Casimirov operator

Kodžoman, Toni

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno-matematički fakultet

Završni rad

Casimirov operator

Mentor:
prof. dr. sc. Saša Krešić-Jurić

Student:
Toni Kodžoman

Split, 2016./2017.

Sadržaj

Uvod

U ovom radu centar pažnje stavljen je na takozvani Casimirov operator. Proučavajući njegovu matematičku pozadinu i primjene u fizici kroz stoljeća, uvidjet ćemo njegovu izuzetnu važnost u brojnim znanstvenim disciplinama.

Prvi dio je posvećen matematičkoj osnovi i pojmovima koji su potrebni za daljnje razmatranje. Počevši od pojma Liejeve algebre, preko čuvenog teorema Poincar*é*a, Birkhoffa i Witta pa sve do definicije samih Casimirovih operatora, ilustrirajući sve putem primjera, dobit ćemo detaljan uvid u fundamentalnu algebru koja služi kao osnova za mnoge grane teorijske fizike i matematike danas.

U drugom dijelu se ponajviše razmatraju fizikalni primjeri klasične i moderne fizike. Prateći generalni povijesni razvoj teorije Casimirovih operatora, dobiva se bolje razumijevanje same teme. Iako je najpoznatiji primjer Casimirovog operatora operator angularnog momenta u kvantnoj mehanici, ovdje se taj primjer samo navodi kao jedan od mnogih dok je poseban fokus stavljen na energetski spektar vodikovog atoma. Preostali primjeri iz fizike 20. stoljeća razmatraju se samo na elementarnoj razini.

Poglavlje 1

Osnovni matematički pojmovi

1.1 Liejeva algebra

Definicija 1.1.1. *Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ kojem je pridruženo bilinearno preslikavanje $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ takvo da vrijedi:*

$$[y, x] = -[x, y] \text{ (antisimetrija)} \tag{1.1}$$

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0 \text{ (Jacobijev identitet)} \tag{1.2}$$

za sve elemente $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Za Liejevu algebru $\mathfrak{g}$ kažemo da je Abelova ako njene Liejeve zagrade iščezavaju identički,

$$[x, y] = 0, \ \forall x, y \in \mathfrak{g}.$$

Dimenzija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je dimenzija vektorskog prostora g. Isto vrijedi i za bazu Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Definicija 1.1.2. *Neka je $(x_1, x_2, ..., x_n)$ baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$. Tada postoje jedinstveni skalari $c_{ij}^k \in \mathbb{F}, 1 \leq k \leq n$ takvi da:*

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=0}^{n} c_{ij}^k x_k \tag{1.3}$$

za sve $i, j = 1, 2, ..., n$. Skalari c_{ij}^k se zovu strukturne konstante od $\mathfrak{g}$ u odnosu na bazu $(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Uzevši u obzir kako je svaki element iz $\mathfrak{g}$ jedinstvena linearna kombinacija vektora baze, slijedi da strukturne konstante u potpunosti određuju Liejeve zagrade $[x, y]$ za bilo koje $x, y \in \mathfrak{g}$.

Primjer 1.1.1. *Heisenbergova algebra $\mathfrak{h}_n$ je Liejeva algebra dimenzije $2n + 1$ s generatorima $X_i, P_j (i, j = 1, 2, ...n)$ i C koji zadovoljavaju sljedeće relacije:*

$$[P_j, X_i] = C\delta_{ij},$$

$$[C, X_i] = [C, P_j] = 0,$$

$$[X_i, X_j] = [P_i, P_j] = 0.$$

Heisenbergova algebra $\mathfrak{h}_n$ se može realizirati pomoću operatora koji djeluju na algebri polinoma $\mathbb{F}[x_1, x_2, ..., x_n]$:

$$X_i f = x_i f,$$
$$P_i f = -i\hbar \frac{\partial f}{\partial x_i},$$
$$Cf = -i\hbar I f,$$

gdje je $f \in \mathbb{F}[x_1, x_2, ..., x_n]$.

Primjer 1.1.2. *Prostor $\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ je Liejeva algebra s Poissonovom zagradom $\{\cdot,\cdot\}$ definiranom kao:*

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \Big)$$

za dvije funkcije $f = f(q_i, p_i, t)$, $g = g(q_i, p_i, t)$. Varijable q_i i p_i se daju interpretirati kao kanonske koordinate položaja i impulsa faznog prostora redom.

Primjer 1.1.3. *Realna Liejeva algebra generirana elementima L_1, L_2 i L_3 koji zadovoljavaju:*

$$[L_1, L_2] = L_3, \ \ [L_2, L_3] = L_1, \ \ [L_3, L_1] = L_2$$

je poznata pod nazivom $\mathfrak{so}(3)$. Njezini elementi se mogu realizirati kao:

$$L_i = x_k \frac{\partial}{\partial x_j} - x_j \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad \text{(i,j,k) cikličke permutacije od (1,2,3)}$$

tj. kao infinitezimalni generatori rotacija u tri dimenzije.

Primjer 1.1.4. *Algebra $\mathfrak{so}(2)$ je podalgebra od $\mathfrak{so}(3)$ generirana elementom*

$$L_3 = x_1 \frac{\partial}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_1}$$

što predstavlja rotaciju oko z-osi.

Definicija 1.1.3. *Reprezentacija Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na vektorski prostor V je linearno preslikavanje s $\mathfrak{g}$ na prostor $\mathfrak{gl}(V)$ linearnih operatora koji djeluju na V:*

$$\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V) : x \to \rho(x)$$

takve da za svaki par elemenata $x, y \in \mathfrak{g}$ vrijedi:

$$\rho([x, y]) = \rho(x) \circ \rho(y) - \rho(y) \circ \rho(x) \tag{1.4}$$

Polje nad kojim je vektorski prostor definiran mora sadržavati $\mathbb{F}$ kako bi reprezentacija bila dobro definirana, npr. možemo imati reprezentacije realnih algebri na kompleksnim vektorskim prostorima ali ne i obrnuto.

Dimenzija reprezentacije jest dimenzija vektorskog prostora V.

Definicija 1.1.4. *Adjungirana reprezentacija Liejeve algebre* $\mathfrak{g}$ *je linearno preslikavanje s* $\mathfrak{g}$ *na prostor* $\mathfrak{gl}(\mathfrak{g})$ *linearnih operatora koji djeluju na* $\mathfrak{g}$*:*

$$ad : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) : x \to ad(x)$$

definirane za bilo koje $x, y \in \mathfrak{g}$ *kao:*

$$ad(x)y = [x, y]. \tag{1.5}$$

Ponekad se koristi i oznaka $ad_x = ad(x)$. Sliku označavamo s $ad(\mathfrak{g})$.

Definicija 1.1.5. *Potprostor* W *vektorskog prostora* V *naziva se* $\rho(\mathfrak{g})$*-invarijantnim ako vrijedi:*

$$\rho(\mathfrak{g})W = \{\rho(x)w \mid x \in \mathfrak{g}, w \in W\} \subseteq W.$$

Definicija 1.1.6. *Kažemo da je reprezentacija* ρ *od* $\mathfrak{g}$ *na* V *reducibilna ako postoji pravi neiščezavajući invarijantni potprostor* W *od* V*. Reprezentacija je ireducibilna ako ne postoji netrivijalni invarijatni potprostor.*

Reprezentacija ρ *od* $\mathfrak{g}$ *na* V *je potpuno reducibilna ako svaki invarijantni potprostor* W *od* V *ima invarijantni komplement* $\tilde{W}$*, odnosno ako vrijedi:*

$$V = W \oplus \tilde{W}, \ \ \rho(\mathfrak{g})\tilde{W} \subseteq \tilde{W}.$$

Teorem 1.1.1. (Schurova lema) *Neka je* $\mathfrak{g}$ *kompleksna Liejeva algebra i* ρ *njezina reprezentacija na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru* V*.*

i. Neka je ρ *ireducibilna. Tada svaki operator* A *na* V *koji komutira sa svim* $\rho(x)$*,*

$$[A, \rho(x)] = 0, \forall x \in \mathfrak{g}$$

ima oblik $A = \lambda 1$*, za neki* $\lambda \in \mathbb{C}$

ii. Neka je ρ *potpuno reducibilna reprezentacija takva da svaki operator* A *na* V *koji komutira sa svim* $\rho(x)$ *ima oblik* $A = \lambda 1$ *za neki* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Tada je* ρ *ireducibilna [9].*

Za bilo koje elemente x,y iz $\mathfrak{g}$, preslikavanje $ad(x) \circ ad(y)$ je linearni operator na $\mathfrak{g}$ pa ima smisla razmatrat njegov trag.

