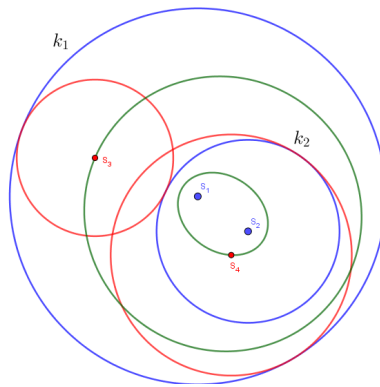
## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

zadane kružnice izvana (iznutra), radijusa  $r$ . Tada vrijedi  $||TS_1| - |TS_2|| = ||r - r_1| - |r + r_2|| = |-r_1 - r_2| = r_1 + r_2$  ( $||TS_1| - |TS_2|| = ||r + r_1| - |r - r_2|| = r_1 + r_2$ ), tj.  $T \in H(S_1, S_2, \frac{r_1+r_2}{2})$ . Lako se pokaže i druga inkluzija, tj. da je  $H(S_1, S_2, \frac{r_1+r_2}{2})$  podskup geometrijskih mjesta središta rješenja.

U slučaju kada se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  sijeku, tada njihove slike  $k'_1$  i  $k'_2$  imaju samo zajedničke vanjske tangente ( $t_1$  i  $t_2$ ).

Ako se  $k_1$  i  $k_2$  dodruju izvana, onda njihove slike  $k'_1$  i  $k'_2$  imaju jednu zajedničku unutarnju tangente ( $t_3$  ili  $t_4$ ) te zajedničke vanjske tangente ( $t_1$  i  $t_2$ ) pa tražene kružnice dodiruju  $k_1$  i  $k_2$  obje iznutra ili obje izvana.

Kada se jedna od zadanih kružnica nalazi unutar druge zadane kružnice (bez smanjenja općenitosti smijemo pretpostaviti da se  $k_2$  nalazi unutar  $k_1$ ), rješenja konstruiramo na analogan način samo što tada nema slučaja da tražena kružnica dodiruje  $k_1$  i  $k_2$  obje izvana i obje iznutra. Središta takvih kružnica nalaze se na elipsi sa žarištima  $S_1$  i  $S_2$  i to  $E(S_1, S_2, \frac{r_1+r_2}{2})$ , kada tražena kružnica dodiruje izvana  $k_2$ , i  $E(S_1, S_2, \frac{|r_2-r_1|}{2})$ , kada tražena kružnica dodiruje iznutra  $k_2$ .



Slika 2.3: Geometrijsko mjesto kružnica koje dodiruju zadane kružnice

Ako je  $r_1 = r_2$  i  $k_1 \neq k_2$ , geometrijsko mjesto središta rješenja je simetrala dužine  $\overline{S_1S_2}$ .

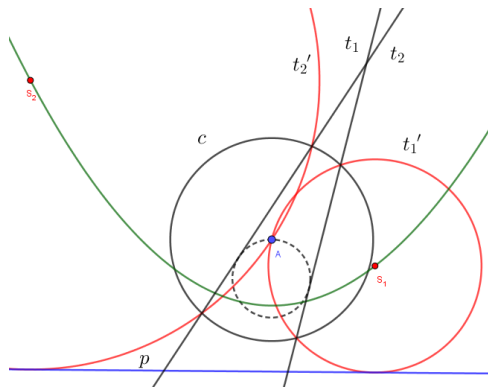
## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

Ako je  $k_1 = k_2$ , problem se svodi na 3. slučaj Apolonijeva problema reda 1.

### 4. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac i prolazi zadanom točkom te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka je  $p$  zadani pravac i  $A$  zadana točka te neka vrijedi  $A \notin p$ . Postoji beskonačno mnogo rješenja: Neka je  $c = k(A, \rho)$ , gdje je  $\rho$  proizvoljan pozitivan realan broj, kružnica inverzije. Inverzna slika pravca  $p' = i(p)$  je kružnica (po svojstvima inverzije (6) i (8)). Inverzna slika bilo koje tangente na  $p'$  koja ne prolazi polom  $A$  je kružnica s traženim svojstvom.

Središte tražene kružnice treba biti jednako udaljeno od  $A$  i od  $p$ , tj. središta leže na paraboli s ravnalicom  $p$  i žarištem  $A$ . Naime, vrijedi i druga inkluzija. Neka je  $T$  proizvoljna točka koja leži na paraboli s ravnalicom  $p$  i žarištem  $A$ . Tada je  $k(T, |TA|)$  kružnica s traženim svojstvom.



Slika 2.4: Konstrukcija kružnice koja dodiruje zadani pravac  $p$  i točku  $A$

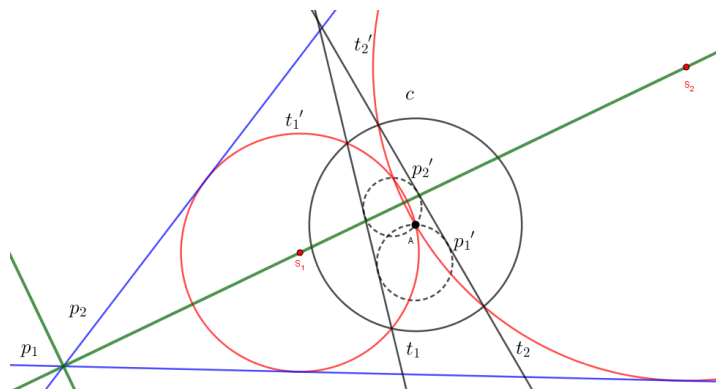
Dakle, tih kružnica ima beskonačno mnogo.

U slučaju kada vrijedi  $A \in p$ , geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom je okomica  $o$  na  $p$  kroz  $A$ , tj.  $o \setminus \{A\}$ .

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

### 5. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje dva zadana pravca te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

Neka su  $p_1$  i  $p_2$  zadani pravci te  $p_1 \neq p_2$  i  $p_1 \not\parallel p_2$ . Odaberimo proizvoljnu točku  $A$  koje ne pripada zadanim pravcima. Neka je  $c = k(A, \rho)$ , gdje je  $\rho > 0$  proizvoljan realan broj, kružnica inverzije te  $p'_1 = i(p_1)$  i  $p'_2 = i(p_2)$ . Budući da  $p_1$  i  $p_2$  ne prolaze polom inverzije  $A$ , to su njihove slike  $p'_1$  i  $p'_2$  kružnice. Neka su  $t_1$  i  $t_2$  zajedničke tangente kružnica  $p'_1$  i  $p'_2$ . Ima ih dvije jer se sijeku u dvije točke, prolaze kroz pol inverzije  $A$  i imaju još jednu zajedničku točku, a to je slika presječne točke pravaca  $p_1$  i  $p_2$ , pa imaju samo vanjske zajedničke tangente. Slike tangenata,  $t'_1 = i(t_1)$  i  $t'_2 = i(t_2)$ , su tražene kružnice. Budući da su zadani pravci tangente traženoj kružnici, njezino je središte jednako udaljeno od  $p_1$  i  $p_2$ , odnosno ono leži na simetrali kutova što ih tvore zadani pravci (bez presječne točke). Vrijedi i druga inkluzija: Neka je  $T$  točka koja leži na simetrali kutova što ih tvore zadani pravci, ali bez presječne točke. Tada je  $k(T, d(T, p_1))$  kružnica s traženim svojstvom.



Slika 2.5: Konstrukcija kružnice koja dodiruje zadane pravce  $p_1$  i  $p_2$

Dakle, geometrijsko mjesto središta rješenja su simetrale kutova što ih stvaraju zadani pravci bez njihovog presjeka,  $p_1 \cap p_2$ .

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

Ako vrijedi  $p_1 \parallel p_2$ , geometrijsko mjesto središta kružnica s traženim svojstvom je pravac paralelan s  $p_1(p_2)$  i od njega udaljen za  $\frac{d(p_1, p_2)}{2}$ .

Ako vrijedi  $p_1 = p_2$ , problem se svodi na 2. slučaj Apolonijeva problema reda 1.

### 6. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje zadani pravac i kružnicu te odredi geometrijsko mjesto središta kružnica sa zadanim svojstvom.

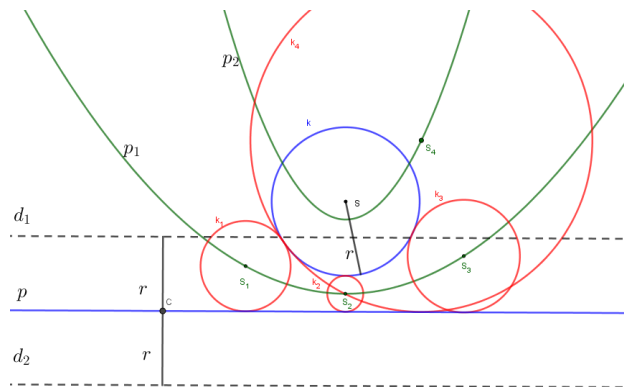
Neka je zadan pravac  $p$  i kružnica  $k = (S, r)$ . Odaberimo točku  $A \notin k, A \notin p$  koja se nalazi izvan  $k$  i neka je  $c = k(A, \rho)$  kružnica inverzije, gdje je  $\rho$  proizvoljan pozitivan realan broj. Neka su kružnice  $p' = i(p)$  i  $k' = i(k)$  inverzne slike zadanih objekata. Sa  $t_1, t_2, t_3$  i  $t_4$  označimo zajedničke tangente kružnica  $p'$  i  $k'$ . Inverzne slike tih tangenata  $t'_1 = i(t_1), t'_2 = i(t_2), t'_3 = i(t_3)$  i  $t'_4 = i(t_4)$  su kružnice s traženim svojstvom.

Ako je  $A \in k$ , onda je  $k' = i(k)$  pravac (po svojstvu (7) inverzije) i  $p' = i(p)$  kružnica. Tada su rješenja inverzne slike tangenata kružnice  $p'$  paralelnih s  $k'$ .

Ako je  $A \in p$ , onda je  $p' = p$  pravac (po svojstvu (3) inverzije) i  $k' =$  kružnica. Tada su rješenja inverzne slike tangenata kružnice  $k'$  paralelnih s  $p'$ .

Kroz svaku točku ravnine bez unutrašnjosti kružnice  $k$  prolazi neko rješenje. Tražena kružnica može dodirivati zadanu kružnicu izvana i iznutra. U slučaju kada tražene kružnice dodiruju kružnicu izvana njihova središta su jednako udaljena od zadane kružnice  $k$  i zadanog pravca  $p$ , tj.  $d(k, T) = d(p, T)$  za svako središte  $T$  rješenja problema. Definirajmo  $x := d(p, T)$ . Tada je  $d(S, T) - r = x = d(p, T)$ . Ako promatramo umjesto  $p$ , pravac  $d_2$  paralelan sa  $p$ , udaljen od  $p$  za  $r$  i sa suprotne strane pravca  $p$  od  $k$ , onda vrijedi  $d(S, T) = r + x = d(p, d_2) + d(p, T) = d(d_2, T)$ .

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.6: Geometrijsko mjesto središta kružnica koje dodiruju zadanu kružnicu i pravac

Dakle,  $T$  je točka jednako udaljena od pravca  $d_2$  i točke  $S$ , pa ona leži na paraboli  $p_1$  čija je ravnalica pravac  $d_2$  i žarište točka  $S$ . Lako se pokaže i druga inkluzija, tj. da je parabola čija je ravnalica pravac  $d_2$  i žarište točka  $S$  podskup središta rješenja.

U slučaju kada tražene kružnice dodiruju kružnicu iznutra njihova središta su za  $r$  više udaljena od  $S$  nego od  $p$ , odnosno vrijedi  $r + d(S, T) = x$ , tj.  $d(S, T) = x - r$ . Ako promatramo umjesto  $p$ , pravac  $d_1$  paralelan sa  $p$ , udaljen od  $p$  za  $r$  i sa iste strane pravca  $p$  kao i  $k$ , onda vrijedi  $d(S, T) = x - r = d(p, T) - r = d(d_1, T)$ . Dakle,  $T$  je točka jednako udaljena od pravca  $d_1$  i točke  $S$ , pa ona leži na paraboli  $p_2$  čija je ravnalica pravac  $d_1$  i žarište točka  $S$ . Lako se pokaže i druga inkluzija, tj. da je parabola  $p_2$  podskup geometrijskih mjesta središta rješenja.

Budući da jedna od tih mogućnosti vrijedi za svako središte tražene kružnice, to je geometrijsko mjesto središta rješenja problema unija tih parabola, odnosno  $p_1 \cup p_2$ .

