

Manipulativni materijali u nastavi matematike za osnovnu školu

Sinovčić, Valerija

Master's thesis / Diplomski rad

2015

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:404671>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-01**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science](#)



SVEUČILIŠTE U SPLITU
PRIRODOSLOVNO MATEMATIČKI FAKULTET

Valerija Sinovčić

**MANIPULATIVNI MATERIJALI U
NASTAVI MATEMATIKE ZA OSNOVNU
ŠKOLU**

DIPLOMSKI RAD

Split, kolovoz 2015.

SVEUČILIŠTE U SPLITU
PRIRODOSLOVNO MATEMATIČKI FAKULTET

Valerija Sinovčić

**MANIPULATIVNI MATERIJALI U
NASTAVI MATEMATIKE ZA OSNOVNU
ŠKOLU**

DIPLOMSKI RAD

Mentor: prof.dr.sc. Nikola Koceić Bilan

Neposredni voditelj: Željka Zorić, pred.

Split, kolovoz 2015.

Sadržaj

1	Uvod.....	1
2	Oblikovanje pojmova	2
3	Edukacijske teorije vezane za matematiku.....	5
4	Za i protiv manipulativnih materijala	8
5	Uloga nastavnika	11
6	Primjeri manipulativnih materijala.....	12
6.1	Numicon	12
6.1.1	Uvođenje razlomaka.....	13
6.1.2	Uspoređivanje prirodnih brojeva.....	15
6.2	Računska gusjenica.....	17
6.2.1	Prirodni brojevi	18
6.3	Brojevni štapići.....	20
6.3.1	Uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika.....	21
6.4	Temeljne ili jedinične kocke.....	22
6.4.1	Frekvencija i dijagrami.....	23
6.4.2	Množenje prirodnih brojeva	25
6.5	Multilink kocke.....	27
6.5.1	Oplošje i obujam kvadra	28
6.6	Matematičke pločice.....	29
6.6.1	Pravokutnik i kvadrat	30
6.7	Tangrami.....	33
6.7.1	Skupovi točaka u ravnini.....	34
6.7.2	Mjerenje kutova.....	37
6.7.3	Postotci	38
6.8	Geoploče.....	40
6.8.1	Četverokut	42
6.8.2	Kvadrat i pravokutnik.....	44
6.8.3	Kružnica i krug.....	46
6.9	Blok uzorci	47
6.10	Manipulativni materijali iz kućne radinosti	48
6.10.1	Primjeri za uporabu manipulativnih materijala iz kućne radinosti	48
6.11	Virtualni manipulativni materijali.....	49
6.11.1	Primjeri web stranica.....	49
7	Blok uzorci	51
7.1	Općenito o blok uzorcima.....	51

7.2	Primjeri uporabe blok uzoraka	52
7.2.1	Opseg mnogokuta.....	52
7.2.2	Unutarnji kutovi mnogokuta	54
7.2.3	Uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika.....	56
7.2.4	Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik	58
7.2.5	Mjerenje kutova.....	59
7.2.6	Ozna simetrija.....	60
7.2.7	Postotak / Razlomci.....	61
7.2.8	Četverokut	64
7.2.9	Kvadriranje racionalnih brojeva	65
8	Zaključak.....	68
9	Literatura	69
10	Dodatci	70

1 Uvod

U ovom radu obradit ću neke različite primjene matematičkih manipulativnih materijala. Uporabu manipulativnih materijala možemo usporediti s korištenjem karte kada se nalazimo u novom, nepoznatom gradu. Pri dolasku u novo mjesto, osjećamo se zbunjeno. Ipak, nakon nekoliko dana već se osjećamo sigurnije, dobili smo osjećaj za prostor i iako se još ponekad izgubimo, možemo računati na to da će nam poznati dijelovi grada pomoći da se domognemo pravog puta. S dovoljno istraživanja, vjerojatno ćemo se s više samopouzdanja kretati novim dijelovima grada.

Na sličan način možemo promatrati i učenje matematike koristeći manipulativne materijale. Matematika ima mnogo područja i ta područja često nisu slična, apstraktna su i učenicima zbunjujuća. Nastavnici bi učenicima trebali pomoći otkriti sposobnost rješavanja problema i dati samopouzdanje u pronalasku njihovih načina za rješavanje, vidjeti kako učenici povezuju stvari i znaju li što raditi ako zaborave neku činjenicu ili postupak.

Na početku rada objasnit ću način na koji dijete uči matematičke, ali i ostale pojmove, a u drugom poglavlju dati kratki osvrt na povijest uporabe manipulativnih materijala kroz stavove nekih od najistaknutijih pedagoga koji su se bavili tom tematikom. Iako im se mišljenja ne slažu u svemu, zajedničko im je bilo istraživanje djetetovog razvoja i načina na koji dijete uči.

Nisu svi nastavnici za uporabu manipulativnih materijala u nastavi. Nekima je draži tradicionalni pristup nastavi. U četvrtom i petom poglavlju riječ će biti uglavnom o nastavnicima, njihovoj ulozi i njihovim razmišljanjima, do kojih je došlo na temelju istraživanja, o prednostima i nedostacima uporabe manipulativnih materijala.

Nakon općenitog dijela u manipulativnim materijalima i njihovoj uporabi, dat ću konkretne primjere manipulativnih materijala. Manipulativni materijali mogu biti komercijalni, iz kućne radinosti ili virtualni. Većina komercijalnih manipulativnih materijala se uz malo spretnosti i volje može napraviti i kod kuće i koristiti u nastavi. Dane su konkretne teme i prijedlog na koji bi se neki manipulativni materijal mogao koristiti u nastavi u šestom poglavlju.

Blok uzorci su manipulativni materijali kojima sam odlučila posvetiti malo više prostora i dati više primjera za njihovu upotrebu i to je zadnji dio ovog rada.

Bitno je istaknuti da su dani prijedlozi za rad s manipulativnim materijalima koje svaki nastavnik može prilagoditi situaciji u svojoj učionici. Isto tako, za određenu temu moguće je koristiti i druge manipulativne materijale osim predloženih.

2 Oblikovanje pojmova

Kako djeca oblikuju pojmove? Malo dijete vidi, osjeća i ispituje fizičke predmete. Razvoj djetetovog apstraktnog mišljenja započinje prepoznavanjem riječi kojima imenujemo neke predmete, npr. njegove igračke. Nakon izgovorenih riječi, dijete će prepoznavati slike predmeta, što je još jedna apstrakcija. Na kraju, dijete će s njima povezivati pisane znakove. Kao i sva iskustva, djetetovo matematičko iskustvo, mora se razvijati na opisani način:

I – iskustvo fizičkih predmeta

G – govorni jezik koji opisuje to iskustvo

S – slike koje prikazuju to iskustvo

Z – pisani znakovi koji generaliziraju to iskustvo

Matematički udžbenici počevši od 1.razreda osnovne škole obuhvaćaju isključivo zadnja dva elementa ovog procesa: slike i pisane znakove. Što znači da u nastavi matematike stvaranje pojmova ne započinje gdje bi trebalo, a to je s iskustvom i govornim jezikom. [5]

Matematika je apstrakcija stvarnosti. Ne može se shvatiti „dva“ dok se ne vidi puno predmeta u parovima i dok se ne izluči što im je zajedničko. Kada djeca uče jezik, izgovaraju riječi oponašajući ono što čuju i postupno povezuju riječi s pojmovima. Važniji matematički pojmovi su puno, nekoliko, koliko, više, manje, dugo, kratko, jednake duljine, dulje, kraće, okruglo, plosnato, ravno i zaobljeno. Kako djeca usvajaju takve pojmove? Kako saznati jesu li ti pojmovi jednaki našima? Da bismo odgovorili na ta pitanja, potrebno je opisati četiri temeljne aktivnosti razvoja matematičkog mišljenja: pridruživanje, razvrstavanje, sparivanje i nizanje. [5]

1. Pridruživanje

Djeca spontano usvajaju pojmove uočavanjem i izborom obilježja zajedničkih pojedinim iskustvima. Taj izbor obično nazivamo pridruživanjem. Pridruživanje je način na koji djeca uče pravilno upotrebljavati jezik, naročito matematički jezik. U svakom pridruživanju bitno je pronaći iskustva s traženim obilježjem, ali i ona koja nemaju traženo obilježje kako bi djeca shvatila neki pojam.

Da bi djeca shvatila i oblikovala pojmove moramo im pružiti odgovarajuća iskustva koja će ih potaknuti na to da im pridružuju odgovarajuće predmete te ih moramo naučiti riječi kojima će uočena svojstva opisivati. Iz tih razloga početni zadatci moraju sadržavati pojmove koje su djeca već usvojila ili su na putu da ih usvoje.

Sada ćemo pogledati nekoliko zadataka pridruživanja kojima se djeci mogu predočiti neki matematički pojmovi vezani za dužinu i oblik.

Riječi dugo i kratko nisu precizne, no njih djeca nauče upotrebljavati ranije nego preciznije izraze dulje i kraće. Djeca koja razlikuju značenja riječi dugo i kratko, vjerojatno će moći riješiti zadatak u kojem između nekoliko štapića različitih duljina trebaju pronaći onaj koji je jednako dug kao i njihov. Nakon što smo im uveli pojam jednako dug, možemo ići korak dalje i uvesti pojam dulji i tražiti od djece da odaberu sve štapiće dulje od njihovog.

Osim dužine, možemo djeci postaviti i zadatke vezane za oblik. Iako većina ljudi pojam sukladan povezuje s trokutima, taj pojam znači jednakog oblika i veličine. Dakle to je pojam koji shvaćaju i mala djeca. Naime, ako djeci damo da iz posude vade kovanice od jedne kune i ako ih slažu jednu na drugu, zasigurno su uočili sukladnost, ali naravno još ne znaju za taj pojam. Djeci možemo ponuditi npr. kamione i aute različitih boja i pustimo neka oni sami odluče koje će obilježje koristiti za izdvajanje nekoliko igrački. Da bi zadatak bio zanimljiviji ostala djeca moraju pogoditi o kojem je obilježju riječ.[5]

2. Razvrstavanje

U zadacima pridruživanja traže se zajednička svojstva, a u zadacima razvrstavanja od djece se traži da neki skup rastave na nove skupove sa zajedničkim obilježjima i ti su zadatci malo složeniji od zadataka pridruživanja.

Možemo iskoristiti primjer s duljinom štapića. Recimo, kada su djeca pronašla sve štapiće kraće od svog štapića, mogu među njima potražiti one iste duljine i nakon toga ih razvrstati po duljini. [5]

3. Sparivanje

Ova aktivnost važna je za uvođenje pojmova vezanih s brojem. Kao što su nazivi dugo i kratko neprecizni (precizno je dulje i kraće), tako su i pojmovi nekoliko i mnogo također neprecizni nazivi koji impliciraju usporedbu brojeva. Precizniji nazivi su jednako, više i manje.

Prilike za sparivanje se javljaju u igri, pričama, svakodnevnim aktivnostima i u svakom sparivanju možemo reći da je npr. djece i olovaka jednako mnogo. Možemo jako dobro iskoristiti situaciju u učionici i tražiti od djece da se okrenu po prostoriji i kažu ima li u njoj više ljudi ili stolaca. Djeca će uvidjeti da nije bitno brojati, već samo pogledati postoji li višak stolaca ili ljudi. Ovaj postupak koji djeca rade je zapravo pridruživanje stolca osobi koja sjedi na njemu i matematički se taj postupak naziva pridruživanje jedan – jedan, ali upotrebljavamo

naziv sparivanje jer nam nije bitno tko sjedi na kojem stolcu. Kada se ne može spariti ljude sa stolicama jer su neki stolci prazni kažemo da ima više stolaca nego ljudi i na taj način smo neuspjelim sparivanjem došli do pojma više od. Manje od je pojam koji djeca ne usvajaju tako lako kao više od. [5]

4. Nizanje

Nizanje skupa predmeta traži razumijevanje pojmova prvi, pokraj, posljednji, između. Zadaci nizanja mogu biti različiti. Možemo zadati djeci zadatke u kojima ćemo uvesti pojmove prvi, posljednji, pokraj i između, a nakon toga one zadatke u kojima ćemo raspravljati o redosljedu na način da tražimo od djece da nastave niz prema uzorku. Uzorci se mogu temeljiti na orijentaciji ili na veličini i boji likova.

Pojmovi koji uključuju usporedbu mogu se produbiti zadacima nizanja, npr. nizanje skupa na temelju duljine zahtijeva vrlo složen pojam tranzitivnost. Nizanje predmeta na temelju duljine omogućuje nam da uvedemo pojmove i riječi najdulji i najkraći.