Definicija 1.1.7. *Neka je* $\mathfrak{g}$ *Liejeva algebra nad* $\mathbb{F}$*. Killingova forma na* $\mathfrak{g}$ *je preslikavanje* $K : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{F}$ *definirana sa:*

$$K(x, y) = tr(ad(x) \circ ad(y)). \tag{1.6}$$

Ovdje tr *označava trag matrice, a* $ad : \mathfrak{g} \to End(\mathfrak{g})$ *je adjungirana reprezentacija.*

Primjetimo da je $K(x, y) = tr(ad(x) \circ ad(y)) = tr(ad(y) \circ ad(x)) = K(y, x)$ pa je Killingova forma simetrična.

Propozicija 1.1.1. *Killingova forma je bilinearna.*

Dokaz.

$$\begin{aligned} K(\alpha x_1 + \beta x_2, y) &= tr(ad(\alpha x_1 + \beta x_2) \circ ad(y)) \\ &= tr((\alpha ad(x_1) + \beta ad(x_2)) \circ ad(y)) \\ &= \alpha tr(ad(x_1) \circ ad(y)) + \beta tr(ad(x_2 \circ ad(y)) \\ &= \alpha K(x_1, y) + \beta K(x_2, y) \end{aligned}$$

za sve $x, y \in \mathfrak{g}, \alpha, \beta \in \mathbb{F}$. Linearnost u drugom članu slijedi iz simetričnosti Killingove forme. ■

Definicija 1.1.8. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i neka su $x, y \in V$. Kažemo da je bilinearna forma K nedegenerirana ako i samo ako*

$$K(x,y) = 0, \forall y \in V$$

implicira da je $x = 0$.

Teorem 1.1.2. *Neka je K bilinearna forma na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V dimenzije n i neka je A njena matrica u odnosu na bazu B od V. Tada je K nedegenerirana ako i samo ako je A regularna matrica [6].*

Primjer 1.1.5. *Neka je $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(2,\mathbb{C}) = \{X \in gl(2,\mathbb{C}) \mid tr(X) = 0\}$. Njena standardna baza je dana s:*

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Komutacijske relacije među njima su:

$$[h,e] = 2e$$

$$[h,f] = -2f$$

$$[e,f] = h$$

Kako je $ad(e_i)(e_j) = [e_i, e_j]$, to slijedi:

$$ad(e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ ad(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ ad(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dakle,

$$K(e,e) = tr(ad(e) \circ ad(e)) = tr \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$K(e,f) = tr(ad(e) \circ ad(f)) = tr \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 4,$$

$$K(e,h) = tr(ad(e) \circ ad(h)) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$K(f,f) = tr(ad(f) \circ ad(f)) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$K(f,h) = tr(ad(f) \circ ad(h)) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$K(h,h) = tr(ad(h) \circ ad(h)) = tr \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8,$$

iz čega slijedi da je matrica Killingove forme K u standardnoj bazi (e, f, h):

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Dakle, determinanta je $-128 \neq 0$, pa je po Teoremu 1.1.2 K nedegenerirana.

Definicija 1.1.9. *Prosta Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je nekomutativna Liejeva algebra čiji su jedini ideali $\{0\}$ i ona sama.*

Definicija 1.1.10. *Neka su $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$ dvije Liejeve algebre. Vektorski prostor $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{h}$ svih parova oblika $(x, y), x \in \mathfrak{g}, y \in \mathfrak{h}$ sa zagradom*

$$[(x_1, y_1), (x_2, y_2)] = ([x_1, x_2], [y_1, y_2]), x_1, x_2 \in \mathfrak{g}, y_1, y_2 \in \mathfrak{h}$$

čini Liejevu algebru koju nazivamo direktna suma Liejevih algebri $\mathfrak{g}$ i $\mathfrak{h}$.

Definicija 1.1.11. *Kažemo da je Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ poluprosta ako je direktna suma prostih Liejevih algebri.*

Primjer 1.1.6. *Liejeva algebra $so(4)$ je definirana s komutatorskim relacijama:*

$$[X_1, X_2] = X_3, \;\; [X_2, X_3] = X_1, \;\; [X_3, X_1] = X_2,$$

$$[Y_1, Y_2] = X_3, \;\; [Y_2, Y_3] = X_1, \;\; [Y_3, Y_1] = X_2$$

$$[X_i, Y_j] = \epsilon_{ijk} Y_k$$

gdje je ϵ_{ijk} takozvani Levi-Civita simbol definiran kao:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{parna permutacija indeksa,} \\ -1, & \text{neparna permutacija indeksa,} \\ 0, & \text{barem dva indeksa ista.} \end{cases}$$

Napravimo li promjenu baze:

$$J_i = \frac{X_i + Y_i}{2}, \;\; K_i = \frac{X_i - Y_i}{2}, \;\; i = 1, 2, 3,$$

algebra se da reducirati na oblik:

$$[J_1, J_2] = J_3, \;\; [J_2, J_3] = J_1, \;\; [J_3, J_1] = J_2,$$

$$[K_1, K_2] = K_3, \;\; [K_2, K_3] = K_1, \;\; [K_3, K_1] = K_2,$$

$$[J_i, K_j] = 0, \;\; i = 1, 2, 3.$$

Iz čega je očito da je algebra $\mathfrak{so}(4)$ direktna suma dviju $\mathfrak{so}(3)$ algebri generiranih elementima J_1, J_2, J_3 i K_1, K_2, K_3 redom. Ovaj primjer ima bitnu fizikalnu primjenu koju ćemo vidjeti kasnije.

Teorem 1.1.3. (Cartanov kriterij) *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra nad $\mathbb{F}$. Tada je $\mathfrak{g}$ poluprosta ako i samo ako je Killingova forma K nedegenerirana [6].*

Dakle, Liejeva algebra $\mathfrak{g}$ je poluprosta ako i samo ako je determinanta odgovarajuće Killingove forme različita od nule.

Primjer 1.1.7. *Liejeva algebra $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ iz Primjera 2.1.5 je poluprosta.*

Primjer 1.1.8. *Lorentzova algebra u 2+1 dimenzija, u oznaci $\mathfrak{so}(2, 1)$, definirana komutatorskim relacijama*

$$[X_1, X_2] = X_3, \;\; [X_2, X_3] = -X_1, \;\; [X_3, X_1] = X_2$$

je poluprosta. Izračunajmo pripadajuću Killilngovu formu kako bi dokazali ovu tvrdnju. Kao i prije:

$$ad(X_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(X_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad(X_3) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dakle,

$$K(X_1, X_1) = tr(ad(X_1) \circ ad(X_1)) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -2,$$

$$K(X_1, X_2) = tr(ad(X_1) \circ ad(X_2)) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$K(X_1, X_3) = tr(ad(X_1) \circ ad(X_3)) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$K(X_2, X_2) = tr(ad(X_2) \circ ad(X_2)) = tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

$$K(X_2, X_3) = tr(ad(X_2) \circ ad(X_3)) = tr \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

$$K(X_3, X_3) = tr(ad(X_3) \circ ad(X_3)) = tr \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2.$$

Iz prethodnog računa slijedi da je matrica Killingove forme K u bazi (X_1, X_2, X_3):

$$K = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Determinanta je $-8 \neq 0$, pa je po Cartanovom kriteriju algebra $\mathfrak{so}(2,1)$ poluprosta.

Propozicija 1.1.2. *Bilo kojoj asocijativnoj algebri $A \cong (V, *)$ možemo pridružiti Liejevu algebru $\mathfrak{g} \cong (V, [\,])$ nad istim vektorskim prostorom V, gdje je Liejeva zagrada dana sa:*

$$[x, y] = x * y - y * x, \;\; x, y \in V$$

Takvu algebru nazivamo komutatorska algebra od A i označavamo ju s $[A]$.