## 2.3 Apolonijev problem reda 3

U ovom odjeljku ćemo razraditi Apolonijev problem reda 3. Ukupno ih ima deset i za svaki od njih ćemo prvo pokazati egzistenciju rješenja, koju dokazujemo preko postojanja rješenja Apolonijevog problema nižeg reda, a zatim najelegantniju konstrukciju tog rješenja i diskusiju o broju rješenja. U daljnjem tekstu, geometrijsko mjesto središta ćemo kraće označavati GMS.

### 1. Konstruirati kružnicu koja prolazi kroz tri zadane točke.

Neka su zadane točke  $A, B$  i  $C$  nekolinearne. Neka su pravci  $p_1, p_2$  i  $p_3$  GMS kružnica koje prolaze, redom, točkama  $A$  i  $B, B$  i  $C, C$  i  $A$ . Po rješenju Apolonijevog problema reda 2 kada se radi o dvije točke, znamo da su ti pravci simetrale dužina određene točkama kroz koje prolaze.

**Tvrđnja 1.** Ako rješenje postoji, tada se središte te kružnice nalazi u presjeku  $p_1 \cap p_2 \cap p_3$ .

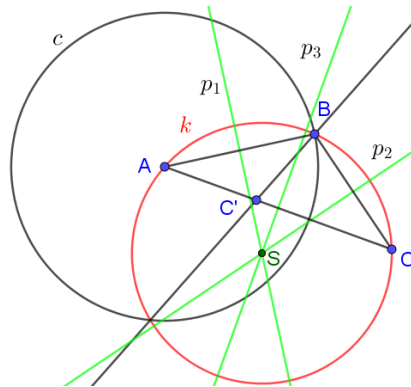
**Dokaz.** Neka postoji rješenje, tj. kružnica  $k = k(S, r)$  koja prolazi zadanim točkama  $A, B$  i  $C$ . Tada vrijedi  $|SA| = |SB|$ . To povlači  $S \in p_1$ . Analogno jednakost  $|SB| = |SC|$  povlači  $S \in p_2$  i  $|SA| = |SC|$  povlači  $S \in p_3$ . Dakle,  $S \in p_1 \cap p_2 \cap p_3$ . Tražena kružnica je  $k = k(S, |SA|)$  ■

Konstrukcija rješenja:

Sa  $c = k(A, |AB|)$  označimo kružnicu inverzije i  $C' = i(C)$ . Po svojstvu inverzije (8) i (2) tražena kružnica je inverzna slika pravca  $BC'$ ,  $k = i(BC')$ . Središte kružnice konstruiramo na način koji je objašnjen u prethodnom dokazu.

Time smo pokazali egzistenciju rješenja. Ako su  $A, B, C$  kolinearne točke, one ne mogu pripadati istoj kružnici (simetrale dužina su u tom slučaju paralelni pravci pa se ne sijeku). Ako se dvije točke podudaraju, onda se problem svodi na 1. opisani Apolonijev problem reda 2, a ako se podudaraju sve tri,

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.7: Konstrukcija kružnice kroz tri točke

tada na 1. opisani Apolonijev problem reda 1.

### 2. Konstruirati kružnicu koja dodiruje zadani pravac te prolazi dvjema zadanim točkama.

Neka su  $A$  i  $B$  zadane točke te  $p$  zadani pravac.

Ovisno o međusobnom položaju zadanih objekata razlikujemo više slučaja:

1° Neka  $p$  ne prolazi točkama  $A$  i  $B$ ,  $A \neq B$  i nalaze se s iste strane pravca  $p$ .

Iz rješenja Apolonijevih problema reda 2 znamo da je GMS kružnica koje prolaze kroz  $A$  i dodiruju pravac  $p$  parabola  $p_1$  s ravnalicom  $p$  i žarištem  $A$ , GMS kružnica koje prolaze kroz  $B$  i dodiruju pravac  $p$  parabola  $p_2$  s ravnalicom  $p$  i žarištem  $B$  i GMS kružnica koje prolaze točkama  $A$  i  $B$  simetrala  $s$  dužine  $\overline{AB}$ .

**Tvrdnja 2.** Ako rješenje postoji, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku  $p_1 \cap p_2 \cap s$ .

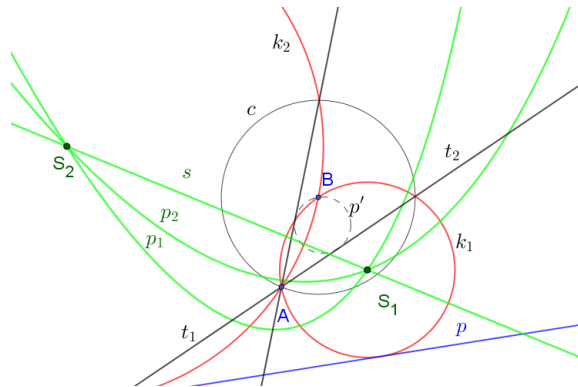
**Dokaz.** Neka je  $k = k(S, r)$  kružnica s traženim svojstvom. Tada ona dodiruje pravac  $p$  i prolazi točkom  $A$ , tj. vrijedi  $d(S, A) = d(p, A)$ , što povlači  $S \in p_1$ . Analogno se pokaže i  $S \in p_2$ . Budući da  $k$  prolazi točkama  $A$  i  $B$ , to

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

je  $S$  jednako udaljen od obje točke, odnosno  $d(A, S) = d(B, S)$  pa je  $S \in s$ . Dakle,  $S \in p_1 \cap p_2 \cap s$ . Tražena kružnica je  $k = k(S, |SA|)$ . ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja  $p_1, p_2$  i  $s$  imaju neprazan presjek.

Neka je  $c = k(B, |BA|)$  kružnica inverzije te  $p'$  inverzna slika pravca  $p$  tj.



Slika 2.8: Konstrukcije kružnice koja dodiruje pravac i prolazi dvjema točkama

$p' = i(p)$  te  $A' = i(A)$  i  $B' = i(B)$ . Tada je  $p'$  kružnica koja prolazi polom inverzije  $B$  (po svojstvu inverzije (6) i (8)). Povucimo tangente  $t_1$  i  $t_2$  iz točke  $A$  na  $p'$ . Kružnice s traženim svojstvom su  $k_1 = i(t_1)$  i  $k_2 = i(t_2)$ . Time smo pokazali egzistenciju rješenja, odnosno  $p_1 \cap p_2 \cap s \neq \emptyset$ .

Uočimo da rješenja ne mora biti dva, nego može biti i jedno i to u slučaju kada je  $AB \parallel p$  (jedna tangenta tada prolazi kroz pol inverzije  $B$  i tada je slika te tangente ponovno taj pravac ili, ako promatramo dokaz, simetrala dužine  $\overline{AB}$  je okomita na  $p$  i može sjeći parabole u samo jednoj točki).

2° U slučaju kada vrijedi  $A, B \in p$  i  $A \neq B$  rješenja nema. GMS kružnica koje dodiruju  $p$  i prolaze kroz  $A$  ( $B$ ) su pravci  $q_1(g_2)$ , okomice na  $p$  kroz  $A(B)$ . Tada su  $q_1, q_2$  i  $s$  različiti paralelni pravci (okomice na isti pravac  $p$ )



## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

pa nemaju presjek.

3° Neka je  $A \in p(B \in p)$ . Tada postoji jedno rješenje: Kada bismo provodili prethodno objašnjenu konstrukciju, kružnica  $p'$  prolazi kroz  $A$  i tada postoji samo jedna tangenta  $t$  u toj točki na  $p'$ , odnosno postoji jedna kružnica s traženim svojstvom  $k = i(t)$ .

4° Neka je  $A = B$ . Tada se problem svodi na 4. Apolonijev problem reda 2.

5° Neka se  $A$  i  $B$  nalaze s različitih strana pravca  $p$ . Za ovaj slučaj također vrijedi Tvrdnja 2. No, budući da se parabole  $p_1$  i  $p_2$  se ne očito ne sijeku, to rješenje ne postoji.

### 3. Konstruirati kružnicu koja prolazi dvjema zadanim točkama te dodiruje zadanu kružnicu.

Naka su zadane točke  $A$  i  $B$  i kružnica  $k = k(S, r)$ . Broj rješenja ovisi o međusobnom položaju zadanih objekata.

1° Neka su  $A$  i  $B$  izvan kružnice  $k$ . Neka je hiperbola  $h_1$  GMS kružnica koje dodiruju  $k$  i prolaze kroz  $A$ , hiperbola  $h_2$  GMS kružnica koje dodiruju  $k$  i prolaze kroz  $B$  te pravac  $p$  GMS kružnica koje prolaze točkama  $A$  i  $B$ .

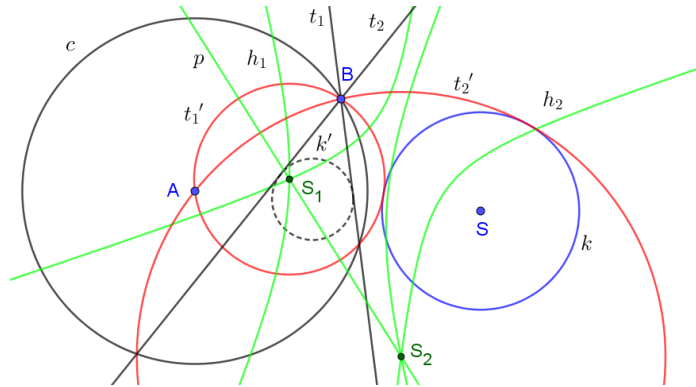
**Tvrdnja 3.** Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku  $h_1 \cap h_2 \cap p$ .

**Dokaz.** Neka postoji kružnica  $k_1 = k(S_1, r_1)$  s traženim svojstvom. Tada  $k_1$  prolazi kroz  $A$  i dodiruje  $k$ . Budući da  $k_1$  može  $k$  dodirivati izvana i iznutra, to slijedi  $d(S_1, A) = d(S_1, S) - r$  ili  $d(S_1, A) = d(S_1, S) + r$ . Slijedi  $|d(S_1, A) - d(S_1, S)| = r$  pa vrijedi  $S_1 \in h_1$ . Analogno se pokaže  $S_1 \in h_2$ . Nadalje,  $k_1$  prolazi kroz  $A$  i  $B$  pa vrijedi  $d(A, S_1) = d(B, S_1)$ , što povlači  $S_1 \in p$ . Dakle,  $S_1 \in h_1 \cap h_2 \cap p$  i  $r_1 = |S_1 A|$ . ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zada-

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

nih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja  $h_1, h_2$  i  $p$  imaju neprazan presjek.



Slika 2.9: Kružnica koja dodiruje kružnicu i prolazi dvjema točkama

Neka je  $c = k(A, |AB|)$  kružnica inverzije te  $k' = i(k)$  kružnica. Iz  $B$  povucimo tangente  $t_1$  i  $t_2$  na  $k'$ . Tražene kružnice su  $t_1' = i(t_1)$  i  $t_2' = i(t_2)$ . Time je pokazana egzistencija rješenja, odnosno  $h_1 \cap h_2 \cap p \neq \emptyset$ .

U ovom slučaju postoje dva rješenja i to kada se sijeku grane hiperbola na kojima leže GMS kružnica koje dodiruju kružnicu izvana i kada se sijeku grane hiperbola na kojima leže GMS kružnica koje dodiruju kružnicu iznutra.

2° Neka je  $A$  unutar, a  $B$  izvan kružnice  $k$ . Tada nema rješenja. Slično kao i pod 1° se pokaže da ako rješenje postoji, središte te kružnice se nalazi na presjeku  $h_2 \cap p \cap e$ , gdje je  $e$  elipsa (GMS kružnica koje prolaze kroz  $A$  i dodiruju  $k$ ). Sad pokažimo da je taj presjek prazan skup:

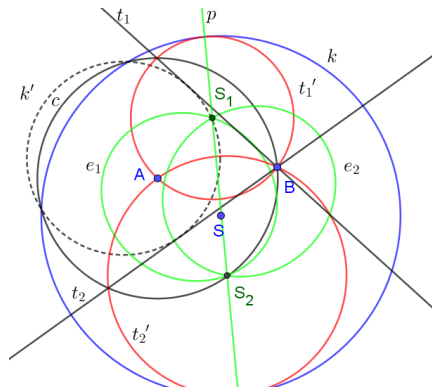
**Dokaz.** Pretpostavimo da postoji  $S_1 = h_1 \cap e \cap p$ . Tada vrijedi  $||AS_1| + |SS_1|| = r = ||BS_1| - |SS_1||, |AS_1| = |BS_1|$ . Slijedi  $|AS_1| + |SS_1| = |AS_1| - |SS_1|$  ili  $|AS_1| + |SS_1| = -|AS_1| + |SS_1|$ . Odnosno  $S = S_1$  ili  $A = S_1$ , što nas dovodi do kontradikcije. ■

3° Neka se obje točke nalaze na kružnici  $k$ . Tada je tražena kružnica zadana

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

kružnica  $k$ . Naime, GMS kružnica koje dodiruju  $k$  i prolaze kroz  $A(B)$  je  $AS \setminus A(BS \setminus B)$ , a GMS kružnica koje prolaze točkama  $A$  i  $B$  je simetrala dužine  $\overline{AB}$ . Budući da simetrala tetive kružnice prolazi njezinim središtem, to je presjek ta tri GMS točka  $S$ , a radijus tražene kružnice je  $|SA|$ .