Vidimo kako kod ovog primjera s nizanjem uvodimo nove pojmove i produbljujemo stare. [5]

„Šumovi“

Nastavnik koji osmisli prikladne aktivnosti pridruživanja, razvrstavanja, sparivanja i nizanja može pomoći djeci shvatiti pojmove bitne za matematiku i uvesti odgovarajuće nazive za te pojmove. Prilikom oblikovanja aktivnosti poželjno je na umu imati mogućnost da će djecu zvesti zajednička obilježja različita od onih koja ilustriraju pojmove koje se poučava. Ta obilježja se u psihologiji nazivaju „šumovi“ (nevažna obilježja za neki pojam, npr. ako nastavnik pokaže štapić i traži drugi jednake duljine, nevažno je koje je boje taj drugi štapić ako je duljina jednaka). Da pri tumačenju određenog pojma ne bismo djecu zbunjivali šumovima, potrebno je osmisliti različite aktivnosti i upotrebljavati različite materijale. Ključ uspješnog poučavanja matematike je ponavljanje i česta promjena vrste aktivnosti, uz zadržavanje biti pojma koji se uči. Takvo ponavljanje sprječava šumove, pomaže pamćenje i potiče djecu da primjene novi pojam u novoj situaciji. [5]

3 Edukacijske teorije vezane za matematiku

Manipulativni materijali su konkretni objekti koje učenici mogu vidjeti i raditi s njima, a koriste se u svrhu demonstriranja ili modeliranja apstraktnih matematičkih koncepata. John Van de Walle (matematički pedagog) i njegovi kolege definiraju matematičke manipulativne materijale kao „bilo koji objekt, sliku ili crtež koji prezentira neki matematički koncept ili način na koji se mogu izreći veze između koncepata.“ [1] Dakle, manipulativni materijali su fizički objekti koje nastavnici i učenici mogu koristiti za ilustriranje ili otkrivanje matematičkih koncepata. Oni mogu biti dizajnirani posebno za matematiku ili ih kreativniji nastavnici mogu izraditi u kućnoj radinosti. U novije vrijeme postoje i virtualni manipulativni materijali.

Povijest manipulativnih materijala koji se koriste u matematici proteže se unazad najmanje dvije stotine godina. Neki od važnijih utjecaja na njihov razvoj u novije vrijeme su Maria Montessori (1896.-1952.), Jean Piaget (1896.-1980.), Zoltán Pál Dienes (1916.-2014.) i Jerome Bruner (1915.-).

Matematički sadržaji su po prirodi apstraktni, a da bi se izbjegle visoke apstrakcije i da bi razvoj ovih pojmova pratio prirodan put dječjeg razvoja, nužno je poznavati osnovne karakteristike toga razvoja, način na koji dijete uči i prirodu svakog matematičkog pojma koje dijete usvaja. Jerome Bruner¹ i Jean Piaget² dijele mišljenja o spoznaji kao aktivnoj konstrukciji subjekta. Piaget smatra da je dječje učenje stalan proces konstruiranja znanja u kojem nezamjenjivu ulogu igra dječja aktivnost (u procesu ne možemo govoriti o prenošenju znanja, nego o aktivnom stjecanju znanja kroz praktične, manipulativne i mnoge druge aktivnosti koje će se nalaziti u osnovi aktivne mentalne konstrukcije) kao i da djetetu treba dopustiti da uči na svoj način. Također smatra da se, iako kognitivni razvojni proces ima određeni slijed, ne smiju zanemariti individualne sposobnosti svakog pojedinog djeteta jer svako dijete ima svoj ritam. Bit Piagetove biologističke teorije sastoji se u tvrdnji da je učenje podređeno razvojnog procesu djeteta, da ono ovisi o razini razvoja te, da je za razvoj presudan utjecaj sazrijevanja. Bruner se međutim protivi biologističkom shvaćanju razvoja i smatra da ne postoji unutarnji pokretač učenja bez vanjskog poticaja. Kao relevantne vanjske „pojačivače“ procesa učenja Bruner vidi u društvenim subjektima, obitelji i institucijama

¹ J. Bruner (1915. -) je američki psiholog koji je napravio značajan doprinos razvoju ljudske kognitivne psihologije i kognitivne teorije učenja u obrazovnoj psihologiji.

² J. Piaget (1896.-1980.) je švicarski razvojni psiholog i filozof poznat po svojim epistemološkim istraživanjima s djecom.

odgoja i obrazovanja. Bruner naglašava da je predodžba objekta u mislima neodvojiva od akcije djeteta u odnosu na taj objekt, dok je riječ najviša razina reprezentacije stvarnosti. [2]

Zoltán Pál Dienes bio je svjetski poznati teoretičar i neumorni praktičar „nove matematike“ tj. pristupa matematičkom učenju koji koristi igre, pjesmu i ples kako bi matematiku učinio što privlačnijom djeci. [3]

Maria Montessori, talijanska pedagoginja i liječnica, tvorac je pedagoške metode Montessori. Metoda Montessori temelji se na znanstvenom promatranju spontanog učenja djece, na poticanju vlastitog djelovanja djeteta i njegove samostalnosti i na poštivanju djetetove osobnosti. U središtu Montessori pedagogije je dijete. Ona gleda i poštuje dijete u njegovoj cjelovitosti. Ne postoje ciljevi koji bi bili izvan djeteta. Geslo ove suvremene pedagoške metode sadržano je u izreci: „Pomozi mi da to učinim sam.“ Prema njoj je Montessori model jedinstven i uvijek prepoznatljiv među drugim pedagoškim usmjerenjima. [4]

Svi istraživači manipulativnih materijala u matematici naglašavaju važnost učenja kroz iskustvo, uz upotrebu raznih alata. Predlažu da djeca simboliku i apstraktne koncepte uče poslije stvaranja ideja kroz osobno iskustvo. Po njima su manipulativni materijali most koji povezuje konkretno s apstraktnim.

Zadnjih četrdesetak godina rađena su istraživanja koja su pokazala da su manipulativni materijali izuzetno korisni kao nadopuna matematičkom objašnjavanju. Učenici prvo koriste konkretne materijale pri rješavanju problema te traže uzorke i generalizacije. Potom učenici stvaraju vezu s apstraktnim pojmovima te svoje zaključke zapisuju formalnim matematičkim rječnikom. Uloga nastavnika je u tom procesu od iznimne važnosti kako bi na vrijeme uočili eventualne pogrešne zaključke učenika i uputili ih da nastave pravim putem.

Nisu svi nastavnici jednako „zagrijani“ za uporabu konkretnih manipulativnih materijala, ali postoje mnogi argumenti o važnosti otkrića konceptualnog razumijevanja u matematici. Na primjer, razumijevanju koncepta prirodnih brojeva, kao što je mogućnost brojanja predmeta, može prethoditi učenje pisanih brojeva; razumijevanje značenja množenja može prethoditi pamćenju tablice množenja.

S ciljem otkrivanja i unaprjeđivanja matematičke vještine svakog učenika, nastavnici bi trebali integrirati uporabu konkretnih i virtualnih manipulativnih materijala u proces učenja u svim razredima. Primjena virtualnih manipulativnih materijala danas je u sve većem porastu budući živimo u dobu napredne tehnologije u kojem skoro svako dijete imam vlastiti mobitel i računalo.

Korištenje manipulativnih materijala mora biti dobro promišljeno, osmišljeno i organizirano kako bi se izbjegli potencijalni problemi i zamke u koje se najčešće hvataju učenici s poteškoćama.

4 Za i protiv manipulativnih materijala

U ovom dijelu rada osvrnula bih se na istraživanje koje je provedeno u školama u Zapadnoj Australiji, autora Linde Marshall i Paula Swana. [6]

Autorima je kao povod za istraživanje poslužila jedna izreka:

„Čujem i zaboravim

Vidim i sjetim se

Napravim i razumijem“

Dok god vjerujemo da u njoj ima imalo istine, vrijedna je istraživanja. Istraživači su za manipulativne materijale izjavili sljedeće: „Bilo da ih zovemo manipulativni, konkretni materijali ili konkretni predmeti, fizički materijali su u uporabi kao nužni za poboljšavanje učenja matematike.“

U ovom istraživanju cilj je bio odrediti stanje i prirodu uporabe matematičkih manipulativnih materijala. Željelo se otkriti kada, kako i koji se manipulativni materijali koriste, te što nastavnici misle kolika je njihova uspješnost kod učenja matematike.

Budući je istraživanje podulje i dobiveno je više odgovora nego su se autori nadali, u ovom radu dotaknuto je samo nekoliko važnih pitanja vezanih za uporabu manipulativnih materijala.

Prvo od tih pitanja jest: koje su prednosti uporabe manipulativnih materijala u učionicama.

Nastavnici koji su sudjelovali u anketi većinom su opisivali prednosti uporabe manipulativnih materijala u nastavi. Najčešći komentar bio je da učenici na taj način sudjeluju u konkretnim vizualizacijama. Drugi najčešći komentar je bio da uporaba manipulativnih materijala pruža učenje iz prve ruke, izravno, a zatim pomaže gradnji boljeg razumijevanja matematičkih koncepata. Mnogi nastavnici u uporabi manipulativnih materijala vide nešto što će učenicima biti zabavno i motivirajuće, te ih na taj način potaknuti na bavljenje matematikom. Mnogo komentara bilo je vezano u korist uporabe manipulativnih materijala, jer kao što je već spomenuto, manipulativni materijali pomažu učenicima shvatiti koncepte ili ih produbiti, mogu biti korišteni za uvođenje novih koncepata i pomažu učenicima prijeći put od konkretnog prema apstraktnom. Dio nastavnika je kao prednost naveo i činjenicu da je lako zaključiti donosi li učenik točne zaključke primjenjujući manipulativne materijale ili ne, te mu pomoći da shvati koji su zaključci ispravni.

Drugo pitanje o kojem su raspravljali jest pitanje o nedostacima uporabe manipulativnih materijala u učionicama.

Nastavnicima su bili ponuđeni neki odgovori koje su trebali rangirati na ljestvici od 1 do 13. Najviše je nastavnika kao nedostatak navelo činjenicu da često nemaju dovoljno opreme za korištenje manipulativnih materijala, a oni koji imaju opremu često je dijele s drugim nastavnicima pa joj ne mogu pristupiti kada to žele. Dio nastavnika je naglasak stavio na problematičnu cijenu manipulativnih materijala. Također, kao jedan od nedostataka je navedeno da učenici često ne slušaju upute, da rade veliku buku i nered. Nastavnici kao nedostatak vide i skladištenje i organizaciju materijala. Nemaju dovoljno mjesta u učionicama, a ukoliko materijale premještaju lako može doći do oštećenja ili gubitka dijelova koji su potrebni. Još jedan nedostatak je nedostatak vremena: kako vremena za korištenje i rad s manipulativnim materijalima, tako i nedostatak vremena za organiziranje i pripremu materijala za rad. Još neki od nedostataka su činjenica da bi učenici manipulativne materijale mogli vidjeti kao igračke, zatim činjenica da nije jasno vidljivo kako manipulativni materijali zaista utječu na učenje, zatim manipulativni materijali mogu djelovati i suprotno od očekivanog, mogu zbuniti učenike ukoliko se ne koriste na ispravan način.

Zanimljivi su i odgovori na pitanje o preprekama za uporabu manipulativnih materijala u učionicama. Nastavnicima je dana lista od 13 mogućih prepreka za uporabu manipulativnih materijala u učionicama. Najčešći odgovori koje su nastavnici dali su novac, organizacija materijala (posuđivanje/vraćanje, sortiranje, nestali dijelovi) te prostor za uporabu u učionicama. Za usporedbu, desetak godina ranije nastavnici su kao glavne prepreke navodili dostupnost materijala i nedostatak vremena za njihovu uporabu, iako nije jasno misli li se pod dostupnošću na jednostavnost pristupa manipulativnim materijalima ili se misli na to da materijali uopće nisu postojali u školama, što je povezano s nedostatkom novca.

Zadnje pitanje u ovom radu odnosi se na to treba li učeničko iskustvo, kada se koriste manipulativni materijali, biti bazirano na nastavničkom usmjeravanju učenika ili na puštanju učenicima da sami dođu do zaključaka, da sami otkrivaju rješenja.

Većina ispitanika na ovo pitanje je odgovorila oboje te da ovisi o zadatku i da početna uputa može biti nastavnikova, ali nakon toga treba pustiti učenike da sami dođu do zaključaka. Argumenti onih koji su zaokružili samo učeničko samootkrivanje rješenja su ti da učenici sasvim dobro rade u grupama i da međusobno mnogo surađuju i postavljaju pitanja, na primjer: „Ako ja napravim ovo i pridružim ti se, imat ćemo...?“ Komentari nastavnika koji

su se odlučili za nastavničko usmjeravanje su ti da učenici ne mogu otkriti ništa bez nastavnika niti bez njih doći do ikakvih zaključaka te da nastavnici nemaju dovoljno vremena za rad na način da učenicima puštaju da sami dođu do zaključaka.