Definicija 1.1.12. *Tenzorska algebra vektorskog prostora V nad poljem $\mathbb{F}$ je vektorski prostor*

$$T(V) = \oplus_{k=0}^{\infty} V^{\otimes k} = \mathbb{F} \oplus V \oplus V \otimes V \oplus ... \oplus V^{\oplus k} \oplus ..., \mathbb{F} \equiv V^0 \tag{1.7}$$

Definicija 1.1.13. *Univerzalna omotačka algebra $U(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ nad poljem $\mathbb{F}$ je unitalna asocijativna algebra $U(\mathfrak{g})$ nad $\mathbb{F}$ zajedno s homomorfizmom Liejevih algebri $i : \mathfrak{g} \to [U(\mathfrak{g})]$ takav da ako je A proizvoljna asocijativna algebra nad $\mathbb{F}$ i $\phi : \mathfrak{g} \to [A]$ homomorfizam Liejevih algebri, onda postoji jedinstveni homomorfizam $\psi : U(\mathfrak{g}) \to A$ asocijativnih algebri koji inducira homomorfizam Liejevih algebri $\Psi : [U(\mathfrak{g})] \to [A]$ takav da sljedeći dijagram komutira:*

$$\begin{tikzcd} \mathfrak{g} \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\phi"'] & & {[U(\mathfrak{g})]} \arrow[dl, "\psi"] \\ & {[A]} & \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

Ovo svojstvo iskazano komutativnim dijagramom naziva se univerzalno svojstvo omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$.

Teorem 1.1.4. *Neka je $\mathfrak{g}$ Liejeva algebra. Promotrimo dvostrani ideal J asocijativne algebre $T(\mathfrak{g})$ generirane elementima oblika $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$, odnosno:*

$$J = \langle x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g} \rangle \tag{1.9}$$

Kvocijentna algebra

$$U(\mathfrak{g}) = T(\mathfrak{g})/J \tag{1.10}$$

je tada univerzalna omotačka algebra Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Očito je da su univerzalne omotačke algebre asocijativne. Drugim riječima, pojam univerzalne omotačke algebre nam omogućava da konstruiramo beskonačno-dimenzionalnu asocijativnu algebru iz bilo koje Liejeve algebre.

Glavni razlog za uvođenje univerzalnih omotačkih algebri je sljedeći: primjetimo da svaka reprezentacija $\rho : \mathfrak{g} \to gl(V)$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V prirodno inducira reprezentaciju $\tilde{\rho} : T(\mathfrak{g}) \to End(V)$ tenzorske algebre $T(\mathfrak{g})$ definirane kao:

$$\tilde{\rho}(x_1 \otimes x_2 \otimes ... \otimes x_n) = \rho(x_1) \cdot \rho(x_2) \cdot ... \cdot \rho(x_n).$$

Prethodna definicija reprezentacije $\mathfrak{g}$ implicira da je $\tilde{\rho}(J) = 0$, što se lako dokaže:

$$\begin{aligned}
\tilde{\rho}(x \otimes y - y \otimes x - [x, y]) &= \tilde{\rho}(x \otimes y) - \tilde{\rho}(y \otimes x) - \tilde{\rho}([x, y]) \\
&= \rho(x)\rho(y) - \rho(y)\rho(x) - \tilde{\rho}([x, y]) \\
&= \rho([x, y]) - \tilde{\rho}([x, y]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

jer je $\tilde{\rho} \mid_{\mathfrak{g}} = \rho$. Posljedično, reprezentacija $\tilde{\rho}$ također definira reprezentaciju $\hat{\rho}$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ na vektorskom prostoru V:

$$\hat{\rho}(a) = \tilde{\rho}(A), \quad a = A + J(\mathfrak{g}), \quad A \in T(\mathfrak{g})$$

Definicija 1.1.14. *Centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je podalgebra elemenata koji komutiraju sa svim elementima iz $\mathfrak{g}$ i označavamo ga s:*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{z \in \mathfrak{g} \mid [z, g] = 0, \forall g \in \mathfrak{g}\} \tag{1.11}$$

Centralizator podskupa S Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ je podalgebra elemenata koji komutiraju sa svim elementima iz S i označava se s:

$$C_{\mathfrak{g}}(S) = \{z \in \mathfrak{g} \mid [z, s] = 0, \forall s \in S\} \tag{1.12}$$

Primjetimo pošto je centar Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ komutativni ideal, ako je $\mathfrak{g}$ poluprosta, tada je centar nula.

Teorem 1.1.5. (Poincaré-Birkhoff-Witt) *Neka je $\{x_i : i \in I\}$ baza Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ i $<$ totalno uređenje na skupu indeksa I. Neka je $\sigma : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ prirodno linearno preslikavanje iz $\mathfrak{g}$ u njenu omotačku algebru, takvo da je $\sigma(x_i) = y_i$. Tada elementi*

$$y_{i_1}^{r_1} y_{i_2}^{r_2} ... y_{i_n}^{r_n},$$

gdje su $n, r_i \in \mathbb{N}_0, i_1 \leq i_2 \leq ... \leq i_{n-1} \leq i_n$, čine bazu od $U(\mathfrak{g})$ [4].

U svrhu izbjegavanja kompliciranja oznaka, y_i iz prethodnog teorema se identificiraju s elementima baze x_i Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.

Lema 1.1.1. *Centar $Z(U(\mathfrak{g}))$ univerzalne omotačke algebre $U(\mathfrak{g})$ jednak je centralizatoru $C_{U(\mathfrak{g})}(\mathfrak{g})$ Liejeve algebre $\mathfrak{g}$.*

Dokaz. Svaki element centra univerzalne omotačke algebre mora komutirati sa svim elementima bilo kojeg podskupa od $U(\mathfrak{g})$ pa tako i s $\mathfrak{g}$. Nadalje, po PBW teoremu svaki element koji komutira s bazom od $\mathfrak{g}$ komutira s bilo kojom bazom od $U(\mathfrak{g})$. ∎

Iz prethodne leme slijedi da pošto elementi Liejeve algebre $\mathfrak{g}$ generiraju $U(\mathfrak{g})$, onda bilo koji element iz $U(\mathfrak{g})$ koji komutira sa svim elementima iz $\mathfrak{g}$ je u centru Z($U(\mathfrak{g})$). Dakle, centar je izravno koristan za klasificiranje reprezentacija od $\mathfrak{g}$.

1.2 Casimirov operator

Operatori koje ćemo ubrzo uvesti imaju vrlo veliku ulogu u primjenama što će biti fokus idućeg poglavlja. Naziv su dobili po nizozemskom fizičaru Hendriku Casimiru koji ih je uveo 1931. godine proučavajući dinamiku krutih tijela, a danas u fizici predstavljaju poprilično bitne veličine, npr. angularni moment, masu i spin čestica te Hamiltonijan raznih fizikalnih sustava kao što ćemo i vidjeti poslije.

No, prije nego prebacimo svu pažnju na njih, vratimo se Killingovoj formi i ekvivalentnoj definiciji iste, proučavajući svojstva koja nam do sada nisu bila potrebna pažnje.

Definirajmo takozvani metrički tenzor g_{ij}, ponekad znan pod imenom Cartan-Killingova metrika, kao:

$$g_{ij} = K(x_i, x_j). \tag{1.13}$$

Sada Killingovu formu možemo napisati preko metričkog tenzora kao:

$$K(u, v) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i g_{ij} v_i \tag{1.14}$$

gdje su $u = \sum_{i=1}^{n} u_i x_i$, $v = \sum_{j=1}^{n} v_i x_i$.

Razlog za uvođenje metričkog tenzora u ovom obliku je zbog zgodnijeg zapisa prilikom definicije titularnih operatora, što nipošto ne znači da i dalje nećemo koristiti Killingovu formu. Naime, od velike važnosti nam je njeno svojstvo invarijantnosti:

Definicija 1.2.1. *Neka je K nedegenerirana bilinearna forma na $\mathfrak{g}$. Kažemo da je K invarijantna ako vrijedi:*

$$K([x, y], z) = K(x, [y, z]) \tag{1.15}$$

za svake $x, y, z \in \mathfrak{g}$.