4° Neka se točke  $A$  i  $B$  nalaze unutar kružnice  $k$ . Analognom konstrukcijom kao i pod 1° se pokaže da postoje 2 rješenja. U dokazu se kao GMS javljaju dvije elipse, a ne dvije hiperbole i simetrala  $p$ .



Slika 2.10: Kružnica koja dodiruje kružnicu i prolazi dvjema točkama

5° Neka se jedna od točaka nalazi na  $k$ , a druga izvan  $k$ . Analognom konstrukcijom kao i pod 1° se pokaže da postoji 1 rješenje. Naime, tangentu povlačimo iz točke na kružnici, pa postoji samo jedna takva tangenta, te je njezina inverzna slika tražena kružnica.

6° Neka se jedna od točaka nalazi na  $k$  a druga unutar  $k$ . Tada postoji jedno rješenje. Konstrukcija rješenja analogna slučaju 5°.

7° Ako vrijedi  $A = B$ , onda se problem svodi na 2. Apolonijev problem reda 2.

**4. Konstruirati kružnicu koja prolazi zadanom točkom te dodiruje dva zadana pravca.**

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

Neka je zadana točka  $A$  i pravci  $p_1$  i  $p_2$ . Ovisno o međusobnom položaju pravaca i točke razlikujemo više slučajeva:

1° Neka vrijedi  $p_1 \nparallel p_2$  i  $A$  ne pripada pravcima  $p_1$  i  $p_2$ . Označimo sa  $T$  presjek pravca  $p_1$  i  $p_2$  i sa  $s_1, s_2$  simetrale kutova što ih zatvaraju  $p_1$  i  $p_2$ . Neka je  $(s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$  GMS kružnica koje dodiruju  $p_1$  i  $p_2$ , parabola  $q_1$  GMS kružnica koje dodiruju  $p_1$  i prolaze kroz  $A$  i parabola  $q_2$  GMS kružnica koje dodiruju pravac  $p_2$  i prolaze točkom  $A$ .

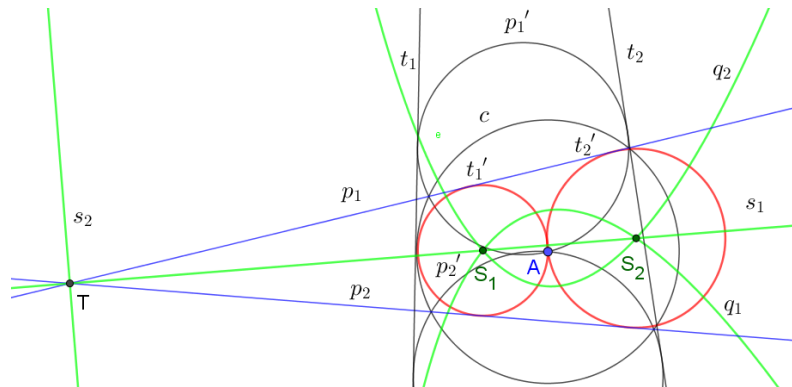
**Tvrđnja 4.** Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku  $((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \cap q_1 \cap q_2$ .

**Dokaz.** Neka postoji kružnica  $k = k(S, r)$ ,  $r > 0$  s traženim svojstvom. Budući da  $k$  dodiruje  $p_1$  i  $p_2$ , to povlači  $d(S, p_1) = d(S, p_2)$  pa je  $S \in (s_1 \cup s_2)$ . Budući da je  $r > 0$ , to slijedi  $S \neq T (\in s_1 \cup s_2)$ . Zaključujemo da vrijedi  $S \in (s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$ . Nadalje,  $k$  dodiruje pravac  $p_1$  i prolazi točkom  $A$  pa vrijedi  $d(S, A) = d(S, p_1)$ , što povlači  $S \in q_1$ . Analogno se pokaže da vrijedi i  $S \in q_2$ . Dakle,  $S \in ((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \cap q_1 \cap q_2$ . Tražena kružnica je  $k = k(S, |SA|)$ . ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja  $(s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$ ,  $q_1$  i  $q_2$  imaju neprazan presjek.

Neka je  $c = k(A, \rho)$ , gdje je  $\rho > 0$  proizvoljan realan broj, kružnica inverzije. Neka su  $p'_1 = i(p_1)$  i  $p'_2 = i(p_2)$  inverzne slike pravaca. Budući da  $p_1$  i  $p_2$  ne prolaze polom inverzije  $A$ , njihove slike  $p'_1$  i  $p'_2$  su kružnice. Neka su  $t_1$  i  $t_2$  zajedničke tangente kružnica  $p'_1$  i  $p'_2$ . Ima ih dvije jer se kružnice sijeku u dvije točke, prolaze kroz pol inverzije  $A$  i imaju još jednu zajedničku točku, a to je slika presječne točke pravaca  $p_1$  i  $p_2$  pa imaju samo vanjske zajedničke tangente. Slike tangenata,  $t'_1 = i(t_1)$  i  $t'_2 = i(t_2)$ , su tražene kružnice. Time je pokazana egzistencija rješenja, odnosno  $((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \cap q_1 \cap q_2 \neq \emptyset$ .

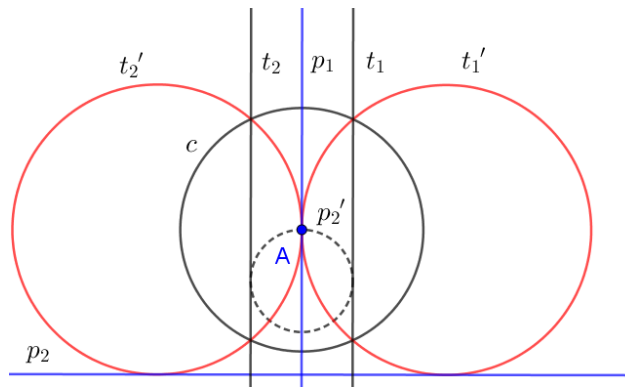
## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.11: Konstrukcije kružnice koja dodiruje dva pravca i prolazi točkom

2° Neka vrijedi  $p_1 \parallel p_2$  i  $A$  ne pripada pravcima  $p_1$  i  $p_2$  te se nalazi između njih. Konstrukcija je analogna kao pod 1°. Isti je broj rješenja jer treća tangenta prolazi kroz pol inverzije  $A$  pa se ona preslikava u samu sebe.

3° Neka vrijedi  $p_1 \perp p_2$  i  $A$  pripada pravcu  $p_1(p_2)$ , a ne pripada  $p_2(p_1)$ . Tada postoje dva rješenja:



Slika 2.12: Konstrukcije kružnice koja dodiruje dva pravca i prolazi točkom

Neka je  $c = k(A, \rho)$ , gdje je  $\rho$  proizvoljan pozitivan realan broj te  $p'_2 = i(p_2)$  inverzna slika pravca  $p_2$ . Tada je  $p'_2$  kružnica. Neka su  $t_1$  i  $t_2$  tangente na  $p'_2$  paralelne s  $p_1$ . Tada su slike tih tangenata,  $t'_1 = i(t_1)$  i  $t'_2 = i(t_2)$ , kružnice s

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

traženim svojstvom.

4° Neka je  $p_1 = p_2$ . Tada se problem svodi na 5. Apolonijev problem reda 2.

5° Neka je  $p_1 \nparallel p_2$  i  $\{A\} = p_1 \cap p_2$ . Za ovaj slučaj također vrijedi Tvrdnja 4. No, budući da se GMS kružnica koje dodiruju  $p_1$  i prolaze točkom  $A$  (okomica kroz  $A$  na  $p_1$  bez  $A$ ), GMS kružnica koje dodiruju  $p_2$  i prolaze točkom  $A$  (okomica kroz  $A$  na  $p_2$  bez  $A$ ) i GMS kružnica koje dodiruju  $p_1$  i  $p_2$  (simetrale kutova što ih zatvaraju zadani pravci bez presječne točke  $A$ ) ne sijeku, to rješenje ne postoji.

6° Neka vrijedi  $p_1 \parallel p_2$ ,  $A$  se ne nalazi između pravaca  $p_1$  i  $p_2$ , te ne leži ni na jednom od njih. Za ovaj slučaj također vrijedi Tvrdnja 4. No, budući da se parabola koja je GMS kružnica koje dodiruju zadani pravac koji je bliže točki  $A$  i pravac koji je GMS kružnica koje dodiruju zadane pravce ne sijeku, to rješenje ne postoji.

7° Neka je  $p_1 \parallel p_2$  i  $A \in p_1(p_2)$ . Tada postoji jedinstveno rješenje: Neka je  $c = k(A, \rho)$ , gdje je  $\rho$  proizvoljan pozitivan realan broj, kružnica inverzije i kružnica  $p'_2 = i(p_2)$  inverzna slika pravca  $p_2$ . Neka su  $t_1$  i  $t_2$  tangente na  $p'_2$  paralelne sa  $p_2$ . Tada je jedna od tangenata pravac koji prolazi polom inverzije  $A$  pa se preslikava u samu sebe, dok je inverzna slika druge tangente kružnica s traženim svojstvom.

### 5. Konstruirati kružnicu koja prolazi zadanom točkom, dodiruje zadani pravac i kružnicu.

Neka su zadani točka  $A$ , pravac  $p$  i kružnica  $k = k(S, r)$ , gdje je  $r > 0$ . Postoji više slučajeva ovisno o međusobnom položaju zadanih elemenata:

1° Neka vrijedi  $A \notin p, k$ . Neka je hiperbola  $h_1$  GMS kružnica koje dodiruju  $k$  i prolaze točkom  $A$ , parabola  $p_1$  GMS kružnica koje dodiruju  $p$  i prolaze kroz  $A$  i parabola  $p_2 \cup p_3$  GMS kružnica koje dodiruju  $p$  i  $k$ , gdje je parabola

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

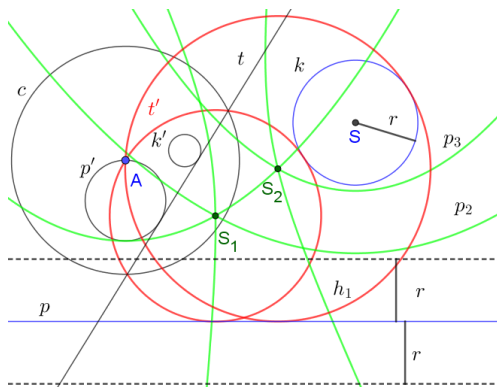
$p_2$  ( $p_3$ ) GMS kružnica koje dodiruju kružnicu  $k$  izvana (iznutra).

**Tvrđnja 5.** Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku  $h_1 \cap p_1 \cap (p_2 \cup p_3)$ .

**Dokaz.** Neka postoji kružnica  $k_1 = k(S_1, r_1)$  s traženim svojstvom. Tada  $k_1$  prolazi kroz  $A$  i dodiruje  $k$ . Budući da  $k_1$  može dodirivati  $k$  izvana i iznutra, to slijedi  $d(S_1, A) = d(S_1, S) - r$  ili  $d(S_1, A) = d(S_1, S) + r$ . Slijedi  $|d(S_1, A) - d(S_1, S)| = r$  pa je  $S_1 \in h_1$ . Nadalje,  $k_1$  dodiruje  $p$  i prolazi kroz  $A$ , iz čega slijedi da je  $d(S_1, A) = d(S_1, p)$ . Slijedi  $S_1 \in p_1$ . Također  $k_1$  dodiruje  $p$  i  $k$  i može  $k$  dodirivati izvana ili iznutra, tj. vrijedi  $d(S_1, p) = d(S_1, k)$ , odnosno  $d(S_1, S) = d(S_1, p) + r$ , ili  $d(S_1, S) = d(S_1, p) - r$  iz čega slijedi da je  $S_1 \in p_2 \cup p_3$ . Dakle,  $S_1 \in h_1 \cap p_1 \cap (p_2 \cup p_3)$  i  $r_1 = d(S_1, A)$ . ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja  $h_1, p_1$  i  $p_2 \cup p_3$  imaju neprazan presjek.