Neke od prednosti uporabe manipulativnih materijala su sljedeće:

- ***Matematički manipulativni materijali pomažu apstraktne ideje učiniti konkretnima.***

Slika govori više od tisuću riječi. Djeca tako najbolje uče. Nema zamjene za iskustvo koje učenici dobiju iz prve ruke. Manipulativni materijali učenicima pomažu konstruirati fizičke modele apstraktnih matematičkih ideja.

- ***Matematički manipulativni materijali odmiču matematiku iz strogih okvira udžbenika.***

Učenici imaju svoje ideje i manipulativni materijali im pomažu razumjeti i provjeriti ideje koje imaju, a potom ih povezati s matematičkim rječnikom i simbolima.

- ***Matematički manipulativni materijali su koristan alat pri rješavanju problema.***

U traženju rješenja, arhitekti konstruiraju modele zgrada, inženjeri rade prototipove opreme, a doktori koriste računala za predviđanje utjecaja medicinskih postupaka. Na isti način, manipulativni materijali služe kao konkretan model za učenike kojeg koriste pri rješavanju matematičkog problema.

- ***Matematički manipulativni materijali čine učenje matematike zanimljivim i zabavnim.***

Neka nastavnici daju učenicima izbor: rješavanje matematičkih problema olovkom na papiru ili obojanim i zanimljivim manipulativnim materijalima i mislim da nema sumnje što će od tog dvoje učenici odabrati. [7]

5 Uloga nastavnika

Sistematična uporaba manipulativnih materijala može donijeti one ideje i koncepte koje nastavnik želi usaditi učeniku u procesu poučavanja. Nastavnici moraju modificirati svoju sliku u kojoj sebe vide kao jedini izvor od kojeg svo znanje dolazi učenicima. Nastavnik koji je uključen u aktivno učenje, više nije u središtu pozornosti u učionici, kao što je to bilo kod tradicionalnog poučavanja. Sada svoju pozornost mora usmjeravati na razvrstavanje manipulativnih materijala i na interakciju između učenika i manipulativnih materijala. [2]

Uloga nastavnika je kod uporabe manipulativnih materijala zahtjevnija nego uloga tradicionalnog nastavnika koji govori i objašnjava na ploči. To je jedan od razloga neuporabe manipulativnih materijala u nastavi matematike. Nastavnici imaju ključnu ulogu u strukturiranju kada će se i kako manipulativni materijali koristiti kao podrška učenju. Uporaba manipulativnih materijala zahtijeva od nastavnika više pripreme za školski sat i veću angažiranost tijekom sata; dok je tradicionalni pristup nastavi za nastavnika puno jednostavniji jer samo odabere zadatke i objasni lekciju pred pločom.

6 Primjeri manipulativnih materijala

Matematički manipulativni materijali su konkretni objekti koji se koriste u poučavanju matematike. Mnogi različiti matematički manipulativni materijali komercijalno su dostupni, ali moguće ih je i napraviti koristeći predmete kojima se služimo skoro svakodnevno. U uporabi manipulativnih materijala za poučavanje osnovnih matematičkih operacija koje uključuju cijele brojeve, važno je koristiti predmete koji su ujednačeni i koji ispravno prezentiraju veze (na primjer, broj 10 bi trebao biti deset puta dulji od broja 1, a ne samo drugačije obojan).

Primjeri komercijalnih manipulativnih materijala su:

1. Numicon
2. Računska gusjenica
3. Brojevni štapići
4. Temeljne ili jedinične kocke
5. Multilink kocke
6. Matematičke pločice
7. Tangrami
8. Geoploče
9. Blok uzorci

Iako su navedeni manipulativni materijali komercijalni i moguće ih je kupiti, većinu njih možemo napraviti kod kuće.

6.1 Numicon



Slika 1. Numicon set³

³ Slika preuzeta <http://www.numicon.co.nz/177849/index.html>

Numicon (eng. numicon patterns) je manipulativni materijal koji se sastoji od 10 komada, svaki s različitim brojem rupica, od 1 do 10. Komadi su napravljeni tako da se mogu slagati jedan s drugim u veće cjeline i na taj način možemo prikazati i brojeve veće od 10.

Numicon je manipulativni materijal čija uporaba pomaže učenicima razumjeti veze među brojevima, uočavati uzorke i stvarati generalizacije. Učenici su potaknuti na zajednički rad na aktivnostima kod kojih je naglasak na razumijevanju kod rješavanja problema. Također pomaže učenicima i nastavnicima razgovarati i diskutirati o svojim idejama što nastavnicima pruža bolji uvid u učeničko razumijevanje sadržaja.

Promatrajući kako učenici rade s *numicon* setom, nastavnici imaju mogućnost uočavanja prednosti i nedostataka u učeničkom razmišljanju i mogu to iskoristiti u daljnjoj nastavi. Naime, ako je nastavnicima poznato gdje su problemi u razumijevanju nekog koncepta ili postupka rješavanja zadatka, lako i brzo mogu pomoći učenicima savladati poteškoće na koje su naišli. Koristeći *numicon* učenici se zabavljaju i bave matematikom.

Numicon se može koristiti u cijelom razredu, malim grupama ili individualno, odabir je na nastavnicima. Osobito je koristan za poučavanje učenika s poteškoćama u matematici, kao i učenika koji rade po prilagođenom programu. [8]

6.1.1 Uvođenje razlomaka

Razred: 5.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Uvesti pojam razlomka i upoznati učenike s dijelovima razlomka

Obrazovni ishodi: Učenici će moći:

- prepoznati razlomak
- dati primjer razlomka
- imenovati dijelove razlomka i razlikovati ih
- izreći razlomak koji odgovara komadu kojeg nastavnik pokaže
- izdvojiti komad koji označava razlomak kojeg nastavnik izgovori

Organizacija i materijali: Učenici rade u parovima, najjednostavnija je podjela u parove po klupama. Svaki par dobiva po jedan *numicon* komplet (od 10 dijelova), a jedan komplet ima nastavnik.

Opis rada: Nastavnik upoznaje učenike s pojmom jedno cijelo. Komad iz *numicon* seta koji ima 10 rupica će učenicima predstavljati jedno cijelo, tako da je svaki drugi dio kompleta manji od 10. Nastavnik uzima komad s 1 rupicom i s 4 rupice. Zajedno s učenicima zaključuje da su ta dva dijela manja od komada s 10 rupica i da bi morali predstavljati neki dio tog cijelog komada.

Sada za jedno cijelo možemo uzeti neki drugi komad iz seta, npr. sa 6 rupica i na isti način vidjeti da su komadi s recimo 1 i 3 rupice manji od jednog cijelog i da moraju predstavljati neki dio tog komada.

Nakon primjera možemo uvesti zapis. Ako je jedno cijelo komad s 10 rupica, a mi u ruci imamo komad s 1 rupicom tada on predstavlja jednu desetinu cjeline ipišemo $\frac{1}{10}$. Broj $\frac{1}{10}$ nazivamo razlomak. Broj 1 nazivamo brojnik, broj 10 nazivnik, a crtu između ta dva broja nazivamo razlomačka crta. Postupak nastavljamo tako da uzimamo razne komade *numicon seta* te riječima i simbolički zapisujemo njihovu vrijednost u odnosu na jedno cijelo.

Postupak nastavljamo tako što ćemo kao jedno cijelo uzimati različite komade *numicon*, a učenici moraju u odnosu na jedno cijelo nacrtati i simbolički zapisati razlomke koje dobivamo u vježbi. Kao sljedeći korak u svladavanju pojma razlomak, na ploči napišemo neki razlomak, a od učenika tražimo da izdvoje komad *numicon* koji ga predstavlja. Ovo je zadatak otvorenog tipa, što znači da ima više točnih rješenja ili postupaka rješavanja, pa je stoga jako bitno da učenici objasne svoj odabir. Verbalizacija i argumentacija rješenja nastavniku daje povratnu informaciju je li koncept usvojen ili ne.

Metodičke napomene: Na ovakvom satu učenici će povezati različite prikaze razlomka – grafički, simbolički i zapis riječima. Ovdje smo se ograničili na prave razlomke, no vrlo lako i bezbolno možemo uvesti i nepravne razlomke, prikaz razlomka kao mješovitog broja i drugo.

6.1.2 Uspoređivanje prirodnih brojeva

Razred: 5.razred, osnovna škola, prilagođeni program

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Omogućiti učenicima s poteškoćama u učenju matematike uspoređivanje brojeva koristeći se konkretnim materijalima

Obrazovni ishodi: Učenici će moći:

- odrediti broj tisućica u nekom broju
- prikazati neki broj preko komada iz *numicon* seta
- usporediti dva prirodna broja (do 10 000)

Organizacija i materijali: Učenik koji radi po prilagođenom programu dobit će 2 ili 3 *numicon* seta (bez komada s 10 rupica).

Opis rada: Učenik je već upoznat s pojmovima jedinica, desetica i stotica koje ćemo sada ponoviti s njim. Dodajemo novi pojam, pojam tisućice. Učeniku zadajemo nekoliko brojeva koje želimo da prikaže preko *numicon* komada na način da prvi komad označava broj tisućica, drugi broj stotica, treći desetica i na kraju četvrti broj jedinica.

Učenik ispunjava listić, a potom mu objašnjavamo na koji način ćemo uspoređivati brojeve, a to je:

- dva broja prikažemo pomoću komada iz *numicon* seta jedan ispod drugog
- gledamo prvo komad koji predstavlja tisućice, ako nisu isti komadi, tada je onaj broj u kojem je veći komad veći od drugog
- ako su komadi na mjestu tisućica isti, postupak ponavljamo sa stoticama, deseticama i jedinicama

Metodičke napomene: Ovakvim načinom rada učenicima koji rade po prilagođenom programu omogućili smo vizualizaciju zapisa brojeva do 10 000 i pomoću vizualizacije razjasnili njihovo uspoređivanje. Osim za uspoređivanje brojeva, u nižim razredima osnovne škole *numicon* možemo koristiti i za zbrajanje i oduzimanje brojeva do 100.

Radni listić: Uspoređivanje prirodnih brojeva

1. Sljedeće brojeve prikaži pomoću numicon komada i prikaži slikom koristeći se *numicon* setom:

a) 74

b) 67

c) 717

d) 123

e) 9985

f) 1254

2. Koristeći *numicon* komade usporedite sljedeće brojeve:

a) 254 i 524

b) 125 i 225

c) 1542 i 1546

d) 2583 i 2538

e) 9875 i 9785

f) 1254 i 1254

g) 1325 i 1142

6.2 Računska gusjenica

Računska gusjenica je manipulativni materijal koji koriste učitelji u nižim razredima osnovne škole, a nastavnici matematike mogu ga koristiti kako bi pomogli učenicima koji rade po prilagođenom programu. *Gusjenica* se može izraditi u školi ili za domaći rad, jednostavno je. Poželjno je da je učenici sami izrađuju kako bi uz proces nizanja osjetili izgradnju brojeva do 20 te izgradnju desetica jedinicama. Složit će je tako da povežu u lanac 10 kuglica jedne boje i 10 kuglica druge boje. Na prvoj kuglici crnim flomasterom označe se usta i oči, te se glava *gusjenice* također broji kao jedna jedinica. [9]



*Slika 2. Računska gusjenica*⁴

Računska gusjenica može se proširiti, na primjer možemo napraviti *gusjenicu* za zbrajanje do 100 na način da svaku deseticu napravimo u drugoj boji ili naizmjenice u dvije boje. Takva *gusjenica* može uvelike pomoći u shvaćanju količine, u shvaćanju uspoređivanja brojeva te zbrajanja i oduzimanja do 100, pa čak i množenja i dijeljenja.

No treba, kao i kod uporabe bilo kojeg didaktičkog materijala, imati na umu da je to samo alat koji nam pomaže prijeći iz konkretnog prema apstraktnom. Svaka aktivnost s konkretnim materijalom treba biti pažljivo osmišljena i uvijek voditi poopćavanju i apstrakciji.

Svaki nastavnik treba za svoj razred pronaći onaj ključni trenutak kada će iz konkretnog krenuti u apstraktno. Taj prijelaz bi trebao biti nenametljiv i postupan, ali bi se ipak trebao dogoditi kod svakog pojedinca. [9]

⁴ Slika preuzeta <http://mis.element.hr/fajli/1014/57-03.pdf>

6.2.1 Prirodni brojevi

Razred: 5.razred, osnovna škola, prilagođeni program

Vrsta sata: Sat uvježbavanja i ponavljanja

Cilj: Utvrđivanje vještina zbrajanja i oduzimanja prirodnih brojeva (do 100)

Obrazovni ishodi: Učenici će moći:

- zbrojiti dva broja (zbroj manji ili jednak 100)
- oduzeti dva broja (od kojih nijedan nije veći od 100)

Organizacija i materijali: Učenik će dobiti *računsku gusjenicu* koja se sastoji od 100 zrnaca, odijeljenih po 10 (u dvije boje, naizmjenice).