Propozicija 1.2.1. *Killingova forma K je invarijantna.*

Dokaz. Neka su $x, y, z \in \mathfrak{g}$. Tada je:

$$\begin{aligned}
K([x, y], z) &= tr(ad([x, y])ad(z)) \\
&= tr(ad(xy)ad(z) - ad(yx)ad(z))) \\
&= tr(ad(x)ad(y)ad(z)) - tr(ad(y)ad(x)ad(z)) \\
&= tr(ad(x)ad(y)ad(z)) - tr(ad(x)ad(z)ad(y)) \\
&= tr(ad(x)ad(yz - zy)) \\
&= tr(ad(x)ad([y, z])) \\
&= K(x, [y, z])
\end{aligned}$$

čime je tvrdnja dokazana. ∎

Propozicija 1.2.2. *Metrički tenzor g_{ij} da se napisati preko strukturnih konstanti c_{ij}^k kao:*

$$g_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} c_{il}^k c_{jk}^l. \tag{1.16}$$

Dokaz. Prisjetimo se da vrijedi:

$$ad(x_i)(x_j) = [x_i, x_j]$$

S druge strane, strukturne konstante su definirane tako da je ispunjeno:

$$[x_i, x_j] = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$$

Dakle,

$$ad(x_i)(x_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$$

iz čega izravno slijedi:

$$ad(x_i)_{jk} = c_{ij}^k$$

Izravnim računom dobijemo:

$$\begin{aligned} g_{ij} = K(x_i, x_j) &= tr(ad(x_i)ad(x_j)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} (ad(x_i)ad(x_j))_{kk} \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} ad(x_i)_{lk} ad(x_j)_{kl} \\ &= \sum_{k,l=1}^{n} c_{il}^k c_{jk}^l \end{aligned}$$

što smo i htjeli dokazati. ■

Neka u ostatku teksta $\mathfrak{g}$ označava poluprostu Liejevu algebru osim ako nije posebno naglašeno. Inverz metričkog tenzora $g^{-1} = [g^{ij}]$ postoji jer je Killingova forma nedegenerirana prema Cartanovom kriteriju.

Definicija 1.2.2. *Kvadratni Casimirov element $c(\mathfrak{g})$ definira se kao:*

$$c = \sum_{i,j=1}^{n} g^{ij} x_i x_j \tag{1.17}$$

U definiciji kvadratnog Casimirovog elementa možemo zamijeniti članove na sljedeći način:

$$c = \sum_{i=1}^{n} x_i (\sum_{j=1} g^{ij} x_j),$$

preko čega definiramo dualnu bazu sa:

$$x^i \equiv \sum_{j=1}^{n} g^{ij} x_j, i = 1, 2, ...n \tag{1.18}$$

Naravno, $(x^1, x^2, ..., x^n)$ je također baza od $\mathfrak{g}$.

Propozicija 1.2.3. *Za elemente baze i njoj dualne vrijedi:*

$$K(x_i, x^j) = \delta_{ij}, \tag{1.19}$$

gdje je δ_{ij} Kroneckerov delta simbol:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i{=}j, \\ 0, & i{\neq}j. \end{cases}$$

Dokaz. Izravnim računom dobijemo:

$$\begin{aligned}
K(x_i, x^j) &= \sum_{k,l=1}^{n} (x_i)_k g_{kl} (x^j)_l = \sum_{kl}^{n} \delta_{ik} g_{kl} (x^j)_l \\
&= \sum_{l=1}^{n} g_{il} (x^j)_l = \sum_{l=1}^{n} g_{il} \Big(\sum_{p=1}^{n} g^{jp} x_p \Big)_l \\
&= \sum_{l=1}^{n} g_{il} g^{jl} = \sum_{l=1}^{n} g^{jl} g_{li} \\
&= \delta_{ij}.
\end{aligned}$$

U predzadnjoj crti smo koristili svojstvo inverznih matrica. ■

Prethodnim uvjetom zapravo definiramo jedinstvenu dualnu bazu.

Propozicija 1.2.4. *Kvadratni Casimirov element c ne ovisi o izboru baze od $\mathfrak{g}$.*

Dokaz. Neka je $(y_1, y_2, ..., y_n)$ druga baza od $\mathfrak{g}$ i $(y^1, y^2, ..., y^n)$ njoj dualna baza. Neka su elementi novih baza dani sa:

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} x_j, \quad y^i = \sum_{j=1}^{n} \tau_{ij} x^j, \quad \sigma_{ij}, \tau_{ij} \in \mathbb{F}, 1 \leq i, j \leq n$$

Tada imamo:

$$\begin{aligned}
K(y_i, y^j) &= K(\sum_{k=1}^{n} \sigma_{ik} x_k, \sum_{l=1}^{n} \tau_{il} x^l) \\
&= \sum_{k,l=1}^{n} \sigma_{ik} \tau_{jl} K(x_k, x^l) \\
&= \sum_{k} \sigma_{ik} \tau_{jk}.
\end{aligned}$$

Uvedemo li oznake $\sigma = (\sigma_{ij})$, $\tau = (\tau_{ij})$, dobijemo:

$$\sigma\tau^T = I$$

Nadalje,

$$\begin{aligned}\sum_i y_i y^i &= \sum_i (\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} x_j)(\sum_{k=1}^n \tau_{ik} x^k) \\ &= \sum_{j,k=1}^n (\sum_{i=1}^n \sigma_{ij}\tau_{ik}) x_j x^k.\end{aligned}$$

Iz računa koji prethodi ovome, slijedi $\sigma^T\tau = I$ odnosno

$$\sum_{i=1}^n \sigma_{ij}\tau_{ik} = \delta_{jk}.$$

Dakle,

$$\sum_{i=1}^n x_i x^i = \sum_{i=1}^n y_i y^i$$

. ■

Teorem 1.2.1. *Casimirov operator c leži u centru $Z(U(\mathfrak{g}))$ univerzalne omotačke algebre.*

Dokaz. Zbog Leme 2.1.1 i PBW teorema, dovoljno je pokazati da Casimirov operator komutira sa svim elementima iz $\mathfrak{g}$ odnosno:

$$[c, x] = 0, \quad \forall x \in \mathfrak{g} \tag{1.20}$$

Koristeći komutatorske relacije, imamo redom:

$$\begin{aligned}cx = \sum_{i=1}^n x_i x^i x &= \sum_{i=1}^n x_i (x x^i + [x^i, x]) \\ &= \sum_{i=1}^n ((x x_i + [x_i, x]) x^i + x_i [x^i, x]) \\ &= xc + \sum_{i=1}^n ([x_i, x] x^i + x_i [x^i, x]).\end{aligned}$$

Neka je $[x_i, x] = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j$ i $[x^i, x] = \sum_{j=1}^n \beta_{ij} x^j$. Kako je Killingova forma invarijantna i uzimajući u obzir da je $K(x_i, x^i) = \delta_{ij}$, to imamo:

$$\begin{aligned}\alpha_{ik} &= \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} K(x_j, x^k] = K(\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j, x^k) \\ &= K([x_i, x], x^k) = K(x_i, [x, x^k]) \\ &= -K(x_i, \sum_{j=1}^n \beta_{kj} x^j) = -\sum_{j=1}^n \beta_{kj} K(x_i, x^j) \\ &= -\beta_{ki}\end{aligned}$$

Nastavimo sada s početnim računom:

$$\begin{aligned} cx &= xc + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_jx^i + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\beta_{ij}x_ix^j \\ &= xc + \sum_{i,j=1}^{n}(\alpha_{i,j}+\beta_{ji})x_jx^i \\ &= xc \end{aligned}$$

Dakle, $[x,c]=0$ tj. $c \in Z(U(\mathfrak{g}))$. ■

Zbog Schurove leme, Casimirovi operatori se manifestiraju kao linearni operatori s konstantnim vrijednostima za svaku reprezentaciju promatrane Liejeve algebre što ima velike primjene u fizici.