Neka je  $c = k(A, \rho)$  kružnica inverzije s polom u točki  $A$ , gdje je  $\rho$  proizvoljan pozitivan realan broj. Neka su  $k' = i(k)$  i  $p' = i(p)$  inverzne slike zadane kružnice i pravca.



Slika 2.13: Konstrukcije kružnice koja dira pravac, kružnicu i prolazi točkom

Tada su  $k'$  i  $p'$  kružnice, od kojih  $p'$  prolazi polom, a  $k'$  ne prolazi. Neka je  $t$  za-

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

jednička vanjska tangenta kružnica  $p'$  i  $k'$ . Tada je  $t' = i(t)$  tražena kružnica. Time smo pokazali egzistenciju rješenja, odnosno  $h_1 \cap p_1 \cap (p_2 \cup p_3) \neq \emptyset$ .

Uočimo da postoje dvije takve tangente, pa imamo i dvije tražene kružnice. Te dvije tražene kružnice dodiruju zadanu kružnicu izvana. Ukoliko inverzijom preslikamo dvije zajedničke unutarnje tangente (postoje ukoliko se zadani pravac i kružnica ne sijeku), dobijemo dvije kružnice koje dodiruju zadanu kružnicu iznutra. Dakle, postoji najviše 4 rješenja.

2° Ako su  $k \cap p = \emptyset$ ,  $A$  i  $k$  sa različite strane pravca  $p$ , onda rješenja nema. Također vrijedi Tvrdnja 5., ali se očito se parabole  $p_1$ ,  $p_2$  i  $p_3$  u ovom slučaju ne sijeku.

3° Ako je  $k \cap p \neq \emptyset$ ,  $p$  tangenta od  $k$  i ako  $A$  ne leži na  $p$  i nalazi se izvan kružnice  $k$ , onda postoje dva rješenja i to kada  $k$  dodiruje traženu kružnicu izvana (iznutra ju ne može dodirivati uz uvjet da dodiruje  $p$ ).

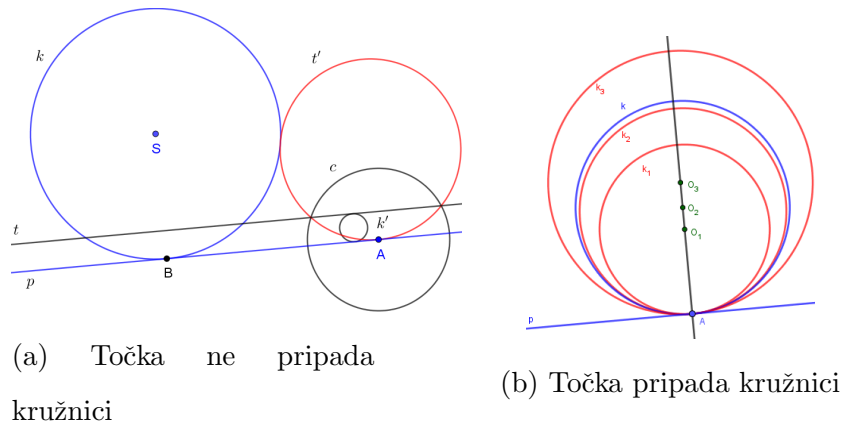
4° Ako je  $k \cap p \neq \emptyset$ ,  $p$  tangenta od  $k$  i  $A$  ne leži na  $p$  i nalazi se unutar kružnice  $k$ , onda postoji jedinstveno rješenje. Središte kružnice je presjek okomice u diralištu  $D$  na  $p$  i simetralom dužine  $\overline{DA}$ .

5° Ako je  $k \cap p \neq \emptyset$ ,  $p$  tangenta od  $k$ ,  $A \in p$  i  $A \notin k$  (Slika 2.14.(a)), onda postoji jedinstveno rješenje. Opišimo konstrukciju rješenja: Neka je  $c = k(A, \rho)$ ,  $\rho > 0$  proizvoljan realan broj, kružnica inverzije te  $k' = i(k)$  inverzna slika od  $k$ . Tada je, po svojstvu inverzije (9),  $k'$  kružnica. Neka je  $t$  tangenta na  $k'$  paralelna s pravcem  $AB$ . Tada je  $t' = i(t)$  tražena kružnica. Naime,  $t$  se preslikava u kružnicu koja prolazi polom inverzije  $A$  (po svojstvu inverzije (6) i (8)), dodiruje kružnicu  $k$  te pravac  $p$ .

6° Ako je  $k \cap p \neq \emptyset$ ,  $p$  tangenta od  $k$  i  $A \in p, k$  (Slika 2.14.(b)), onda postoji beskonačno mnogo rješenja: Središta traženih kružnica leže na okomici iz  $A$  na  $p$ , ali bez točke  $A$ .



## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.14: Konstrukcija kružnice koja dodiruje kružnicu, njezinu tangentu  $p$  i prolazi točkom  $s$  a pravca  $p$

### 6. Konstruiraj kružnicu koja prolazi zadanom točkom, te dodiruje dvije zadane kružnice.

Neka su zadane točka  $A$  te kružnice  $k_1 = k(S_1, r_1)$  i  $k_2 = k(S_2, r_2)$ , gdje su  $r_1, r_2 > 0$  pozitivni realni brojevi. Promotrimo različite međusobne položaje zadanih objekata i pripadajući broj rješenja:

1° Neka se točka  $A$  nalazi izvan zadanih kružnica. Neka je hiperbola  $h_1$  GMS kružnica koje dodiruju  $k_1$  i prolaze točkom  $A$ , hiperbola  $h_2$  GMS kružnica koje dodiruju  $k_2$  i prolaze točkom  $A$ . Pretpostavimo da se zadane kružnice nalaze jedna izvan druge. Naime, u suprotnom očito rješenja nema. Neka je  $h_3 \cup h_4$  GMS kružica koje dodiruju zadane kružnice, gdje je hiperbola  $h_3$  ( $h_4$ ) GMS kružnica koje dodiruju zadane kružnice izvana ili iznutra (jednu od kružnica izvana, a drugu iznutra).

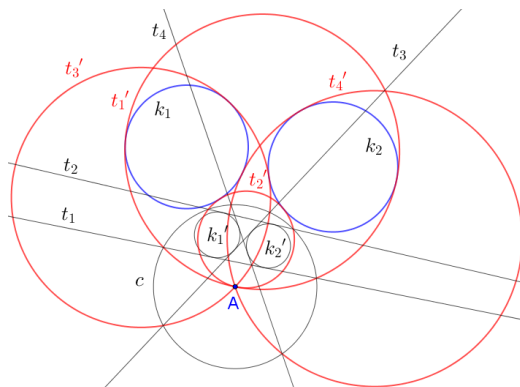
**Tvrdnja 6.** Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku  $h_1 \cap h_2 \cap (h_3 \cup h_4)$ .

**Dokaz.** Neka postoji kružnica  $k = k(S, r)$  s traženim svojstvom. Tada  $k$  prolazi kroz  $A$  i dodiruje  $k_1$ . Budući da  $k$  može  $k_1$  dodirivati izvana i

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

iznutra, to slijedi  $d(S, A) = d(S, S_1) - r$  ili  $d(S, A) = d(S, S_1) + r$ . Slijedi  $|d(S, A) - d(S, S_1)| = r_1$ , tj.  $S \in h_1$ . Analogno se pokaže da vrijedi  $S \in h_2$ . Nadalje,  $k$  dodiruje  $k_1$  i  $k_2$ . Može obje kružnice dodirivati izvana ili iznutra, jednu dodirivati iznutra, a drugu izvana. Ako  $k$  dodiruje  $k_1$  i  $k_2$  izvana(iznutra), onda vrijedi  $||SS_1| - |SS_2|| = |r + r_1| - |r + r_2| = |r_1 - r_2|$  ( $||SS_1| - |SS_2|| = |r - r_1| - |r - r_2| = |-r_1 + r_2| = |r_1 - r_2|$ ) iz čega slijedi  $S \in h_3$ . Ako  $k$  dodiruje  $k_1$  izvana (iznutra), a  $k_2$  iznutra (izvana), onda vrijedi  $||SS_1| - |SS_2|| = ||r + r_1| - |r - r_2|| = r_1 + r_2$  ( $||SS_1| - |SS_2|| = ||r - r_1| - |r + r_2|| = r_1 + r_2$ ). Slijedi  $S \in h_4$ . Dakle,  $S \in h_1 \cap h_2 \cap (h_3 \cup h_4)$  i  $r = |S_1A|$ . ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja  $h_1, h_2$  i  $h_3 \cup h_4$  imaju neprazan presjek.

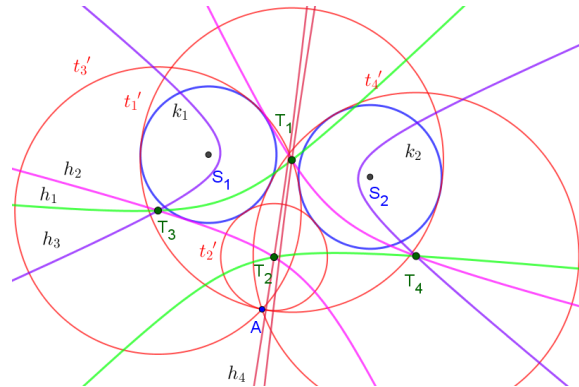


Slika 2.15: Konstrukcije kružnice koja dodiruje dvije kružnice i prolazi točkom

Zbog preglednosti slike hiperbole  $h_1, h_2, h_3$  i  $h_4$  su obojane različitim bojama (Slika 2.16).

Neka je  $c = k(A, \rho)$ , gdje je  $\rho$  proizvoljan pozitivan realan broj, kružnica inverzije. Slike inverzije  $k'_1 = i(k_1)$  i  $k'_2 = i(k_2)$  su, po svojstvu inver-

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.16: GMS kružnica koje dodiruju dvije kružnice i prolaze točkom

zije (9), kružnice. Inverzne slike zajedničkih tangenata kružnica  $k'_1$  i  $k'_2$  su kružnice s traženim svojstvom. Time je pokazana egzistencija rješenja, odnosno  $h_1 \cap h_2 \cap (h_3 \cup h_4) \neq \emptyset$ .

Ovisno o položaju kružnica broj rješenja se razlikuje. Ako se zadane kružnice ne sijeku i  $k_1(k_2)$  se ne nalazi unutar  $k_2(k_1)$ , zajedničkih tangenata je četiri, stoga imamo četiri rješenja. Ako se  $k_1$  i  $k_2$  se dodiruju izvana, onda one imaju tri zajedničke tangente, tj. tri rješenja. U slučaju kada se  $k_1$  i  $k_2$  sijeku u dvije različite točke, onda imaju dvije zajedničke vanjske tangente, tj. postoji dva rješenja.

2° Neka se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  ne sijeku i ne leži jedna unutar druge te neka se  $A$  nalazi unutar jedne od njih. Tada rješenja nema.

3° Neka kružnice  $k_1$  i  $k_2$  imaju dvije različite zajedničke točke te neka se  $A$  nalazi unutar jedne od njih. Tada postoje dva rješenja jer ne postoji kružnica s traženim svojstvom koja dodiruje obje kružnice izvana ili iznutra. Konstrukcija rješenja je analogna onoj pod 1°.

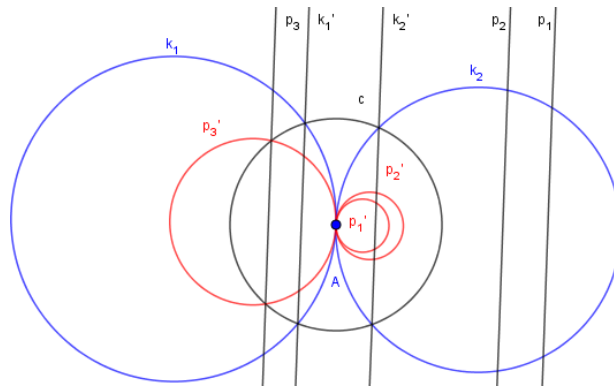
4° Neka se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju izvana i  $A$  nalazi unutar jedne od njih. Tada postoji jedinstveno rješenje, a konstrukcija je analogna onoj pod 1°. Inverzne slike zadanih kružnica također imaju jednu zajedničku točku i u toj

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

točki zajedničku vanjsku tangentu čija je inverzna slika rješenje problema.