Opis rada: Nastavnik učeniku daje radni listić i ukoliko mu je potrebno, pruža pomoć. Nastavnik s ostatkom razreda rješava zadatke iz cjeline Prirodni brojevi, povremeno dolazeći do učenika koji radi po prilagođenom programu. Pregledava do kuda je učenik stigao s rješavanjem i postoje li problemi sa zadacima.

Metodičke napomene: Učenici koji rade po prilagođenom programu će s konkretnim materijalom zbrajati i oduzimati brojeve. Na taj će način lakše uočiti vezu između te dvije računske operacije. *Računska gusjenica* je odličan materijal za stvaranje osjećaja za količinu i procjenu rezultata zadanog zadatka. Osim za ovaj primjer, *računska gusjenica* može se koristiti i u obradi drugih lekcija, kao što su: množenje i dijeljenje, sljedbenik i prethodnik i dr. *Gusjenica* je prvenstveno didaktički materijal namijenjen učenicima nižih razreda osnovne škole, no za učenike koji imaju poteškoće u razumijevanju koncepta osnovnih računskih operacija je vrlo korisna i primjenjiva. Ona je jedini manipulativni materijal koji učenici mogu koristiti po volji jer ju svaki učenik može samostalno izraditi i nositi kao dio svog školskog pribora.

Radni listić: Rješavanje pomoću računске gusjenice

1. Bez brojanja odredite koji je broj crvena kuglica i objasnite kako ste došli do tog broja.



2. Zbrojite koristeći računsku gusjenicu:

- a) $46 + 34$
- b) $31 + 49$
- c) $43 + 56$
- d) $28 + 39$
- e) $77 + 14$

3. Oduzmite koristeći računsku gusjenicu:

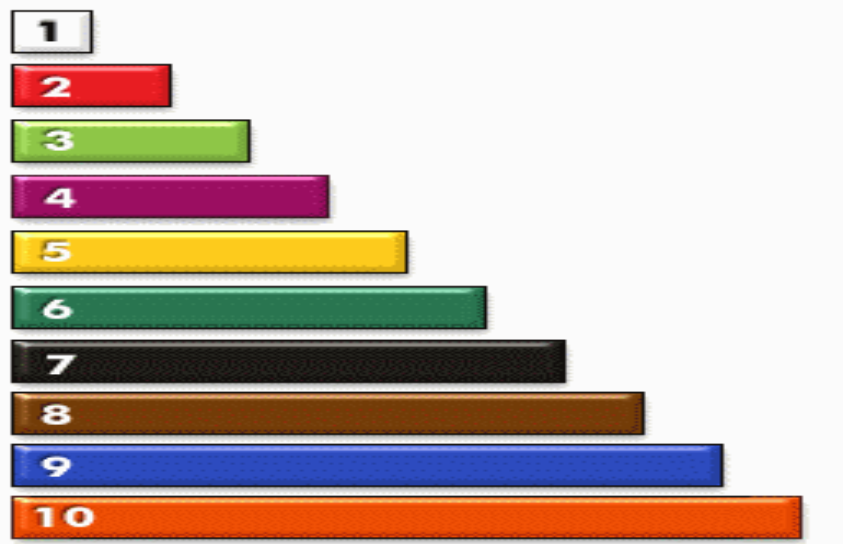
- a) $77 - 37$
- b) $84 - 54$
- c) $83 - 14$
- d) $53 - 28$
- e) $38 - 23$

4. Izračunajte koristeći računsku gusjenicu:

- a) $56 + 14$
- b) $18 + 31$
- c) $49 - 19$
- d) $69 - 22$
- e) $28 + 22$
- f) $56 - 16$

6.3 Brojevni štapići

Brojevni štapići (eng. cuisenaire rods) su drveni štapići različitih duljina i boja dizajnirani kako bi matematiku učinili vidljivom, baš kao što note čine glazbu vidljivom.



*Slika 3. Brojevni štapići*⁵

Brojevni štapići su štapići duljine od 1 do 10 cm. Bijeli štapić je duljine 1 cm, crveni 2 cm, svijetlo zeleni 3 cm, ljubičasti 4 cm, žuti 5 cm, tamno zeleni 6 cm, crni 7 cm, smeđi 8 cm, plavi 9 cm i narančasti 10 cm. Na taj način duljina štapića predstavlja njegovu brojnu vrijednost. Iako su *brojevni štapići* primarno korišteni za matematiku, postali su popularni i u upotrebi u drugim predmetima, na primjer u hrvatskom jeziku za demonstriranje gramatičkih struktura, kao što su prefiksi. [10]

Brojevni štapići su pomagala za učenje matematike koji nude jasnu sliku i razumijevanje računskih operacija, pružaju način za istraživanje matematike i učenje matematičkih koncepata, kao što su 4 osnovne aritmetičke operacije, rad s razlomcima i nalaženje djelitelja.

Ukoliko nastavnici nisu u mogućnosti kupiti *brojevni štapiće*, pravokutnici koji bi predstavljali *štapiće* mogu se napraviti od nekog debljeg kolaž papira ili nečeg sličnog, a mogu se koristiti i lego kockice različitih boja i veličina.

⁵ Slika preuzeta <http://www.elementarymatters.com/2012/05/learning-math-facts-with-cuisenaire.html>

6.3.1 Uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika

Razred: 5.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Učenicima vizualno predočiti razlomke jednakih nazivnika, te ih naučiti uspoređivati.

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- vizualno prikazati razlomke
- usporediti dva razlomka jednakih nazivnika
- pronaći neki razlomak, manji ili veći od zadanog razlomka

Organizacija i materijali: Učenicima u ovom primjeru nisu potrebni manipulativni materijali, nastavnik će sve pokazivati i voditi s nekoliko kompleta *brojernih štapića*.

Opis rada: Ponavljanje razlomaka, zapisa i dijelova razlomaka.

Nastavnik na ploču zapisuje prvi par razlomaka: $\frac{2}{10}$ i $\frac{9}{10}$. Od učenika traži da se izraze svoje mišljenje, koji je od zadanih razlomaka veći. Potom ćemo im zapisati i drugi par razlomaka, $\frac{4}{10}$ i $\frac{7}{10}$ te ponovno od učenika zatražiti da pretpostave koji je od razlomaka veći.

Kako bismo provjerili odgovore koje su nam učenici dali, koristit ćemo *brojervne štapiće*, s kojima upoznajemo učenike prije uporabe.

Za prvi primjer uzet ćemo štapić narančaste boje (10 cm) i reći da on predstavlja jedno cijelo. Tada ćemo uzeti crveni (2 cm) i plavi (9 cm) štapić te ih prikazati u obliku razlomka s nazivnikom 10, kao

$$\frac{2}{10} \text{ i } \frac{9}{10}.$$

Učenici uočavaju da je plavi štapić dulji. Neka sada uzmu druga dva štapića, ljubičasti (4 cm) i crni (7 cm) štapić, te naprave njihov zapis:

$$\frac{4}{10} \text{ i } \frac{7}{10}.$$

Ponovno lako uočavaju koji je štapić dulji, u ovom slučaju je to crni štapić.

Na ovaj način usporedili smo razlomke jednakih nazivnika. Neka učenici sami zapišu zaključak, a potom će i nastavnik napisati zaključak na ploču: ako dva razlomka imaju isti nazivnik, veći je onaj razlomak koji ima veći brojnik.

$$\frac{2}{10} > \frac{9}{10}.$$

$$\frac{4}{10} > \frac{7}{10}$$

Te činjenice sada povezujemo s razlomcima: ako dva razlomka imaju isti nazivnik, veći je onaj razlomak koji ima veći brojnik.

Što ako se za jedno cijelo uzme neki drugi štapić? Sada učenici zadajemo zadatke u kojima je jedno cijelo neki drugi *brojevni štapić*, zapisuju ih, uspoređuju i smišljaju primjer manjeg ili većeg razlomka od zadanog.

Metodičke napomene: Cilj uporabe manipulativnih materijala na ovom satu bio je učenicima vizualizirati razlomke jednakih nazivnika i pomoću te vizualizacije odrediti koji je od razlomaka manji (veći). Sama vizualizacija stvara koncept koji nam je kod uspoređivanja razlomaka jednakih nazivnika bitan. Na ovom satu obrađivali smo samo uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika, ali na jednostavan način možemo uvesti razlomke različitih nazivnika i njihovo uspoređivanje.

6.4 Temeljne ili jedinične kocke

Temeljne ili jedinične kocke (eng. unifix cubes), kao i *multilink kocke* (o kojima će poslije biti riječi), omogućavaju lakše usvajanje matematičkih koncepata i računskih operacija. Raznobojne su i velike te potiču na učenje kroz igru.



Slika 4. Temeljne ili jedinične kocke⁶

Jedinične kocke su plastične kocke, obično dimenzija 2 cm x 2 cm x 2 cm. U paketima dolaze kocke u 10 boja. Napravljene su tako da se mogu lako slagati u različite strukture, a vrlo se lako s njima mogu vizualizirati matematičke operacije, zadatci ili koncepti. Nastavnici ih mogu koristiti za uspoređivanje brojeva, slaganje i ponavljanje uzoraka, zbrajanje i oduzimanje, moguće je uvesti pojam množenja, kao i njegovih svojstava (na primjer, staviti 5 kockica u 6 skupina ili 6 kockica u 5 skupina i tako pokazati da je $5 \cdot 6 = 6 \cdot 5$, tj. da vrijedi komutativnost množenja).

6.4.1 Frekvencija i dijagrami

Razred: 7.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Učenici će predočiti podatke pomoću stupčastih dijagrama.

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- prikazati prikupljene podatke o nekom obilježju pomoću tablice frekvencija
- predočiti podatke pomoću manipulativnog materijala
- grafički predočiti podatke pomoću stupčastog dijagrama
- razvijati preciznost i urednost

⁶ Slika preuzeta <http://mysmartchild.com/unifix-cubes.html>

Organizacija i materijali: Razred podijelimo u grupe od po četiri učenika. Svaka grupa dobiva nekoliko kompleta *temeljnih kocki* te radni listić sa zadacima..

Opis rada: Nastavni sat započinjemo uvodnim primjerom i zajedno s učenicima uvedemo i definiramo nove pojmove: skup objekata, obilježja, frekvencija, dijagram i posebno stupčasti dijagram.

Primjer: Na ispitu znanja iz matematike učenici su postigli slijedeći uspjeh: 4 petice, 7 četvorki, 5 trojki, 2 dvojke i 3 jedinice. Prikazat ćemo ove podatke na određen način.

Da bi uveli stupčasti dijagram koristit ćemo *temeljne kocke* pomoću kojih ćemo prvo vizualizirati podatke, a tek ih potom grafički prikazati u obliku stupčastog dijagrama. Dogovorimo se koja boja će predstavljati koju ocjenu, recimo petice plave kocke, četvorke crvene itd. Tada uzmemo 4 plave kocke i složimo jednu na drugu. Isto napravimo i s ostalim kockama dogovorenih boja, te tako složene kocke stavimo okomito na klupu da učenici vide stupce različitih boja. Na taj način smo dobili trodimenzionalni stupčasti dijagram koji predstavlja raspodjelu ocjena na ispitu iz matematike. Potom te stupce precrtamo na ploču, vodeći računa o širini i duljini stupaca.

Učenici će dalje raditi u skupinama na zadacima s radnog listića.

Metodičke napomene: Korištenjem manipulativa povezujemo vizualni prikaz (trodimenzionalni stupčasti dijagram) s grafičkim prikazom koji je cilj ovog nastavnog sata. Učenici će na ovaj način lakše zapamtiti nove pojmove koji se uče u ovoj nastavnoj lekciji i brzo i jednostavno uspostaviti vezu između podataka i njihovog prikaza u dijagramu. Ovaj primjer možemo iskoristiti i kod uvođenja relativne frekvencije. Ujedno to je zgodan trenutak u nastavi za ponavljanje razlomaka, budući se relativne frekvencije zapisuju kao razlomak (ili decimalni broj) kojem je nazivnik ukupan broj učenika (kao u našem primjeru).

Radni listić: Frekvencija i dijagrami

Za svaki od zadataka napravite tablicu frekvencija, dijagram pomoću temeljnih kocki i nacrtajte dijagram.

1. Dječak baca kockicu 30 puta. 7 puta je pao broj 6 na kockici, 3 puta 5,



2 puta 4, 9 puta 3, 4 puta 2 i 5 puta je pao broj 1.

2. U razredu je na kraju školske godine bilo sljedeće stanje s ocjenama:

5 učenika je prošlo s odličnim uspjehom, 8 učenika s vrlo dobrim, 6 s dobrim, 7 s dovoljnim i 2 učenika idu na produžnu nastavu iz jednog ili dva predmeta.

3. U nekom društvu je 16 osoba. Od ukupnog broja osoba 5 osoba ima plave oči, 7 ima crne, 3 osobe imaju zelene i 1 osoba ima smeđe oči.