Primjer 1.2.1. *Pronađimo Casimirov operator Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$. Potpunosti radi, izračunajmo njen metrički tenzor preko strukturnih konstanti. Znamo da vrijede komutatorske relacije:*

$$[L_1,L_2]=L_3,\ \ [L_2,L_3]=L_1,\ \ [L_3,L_1]=L_2,$$

iz čega izravno slijedi:

$$c_{12}^3=1,\ \ c_{13}^2=-1,\ \ c_{2,3}^1=1$$

$$c_{2,1}^3=-1,\ \ c_{3,1}^2=1,\ \ c_{3,2}^1=-1$$

dok su svi drugi očigledno nula. Sada možemo izračunati komponente metričkog tenzora:

$$\begin{aligned} g_{11} &= \sum_{kl}^{n} c_{1l}^k c_{1k}^l = -2, \quad g_{12} = \sum_{kl}^{n} c_{1l}^k c_{2k}^l = 0, \quad g_{13} = \sum_{kl}^{n} c_{1l}^k c_{3k}^l = 0 \\ g_{21} &= \sum_{kl}^{n} c_{2l}^k c_{1k}^l = 0, \quad g_{22} = \sum_{kl}^{n} c_{2l}^k c_{2k}^l = -2, \quad g_{23} = \sum_{kl}^{n} c_{2l}^k c_{3k}^l = 0 \\ g_{31} &= \sum_{kl}^{n} c_{3l}^k c_{1k}^l = 0, \quad g_{32} = \sum_{kl}^{n} c_{3l}^k c_{2k}^l = 0, \quad g_{33} = \sum_{kl}^{n} c_{3l}^k c_{3k}^l = -2, \end{aligned}$$

što u konačnici daje:

$$g = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Inverz je dan sa:

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix},$$

što rezultira s kvadratnim Casimirovim operatorom:

$$C = -\frac{1}{2}(L_1^2 + L_2^2 + L_3^2).$$

Ako uvedemo supstituciju $J_j = \sqrt{2} \cdot i, j = 1, 2, 3,$ *gdje je* $i = \sqrt{-1}$, *dobijemo:*

$$C' = -2C = J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 \tag{1.21}$$

što je najčešći zapis Casimirovog operatora angularnog momenta u kvantnoj mehanici. Faktor $i = \sqrt{-1}$ *nam omogućava da su operatori* J_i *hermitski - nužan uvjet da predstavljaju fizikalno mjerljive veličine.*

Mi smo ovdje razmatrali samo Casimirove operatore drugog reda jer se upravo oni najčešće javljaju u primjenama. Općenitije, daju se definirati i Casimirovi operatori višeg reda ali za našu svrhu oni nama nisu previše potrebni.

Definicija 1.2.3. *Casimirovi operatori reda p dani su sa:*

$$c_p = c^{\beta_2}_{\alpha_1\beta_1} c^{\beta_3}_{\alpha_2\beta_2} ... c^{\beta_1}_{\alpha_p\beta_p} x^{\alpha_1} x^{\alpha_2} ... x^{\alpha_p} \tag{1.22}$$

Promatramo li pak Liejevu algebru koja nije poluprosta, Casimirovi operatori se ne mogu tako jednostavno konstruirati. Općenito je to težak postupak no mi ćemo ilustrirati na jednom primjeru da pokažemo da se ovako umjetno dobiveni Casimirov operator ne slaže s generalnom definicijom za poluproste Liejeve algebre:

Primjer 1.2.2. *Euklidska algebra e(2) dana s komutatorskim relacijama:*

$$[e_1, e_2] = e_3, \quad [e_1, e_3] = -e_2, \quad [e_2, e_3] = 0$$

nije poluprosta što lako možemo vidjeti izračunom determinante metričkog tenzora:

$$g = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow det(g) = 0.$$

Invarijantni operator ove algebre jest:

$$c = e_2^2 + e_3^2$$

Lako provjerimo tu tvrdnju:

$$[e_2^2, e_1] = e_2[e_2, e_1] + [e_2, e_1]e_2 = -2e_2e_3$$

$$[e_3^2, e_1] = e_3[e_3, e_1] + [e_3, e_1]e_3 = 2e_2e_3$$

Dakle,

$$[c, e_i] = 0, \;\; i = 1, 2, 3.$$

Poglavlje 2

Fizikalne primjene

U prethodnom poglavlju smo se poprilično detaljno upoznali s konceptima i osnovama Liejevih algebri i Casimirovih operatora, čak ilustrirajući na nekim primjerima teoretske primjene. Ovo poglavlje posvećeno je detaljnijoj razradi interpretacije tih apstraktnih pojmova u svijetu teorijske fizike. Kroz primjere ćemo pokušat pratiti povijesni razvoj, od već spomenutih Poissonovih zagrada iz klasične mehanike do moderne fizike kroz primjere u relativistici i kvarkovima.

2.1 Poissonove zagrade

Bez prevelikog ulaženja u detalje, Hamiltonova formulacija klasične mehanike je reformulacija Lagrangeovog formalizma. Vremenska evolucija sustava je na jedinstven način definirana Hamiltonovim jednadžbama:

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = 1, 2, ..., n. \tag{2.1}$$

Ovdje je $H = H(\vec{q}, \vec{p}, t)$ Hamiltonijan sustava koji je zapravo Legendreova transformacija Lagrangijana, ali u većini slučajeva odgovara ukupnoj energiji sustava; za zatvoreni sustav on je jednak zbroju kinetičke i potencijalne energije.

Iako ovakav zapis klasičnih jednadžbi gibanja ima određenu dozu simetrije, Poissonove zagrade osim što omogućuju zgodan zapis očuvanja fizikalnih veličina daju potpuno simetričan oblik Hamiltonovih jednadžbi gibanja:

$$\dot{q}_i = \{q_i, H\}, \quad \dot{p}_i = \{p_i, H\}, \tag{2.2}$$

gdje točkica nad varijablom označava vremensku derivaciju te varijable. Ograničimo li promatranje samo na konfiguracijski (impulsni) dio faznog prostora, svaka komponenta položaja (impulsa) je Casimirov operator:

$$\{q_i, q_j\} = 0, \quad (\{p_i, p_j\} = 0),$$

dok je Poissonova zagrada para odgovarajućeg položaja i impulsa jednaka:

$$\{q_i, p_j\} = \delta_{ij}$$

Međutim, za komponente angularnog momenta imamo drukčiju situaciju:

$$\{J_1, J_2\} = J_3, \quad , \{J_2, J_3\} = J_1, \quad \{J_3, J_1\} = J_2.$$

To možemo kraće zapisati preko Levi-Civita simbola:

$$\{J_i, J_j\} = \epsilon_{ijk} J_k, \quad i, j, k = 1, 2, 3.$$

Prethodna jednadžba nam također pokazuje da je angularni moment okomit na Poissonovu zagradu njega i bilo koje komponente:

$$\vec{J} \cdot \{\vec{J}, J_j\} = J_i \{J_i, J_j\} = \epsilon_{ijk} J_i J_k = 0,$$

gdje je $\{\vec{J}, J_i\} = \sum_{i=1}^{3} \{J_i, J_j\} \vec{e}_i$. Iz toga direktno slijedi:

$$\{J^2, J_i\} = 0. \tag{2.3}$$

Dakle, J^2 je Casimirov operator! Međutim, to ne bi trebalo biti pretjerano iznenađujuće, uzevši u obzir da on nije ništa više nego suma kvadrata svih komponenti što je upravo rezultat koji smo dobili za Casimirov operator algebre svih rotacija u tri dimenzije.

Kada opisujemo klasično gibanje, koristimo Galilejeve transformacije iz kojih slijede pojedini zakoni očuvanja. Hamiltonijan H je povezan s translacijama u vremenu, količina gibanja $\vec{P}$ s translacijama u konfiguracijskom prostoru, veličina $\vec{N} = \vec{P}t - m\vec{X}$ s translacijama u prostoru brzina i angularni moment $\vec{J}$ s rotacijama. Veličinu $\vec{N}$ uvodimo kako bi gibanje klasičnog tijela opisali isključivo koristeći veličine direktno vezane za simetrije.

Možemo pokazati da svako (klasično) gibanje uvijek ima dvije „univerzalne“ Casimirove invarijante. Dokažimo tu tvrdnju.