5° Ako se  $k_1$  nalazi unutar  $k_2$  ili  $k_2$  unutar  $k_1$  i točka  $A$  unutar obe kružnice, onda rješenja očitoma nema (inverzne slike kružnica nemaju zajedničkih tangenata). No, ako se  $A$  nalazi unutar jedne, a unutar druge kružnice ne nalazi, onda postoji dva rješenja. Konstrukcija rješenja je kao pod 1°.

6° Ako vrijedi  $k_1 \cap k_2 = \{A\}$ , onda rješenja ima beskonačno mnogo.



Slika 2.17: Konstrukcije kružnice koja dodiruje dvije kružnice i prolazi točkom

Neka je  $c = k(A, \rho)$ ,  $\rho > 0$  proizvoljan realan broj, kružnica inverzije  $k'_1 = i(k_1)$  i  $k'_2 = i(k_2)$  inverzne slike zadanih kružnica  $k_1$  i  $k_2$ . Tada su  $k'_1$  i  $k'_2$ , po svojstvu inverzije (7), pravci koji prolaze sjecištima kružnice inverzije i zadanih kružnica i to paralelni jer imaju zajedničku tangentu u polu inverzije  $A$ . Inverzna slika bilo kojeg pravca paralelnog s  $k'_1$  (i  $k'_2$ ) je kružnica s traženim svojstvom. Takvih pravaca ima beskonačno mnogo, stoga ima beskonačno mnogo rješenja.

7° Neka se  $k_1$  i  $k_2$  ne sijeku i ne leže jedna unutar druge te  $A \in k_1(k_2)$ . Tada postoji dva rješenja. Konstrukcija rješenja analogna je onoj pod 6°.

8° Neka se  $k_1$  i  $k_2$  sijeku u dvije različite točke te  $A \in k_1(k_2)$ . Tada postoji dva rješenja. Konstrukcija je analogna onoj pod 1°.

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

9° Neka se  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju izvana i  $A \in k_1(k_2)$ . Tada postoji jedinstveno rješenje. Konstrukcija kao pod 6° (kružnica  $k_1(k_2)$  se preslikava u pravac koji je tangenta kružnici  $k'_2(k'_1)$ ).

10° Ako vrijedi  $k_1 = k_2$ , onda se problem svodi na 2. Apolonijev problem reda 2.

### 7. Konstruirati kružnicu koja dodiruje tri zadana pravca.

Neka su  $p_1, p_2$  i  $p_3$  zadani pravci. Promotrimo različite međusobne položaje zadanih pravaca:

1° Neka pravci  $p_1, p_2, p_3$  nisu međusobno paralelni. Neka je  $\{A\} = p_1 \cap p_2$ ,  $\{B\} = p_2 \cap p_3$  i  $\{C\} = p_3 \cap p_1$ . Time je određen trokut  $\triangle ABC$ . Neka su  $(s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}$ ,  $(s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}$ ,  $(s_5 \cup s_6) \setminus \{C\}$ , gdje su  $s_1$  i  $s_2$  simetrale kutova što ih zatvaraju  $p_1$  i  $p_2$ ,  $s_3$  i  $s_4$  simetrale kutova što ih zatvaraju  $p_2$  i  $p_3$ ,  $s_5$  i  $s_6$  simetrale kutova što ih zatvaraju  $p_1$  i  $p_3$ , GMS kružnica koje dodiruju pravce  $p_1$  i  $p_2$ ,  $p_2$  i  $p_3$ ,  $p_1$  i  $p_3$ , redom.

**Tvrđnja 7.** Ako rješenje postoji, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku  $((s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}) \cap ((s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}) \cap ((s_5 \cup s_6) \setminus \{C\})$ .

**Dokaz.** Neka je  $k = k(S, r)$  kružnica s traženim svojstvom. Tada  $k$  dodiruje  $p_1$  i  $p_2$ . Slijedi da je  $d(S, p_1) = d(S, p_2)$  pa  $S$  leži na simetrali kuta što ga zatvaraju  $p_1$  i  $p_2$ , tj. je  $S \in (s_1 \cup s_2)$ . Budući da je  $S$  središte kružnice, to je  $S \neq T$ . Stoga vrijedi  $S \in (s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}$ . Analogno se pokaže da vrijedi  $S \in (s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}$  i  $S \in (s_5 \cup s_6) \setminus \{C\}$ . Dakle,  $S \in ((s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}) \cap ((s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}) \cap ((s_5 \cup s_6) \setminus \{C\})$  i  $r = d(S, p_1)$ .

■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja  $(s_1 \cup s_2) \setminus \{A\}$ ,  $(s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}$  i  $(s_5 \cup s_6) \setminus \{C\}$  imaju neprazan presjek.

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

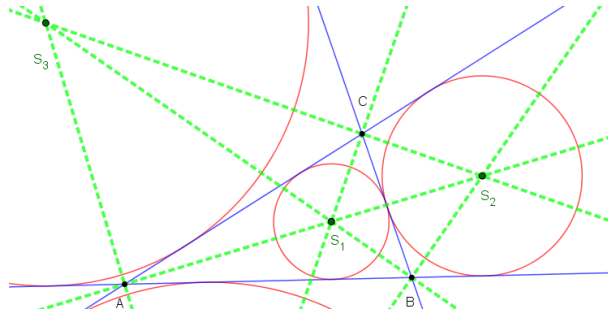
Neka su  $s_1, s_2, s_3$  simetrale unutrašnjih kutova trokuta  $\triangle ABC$  i to pri vrhu  $A, B, C$  redom. Neka je  $\{S\} = s_1 \cap s_3$ ,  $o$  okomica na  $p_1$  kroz  $S$  i  $o \cap p_1 = \{N\}$ .

**T:** Tražena kružnica je  $k = k(S, |SN|)$ .

**Dokaz.** Neka je  $k = k(S, |SN|)$ . Budući da je  $S \in s_1$  to je  $d(S, p_1) = d(S, p_2)$ . Nadalje vrijedi  $S \in s_3$  pa je  $d(S, p_2) = d(S, p_3)$ . Zaključujemo da je  $d(S, p_1) = d(S, p_2) = d(S, p_3)$  i da su pravci  $p_1, p_2$  i  $p_3$  tangente kružnici  $k = k(S, |SN|)$ , što smo i trebali pokazati. ■

Time je pakazana egzistencija rješenja, odnosno  $(s_1 \cup s_2) \setminus \{A\} \cap ((s_3 \cup s_4) \setminus \{B\}) \cap ((s_5 \cup s_6) \setminus \{C\}) \neq \emptyset$ .

Kružnica iz prethodnog dokaza je upisana kružnica trokutu  $\triangle ABC$  i ona je jedinstveno određena. Postoje još tri kružnice s traženim svojstvom, to su trokutu pripisane kružnice. Njihova središta konstruiramo kao sjecišta vanjskih kutova trokuta.

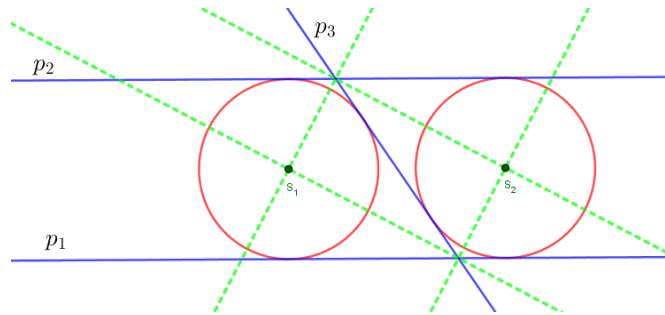


Slika 2.18: Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri zadana pravca

2° Ako vrijedi  $p_1 \parallel p_2$  i  $p_2 \not\parallel p_3$ , onda postoje dva rješenja zadanog problema. Središta traženih kružnica konstruiramo kao sjecišta simetrala kutova što ih zatvaraju pravci  $p_1$  i  $p_3$  te  $p_2$  i  $p_3$ .

3° Neka vrijedi  $p_1 \parallel p_2 \parallel p_3$  i  $p_1 \neq p_2 \neq p_3$ . Tada također vrijedi Tvrdnja 7, ali GMS kružnica koje dodiruju pravce  $p_1$  i  $p_2$ ,  $p_2$  i  $p_3$ ,  $p_3$  i  $p_1$  su međusobno različiti paralelni pravci, a njihov presjek je prazan pa rješenja nema.

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.19: Konstrukcija kružnice koja dodiruje tri zadana pravca

4° U slučaju da su dva pravca jednaka, problem se svodi na 5. slučaj prethodnog odjeljka.

5° Ako vrijedi  $p_1 = p_2 = p_3$  problem se svodi na 2. Apolonijev problem reda 1.

### 8. Konstruirati kružnicu koja dodiruje dvije zadane kružnice i zadani pravac.

Neka su zadane kružnice  $k_1 = k(S_1, r_1)$  i  $k_2 = k(S_2, r_2)$ , gdje su  $r_1$  i  $r_2$  proizvoljni pozitivni realni brojevi, te pravac  $p$ . Neka vrijedi  $r_1 < r_2$ . Promotrimo različite međusobne položaje zadanih objekata:

1° Neka se  $k_1$ ,  $k_2$  i  $p$  međusobno ne sijeku te se kružnice nalaze jedna izvan druge. Neka su  $p_1 \cup p_2$  i  $p_3 \cup p_4$  GMS kružnica koje dodiruju kružnicu  $k_1$  i pravac  $p$ ,  $k_2$  i  $p$ , redom gdje su  $p_1(p_3)$  GMS kružnica koje dodiruju  $k_1(k_2)$  izvana i  $p_2(p_4)$  GMS kružnica koje dodiruju  $k_1(k_2)$  iznutra. Neka je  $h_1 \cup h_2$ , gdje je hiperbola  $h_1$  GMS kružnica koje dodiruju  $k_1$  i  $k_2$  izvana ili iznutra, a hiperbola  $h_2$  GMS kružnica koje dodiruju jednu od zadanih kružnica izvana, a drugu iznutra, GMS kružnica koje dodiruju  $k_1$  i  $k_2$ .

**Tvrđnja 8.** Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku  $(p_1 \cup p_2) \cap (p_3 \cup p_4) \cap (h_1 \cup h_2)$ .

**Dokaz.** Neka je  $k = k(S, r)$  kružnica s traženim svojstvom. Tada  $k$  dodiruje  $k_1$  i  $k_2$ . Može obje kružnice dodirivati izvana ili iznutra, jednu dodirivati

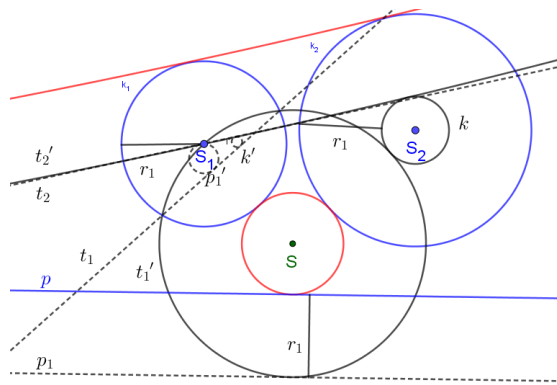
## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

iznutra, a drugu izvana. Ako  $k$  dodiruje  $k_1$  i  $k_2$  izvana(iznutra), onda vrijedi  $||SS_1| - |SS_2|| = |r + r_1| - |r + r_2| = |r_1 - r_2|$  ( $||SS_1| - |SS_2|| = |r - r_1| - |r - r_2| = |-r_1 + r_2| = |r_1 - r_2|$ ), iz čega slijedi  $S \in h_1$ . Ako  $k$  dodiruje  $k_1$  izvana (iznutra), a  $k_2$  iznutra (izvana), onda vrijedi  $||SS_1| - |SS_2|| = ||r + r_1| - |r - r_2|| = r_1 + r_2$  ( $||SS_1| - |SS_2|| = ||r - r_1| - |r + r_2|| = r_1 + r_2$ ) pa slijedi  $S \in h_2$ . Dakle,  $S \in h_1 \cup h_2$ . Nadalje,  $k$  dodiruje  $p$  i  $k_1$  i može  $k_1$  dodirivati izvana ili iznutra, tj. vrijedi  $d(S, p) = d(S, k_1)$ , tj.  $d(S, S_1) = d(S, p) + r$ , ili  $d(S, p) = d(S, S_1) + r$ , tj.  $d(S, S_1) = d(S, p) - r$  iz čega slijedi da je  $S \in p_1 \cup p_2$ . Analogno se pokaže da vrijedi  $S \in p_3 \cup p_4$ . Dakle,  $S \in (p_1 \cup p_2) \cap (p_3 \cup p_4) \cap (h_1 \cup h_2)$  i  $r = d(S, p)$ . ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja  $p_1 \cup p_2$ ,  $p_3 \cup p_4$  i  $h_1 \cup h_2$  imaju neprazan presjek.