4. U društvu smo mladih glazbenika. Njih sedmero svira gitaru, troje violinu, petero klavir i dvoje trubu.



6.4.2 Množenje prirodnih brojeva

Razred: 5.razred, osnovna škola, prilagođeni program

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Učenicima približiti množenje, ponoviti vezu između zbrajanja i množenja, te pisano množenje dovesti do nivoa rutinske operacije.

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- prikazati dvoznamenkasti broj pomoću *temeljnih kocki*
- prikazati množenje brojeva pomoću *temeljnih kocki*
- pomnožiti dvoznamenkasti broj jednoznamenkastim
- objasniti vezu između operacija zbrajanja i množenja

Organizacija i materijali: Učenik koji radi po prilagođenom programu dobiva *temeljne kocke*, 9 listova za slaganje kocki i list sa zadacima.

Opis rada: Na početku rada s manipulativima ponovimo tablicu množenja i vezu između množenja i zbrajanja. Na primjer: 3·4 možemo prikazati kao 3 stupca od 4 *kocke*, a umnožak ćemo dobiti kada izbrojimo koliko smo *kocki* koristili. Ovo nam je dobar uvod u rad s manipulativima i stvaranje radnog ozračja.

Učenicima sada dajemo nekoliko dvoznamenkastih brojeva i zadatak da ih prikažu pomoću *temeljnih kocki*. Očekujemo zaključak da je najjednostavnije slagati *temeljne kocke* u stupce po 10 kocaka, od kojih jedan stupac čine preostale *kocke* (uvijek ih je manje od 10). Npr. broj 25 ćemo prikazati na sljedeći način: dva stupca po 10 *kocki* i jedan s ostalih 5 *kocki*. Broj 43 ćemo prikazati kao 4 stupca po 10 *kocki* i jedan stupac sa 3 *kocke*.

Sada želimo koristiti *temeljne kocke* za množenje dvoznamenkastog broja jednoznamenkastim. Zadajemo učenicima primjer $31 \cdot 3$ i tražimo od njih da sami pokušaju riješiti taj zadatak. Komentiramo sve ideje, prednosti i nedostatke, pokažemo dobre strategije i zajednički smislimo koja bi strategija bila najefikasnija. Na primjer, broj 31 prikazujemo kao 3 stupca od 10 *kocki* i jedan od 1 *kocke*. Budući želimo broj 31 pomnožiti brojem 3, napraviti ćemo broj 31 tri puta i staviti na 3 lista. Sada ćemo zbrojiti koliko ukupno *temeljnih kocki* imamo na sva tri papira. Kako smo slagali *kocke* u stupce po 10, lako nam je prebrojiti koliko *kocki* ima u njima. Imamo sve skupa 9 stupaca po 10 *temeljnih kocki*, to je 90 *kocki*. Imamo još 3 stupca po 1 *kocku*, što daje 3 *kocke*. Zaključujemo da je ukupan broj *kocki* $90 + 3 = 93$ i to je zapravo $31 \cdot 3$.

Sada tražimo od učenika da sam izračuna koliko je $45 \cdot 4$ pomoću *temeljnih kocki*.

Nakon toga dajemo učeniku papir sa zadacima koje treba riješiti pomoću *temeljnih kocki*. Nakon nekoliko zadataka postavimo učeniku pitanje može li smisliti algoritam kojim bi brzo i efikasno (a bez *temeljnih kocki*) riješio zadatak.

Metodičke napomene: Učenici često imaju problema s tablicom množenja, a i pisano množenje često im nije na nivou rutinske operacije (što bi u 5-tom razredu osnovne škole moralo biti). Učenicima je ponekad teško samo tako prihvatiti određeni algoritam računanja, korištenjem manipulativa oni sami sudjeluju u smišljanju i testiranju efikasnosti algoritama. Na taj način algoritam će brže i lakše usvojiti, a potom ga i rado koristiti. *Temeljne kocke* možemo, osim za množenje prirodnih brojeva, koristiti i za njihovo zbrajanje i oduzimanje, slično kao *računsku gusjenicu*. Ovu lekciju možemo jednostavno proširiti i povezati sa sljedećom: dijeljenje prirodnih brojeva (dvoznamenkastog jednoznamenkastim za početak, a potom proširiti i na troznamenkasti jednoznamenkastim i dvoznamenkastim brojem). Zapravo *temeljne kocke* su jako dobar manipulativni materijal za nastavu matematike u razrednoj nastavi.

Radni listić: Množenje prirodnih brojeva

Odredi umnožak sljedećih brojeva:

1. $28 \cdot 3$
2. $18 \cdot 5$
3. $33 \cdot 7$
4. $65 \cdot 4$
5. $77 \cdot 5$
6. $12 \cdot 9$
7. $92 \cdot 6$

6.5 Multilink kocke

Multilink kocke (eng. multilink, interlocking cubes) su manipulativni materijali koji se od ostalih kocki razlikuju po tome što se mogu spajati u svim smjerovima (na svaku stranu kocke možemo spojiti drugu kocku). [11]



*Slika 5. Multilink kocke*⁷

Multilink kocke dolaze u 10 boja, veličine obično 2 cm x 2 cm x 2 cm. Nastavnici ih mogu koristiti za slaganje, sortiranje i brojanje, u razlomcima, geometriji, statistici i algebri. Pomoću njih je moguće, na primjer objasniti polovine ili duplo veće predmete, redne brojeve,

⁷ Slika preuzeta https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Multilink_cubes.JPG

slaganje uzoraka, postotke i razlomke, duljinu, površinu, volumen, neke jednostavnije linearne jednadžbe...

6.5.1 Oplošje i obujam kvadra

Razred: 8.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Učenici će vizualizirati pojmove oplošja i obujma kvadra

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- opisati, prikazati grafički i složiti kvadar
- opisati dijelove kvadra
- izračunati oplošje kvadra
- izračunati obujam kvadra
- iz zadanih podataka (duljina stranica kvadra, njegovog oplošja i obujma) izračunati nepoznate podatke

Organizacija i materijali: Učenici rade u paru s osobom s kojim sjede u klupi i svaki par dobiva isti broj *multilink kocki*.

Opis rada: Sat započinjemo ponavljanjem formula za oplošje i obujam kocke. Zatim nastavnik pokazuje jedan kvadar napravljen od *multilink kocki* te s učenicima ponavlja karakteristične pojmove i svojstva kvadra: broj bridova, broj vrhova, koliko ima bridova iste duljine, koliko ima strana kvadar, kolike su površine tih strana, što su visina, duljina i širina kvadra...

Ono što sada želimo izračunati je oplošje i obujam kvadra. Da bi to napravili ponavljamo što je to oplošje, a što obujam geometrijskog tijela.

Oplošje je zbroj površina svih strana, pa zajedno s učenicima računamo te površine i na kraju oplošje. Zatim tražimo od parova da naprave svoj kvadar i izračunaju mu oplošje. Prikažemo nekoliko primjera na ploči, te zajedno s učenicima izvodimo formulu za oplošje kvadra.

Veličina prostora koju tijelo zauzima naziva se volumen ili obujam tog tijela. Obujam prizme (podsjetimo učenike da je kvadar prizma, pa ponovimo osnovne pojmove i svojstva

prizmi) računamo kao umnožak površine baze i visine prizme. Zajedno s učenicima izvodimo formulu za obujam kvadra. Ponovno tražimo od učenika da sami naprave neki kvadar i izračunaju mu obujam.

Kada smo s učenicima napravili nekoliko primjera računanja oplošja i obujma kvadra, možemo pred njih staviti malo zahtjevniji zadatak. Neka svaki par napravi nekoliko kvadara koji imaju iste volumene, ali različite površine baza. Neka potom napišu svoja zapažanja.

Za kraj još jedan zgodan zadatak: Od zadanog broja kocaka sastavite sve moguće kvadre, te im odredite oplošje i obujam. Sva zapažanja i zaključke zapišite u bilježnicu.

Metodičke napomene: U nastavi matematike geometrija je vrlo zahtjevan dio gradiva s kojim učenici često imaju problema. Kod geometrije prostora – stereometrije dodatne probleme stvara snalaženje u prostoru i zor. Zbog toga je rad s *multilink kockama* koristan. Učenici na taj način dobivaju predodžbu o prostoru, volumenu kojeg neko tijelo zauzima u njemu. *Multilink kocke* možemo koristiti u nastavi i za određivanje pripada li neka točka nekoj ravnini, međusobne položaje pravaca i ravnina i sl.

6.6 Matematičke pločice



Slika 6. Matematičke pločice⁸

⁸ Slika preuzeta <http://www.forhappykids.com/UrunDetay.aspx?KID=8&ID=358>

Matematičke pločice (eng. tiles) su obojani kvadrati veličine 1 cm x 1 cm. Dolaze u žutoj, crvenoj, zelenoj i plavoj boji ili u nekim drugim bojama, ukoliko ih nastavnici sami izrađuju. Mogu se koristiti na sličan način kao *multilink kocke*. Razlika je u tome što se *pločice* ne mogu povezati kao kocke, već ostaju odijeljeni dijelovi. Mogu se koristiti s *blok uzorcima* i *multilink kockama* za objašnjavanje istih koncepata. Zgodno je i korisno učenicima pokazati kako koristeći različite manipulativne materijale možemo objasniti i vidjeti isti koncept, na taj način će ga učenici bolje razumjeti. [11]

6.6.1 Pravokutnik i kvadrat

Razred: 5.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Upoznati se s geometrijskim likovima kvadratom i pravokutnikom i njihovim svojstvima

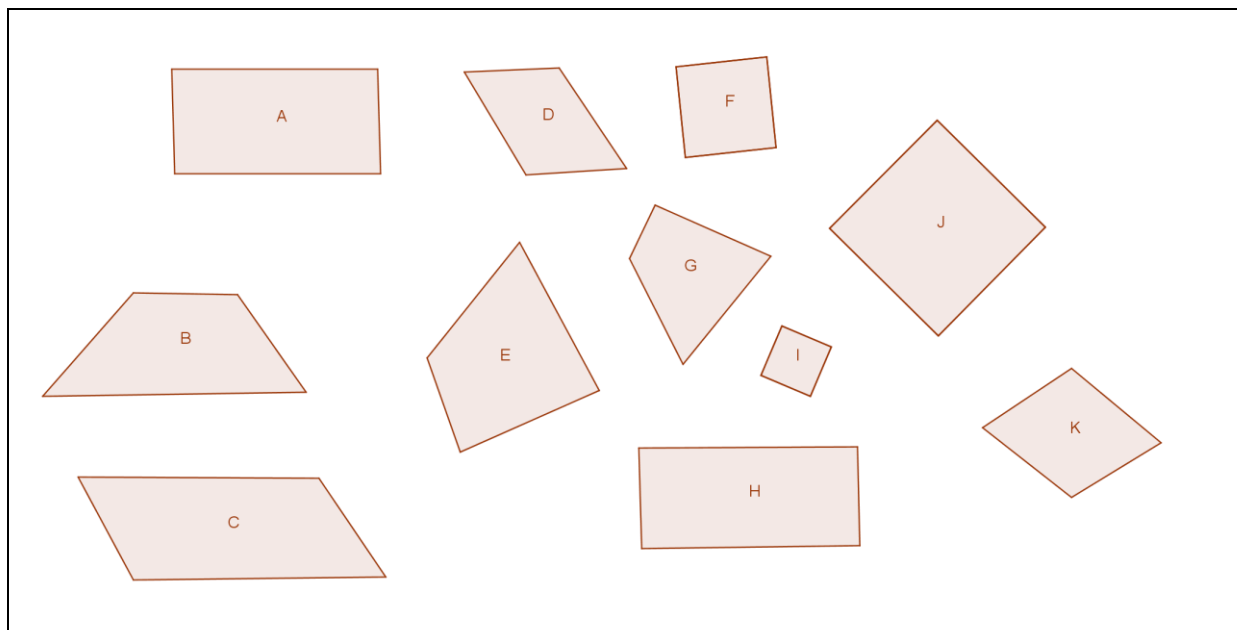
Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- razlikovati kvadrat i pravokutnik
- opisati, definirati i prikazati grafički kvadrat
- opisati, definirati i prikazati grafički pravokutnik
- izračunati opseg i površinu kvadrata
- izračunati opseg i površinu pravokutnika

Organizacija i materijali: Učenici rade u paru s osobom s kojom sjede. Svaki par dobiva isti broj *matematičkih pločica* i radni listić.

Opis rada: Sat započinjemo listićem.

Razvrstajte dane likove i objasnite po kojem ste ih kriteriju razvrstali.