Svo gibanje se može rastaviti u gibanje centra mase opisano preko varijabli $\vec{P}$ i $\vec{N}$ čiji je angularni moment dan sa:

$$\vec{X} \times \vec{P} = \vec{P} \times \frac{\vec{N}}{m},$$

i relativno gibanje promatrano iz sustava koje se giba s centrom mase. Nadalje, kako je ukupna kinetička energija centra mase $P^2/2m$, relativna energija i relativni angularni moment (veličine mjerene iz sustava koji se giba zajedno s centrom mase) su redom:

$$H' \equiv H - \frac{P^2}{2m}, \quad \vec{M} \equiv \vec{J} - \vec{P} \times \frac{\vec{N}}{m}.$$

Lako se pokaže da vrijedi:

$$\{H', H'\} = 0, \quad \{H', M_i\} = 0, \quad \{M_i, M_j\} = \epsilon_{ijk} M_k, \tag{2.4}$$

nalik na standardnu energiju i angularni moment. Kao i za obični Hamiltonijan, nije iznenađujuće što i Poissonova zagrada njega u kombinaciji s preostalim koordinatama iščezava. Nadalje, kao što smo učinili za angularni moment u jednadžbi (2.3), možemo izgraditi veličinu izgrađenu od komponenti relativnog angularnog momenta. Tradicionalno se za tu veličinu uzima iznos M, no, za razliku od kvadrata angularnog momenta koji komutira samo u algebri rotacija, M ima iščezavajuće Poissonove zagrade i u rotacijama. Dakle, H' i M su Casimirove invarijante svojstvene svakom gibanju.

Općenito, za klasičnu mehaniku se ne može ništa više novo ni reći glede Casimirovih operatora osim ako ne kopamo preduboko u Keplerijanske probleme. Povijesno gledajući ovo je njihov početak ali prava primjena tj. ono s čim su oni danas asocirani jest u svijetu kvantne mehanike.

2.2 Angularni moment

Velika važnost Casimirovog operatora u kvantnoj mehanici leži u sljedećoj činjenici: ako dvije opservable komutiraju, tada ih je moguće istovremeno izmjeriti! Vjerojatno najpoznatiji primjer kvadratnog Casimirovog operatora jest upravo operator kvadrata angularnog momenta pa ćemo mi ovdje samo navesti konačan rezultat za svojstvene vrijednosti koji se može naći u bilo kojoj knjizi iz kvantne mehanike.

Ako naš fizikalni eksperiment mjeri ukupni angularni moment J^2, rezultat će biti oblika $\hbar^2 j(j+1)$ gdje je $2j \in \mathbb{N}_0$. Zapisano u Diracovoj bra-ket notaciji:

$$J^2|j,m\rangle = \hbar^2 j(j+1)|j,m\rangle \tag{2.5}$$

U prethodnom izrazu J možemo zamijeniti za L i j za l pa u tom slučaju pričamo o orbitalnom angularnom momentu gdje se j naziva orbitalni kvantni broj. Također ih možemo zamijeniti za S i s redom gdje se broj s naziva spinskim kvantnim brojem ili nekad jednostavno spinom. Naprimjer, čestica spina 1/2 je ona za koju je izmjereno $s = 1/2$.

Dodatni razlog zašto ovdje ne prolazimo kroz detalje ovog izvoda je taj što on ne koristi nikakve principe koje smo ustanovili u prvom poglavlju već je rješiv standardnom procedurom uvođenja operatora ljestvi (ponekad znani i kao operatori kreacije i anihilacije ili dizanja i spuštanja).

Primjenu dosadašnje teorije prepuštamo idućem primjeru, vodikovom atomu. Prije nego krenemo na njega, potrebno nam je definirati još jedan apstraktni pojam koji danas ima visoke primjene u fizici.

Definicija 2.2.1. *Hilbertov prostor $\tilde{H}$ je realni ili kompleksni unitarni prostor koji je potpun obzirom na normu induciranu skalarnim umnoškom.*

Primjer 2.2.1. *U kvantnoj mehanici za Hilbertov prostor uzimamo prostor kvadratno integrabilnih funkcija nad $\mathbb{R}$.*

2.3 Energetski spektar vodikovog atoma

Sljedeći izvod koji demonstrira fizikalnu važnost Casimirovih operatora je zasluga Wolfganga Paulija. Naime, Pauli je napisao svoj rad 1926. godine što znači da je koristio svojstva Casimirovih operatora 5 godina prije nego su oni formalno uvedeni. Unatoč tome, ovaj izvod se i dalje smatra jednim od najvažnijim koji demonstrira njihovu korist u fizici. Osim toga, sam rad je bio revolucionaran u svijetu fizike jer se slagao s rezultatima koje je Bohr dobio 1913. godine i tako priklonio mnoge novoj kvantnoj teoriji:

Od ovog trenutka, nije više bilo sumnje oko točnosti [kvantne] teorije među fizičarima. (Max Born, *Physics in My Generation* (1956), p. 181)

Cilj je odrediti spektar vodika služeći se samo algebarskim metodama.

Hamiltonijan elektrona u vodikovom atomu je dan sa:

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\sum_{i=1}^{3}\vec{P}_j^2 - \frac{Q}{r}, \tag{2.6}$$

gdje su $\hat{P}_i = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$ operatori količine gibanja u $\mathbb{R}^3$ s koordinatama x_1, x_2 i x_3. M je masa elektrona, a $Q = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0}$ u SI jedinicama.

Gornji Hamiltonijan ima tri očita integrala gibanja - funkcije koordinata koje su konstante po trajektoriji u faznom prostoru:

$$\hat{L}_j = \frac{1}{\hbar}\sum_{k,l=1}^{3}\epsilon_{jkl}\hat{X}_k\hat{P}_l \tag{2.7}$$

tj. bezdimenzionalne komponente angularnog momenta. Bezdimenzionalnost samo pomaže u daljnem izračunu, ne mijenja nikakve ishode. Također postoje tri malo manje očita integrala gibanja; komponente takozvanog Laplace-Runge-Lenz vektora:

$$\hat{K}_i = \frac{1}{2MQ}\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{ikj}(\hat{P}_k\hat{L}_j + \hat{L}_j\hat{P}_k) - \frac{1}{\hbar}\frac{x_i}{r}. \tag{2.8}$$

Općenito, Laplace-Runge-Lenz vektor ili LRL vektor je vektor koji u klasičnoj mehanici opisuje oblik i orijentaciju orbite nekog astronomskog tijela oko drugog, npr. planeta oko zvijezde te je konstantan u svim Keplerijanskim problemima odnosno problemima gdje dva tijela interagiraju centralnom silom koja opada kvadratom udaljenosti među njima.

Izraz x_i/r se može interpretirati kao operator množenja s danom funkcijom koordinata.

Uvedimo oznake:

$$\hat{L}^2 = \sum_{j=1}^{3}\hat{L}_j\hat{L}_j, \quad \hat{K}^2 = \sum_{j=1}^{3}\hat{K}_j\hat{K}_j. \tag{2.9}$$

Koliko god zapanjujuće zvučalo, poznavanje ovih integrala gibanja je sve što je potrebno za odrediti spektar vezanih stanja vodikovog atoma.

Kao i u ostalim algebarskim izračunima spektara kvantnih stanja, komutatori ovdje imaju centralnu ulogu.

Izravnim računom se dobije:

$$[\hat{L}_j, \hat{L}_k] = i \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \hat{L}_l \tag{2.10}$$

$$[\hat{L}_j, \hat{K}_k] = i \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \hat{K}_l \tag{2.11}$$

$$[\hat{K}_j, \hat{K}_k] = -\frac{2i}{MQ^2} \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \hat{L}_l \hat{H} \tag{2.12}$$

Posljednja komutatorska relacija sprječava operatore $\hat{L}_j$ i $\hat{K}_j$ da formiraju Liejevu algebru. Naime, pojava operatora $\hat{H}$ u posljednjem izrazu onemogućava zatvorenost koristeći samo operatore $\hat{L}_j$ i $\hat{K}_j$. Iako se ovo može činit kao bitna prepreka, možemo ju premostiti ako promatramo određeni energetski nivo. Naime, ograničimo li se na potprostor $\tilde{H}_E$ Hilbertovog prostora $\tilde{H}$, operatori su restringirani na taj potprostor jer komutiraju s $\tilde{H}$. Tada se $\hat{H}$ u prethodnoj komutatorskoj relaciji može zamijeniti s numeričkim faktorom E i time se zatvara algebra od $\hat{L}_j$ i $\hat{K}_j$. Za energiju sada imamo dva izbora, $E < 0$ i $E > 0$.