Zadaća u ovom slučaju ima najviše rješenja i to njih osam:

a) Umjesto kružnica  $k_1$  i  $k_2$  i pravca  $p$  promatramo točku  $S_1$ , kružnicu  $k = k(S_2, r_2 - r_1)$  i pravac  $p_1$ , gdje je  $p_1$  paralelan s pravcem  $p$  i udaljen od njega za  $r_1$ , ali se nalazi sa suprotne strane od one gdje se nalaze  $k_1$  i  $k_2$ .

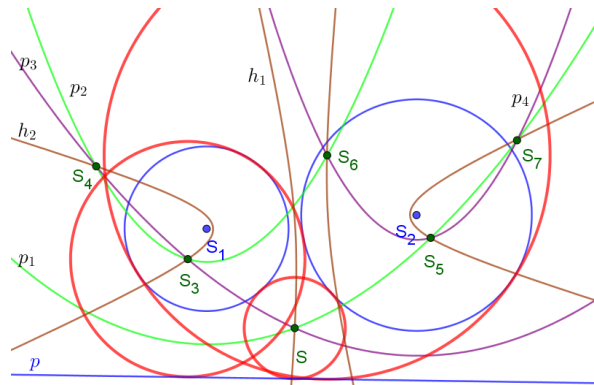


Slika 2.20: Konstrukcija kružnice koja dodiruje dvije kružnice i pravac

Možemo reći da smo  $k_1$  i  $k_2$  "stisli" za  $r_1$  i dobili točku  $S_1$  i kružnicu  $k$ . Sada



## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.21: GMS kružnica koje dodiruju dvije kružnice i pravac

je problem sveden na 5. Apolonijev problem reda 3. Međutim, dva rješenja od njih četiri propadaju, pa nam ostaju samo dva. Inverzne slike zajedničkih vanjskih tangenti kružnica  $p'_1 = i(p_1)$  i  $k' = i(k)$  (kružnica inverzije je proizvoljna kružnica  $c$  sa središtem u  $S_1$ ) stisnemo za  $r_1$  i na taj način dobijemo tražene kružnice koje dodiruju zadane kružnice izvana.

Zbog preglednosti na slici Slika 2.21 GMS kružnica za pojedine Apolonijeve probleme reda 2 su obojana različitim bojama i nisu istaknute sve tražene kružnice već samo njih tri iako ima više vidljivih središta traženih kružnica.

b) Dodatna dva rješenja dobijemo ako  $k_1$  i  $k_2$  suzimo za  $r_1$  i promatramo pravac  $p_1$  paralelan s  $p$  i udaljen od njega za  $r_1$ , a nalazi se s iste strane kao i zadane kružnice. Koristimo oznake kao pod a). Konstrukcija rješenja je analogna onoj u 5. Apolonijevom problemu reda 3 pod 1°. Inverznim slikama dviju zajedničkih unutarnjih tangenata inverznih slika  $k'$  i  $p'_1$  povećamo radijus ("napušemo") za  $r_1$  i dobijemo tražene kružnice.

c) Promatramo točku  $S_1$ , kružnicu  $k = k(S_2, r_1 + r_2)$  i pravac  $p_1$  paralelan s  $p$  i udaljen od njega za  $r_1$ , a nalazi se s iste strane kao i zadane kružnice. Konstrukcija rješenja je analogna onoj u 5. Apolonijevom problemu reda 3 pod 1°. Inverzne slike dviju zajedničkih vanjskih tangenata inverznih slika

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

$k'$  i  $p'_1$  "napušemo" za  $r_1$ . Tako dobivene dvije kružnice su rješenje zadace.

d) Promatramo točku  $S_1$ , kružnicu  $k = k(S_2, r_2 + r_1)$  i pravac  $p_1$ , gdje je  $p_1$  paralelan s pravcem  $p$  i udaljen od njega za  $r_1$ , ali se nalazi sa suprotne strane od one gdje se nalaze  $k_1$  i  $k_2$ . Konstrukcija rješenja je analogna onoj u 5. Apolonijevom problemu reda 3 pod 1°. Inverzne slike dviju zajedničkih unutarnjih tangenata inverznih slika  $k'$  i  $p'_1$  "stisnemo" za  $r_1$  i dobijemo posljednja dva rješenja zadace.

Time smo pokazali egzistenciju rješenja, odnosno  $(p_1 \cup p_2) \cap (p_3 \cup p_4) \cap (h_1 \cup h_2) \neq \emptyset$ .

2° U slučaju kada se kružnice  $k_1$  i  $k_2$  sijeku ili kada se  $k_1$  nalazi unutar  $k_2$  i  $p$  siječe  $k_2$  provodimo prethodno opisanu konstrukciju, samo što se broj rješenja razlikuje ovisno o dodatnim međusobnim odnosima zadanih objekata.

3° Ako je  $k_1$  unutar  $k_2$  i  $p$  ne siječe  $k_2$ , onda rješenja očito nema.

4° Ako je  $k_1 = k_2$ , onda se problem svodi na 6. Apolonijev problem reda 2.

### 9. Konstruirati kružnicu koja dodiruje dva zadana pravca i zadanu kružnicu.

Neka su zadani pravci  $p_1$  i  $p_2$  te kružnica  $k = k(S, r)$ , gdje je  $r$  proizvoljan pozitivan realan broj.

1° Neka se zadani pravci sijeku. Označimo sa  $T$  njihov presjek i sa  $s_1, s_2$  simetrale kutova što ih zatvaraju  $p_1$  i  $p_2$ . Neka je  $(s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$  GMS kružnica koje dodiruju  $p_1$  i  $p_2$ ,  $q_1 \cup q_2$  GMS kružnica koje dodiruju  $p_1$  i  $k$ , gdje je parabola  $q_1(q_2)$  GMS kružnica koje  $k$  dodiruju izvana (iznutra) i  $q_3 \cup q_4$  GMS kružnica koje dodiruju pravac  $p_2$  i  $k$ , gdje je parabola  $q_3(q_4)$  GMS kružnica koje  $k$  dodiruju izvana (iznutra).

**Tvrđnja 9.** Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku  $((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \cap (q_1 \cup q_2) \cap (q_3 \cup q_4)$ .

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

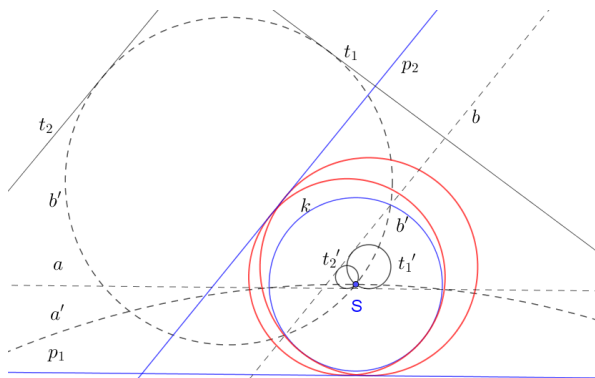
**Dokaz.** Neka je  $k_1 = k(S_1, r_1)$  kružnica s traženim svojstvom. Tada  $k_1$  dodiruje  $p_1$  i  $p_2$ . Slijedi  $d(S_1, p_1) = d(S_1, p_2)$  pa je  $S_1 \in (s_1 \cup s_2)$ . Budući da je  $r_1 > 0$ , to slijedi  $S_1 \neq T (\in s_1 \cup s_2)$ . Zaključujemo da vrijedi  $S \in (s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$ . Nadalje,  $k_1$  dodiruje  $p_1$  i  $k$ , i  $k$  dodiruju izvana ili iznutra čega slijedi da je  $d(S_1, p_1) = d(S_1, k)$ , odnosno  $d(S_1, S) = d(S_1, p_1) + r$ , ili  $d(S_1, p_1) = d(S_1, S) + r$ , tj.  $d(S_1, S) = d(S_1, p_1) - r$ . Slijedi  $S_1 \in q_1 \cup q_2$ . Analogno se pokaže da vrijedi  $S_1 \in q_3 \cup q_4$ . Dakle,  $S_1 \in (q_1 \cup q_2) \cap (q_3 \cup q_4) \cap ((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\})$  i  $r = d(S, p_1)$ . ■

Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja  $q_1 \cup q_2$ ,  $q_3 \cup q_4$  i  $(s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}$  imaju neprazan presjek.

U konstrukciji rješenja kružnicu  $k$  promatramo kao točku  $S$  (suzimo je za radijus  $r$ ,  $S = k(S, r - r)$ ).

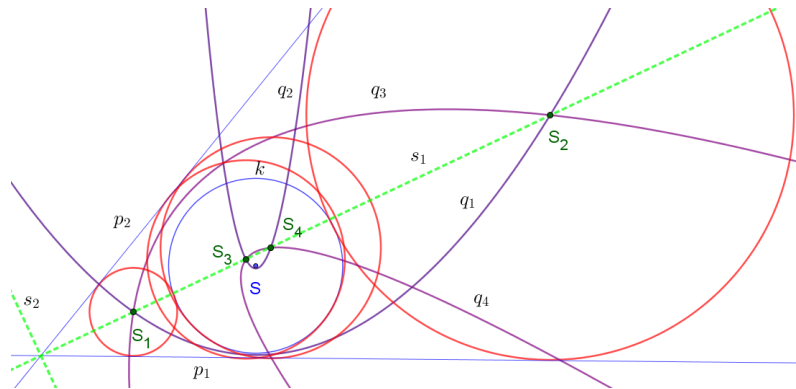
Slično kao kod 8. Apolonijevog problema reda 3, promatramo pravce  $a$  i  $b$  paralelne pravcima  $p_1$  i  $p_2$ , redom, udaljene od njih za  $r$ . Kako za svaki od zadanih pravaca postoji po dva takva, imamo 4 različite kombinacije konstrukcije. Za svaku od tih konstrukcija postoji po dva rješenja, što je ukupno osam. Pokažimo konstrukciju rješenja za jednu kombinaciju:

Neka su  $p_1, p_2, k, a$  i  $b$  kao na sljedećoj slici:



Slika 2.22: Konstrukcija kružnice koja dodiruje dva pravca i kružnicu

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.23: GMS kružnica koje dodiruju dva pravca i kružnicu

Neka je  $k$  kružnica inverzije i kružnice  $a' = i(a)$ ,  $b' = i(b)$  inverzne slike pravca  $a$  i  $b$ . Budući da se  $a$  i  $b$  sijeku, sijeku se i  $a'$  i  $b'$  pa imaju samo vanjske zajedničke tangente, označimo ih sa  $t_1$  i  $t_2$ . Neka su  $t'_1 = i(t_1)$ ,  $t'_2 = i(t_2)$  inverzne slike tih tangenata. Dva rješenja zadaće su kružnice koje dobijemo povećanjem radijusa kružnicama  $t'_1$  i  $t'_2$  za  $r$ .

Time smo pokazali egzistenciju rješenja, odnosno  $(q_1 \cup q_2) \cap (q_3 \cup q_4) \cap ((s_1 \cup s_2) \setminus \{T\}) \neq \emptyset$ .

2° Ako su pravci paralelni, onda postoje četiri rješenja. Konstrukcija je analogna prethodno opisanoj, ali neki slučajevi propadaju.

3° Ako vrijedi  $p_1 = p_2$ , onda se problem se svodi na 6. Apolonijev problem reda 2.

Deseti Apolonijev problem reda 3 je originalni Apolonijev problem.

### 10. Konstruiraj kružnicu koja dodiruje tri zadane kružnice.

Neka su zadane kružnice  $k_1 = k(S_1, r_1)$ ,  $k_2 = k(S_2, r_2)$  i  $k_3 = k(S_3, r_3)$ , gdje su  $r_1, r_2, r_3$  proizvoljni pozitivni realni brojevi te  $r_3$  najmanji među njima.