Od učenika tražimo da zadane četverokute sortiraju po nekom kriteriju. **Kategoriziranje** je zgodna nastavna strategija koja uključuje misaone procese višeg stupnja pa je u razredu izuzetno korisna i dobro prihvaćena. Možemo ju koristiti u nastavi matematike od najranije dobi. Ako su učenici premali nastavnik im može zadati kategorije po kojima će razvrstavati dane elemente. No bolja je varijanta dopustiti učenicima slobodu odabira kriterija. Ako učenik može argumentirati kriterij, onda je kategorizacija dobro provedena i kriterij će se uzeti u ozbiljno razmatranje kod diskusije. Ovom nastavnom strategijom razvijamo kreativnost i kritičko mišljenje kod učenika što i je cilj modernog nastavnog procesa. Nakon diskusije o odabranim podjelama i kriterijima, odvojimo kvadrat i pravokutnik. Sada s učenicima kroz razgovor popunjavamo tablicu u kojoj popisujemo sličnosti i razlike ova dva lika.

Učenici su u prethodnom razredu učili formule za površinu i opseg pravokutnika i kvadrata pa zajedno na ploču zapišemo te formule. Na ploču nacrtamo kvadrat i pravokutnik sa zadanim duljinama stranicama te im izračunamo površinu i opseg.

Sada učenicima podijelimo *matematičke pločice* i zadamo im prvi zadatak: Provjerite ispravnost formula koje smo zapisali na ploču. Želimo da se učenici sami uvjere da su formule ispravne i to tako da pomoću *matematičkih pločica* naprave kvadrat i pravokutnik zadanih duljina stranica te provjere jesu li dobili jednake rezultate. Kada smo se uvjerali u ispravnost formula podijelimo listiće sa pripremljenim zadacima. Učenici u paru rješavaju zadatke koje ćemo potom zajednički prokomentirati.

Metodičke napomene: Tražeći od učenika da provjere ispravnost formula i da ih dokažu, potičemo ih na razmišljanje i provjeru, a ne samo prihvaćanje formula i činjenica koje im nastavnik govori. Moderna nastava razvija i potiče kreativne, znatiželjne, kritički raspoložene mlade ljude. Uvođenje matematičkih dokaza, kao i provjera ispravnosti formula i pravila je dobar način da se to postigne, ali i da se produbi razumijevanje matematičkih koncepata. Na ovaj način formule (koje su sami provjerili i u čiju su se točnost uvjerali) i koncepti, se pohranjuju u dugoročnom pamćenju učenika. *Matematičke pločice* možemo koristiti i za računanje opsega i površina nepravilnih mnogokuta i na taj način razvijati učenikovu logiku (prilikom dijeljenja mnogokuta na pravokutnike i kvadrate). Osim za računanje opsega i površine kvadrata i pravokutnika, od *matematičkih pločica* možemo napraviti kvadrat ili pravokutnik od više boja i koristiti za izražavanje razlomkom ili postotkom površinu koja je napravljena od određene boje.

Radni listić: Pravokutnik i kvadrat

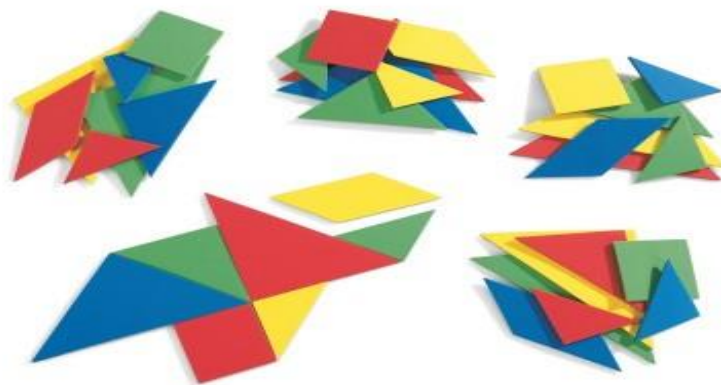
1. Koristeći matematičke pločice napravite kvadrat koji sadrži jednak broj manjih kvadrata crvene, plave, zelene i žute boje. Skicirajte kvadrat koji ste napravili.
2. Koristeći matematičke pločice napravite pravokutnik koji sadrži jednak broj manjih kvadrata crvene, plave, zelene i žute boje. Skicirajte pravokutnik koji ste napravili.
3. Je li moguće napraviti pravokutnik od 13 malih kvadrata? Ako da, napravite ga i skicirajte rješenje. Ako ne, obrazložite svoj odgovor.
4. Je li moguće napraviti kvadrat od 10 manjih kvadrata? Ako da, napravite

ga i skicirajte rješenje. Ako ne, obrazložite svoj odgovor.

5. Dano je 12 pločica. Sastavite sve moguće kvadrate i pravokutnike od danih pločica. Izvedite zaključke.
6. Dano je 16 pločica. Sastavite sve moguće kvadrate i pravokutnike od danih pločica. Izvedite zaključke.

6.7 Tangrami

Tangrami (eng. tangrams) su jednostavni setovi od 7 geometrijskih likova sastavljenih od 5 trokuta (2 mala trokuta, 1 srednji i 2 velika trokuta), kvadrata i paralelograma. Setovi dolaze u 4 boje – crvena, plava, zelena i žuta. Svi trokuti imaju dva kuta od 45° i jedan od 90° i odgovarajuće stranice su im proporcionalne, tj. trokuti su slični. Još jedna zanimljivost kod *tangrama* je ta da se svi dijelovi *tangrama* mogu potpuno prekriti malim trokutima. [12]



Slika 7. Tangram⁹

⁹ Slika preuzeta <http://www.wesco-eshop.fr/35027020-tangram-geant-wesco.html>

Tangram je dobar alat za otkrivanje snalaženja u prostoru i za istraživanje razlomaka i različitih geometrijskih koncepata, uključujući veličinu, oblik, sličnost, sukladnost, površinu, opseg i svojstva mnogokuta. *Tangrami* su posebno prikladni za nezavisan rad učenika, budući svaki učenik dobiva set za kojeg je on ili ona odgovorna.

Nekim učenicima će biti veoma teško i frustrirajuće praviti likove koristeći *tangram*, posebno ako ih se mora koristiti slijedeći pravila i algoritme. Tim učenicima se na razne načine može olakšati, na primjer nastavnici mogu staviti prvi dio na njegovo mjesto ili nacrtati linije koje pokazuju gdje staviti koji dio. Ono što je bitno jest naći nivo na kojem svaki učenik osjeća zadovoljstvo istraživanja i rješavanja matematičkih problema pomoću *tangrama*. [12]

Uporaba *tangrama* pruža savršenu priliku za autentične procjene. Gledajući učenike kako rade s *tangramom*, nastavnici mogu već vizualno naslutiti kako učenici pristupaju matematičkom problemu. Njihovo razmišljanje mogu „vidjeti“, na način da je njihovo mišljenje izraženo kroz postavljanje dijelova *tangrama* i kada je razred podijeljen u male grupe, nastavnik je u mogućnosti kružiti, slušati i postavljati pitanja, svo vrijeme fokusirajući se na ono kako pojedinci razmišljaju. [12]

6.7.1 Skupovi točaka u ravnini

Razred: 5.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat ponavljanja i uvježbavanja gradiva

Cilj: Ponoviti gradivo cjeline skupovi točaka u ravnini i učenike pripremiti za ispit znanja

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- razlikovati trokute i četverokute
- nabrojati i prepoznati svojstva trokuta
- razlikovati vrste trokuta
- nabrojati i prepoznati svojstva četverokuta
- razlikovati vrste četverokuta
- razlikovati vrste kutova

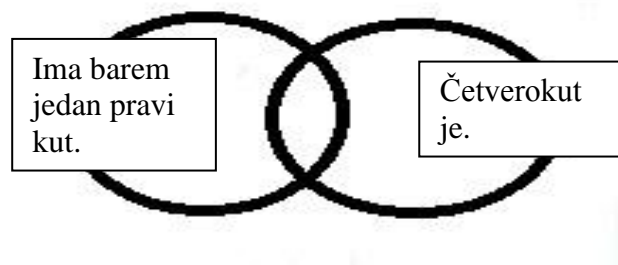
Organizacija i materijali: Učenici rade u grupama po četvero. Svaka grupa dobiva 4 seta *tangrama* i 3 zavezana konopca.

Opis rada: Na početku sata nastavnik drži u ruci neki komad iz *tangram* seta tako da učenici ne znaju koji. Nastavnik daje asocijacije koje učenicima pomažu u pogađanju koji dio *tangram* seta drži u ruci. Na primjer:

- Komad koji držim je četverokut.
- Ima barem jedan pravi kut.

Sada bi učenici trebali zaključiti da se radi o kvadratu. Tragovi koje je nastavnik dao mogu se zvati svojstva geometrijskog lika, a na ovaj način smo ponovili neka od njih.

Potom na ploču nacrtamo dva kruga koja se sijeku i u svaki od krugova stavimo jedno od ova dva svojstva koja smo dali na početku sata.

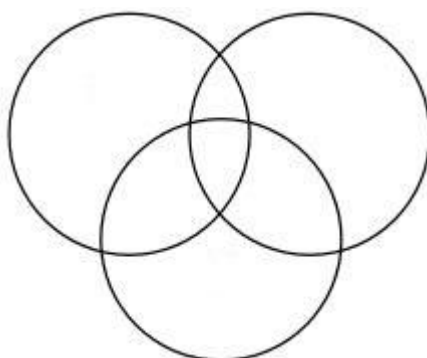


U prvi krug stavljamo sve likove koji imaju svojstvo da im je barem jedan kut pravi, u drugi krug sve četverokute, a u presjek ta dva kruga stavljamo likove koji imaju oba svojstva. U našem slučaju to je kvadrat. Također, osim samih dijelova *tangram* seta, možemo napraviti i neke oblike koji se sastoje od dva komada iz *tangram* seta, npr. dva kvadrata stavljeni jedan do drugog tvore pravokutnik.

Sada učenicima dajemo zadatak da i ostale likove iz *tangram* seta, uključujući i pravokutnik, postave u odgovarajući dio dijagrama. Kada su gotovi sa rješavanjem na redu je provjera rješenja i diskusija.

Sada učenicima podijelimo po tri mala papira i dajemo im sljedeći zadatak. Na dobivene papire napišite po jedno svojstvo trokuta ili četverokuta, vezano uz njihove stranice ili kutove. Pazite da vam se unutar grupe svojstva ne ponavljaju. Kada ste gotovi skupite sve papiriće okrenute natpisom prema dolje. Potom svaki učenik izvlači 3 svojstva.

Od konopaca koje ste dobili napravite tri kruga na sljedeći način:



Svakom krugu u napravljenom dijagramu dodijelimo jedno svojstvo. Sada u dani dijagram zapisujemo likove koji pripadaju u određeni dio dijagrama ovisno o tome koje ili koja svojstva ima. Mjesta gdje se krugovi (svojstva) u dijagramu preklapaju su mjesta na koja stavljamo likove koji imaju sva ta svojstva.

Zadatak trebate riješiti za 3 različita dijagrama, koja ćete nacrtati u svoje bilježnice. Svojstva nakon svakog rješavanja vraćamo na hrpu i ponovno izvlačimo nova tri svojstva.

Nakon što grupe završe s rješavanjem zadataka, nastavnik preuzima sat. Traži od grupa da mu nabroje svojstva koja su pisali te ih zapisuje na ploču i potiče diskusiju.

Neka od pitanja koja može postaviti učenicima su:

- Je li neko svojstvo preopćenito? Dajte primjer.
- Je li neko svojstvo prespecifično? Dajte primjer.
- Je li vam se dogodilo da je neki dio dijagrama ostao prazan? Kako je to moguće?
- Jeste li se uvijek u grupi lako složili gdje staviti neki komad *tangram* seta? Ako niste, objasnite gdje su bila neslaganja.

Ako će učenici imati problema s popisivanjem svojstava, evo nekoliko primjera svojstava koja im možemo ponuditi:

- ima jedan ili više pravih kutova
- ima tri stranice
- četverokut je
- nema pravih kutova
- ima jedan ili više tupih kutova
- sve stranice su jednake duljine
- ima barem jedan par paralelnih stranica i dr.

Metodičke napomene: Na ovaj način učenici će sistematizirati i povezati gradivo, što je jako korisno i bitno jer učenici često matematiku ne doživljavaju kao povezanu cjelinu već kao "ormar s ladicama". Svaka lekcija ide u zasebnu ladicu i kada je ladica jednom zatvorena,

teško se ponovno otvara. Učenici trebaju naučiti da u matematici nema starog gradiva, da je sve jedna nedjeljiva cjelina i da u bilo kojem momentu mogu koristiti sve što im može pomoći u rješavanju danog problema. S istim materijalom i na sličan način možemo raditi i u 6.razredu kod obrade četverokuta ili na početku 7.razreda kao ponavljanje trokuta i četverokuta.

6.7.2 Mjerenje kutova

Razred: 5.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Upoznavanje učenika s mjerama kutova i njihovim nazivima

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- povezati grafički prikaz kuta s njegovom mjerom i vrstom (tupi, šiljasti, pravi, puni, ispruženi ili izbočeni kut)
- dati primjer za svaki od kutova (u bilo kojem prikazu)
- usporediti mjere kutova
- sami napraviti zadane kutove od *tangram* dijelova

Organizacija i materijali: Svaki učenik dobiva po dva *tangram* seta. Nastavnik također ima dva seta te jedan zidni sat.