Ako je $E < 0$, ova novonastala algebra izomorfna je sa $\mathfrak{so}(4) = \mathfrak{so}(3) \oplus \mathfrak{so}(3)$, a ako je pak $E > 0$ tada promjena znaka rezultira izomorfizmom s Liejevom algebrom $\mathfrak{so}(1,3)$. Ona se od Liejeve algebre $\mathfrak{so}(4)$ razlikuje u par komutatorskih relacija koje sprječavaju da se napiše kao direktna suma realnih Liejevih algebri.

Pošto se mi ograničavamo na vezana stanja, pretpostavka da je $E < 0$ je opravdana.

Fiksirajući energiju možemo uvesti operatore:

$$\hat{L}_{(1)j} = \frac{1}{2}\Big(\hat{L}_j + \sqrt{-\frac{MQ^2}{2E}} \hat{K}_j\Big), \tag{2.13}$$

$$\hat{L}_{(2)j} = \frac{1}{2}\Big(\hat{L}_j - \sqrt{-\frac{MQ^2}{2E}} \hat{K}_j\Big). \tag{2.14}$$

Izračunajmo sad i njihove komutatore:

$$[\hat{L}_{(i)j}, \hat{L}_{(i)k}] = i \sum_{l=1}^{3} \epsilon_{jkl} \hat{L}_{(i)l}, \quad i = 1, 2$$

$$[\hat{L}_{(1)j}, \hat{L}_{(2)k}] = 0$$

Ovo naravno nije ništa više nego dekompozicija iz Primjera 1.1.6. Sad znamo da dva nezavisna Casimirova operatora iz $\mathfrak{so}(4)$ možemo zapisati kao:

$$c_1 = \sum_{j=1}^{3} \hat{L}^2_{(1)j}, \quad c_2 = \sum_{j=1}^{3} \hat{L}^2_{(2)j}, \tag{2.15}$$

odnosno:

$$c_1 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3}\left(\hat{L}_j + \sqrt{-\frac{MQ^2}{2E}}\hat{K}_j\right)^2, \quad c_2 = \frac{1}{4}\sum_{j=1}^{3}\left(\hat{L}_j - \sqrt{-\frac{MQ^2}{2E}}\hat{K}_j\right)^2. \tag{2.16}$$

Suma ova dva Casimirova operatora je upravo kvadratni Casimirov operator od $\mathfrak{so}(4)$. Iz teorije angularnog momenta odnosno reprezentacije Liejeve algebre $\mathfrak{so}(3)$, znamo da u bilo kojoj ireducibilnoj reprezentaciji od $\mathfrak{so}(4)$ imamo:

$$c_1 = p(p+1)\mathbf{1}, \quad c_2 = q(q+1)\mathbf{1}, \tag{2.17}$$

gdje su p i q nenegativni cijeli ili polu-cijeli brojevi, natuknuto u odjeljku 2.2. Ireducibilna reprezentacija $\mathfrak{so}(4)$ određena s ovim vrijednostima Casimirovih operatora ima dimenziju jednaku $(2p+1)(2q+1)$.

Oduzmemo li ova dva Casimirova operatora, dobijemo:

$$c_1 - c_2 = \sqrt{-\frac{MQ^2}{2E}}\sum_{j=1}^{3}\hat{L}_j\hat{K}_j \tag{2.18}$$

Međutim, može se pokazati da je

$$\sum_{j=1}^{3}\hat{K}_j\hat{L}_j = 0$$

što zajedno s jednadžbom (2.15) povlači da je i $c_1 - c_2 = 0$. Dakle, u našem problemu se javljaju samo ireducibilne reprezentacije u kojima je $p = q$.

Neka su sad zadani E i p. Pojedinu komponentu angularnog momenta možemo zapisati kao:

$$\hat{L}_j = \hat{L}_{(1)j} + \hat{L}_{(2)j}$$

što povlači da možemo iskoristiti standardni rezultat za sumu angularnih momenata iz čega slijedi da $\hat{L}^2$ poprima vrijednosti između $|p-p| = 0$ i $p+p = 2p$.

Stanje u s-ljusci odnosno ono za koje je $\hat{L}^2 = 0$ je sastavni član ove reprezentacije pa uzmimo neki vektor $\psi \in \tilde{H}$ takav da je $\hat{L}_j\psi = 0$. Očito je da je ψ funkcija samo radijalne komponente.

Odmah se vidi da vrijedi:

$$\hat{L}^2\psi = 0$$

Koristeći se komutatorskim relacijama (2.10)-(2.12) i raspisujući sve preko operatora položaja i impulsa, da se izračunati:

$$\hat{K}^2\psi = \frac{2}{MQ^2}\hat{H}\psi + \frac{1}{\hbar^2}\psi.$$

Uzevši u obzir da smo se ograničili na potprostor $\hat{H}_E$, prethodna relacija postaje:

$$\hat{K}^2\psi = \Big(\frac{2E}{MQ^2} + \frac{1}{\hbar^2}\Big)\psi.$$

Iz prethodnih relacija slijedi:

$$(c_1 + c_2)\psi = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3}\Big(\hat{L}_j^2\psi - \frac{MQ^2}{2E}\hat{K}_j^2\psi\Big) = -\frac{MQ^2}{4E}\Big(\frac{2E}{MQ^2} + \frac{1}{\hbar^2}\Big)\psi$$

Uzmemo li u obzir svojstvene vrijednosti Casimirovih operatora dobijemo:

$$(c_1 + c_2)\psi = 2p(p+1)\psi$$

Uspoređujući odgovarajuće članove, dobijemo:

$$8p(p+1) = -2 - \frac{MQ^2}{\hbar^2 E}$$

što možemo malo modificirati:

$$E = -\frac{MQ^2}{2\hbar^2}\frac{1}{(2p+1)^2} \tag{2.19}$$

što je poznata Rydbergova formula! Član $2p+1$ se tradicionalno zamijeni s cjelobrojnim $n = 2p+1 > 0$. Stoga, za ovu Liejevu algebru vrijedi:

$$(c_1 + c_2) = -\Big(\frac{MQ^2}{4\hbar^2 H} + \frac{1}{2}\Big)$$

na $\tilde{H}_E$ gdje i $(c_1 + c_2)$ i H poprimaju konstantnu vrijednost. Dokaz da ova formula fizikalno vrijedi za sve vrijednosti $p \geq 0$ takve da je $2p \in \mathbb{N}_0$ se može dokazati eksplicitnom konstrukcijom s-stanja spomenutih u ovom izvodu. Kada se pokaže da postoji barem jedno stanje s energijom

$$E_n = -\frac{MQ^2}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2},$$

degeneracija n-tog energijskog nivoa direktno slijedi iz algebarskih razmatranja.

2.4 Masa i spin

Ovaj segment može biti tema sam za sebe pa ćemo prvo proći kroz neke osnove a zatim ukratko kroz neke izvanredne rezultate. Za brzinu svjetlosti smo uzeli $c = 1$.

Definicija 2.4.1. *Prostor Minkowskog je 4-dimenzionalni ($\mathbb{R}^{3,1}$) realni vektorski prostor kojem je pridružena nedegenerirana simetrična bilinearna forma (Minkowski unutarnji produkt)*

$$\langle x, y\rangle = x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = \sum_{\mu,\nu=1}^{4} \eta_{\mu\nu}x^\mu y^\nu \tag{2.20}$$

gdje je η metrički tenzor:

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.21}$$

Definicija 2.4.2. *Lorentzova grupa je skup svih transformacija koje čuvaju unutarnji produkt prostora Minkowskog. Točnije, ona je grupa svih izometrija koje drže ishodište fiksnim u prostor-vremenu Minkowskog.*

Fizikalno, to su rotacije i boost. Neformalno, kad Lorentzovoj grupi dodamo i translaciju, dobijemo Poincaréovu grupu. U pitanju je zapravo poludirektna suma, ali to je detalj koji u našem razmatranju nije bitan.