1° Neka niti jedna od kružnica nije sadržana ni u jednoj od preostale dvije te neka se ne sijeku. Neka je  $h_1 \cup h_2$ , gdje je hiperbola  $h_1$  GMS kružnica koje

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

dodiruju  $k_1$  i  $k_2$  izvana ili iznutra, a hiperbola  $h_2$  GMS kružnica koje jednu od  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju izvana, a drugu iznutra, GMS kružnica koje dodiruju  $k_1$  i  $k_2$ . Analogno definiramo  $h_3 \cup h_4$ , GMS kružnica koje dodiruju  $k_2$  i  $k_3$  i  $h_5 \cup h_6$ , GMS kružnica koje dodiruju  $k_1$  i  $k_3$ .

**Tvrđnja 10.** Ako postoji rješenje, onda se središte te kružnice nalazi u presjeku  $(h_1 \cup h_2) \cap (h_3 \cup h_4) \cap (h_5 \cup h_6)$ .

**Dokaz.** Neka je  $k = k(S, r)$  kružnica s traženim svojstvom. Tada  $k$  dodiruje  $k_1$  i  $k_2$  i može obje kružnice dodirivati izvana ili iznutra, jednu dodirivati iznutra, a drugu izvana. Ako  $k$  dodiruje  $k_1$  i  $k_2$  izvana(iznutra), onda vrijedi  $\|SS_1| - |SS_2| = |r + r_1| - |r + r_2| = |r_1 - r_2|(\|SS_1| - |SS_2| = |r - r_1| - |r - r_2| = |-r_1 + r_2| = |r_1 - r_2|)$ , iz čega slijedi  $S \in h_1$ . Ako  $k$  dodiruje  $k_1$  izvana (iznutra), a  $k_2$  iznutra (izvana), onda vrijedi  $\|SS_1| - |SS_2| = \|r + r_1| - |r - r_2| = r_1 + r_2(\|SS_1| - |SS_2| = \|r - r_1| - |r + r_2| = r_1 + r_2)$  pa slijedi  $S \in h_2$ . Dakle,  $S \in h_1 \cup h_2$ . Analogno se pokaže da vrijedi  $S \in h_3 \cup h_4$  i  $S \in h_5 \cup h_6$ . Zaključujemo da je  $S \in (h_1 \cup h_2) \cap (h_3 \cup h_4) \cap (h_5 \cup h_6)$  i  $r = |SS_1|$ . ■

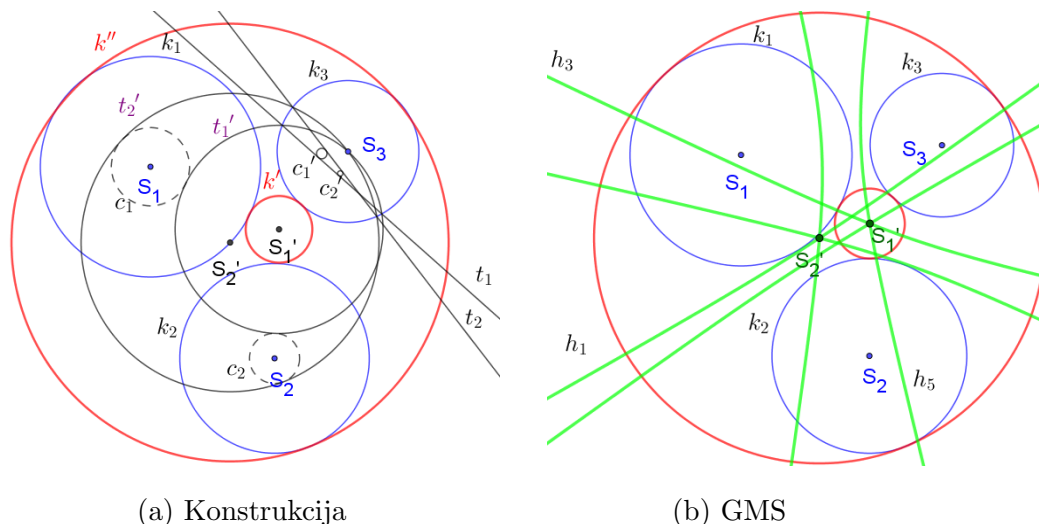
Opišimo sada konstrukciju rješenja. Time ćemo, u ovisnosti o položaju zadanih elemenata, dokazati i egzistenciju rješenja i ujedno raspraviti kada GMS rješenja  $h_1 \cup h_2, h_3 \cup h_4$  i  $h_5 \cup h_6$  imaju neprazan presjek.

Tražene kružnice ćemo konstruirati slično kao i u prethodna dva problema. Rješenja ima najviše osam, a broj ovisi o međusobnom odnosu zadanih objekata. Neka je  $k_3$  kružnica inverzije (za kružnicu inverzije možemo odabrati bilo koju kružnicu sa središtem u  $S_3$ ).

**a)** Neka su  $c_1 = k(S_1, r_1 - r_3)$  ("sužena kružnica  $k_1$  za  $r_3$ ") i  $c_2 = k(S_2, r_2 - r_3)$  ("sužena kružnica  $k_2$  za  $r_3$ ") i kružnice  $c'_1 = i(c_1)$  i  $c'_2 = i(c_2)$  njihove inverzne slike. Sa  $t_1$  i  $t_2$  označimo vanjske zajedničke tangente kružnica  $c'_1$  i  $c'_2$ . Kružnice  $t'_1 = i(t_1)$  i  $t'_2 = i(t_2)$  dodiruju  $c_1$  i  $c_2$  izvana i prolaze kroz  $S_3$

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

kao na sljedećoj slici pod a):



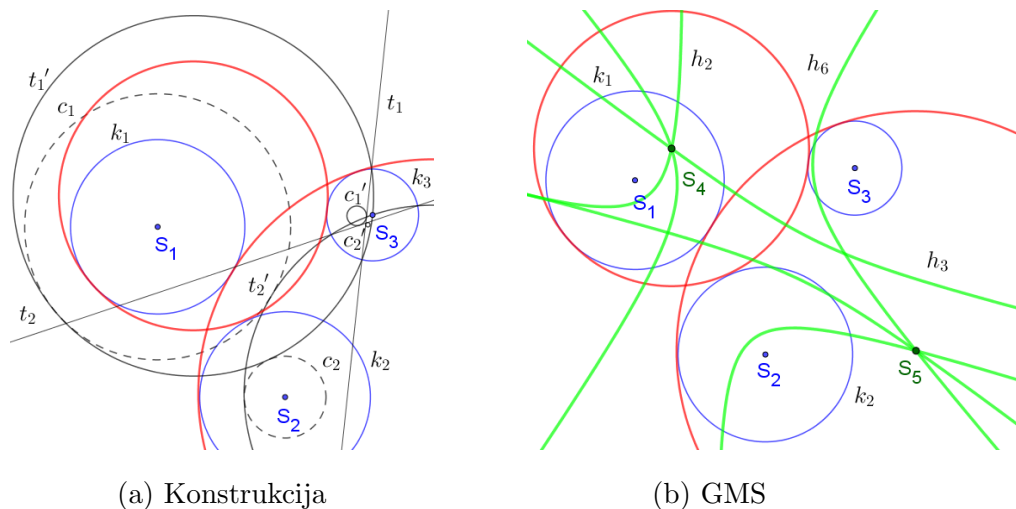
Slika 2.24: Kružnice koje dodiruju tri kružnice izvana i iznutra

Ako  $t'_1$  "stisnemo" za  $r_3$ , onda dobijemo traženu kružnicu, označimo je sa  $k'$ , koja dodiruje zadane kružnice izvana. Ako  $t'_2$  "napušemo" za  $r_1$ , onda dobijemo traženu kružnicu, označimo je sa  $k''$ , koja dodiruje zadane kružnice iznutra.

Na slici Slika 2.24 b) je prikazan presjek hiperbola  $h_1, h_3$  i  $h_5$  koji je zapravo GMS rješenja za ovaj slučaj. Naime, upravo su te hiperbole GMS kružnica koje kružnice  $k_1$  i  $k_2, k_2$  i  $k_3, k_3$  i  $k_1$  dodiruju izvana ili iznutra.

**b)** Neka je  $c_1 = k(S_1, r_1 + r_3)$  i  $c_2 = k(S_2, r_2 - r_3)$ . Nastavak konstrukcije se provodi analogno prethodnom slučaju, ali sada odabiremo unutarnje zajedničke tangente  $t_1$  i  $t_2$  kružnica  $c'_1$  i  $c'_2$ . Neka su sve oznake i objekti kao na slici 2.25. Slika tih tangenata,  $t'_1$  i  $t'_2$ , su kružnice koje dodiruju  $c_1$  i  $c_2$  i prolaze polom inverzije  $S_3$ . Ako  $t'_1$  "stisnemo" za  $r_3$ , onda dobijemo jedno rješenje i to kružnicu koja  $k_1$  dodiruje iznutra, a  $k_2$  i  $k_3$  izvana. Ako  $t'_2$  "napušemo" za  $r_3$ , onda dobijemo još jedno rješenje i to kružnicu koja  $k_1$  dodiruje izvana, a  $k_2$  i  $k_3$  iznutra.

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.25: Kružnice koje dodiruju tri kružnice

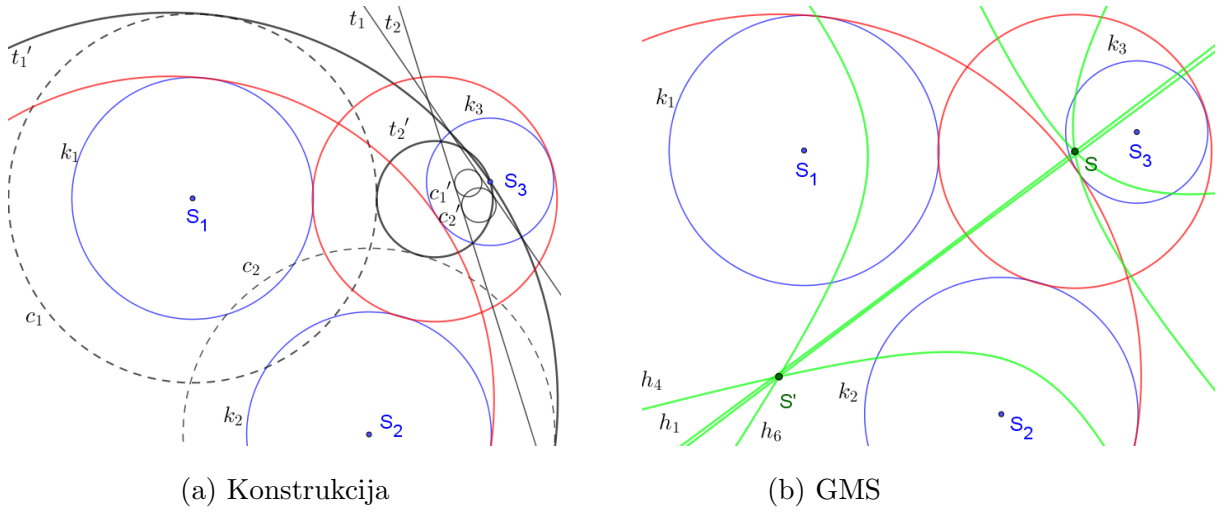
Na slici Slika 2.25 b) je prikazan presjek hiperbola  $h_2, h_3$  i  $h_6$  koji je zapravo GMS rješenja za ovaj slučaj. Naime, upravo su te hiperbole GMS kružnica koje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju izvana i iznutra,  $k_2$  i  $k_3$  dodiruju izvana ili iznutra,  $k_3$  i  $k_1$  dodiruju izvana i iznutra.

c) Neka su  $c_1 = k(S_1, r_1 + r_3)$  i  $c_2 = k(S_2, r_2 + r_3)$ . Sa  $t_1$  i  $t_2$  označimo zajedničke vanjske tangente kružnica  $c_1 = i(c_1)$  i  $c_2 = i(c_2)$ . Njihove inverzne slike  $t_1' = i(t_1)$  i  $t_2' = i(t_2)$  dodiruju  $c_1$  i  $c_2$  te prolaze polom inverzije  $S_3$ . Neka je njihov položaj kao na slici 2.26 a).

Tražene kružnice dobijemo tako da  $t_1'$  "stisnemo" za  $r_3$  (dobivena kružnica dodiruje  $k_1$  i  $k_2$  iznutra, a  $k_3$  izvana) i  $t_2'$  "napušemo" za  $r_3$  (dobivena kružnica dodiruje  $k_1$  i  $k_2$  izvana, a  $k_3$  iznutra).