Opis rada: Na početku sata ćemo definirati vrste kutova i njihovu vezu s pravim kutom, te uvesti mjeru kuta u stupnjevima koju ćemo povezati s vrstom kuta (pravi kut ima mjeru 90° , ispruženi 180° i puni 360°). Korištenjem zidnog sata ilustrirat ćemo karakteristične vrste kutova, npr. prikazat ćemo 6 sati, 9 sati i 12 sati. Želimo izvući zaključak da kazaljke određuju dva kuta, a da zbog dogovora promatramo onaj manji (veći, tj. izbočeni samo iznimno). Sada postavimo zadatak odrediti kolika je mjera kuta u bilo kojem petominutnom intervalu, a željeni odgovor je 30° .

Sada prelazimo na rad s *tangramom*. Učenici trebaju nacrtati u bilježnicu sve likove iz *tangram* seta te odrediti mjere svih njihovih kutova.

Idući zadatak koji stavljamo pred učenike je da prikažu što više kutova i njihovih mjera koristeći se *tangramom*. Potom kutove treba razvrstati u tablicu prema mjerama: pravi,

tupi, šiljasti,... Pogledamo zajedno koje su sve kutove učenici pronašli. Osim 90° i 45° , trebali su još pronaći: 135° , 180° , 225° , 270° , 315° i 360° . Usporedimo i prodiskutiramo različite načine na koje su dobili određene kutove. Za kraj je bitno prokomentirati da su svi dobiveni kutovi višekratnici od 45, te da svi trokuti u setu imaju iste mjere kutova, bez obzira na razliku u veličini.

Metodičke napomene: Učenici će, koristeći se manipulativnim materijalima, vizualizirati kutove različitih veličina i znat će njihove nazive. Praveći kutove različitih veličina koristeći *tangram*, učenici vježbaju i zbrajanje i oduzimanje. Ovdje nam korištenje *tangram seta* omogućuje smišljanje i uočavanje različitih ideja kako prikazati dani kut korištenjem karakterističnih kutova što će učenicima pomoći kod konstrukcija kutova zadanih mjera. Osim za mjerenje kutova, *tangram* možemo koristiti i kako bismo izračunali zbroj unutarnjih kutova u svim likovima seta i možemo tražiti od učenika da pokušaju pronaći neki uzorak.

6.7.3 Postotci

Razred: 7.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Usvojiti pojam i račun s postotcima

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- prepoznati različite zapise postotka (grafički, simbolički, oblik razlomka i decimalnog broja)
- prelaziti iz jednog zapisa postotka u drugi
- izračunati zadani postotak nekog broja

Organizacija i materijali: Učenici su podijeljeni u grupe po 4, svaki učenik dobiva 1 *tangram* set i svoj radni listić.

Opis rada: U uvodnom dijelu sata želimo povezati njihovo znanje s postotcima u svakodnevnom životu, npr. sniženja u dućanima, rezultate nekakvih anketa, zapis na mlijeku o količini mliječne masti i dr. Komentiramo zapis koji je učenicima već poznat i definiramo

što taj zapis znači matematički, tj. definiramo postotak kao razlomak s nazivnikom 100. Sada pokažemo sve načine zapisivanja postotaka, npr. $30\% = \frac{30}{100} = 0.30$. Iz ovog je vidljivo da svaki razlomak možemo zapisati kao postotak tj. da ga možemo proširiti do nazivnika 100. Sada ćemo prije upotrebe *tangram* seta uvježbati prebacivanje postotaka iz jednog zapisa u ostale koristeći se sljedećim zadacima:

Prikaži postotke u svim mogućim zapisima:

1. $70\% =$

2. $\frac{25}{100} =$

3. $\frac{1}{25} =$

4. $0.2 =$

5. $\frac{4}{5} =$

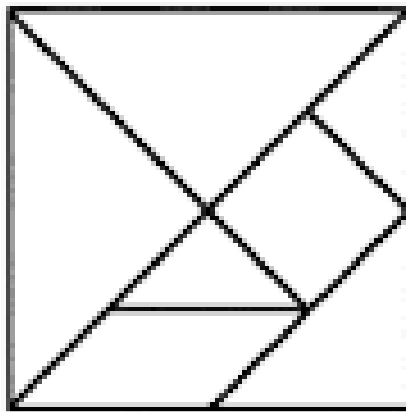
6. $43\% =$

7. $\frac{7}{100} =$

8. $0.06 =$

Učenicima sada podijelimo radne listiće uz dogovor da kvadrat sa slike prikazuje jedno cijelo odnosno 100%.

Radni listić: Postotci



1. Neka jedan od učenika uzme između 3 i 6 komada iz tangram seta i neka prekrije s tim komadima dio kvadrata na listiću. Ostali učenici neka skiciraju kvadrat i zapišu koliki je postotak kvadrata prekriven.

Postupak ponavljajte dok se svi u grupi ne izredate na prekrivanju kvadrata.

2. Prekrijte zadani dio kvadrata i skicirajte rješenje u bilježnicu.

- a) 25%
- b) 75%
- c) 37.5%

Kada učenici riješe radni listić, treba s njima iskomentirati rješenja. Posebno će zanimljivo biti vidjeti na koji način učenici dolaze do rješenja. Je li to preko nepokrivenog dijela kvadrata, preko razlomaka, koristeći svojstva *tangram* setova, ...

Ovisno o razumijevanju koncepta postotka, možemo od učenika tražiti da umjesto točnog broja procijene vrijednost postotka.

Metodičke napomene: Postotci su jedna od lekcija iz matematike koja je primjenjiva u svakodnevnom životu i zbog toga je bitno da učenici shvate koncept postotka i njegov zapis. Tek kada im to bude jasno i ne budu s tim imali problema, spremni su za rješavanje kompliciranijih zadataka i primjenu postotaka. Osim za određivanje postotaka, isti materijal možemo koristiti s učenicima u 6.razredu, za rad s razlomcima, zadajući učenicima da izraze razlomcima prekriveni ili neprekriveni dio kvadrata.

6.8 Geoploče

Geoploča (eng. geoboard) je matematički manipulativni materijal koji dolazi u dva oblika:

- *jednostrana geoploča* - čvrsta kvadratna ploča s klinovima u kvadratnom poretku
- *dvostrana geoploča* - ima klinove s obje strane, u kvadratnom poretku s jedne i kružnom poretku s druge strane ploče.



Slika 9. Geoploče¹⁰

Geoploča s kvadratnim poretkom sastoji se od 25 klinova jednako raspoređenih u 5 redova po 5 klinova u svakom. *Geoploča* s kružnim poretkom sastoji se od 17 klinova: 12 klinova je jednoliko raspoređeno tako da čini kružnicu, 1 klin je u središtu te kružnice i po 1 klin je u svakom od 4 kuta ploče. [13]

U radu s *geopločama* koriste se višebojne gumice. Prije nego učenici krenu s istraživanjem *geoploče*, trebalo bi im pokazati kako se radi s gumicama. Neka učenici gledaju nastavnike koji će napraviti neki jednostavni oblik na *geoploči* na način da će držati prst na vrhu klina od kojeg kreću i potom pomicati gumicu prema ostalim klinovima. Ova tehnika, koju će učenici vrlo brzo usvojiti, minimizira šanse da gumica odleti s ploče. [13]

Jednostavnim rastezanjem gumice od klina do klina, učenici mogu stvoriti razne likove i dezene. Ovaj proces potiče učenike da naprave dobar dio posla, stvore varijacije i isprobavaju različita rješenja bez straha od pogreške ili bez potrebe za brisanjem svoga rada. Konstrukcije

¹⁰ Slika preuzeta

<http://www.amazon.com/Learning-Resources-Double-Sided-Assorted-Geoboard/dp/B000QDZY52>

gumicama prave pravilne obrasce sa stupnjem preciznosti koji bi inače učenicima bilo teško postići. [13]

Bogatija matematička struktura na *geoploči* omogućava učenicima otkrivanje matematičkih svojstava sa malo ili nimalo smjernica od strane nastavnika. Ubrzo će primijetiti da se gumica rastegnuta između dva klina automatski pretvara u ravnu liniju. Radeći ravne linije učenici primjećuju da su neki parovi klinova udaljeniji nego neki drugi. [13]

U ovisnosti o figurama koje učenici stvaraju, nastavnici će uvoditi terminologiju, ali ne treba žuriti s formaliziranjem onog što je tek u procesu otkrivanja. Kasnije, kada učenici budu uključeni u aktivnost, nastavnici će pronaći prirodan način da učenicima pruže jezik koji će im pomoći komunicirati matematički. [13]

Učenici često vide savršenije figure od onih koje su konstruirali jer *geoploča* nije savršena niti će figure biti takve. Sposobnost da se u početku nadvladaju ograničenja *geoploče* može olakšati učenje. [13]

Geoploča je izvrstan alat za otkrivanje svojstava mnogokuta, sličnosti, sukladnosti, mjere kutova, površine i opsega geometrijskih likova, razlomaka, iracionalnih brojeva, ...

6.8.1 Četverokut

Razred: 6.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat ponavljanja i uvježbavanja gradiva

Cilj: Provjeriti znanje učenika i ponoviti gradivo za ispit znanja

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- crtati četverokute
- osnovna svojstva sljedećih četverokuta: kvadrat, pravokutnik, paralelogram, trapez
- opisati i primijeniti svojstva određenog četverokuta
- odrediti površinu četverokuta

Organizacija i materijali: Učenici rade u paru, svaki učenik dobiva jednu *kvadratnu geoploču* i gumice pomoću kojih rade likove na *geoploči*. Također nastavnik će im podijeliti papire s točkicama za precrtavanje likova s *geoploče* (Dodatak 2).

Opis rada: Učenici će dobiti radni listić sa zadacima. Na početku sata nastavnik upoznaje učenike s *geopločom* i načinom rada s njom. Pokazuje učenicima kako napraviti neke likove, npr. pravokutan trokut na *geoploči*. Nakon toga, nastavnik učenicima daje upute za rad.

Učenici će sjesti jedan nasuprot drugome i postaviti će pregradu tako da ne vide *geoploču* onog drugog. Tada će jedan od učenika na svojoj *geoploči* napraviti neke likove koristeći 3 ili 4 gumice. Njegov je zadatak objasniti svom kolegi gdje je i koji oblik napravio, uz uvjet da se pri opisivanju koristi svojstvima četverokuta, a ne njihovim nazivima.

Npr. ako napravimo kvadrat u donjem lijevom uglu kazat ćemo da smo napravili četverokut kojem su sve stranice jednake duljine i da se nalazi u donjem lijevom kutu. To nam još nije dovoljno da znamo koliki je taj kvadrat, pa možemo kao iduće objašnjenje kazati da je površina tog četverokuta 1 kvadratna jedinica (dogovorimo da je razmak između dva klina 1).

Metodičke napomene: Učenici na ovaj način uče slijediti upute, povezuju podatke koje im drugi učenik govori te vježbaju komunikaciju matematičkim jezikom. Osim za četverokute, *geoploču* možemo koristiti i za proučavanje površina trokuta kojima su jedna stranica i visina paralelne stranama *geoploče* te za proučavanje pravokutnih trokuta.

Radni listić: Četverokut

1. Napravite na *geoploči* četverokut i smislite asocijacije kojima ćete svom paru objasniti o kojem se četverokutu radi i gdje se na *geoploči* nalazi. Apsolutno je zabranjeno imenovati četverokut koji ste napravili. Sve napravljeno trebate imati napisano i nacrtano u bilježnici. Potom izračunajte površinu napravljenog četverokuta.
2. Na svojoj *geoploči* napravite oblik koji se sastoji od nekoliko četverokuta. Oblik napravite po želji. Na isti način kao u prvom zadatku navodite kolegu da na svojoj *geoploči* napravi isti oblik i precрта ga na papir. Izračunajte površine oblika koje ste napravili.