Generatori Poincaréove grupe su generatori Lorentzove grupe, rotacije J_i i boost K_i plus generatori translacija P_μ u prostoru Minkowskog. Iz tih generatora možemo promatrati algebru definiranu preko relacija:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, K_j] = i\epsilon_{ijk}K_k$$
$$[K_i, K_j] = -i\epsilon_{ijk}J_k, \quad [J_i, P_j] = i\epsilon_{ijk}P_k$$
$$[J_i, P_0] = 0, \quad [K_i, P_j] = i\delta_{ij}P_0, \quad [K_i, P_0] = -iP_i.$$

Pogodno je uvesti elemente $M_{\mu\nu}$ definirane sa:

$$J_i = \frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3} \epsilon_{ijk}M_{jk}$$
$$K_i = M_{0i}$$

Tada se Poincaréova algebra može zapisati u obliku:

$$[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, P_\rho] = i(\eta_{\mu\rho}P_\nu - \eta_{\nu\rho}P_\mu) \tag{2.22}$$

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\rho} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho}) \tag{2.23}$$

Ova Poincaréova algebra ima dva Casimirova operatora. Prvi je:

$$\sum_{\mu=1}^{4} P_\mu P^\mu = m^2 \tag{2.24}$$

Vidjet ćemo ubrzo zbog čega koristimo upravo ovu oznaku. Drugi Casimirov operator je $W_\mu W^\mu$ gdje je:

$$W^\mu = \frac{1}{2} \sum_{\nu,\rho,\mu=1}^{4} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} P_\nu M_{\rho\sigma} \tag{2.25}$$

koji se zove Pauli-Lubanski četverovektor. Simbol $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ je četverodimenzionalna generalizacija Levi-Civita simbola. Pauli-Lubanski četverovektor u relativističkoj kvantnoj mehanici i kvantnoj teoriji polja označava spinska stanja gibajućih čestica. Ta tvrdnja prelazi okvire ovog rada, ali demonstrira prisutnost i važnost Casimirovog operatora uzevši u obzir da smo upoznati barem konceptualno s generalnom idejom spina.

Objasnimo sada prvi Casimirov operator. U relativističkoj fizici, za energiju čestice brzine u vrijedi:

$$E(u) = \frac{m}{\sqrt{1-u^2}} \tag{2.26}$$

Četverovektor količine gibanja (ili četvero-impuls) definiran je kao:

$$P_\mu = (E, \vec{p}) \tag{2.27}$$

Kako je norma bilo kojeg četverovektora Lorentz-invarijantna odnosno rezultat ne ovisi u kojem inercijalnom referentnom sustavu mjerimo, možemo izračunati normu četvero-impulsa u onom sustavu u kojem čestica miruje pa izravno dobijemo:

$$\sum_{\mu=1}^{4} P_\mu P^\mu = E^2(0) = m^2 \tag{2.28}$$

što povlači da je Casimirov operator u relativističkoj mehanici ništa više no masa čestice!

2.5 Boja kvarkova

Valne funkcija kvarkova označavamo s q^i, za $i = 1, 2, 3$. Algebra nad kojom se ovo razmatranje provodi jest $\mathfrak{su}(3)$ koja je definirana preko komutatorskih relacija:

$$[T_j, T_k] = i \sum_{l=1}^{8} f_{jk}^l T_l, \quad j, k = 1, 2, ..., 8 \tag{2.29}$$

Općenito, u (n^2-1)-dimenzionalnoj adjungiranoj reprezentaciji Liejeve algebre $\mathfrak{su}(n)$, generatori su zapravo $(n^2-1) \times (n^2-1)$ matrice čiji su elementi definirani preko strukturnih konstanti:

$$[T_l]_{jk} = -i f_{jk}^l \tag{2.30}$$

gdje će za $\mathfrak{su}(3)$ indeksi j, k i l poprimati vrijednosti 1,2,...8.

Kao što možemo dobiti bijelu svjetlost kombiniranjem zraka triju primarnih boja, crvene, zelene i plave, tako se tri kvarka mogu povezati u "bezbojni" singlet. Upravo zbog toga se kvarkovi ponekad nazivaju crveni, zeleni i plavi umjesto da su numerirani indeksima 1,2 i 3.

Analogije sa svjetlom međutim ne staju tu, zbog čega nije neobično što je polje kvantne kromodinamike nastalo velikim utjecajem iz kvantne elektrodinamike. Naime, kao što je foton nositelj elektromagnetske sile, tako su i gluoni nositelji nositelji sile među kvarkovima.

Elektromagnetska sila između dva objekta je privlačna kada je produkt njihovih električnih naboja negativan, zbog čega elektromagnetska sila teži vezati nabijene čestice u neutralne atome i molekule. Jedna velika razlika između fotona i gluona je taj što gluona ima 8, dok je foton jedan, a interakcija između dvije "obojane" čestice je proporcionalna sumi produkata njihovih naboja boje. Ako je ta suma negativna, sila je privlačna.

Na sličan način kao i u prijašnjim primjerima, dobije se da je Casimirov operator dan sa:

$$T^2 = \sum_{i=1}^{3} T_i^2 \tag{2.31}$$

što je analogon kvadratu angularnog momenta u $\mathfrak{so}(3)$. Casimirov operator T^2 ovisi kako su neka dva stanja, A i B, kombinirana u stanje s točno definiranom bojom. Preciznije rečeno, on ovisi kako se linearne kombinacije produkata stanja transformiraju na $\mathfrak{su}(3)$.

Fizikalna interpretacija jest da Casimirov operator T^2 mjeri veličinu reprezentacije boje. Što je manji T^2, stanje je manje "obojano". Dakle, sila među obojanim česticama je najprivlačnija u najmanje obojanim stanjima pa zato i teži vezati kvarkove (i antikvarkove) u što je "blijeđa" stanja moguće!

Zaključak

Počevši od pojma Liejeve algebre i gradeći matematiku na prirodan način, došli smo do zapanjujućih rezultata. Pojam Casimirovog operatora omogućio nam je izravniji uvid u neke fizikalne probleme, pružajući nam priliku da se riješe isključivo algebarskim metodama.

Iako je svoje početke imao u klasičnoj mehanici, danas se Casimirov operator praktički poistovjećuje s kvantnom mehanikom, uzevši u obzir da je i kvadrat angularnog momenta, koji često ima centralnu ulogu u mnogim tekstovima iz moderne fizike, jedna njegova manifestacija.

Možda je posebno zanimljivo kako su pojmovi mase, spina i boje svi povezani s tim apstraktnim pojmom dok predstavljaju nešto što se u današnjem svijetu fizike smatra fundamentalnim svojstvima materije.

Za kraj, završimo s citatima koji na lijep način opisuju povezanost između apstraktnog svijeta i onog stvarnog:

Kako bi došli do apstraktnog, uvijek je potrebno početi s konkretnom stvarnosti... Uvijek trebate početi s nečim. Naknadno možete izbrisati sve tragove stvarnosti. - Pablo Picasso

Ne postoji grana matematike, koliko god apstraktna bila, koja se jednog dana neće moći primijeniti na fenomene stvarnog svijeta. - Nikolai Lobačevski

Literatura

[1] F. Iachello: *Lie Algebras and Applications*, Second Edition, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006, 2015

[2] H. Georgi: *Lie Algebras In Particle Physics: from Isospin to Unified Theories*, Avalon Publishing, 1999

[3] D. Oliver: *The Shaggy Steed of Physics*, Springer-Verlag New York, 2004

[4] R.W. Carter: *Lie Algebras of Finite and Affine Type*, Cambridge University Press, 2005

[5] J. Schwichtenberg: *Physics from Symmetry*, Springer, 2015

[6] F. Gonzales: *Lie algebras*, 2007

[7] X. Bekaert: *Universal enveloping algebras and some applications in physics*, *Lecture given at the first Modave Summer School in Mathematical Physics*, Belgium, 2005

[8] L. Šnobl: *Representations of Lie algebras, Casimir operators and their applications*, Lectures presented at *5th Student Colloquium and School on Mathematical Physics*, Stará Lesná, August 29th - September 4th, 2011

[9] N.P. Skoruppa: *A Crash Course in Lie Algebras*, Siegen, 1998