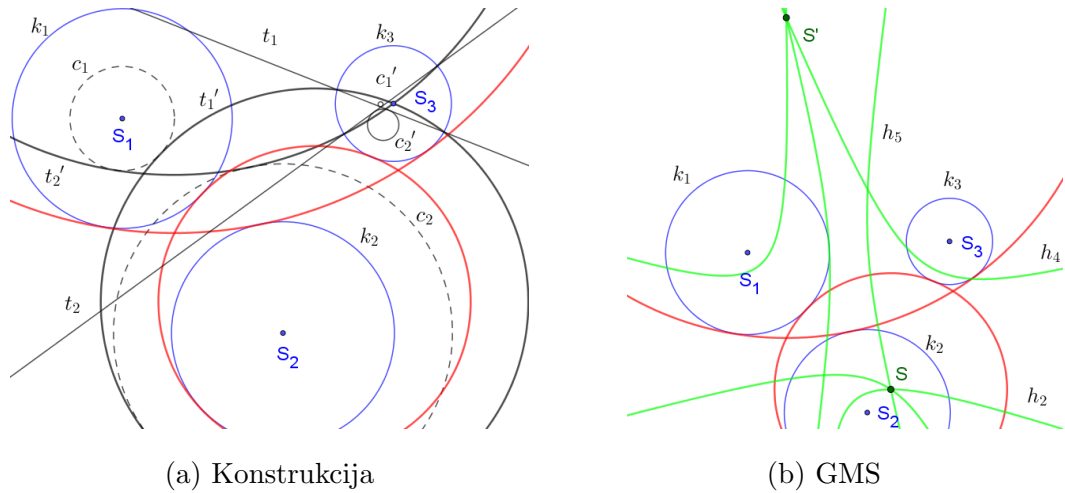
Na slici Slika 2.26 b) je prikazan presjek hiperbola  $h_1, h_4$  i  $h_6$  koji je zapravo GMS rješenja za ovaj slučaj. Naime, upravo su te hiperbole GMS kružnica koje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju izvana ili iznutra,  $k_2$  i  $k_3$  dodiruju izvana i iznutra,  $k_3$  i  $k_1$  dodiruju izvana i iznutra.

Poglavlje 2. Apolonijevi problemi



Slika 2.26: Kružnice koje dodiruju tri kružnice

d) Neka su  $c_1 = k(S_1, r_1 - r_3)$  i  $c_2 = k(S_2, r_2 + r_3)$ . Neka su  $t_1$  i  $t_2$  zajedničke unutarnje tangente kružnica  $c'_1 = i(c_1)$  i  $c'_2 = i(c_2)$ . Neka je odnos svih objekata kao i na sljedećoj slici:



Slika 2.27: Kružnice koje dodiruju tri kružnice

Inverzne slike tangenata  $t'_1 = i(t_1)$  i  $t'_2 = i(t_2)$  su kružnice koje dodiruju  $c_1$  i  $c_2$  te prolaze polom inverzije. Ako "napušemo"  $t'_2$  za  $r_3$  dobijemo jedno



## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

rješenje zadaje i to kružnicu koja dodiruje  $k_1$  i  $k_3$  iznutra, a  $k_2$  izvana. Osmo rješenje je kružnica koju dobijemo kada  $t'_1$  "stisnemo" za  $r_3$  i ona dodiruje  $k_1$  i  $k_3$  izvana, a  $k_2$  iznutra.

Na slici Slika 2.27 b) je prikazan presjek hiperbola  $h_2, h_4$  i  $h_5$  koji je zapravo GMS rješenja za ovaj slučaj. Naime, upravo su te hiperbole GMS kružnica koje kružnice  $k_1$  i  $k_2$  dodiruju izvana i iznutra,  $k_2$  i  $k_3$  dodiruju izvana i iznutra,  $k_3$  i  $k_1$  dodiruju izvana ili iznutra.

Time smo pokazali egzistenciju rješenja, odnosno  $(h_1 \cup h_2) \cap (h_3 \cup h_4) \cap (h_5 \cup h_6) \neq \emptyset$ .

Ovisno o međusobnom položaju zadanih kružnica broj rješenja se mijenja, dok se rješenja konstruiraju na isti način koji je poviše opisan. Ukoliko su dvije kružnice jednake, problem se svodi na treći problem iz prethodnog odjeljka, a ako su sve tri jednake, onda na treći problem iz prvog odjeljka.

## 2.4 Apolonijev problem reda $n \geq 4$

U ovom odjeljku ćemo razraditi najjednostavniji Apolonijev problem reda 4, i to kada su zadane četiri točke. Ukupno ih ima petnaest.

### **Konstruiraj kružnicu koja dodiruje četiri zadane točke.**

Neka su zadane točke  $A, B, C$  i  $D$ .

Razlikujemo više slučajeva:

1° Neka su zadane točke različite i nisu kolinearne.

Zadanim točkama je određen četverokut  $ABCD$ . Rješenje problema postoji, i to samo jedno, ako i samo ako je četverokut  $ABCD$  tetivni.

Možemo promatrati također i dužine određene tim točkama kojih ima  $\binom{4}{2}=6$ . Simetrale tih dužina su GMS kružnica koje dodiruju točke koje određuju tu

## Poglavlje 2. Apolonijevi problemi

dužinu (Apolonijev problem reda 2). Očito je sjecište tih simetrala i GMS kružnica koje dodiruju sve četiri zadane točke. Možemo ovaj problem promatrati i kao Apolonijeve probleme reda 3 ako gledamo GMS kružnica koje dodiruju po tri točke. Njih ima  $\binom{4}{3}=4$ . GMS tih kružnica je samo jedna točka (središte trokutu opisane kružnice), a presjek ta četiri GMS-a je neprazan samo ako se sve četiri točke podudaraju i to je središte rješenja sva četiri problema reda 3 i problema reda 4.

2° Neka su zadane točke različite i kolinearne. Tada rješenja nema.

3° U slučaju kada su neke od zadanih točaka jednake, problem se svodi na Apolonijev problem nižeg reda.

U usporedbi s Apolonijevim problemima nižeg reda gdje smo naišli na konike prilikom određivanja GMS kružnica koje dodiruju zadane objekte, ovdje prilikom promatranja najjednostavnijeg Apolonijeva problema reda 4, dolazimo do najviše jednog rješenja. Iz tog razloga nam nije interesantno promatrati Apolonijeve probleme reda  $n \geq 4$ .

## 2.5 Daljnje generalizacije Apolonijeva problema

Kut presjeka između tražene kružnice i zadanih elemenata (pravca i kružnice) u dosadašnjim razmatranjima je  $0^\circ$ .

Stavljajući proizvoljni kut  $\alpha \in [0, 180^\circ)$  pod kojim tražena kružnica siječe zadane kružnice, odnosno pravce, dobivamo još jednu generalizaciju Apolonijeva problema reda  $n$ .

Analogno, ali znatno složenije, razmatranje možemo provesti i za ovaj problem koristeći metodologiju identičnu onoj koju smo upotrijebili pri rješavanju Apolonijeva problema za  $\alpha = 0^\circ$ .

# Poglavlje 3

## Zaključak

Originalni Apolonijev problem glasi: *"Konstruiraj kružnicu koja dodiruje tri zadane kružnice"*.

U ovom radu smo taj problem generalizirali i to na način da smo uz kružnice promatrali pravce i točke (možemo ih zamisliti kao kružnice s radijusom beskonačno i nula) i to kada je zadan jedan, dva, tri ili više objekata. Nazvali smo ih Apolonijevim problemom reda  $n$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$  broj zadanih objekata. Uz samu konstrukciju traženih kružnica, koju smo uglavnom izvodili koristeći metodu inverzije, promatrali smo i geometrijsko mjesto središta kružnica koje dodiruju zadane objekte, uz korištenje metode geometrijskih mjesta točaka. Posebno su interesantna GMS kružnica s traženim svojstvom koja se javljaju u Apolonijevim problemima reda 2. Naime, kao GMS kružnica se pojavljuju konike, stoga se svaka konika alternativno može definirati kao GMS kružnica koje su rješenje određenog Apolonijevog problema reda 2.

Za Apolonijeve probleme reda 3 posebno smo dokazivali egzistenciju rješenja. Pokazali smo, ne samo da je presjek tri konike ili presjek pravca i konika neprazan, već da može biti i višečlan skup, što je jako zanimljivo jer to nije nešto za očekivati i nije jednostavno za zamisliti.

### Poglavlje 3. Zaključak

Apolonijevi problemi reda  $n \geq 4$  nam nisu interesantni iz razloga što rješenje postoji samo u specifičnim položajima zadanih objekata.

Također smo ostavili prostora za razmatranje i razmišljanje što da smo tražili kružnice koje ne dodiruju zadane objekte, već ih sijeku pod varijabilnim kutom  $\alpha \in [0, 180^\circ)$  i to koristeći identičnu metodologiju kao i u ovom radu. Naime, u tom slučaju kao zadane objekte ne promatramo točke.

# Literatura

- [1] B. Pavković, D. Veljan, *Elementarna matematika 1*, Tehnička knjiga, 1991.
- [2] D. Palman, *Geometrijske konstrukcije*, Element, 1996.
- [3] D. Palman, *Trokut i kružnica*, Element, 1994.
- [4] N. Koceić Bilan, I. Mirošević, J. Jurko, *Različiti nastavno-metodički pristupi čunjosječnicama*, math.e 27, 2015.
- [5] N. Koceić Bilan, N. Smajlić, L. Trombetta Burić, *Konstruktivna geometrija u nastavi matematike*, Osječki matematički list, 2013.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU  
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD  
**GENERALIZACIJA APOLONIJEVA  
PROBLEMA**

Antonija Guberina

**Sažetak:**

Apolonijev problem glasi: *"Konstruiraj kružnicu koja dodiruje tri zadane kružnice"*. U uvodnom dijelu definiramo Apolonijev problem reda  $n, n \in \mathbb{N}$  i na taj ga način generaliziramo. Detaljno obrađujemo metodu inverzije jer pomoću nje konstruiramo većinu Apolonijevih problema. U glavnom dijelu posebno promatramo sve Apolonijeve probleme reda 1, 2 i 3 te određujemo GMS rješenja što je posebno interesantno za Apolonijeve probleme reda 2 jer se kao GMS javljaju konike i time dobivamo alternativnu definiciju konika. Važno je istaknuti da se kao GMS rješenja Apolonijevih problema reda 3 javljaju presjeci konika, konika i pravca iako je za očekivati da taj presjek bude prazan. Za Apolonijev problem reda 4 promatramo samo slučaj kada su zadane četiri točke. Apolonijeve probleme reda  $n \geq 4$  nije interesantno jer rješenja postoje samo u posebnim slučajevima. Također se iznosi ideja za daljnje razmatranje stavljajući proizvoljni kut  $\alpha \in [0, 180^\circ)$  umjesto  $\alpha = 0^\circ$ , što smo u radu promatrali.

**Ključne riječi:**

inverzija, kružnica, pravac, točka, geometrijsko mjesto središta, dodir, elipsa, hiperbola, parabola, rješenje

## TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

**Podatci o radu:**

53 stranice, 37 slika

**Mentor:** prof. dr. sc., Nikola Koceić Bilan

**Članovi povjerenstva:** dr. sc., Goran Erceg mag. math, Ivan  
Jelić

Povjerenstvo za diplomske radove je prihvatilo ovaj rad 29.01.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

# GENERALIZATION OF APOLLONIUS PROBLEM

Antonija Guberina

**Abstract:**

Apollonius problem claims "Construct circles that are tangent to three given circles in a plane." In introduction we define Apollonius problem order  $n, n \in \mathbb{N}$  and we generalize it on that way. We deal in detail inversion because using that method we construct most of Apollonius problems. In main section, we are observing all Apollonius problems order 1, 2 and 3 and dealing with GCL solutions which are especially interesting for Apollonius problems order 2 because as GCL we have conics and because of that we are getting alternative definition of conics. It is important to say that solutions of Apollonius problems order 3 we get intersections of conics, conics and lines although we can expect that intersection is empty. For Apollonius problem of order 4 we study case with four given points. Apollonius problems of order  $n \geq 4$  are not so interested for study because solutions exist only in special cases. Also, we represent idea for further consideration putting arbitrary angle  $\alpha \in [0, 180^\circ)$  instead  $\alpha = 0^\circ$ , which we have been considering in this text.

**Key words:**

inversion, circle, line, point, geometric center location(GCL), touch, ellipse, hyperbola, parabola, solution

**Specifications:**



## TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

53 pages, 37 pictures

**Mentor:** Professor, Nikola Koceić Bilan

**Committee:** Ph.D., Goran Erceg M.S., Ivan Jelić

This thesis was approved by a Thesis committee on 29.01.