6.8.2 Kvadrat i pravokutnik

Razred: 5.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Upoznati se s geometrijskim likovima kvadratom i pravokutnikom i njihovim svojstvima

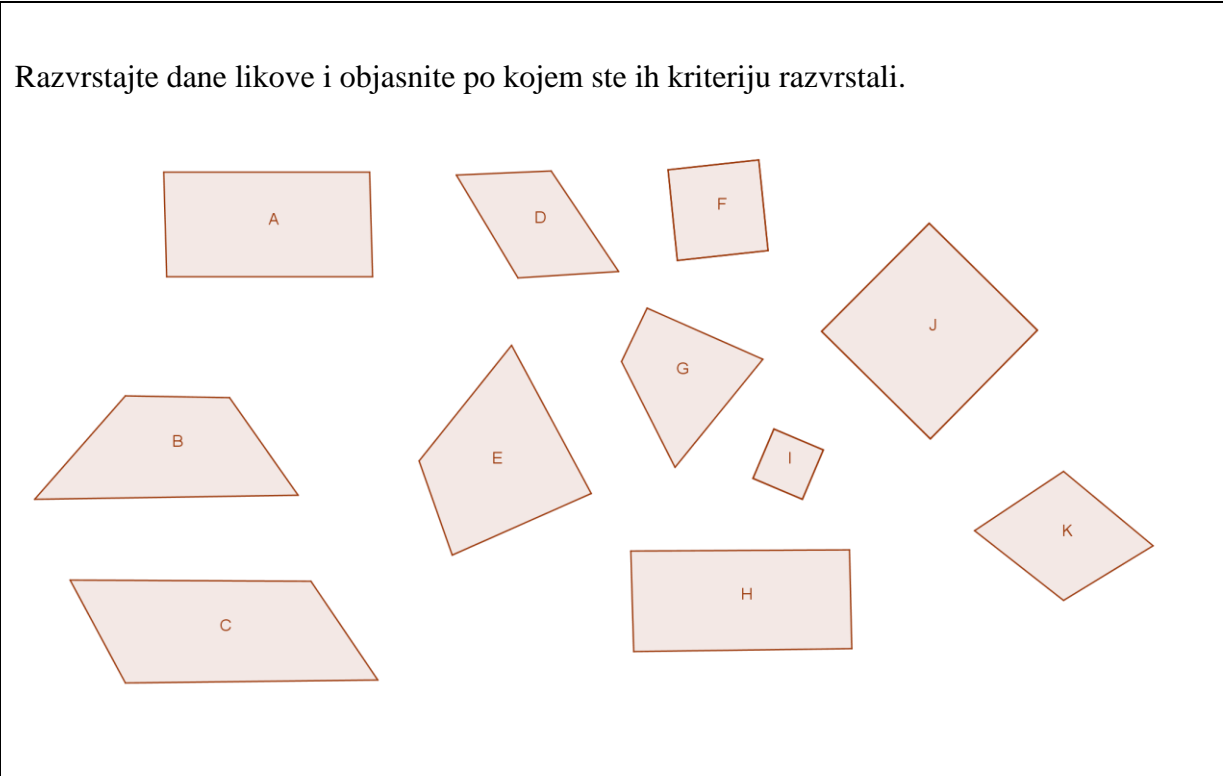
Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- razlikovati kvadrat i pravokutnik
- navesti i prepoznati svojstva kvadrata i pravokutnika
- izračunati opseg i površinu kvadrata
- izračunati opseg i površinu pravokutnika

Organizacija i materijali: Svaki učenik dobiva *kvadratnu geoploču* i gumice za rad s njima. Također nastavnik će im podijeliti papire s točkicama za precrtavanje likova s *geoploče* (Dodatak 2).

Opis rada: Učenicima dajemo sljedeći radni listić.

Razvrstajte dane likove i objasnite po kojem ste ih kriteriju razvrstali.



Od učenika tražimo da zadane četverokute sortiraju po nekom kriteriju. Nakon diskusije o odabranim podjelama i kriterijima, odvojimo kvadrat i pravokutnik. Sada s učenicima kroz diskusiju popunjavamo tablicu u kojoj popisujemo sličnosti i razlike ova dva lika.

Upoznajemo učenike s *geopločom* i radom s njom te dogovorimo da za udaljenost među klinovima uzimamo 1. Ponovimo zajednički što je to opseg geometrijskog lika, a što površina. Formule koje su prije naučili zapišemo na ploču. Na *geopločama* nastavnik i učenici naprave isti kvadrat i pravokutnik sa zadanim duljinama stranica te im izračunaju opseg i površinu.

Nakon toga podijelimo im radne listiće i na kraju sata komentiramo rješenja.

Radni listić: Kvadrat i pravokutnik

1. Pronađite što više kvadrata na svojim geopločama. Precrtajte ih na papir. Izračunajte im opsege i površine i zapišite ih.
2. Pronađite što više pravokutnika na svojim geopločama. Precrtajte ih na papir. Izračunajte im opsege i površine i zapišite ih.
3. Odredite na geoploči kvadrat i pravokutnik opsega 8. Odredite im površine.
4. Napravite na geoploči, a potom precrtajte na papir, kvadrat i pravokutnik koji imaju iste površine. Postoje li kvadrat i pravokutnik jednakih opsega i površina?

Metodičke napomene: Postoji velika šansa da učenici ne uoče nikakve druge kvadrate i pravokutnike osim onih kojima su stranice paralelne s rubovima *geoploče*, pa im treba ukazati i na druge kvadrate i pravokutnike koji postoje. Jedini problem kod tih "skrivenih" likova je kako odrediti duljine stranica, jer opseg i površinu možemo lako po formuli. Za te slučajeve možemo koristiti mjerenje koje nije toliko precizno a ujedno ćemo ponoviti račun s decimalnim brojevima. Zbog toga je rad na ovaj način učenicima koristan, kako bi uočili da ona očita rješenja nisu uvijek i jedina rješenja te da problemu koji je pred njima trebaju pristupati na više načina. Osim traženja što je više moguće kvadrata i pravokutnika, slično možemo napraviti u 6.razredu tražeći od učenika da pronađu što više različitih četverokuta te ih sortiraju po nekim svojstvima.

6.8.3 Kružnica i krug

Razred: 5.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Upoznati učenike s krugom i kružnicom te svim pojmovima vezanim za njih

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- definirati krug i kružnicu i objasniti razliku
- objasniti pojmove: središte kružnice, promjer i polumjer kruga i kružnice, tetiva, kružni luk, kružni isječak, kružni odsječak, kružni vijenac, polukrug
- nacrtati sve pojmove nabrojane iznad

Organizacija i materijali: Svaki učenik dobiva *kružnu geoploču* i gumice za rad s njima. Nastavnik također ima *geoploču* i gumice. Također nastavnik će učenicima podijeliti papire s točkicama za precrtavanje likova s *geoploče* (Dodatak 3).

Opis rada: Na početku sata tražimo od učenika da nam daju neke primjere kruga i kružnice u svakodnevnom životu. Vjerojatno neće znati razliku, pa ćemo im pokušati olakšati tako što ćemo na ploču pisati u jedan stupac krugove, a u drugi kružnice. Objašnjavamo razliku. Zatim zajedno s učenicima dolazimo do definicije kruga i kružnice. Obzirom na to da su im pojmovi vezani za krug i kružnicu novi i nepoznati, uvodimo ih kroz tri različite strategije. Prvo ih definiramo, potom prikažemo na *geoploči* i za kraj skiciramo u bilježnice. Nastavnik prolaskom kroz razred prati kako napreduju i jesu li usvojeni svi pojmovi.

Metodičke napomene: Upoznali smo učenike s krugom i kružnicom te njihovim dijelovima. Ovo je samo uvod u ostale lekcije o krugu i kružnici i stoga je bitno da učenici usvoje ove pojmove i veze među njima, a to će najbolje moći ukoliko sami prave pojmove i skiciraju ih umjesto da samo gledaju slike. *Kružna geoploča* može se koristiti u 7.razredu u cjelini krug i kružnica kao ponavljanje pojmova koje su ovdje naučili, ali i u lekcijama kao što su kružni luk, poučak o obodnom i središnjem kutu i sl.

6.9 Blok uzorci

Blok uzorci (eng. pattern blocks) dolaze u setovima koji se sastoje od 6 različito obojanih geometrijskih tijela čije su gornje i donje površine geometrijski oblici: žuti šesterokut, crveni trapez, zeleni trokut, narančasti kvadrat te dva paralelograma, smeđi i plavi. Napraviti ćemo jedno pojednostavljenje kod uporabe *blok uzoraka*. Naime dijelovi seta su geometrijska tijela, preciznije prizme, ali mi ćemo promatrati samo njihove baze, pa ćemo umjesto pravilna šesterostrana prizma govoriti samo šesterokut. [11]



Slika 10. Blok uzorci¹¹

Osim kod trapeza, duljine svih stranica svih dijelova seta *blok uzoraka* su jednake. Ovo učenicima omogućava slaganje različitih geometrijskih likova i raznih uzoraka napravljenih od njih. Slažući ih, učenici mogu koristiti mnoge veze među dijelovima za istraživanje razlomaka, kutova, uzoraka, simetrije, mjerenja i drugih matematičkih koncepata.

Učenici sa *blok uzorcima* mogu raditi u paru, malim grupama ili samostalno. Bilo bi dobro imati što više setova *blok uzoraka* kako bi učenici imali dovoljno blokova za različite aktivnosti. Ponekad je jedan set od 6 dijelova po paru dovoljno, ali ponekad se zahtijeva velika količina *blokova*.

O *blok uzorcima* će kasnije biti više riječi, tako da su ovdje samo spomenuti.

¹¹ Slika preuzeta <http://imgkid.com/pattern-blocks.shtml>

6.10 Manipulativni materijali iz kućne radinosti

U manipulativne materijale iz kućne radinosti ubrajamo raznovrsne predmete koji nisu nužno vezani za matematiku, a koji nam ipak mogu pomoći u približavanju nekih osnovnih koncepata matematike učenicima. Neke od manipulativnih materijala, npr. *tangram*, moguće je uz malo truda, napraviti od papira. Kod nas su najčešći ovakvi manipulativni materijali, jer osim naručivanja s interneta, nastavnici nemaju kako doći do komercijalnih manipulativnih materijala. Neki od primjera ovog tipa manipulativnih materijala su: domino, karte, čepovi boca, konopci, lego kockice, puzzle, ...

6.10.1 Primjeri za uporabu manipulativnih materijala iz kućne radinosti

- **Domino**

Ovo je igra koja je vjerojatno većini poznata. S domino pločicama možemo vježbati sljedbenike i prethodnike, zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, posebno možemo diskutirati probleme s dijeljenjem s 0. Ukoliko polovicu domine shvatimo kao razlomačku crtu s učenicima možemo ponavljati pojam razlomka, pravog i nepravog razlomka, njihovo zbrajanje i oduzimanje, a ukoliko je shvatimo kao decimalnu točku možemo promatrati računske operacije s decimalnim brojevima. Obzirom da su na domino pločama brojevi od 0 do 6, dobar su manipulativni materijal za rad u nižim razredima osnovne škole te za rad s učenicima koji su na prilagođenom programu. No, ako nastavnici naprave domino pločice s negativnim ili višeznamenkastim brojevima, ili nekim drugim zadacima, tada ih mogu koristiti i u višim razredima.

- **Čepovi raznih plastičnih boca**

Čepovi također mogu poslužiti kao dobar manipulativni materijal, na primjer za uvođenje negativnih brojeva na način da jedna boja predstavlja pozitivne, druga boja negativne brojeve. Na taj način nastavnici mogu pokazivati računske operacije s negativnim brojevima, negativnim i pozitivnim brojevima i učenicima vizualizirati te brojeve.

- **Vežica za tenisice / konop**

Na vezici iz tenisica ili komadu konopca napraviti 10 čvorova, te spojiti krajeve. Učenicima postaviti pitanje kakve je sve likove moguće napraviti pomoću konopca i kako,

ako razmak između čvorova predstavlja jediničnu dužinu. Neka učenici naprave što više likova mogu i neka ih skiciraju u bilježnice. Posebno možemo spomenuti pravokutan trokut (tražiti da naprave trokut od konopca tako da za stranice tog trokuta vrijedi Pitagorin poučak).

6.11 Virtualni manipulativni materijali

Virtualni manipulativni materijali su danas sve više u upotrebi što je razumljivo jer živimo u informatičkom dobu. Učenici se u sve mlađoj dobi koriste računalima, mobitelima i ostalih dostignućima tehnologije. Idealno bi bilo iskoristiti njihovu informatičku pismenost i za nešto korisno, kao što je učenje.

Virtualni manipulativni materijali su korisni jer, za razliku od konkretnih materijala s kojima radimo u učionici i koji su takvi kakvi jesi, virtualne manipulativne materijale možemo povećavati ili smanjivati, rotirati, dodavati koliko želimo i kakve želimo oblike i još mnogo toga što nam u učionici nije uvijek moguće. Na taj način možemo ispitati puno više koncepata i veza među različitim geometrijskim likovima i geometrijskim tijelima. Virtualni manipulativni materijali dobri su i iz razloga što možemo napraviti 3D oblike, tj. geometrijska tijela i rotirati ih, presijecati pravcima, ravninama i sl.

Kada koristimo virtualne manipulative u nastavi nužno je da svaki učenik ima svoje računalo ili tablet sa instaliranim programom tako da može samostalno otkrivati matematičke koncepte i zanimljivosti. Ukoliko taj preduvjet nije ispunjen, uporaba virtualnih manipulativnih materijala neće ispuniti svoju svrhu, nekim će učenicima biti dosadno i tempo nastave će se usporiti. Zbog svega navedenog nastavnici najčešće izbjegavaju upotrebu takvih nastavnih sredstava jer nisu efikasna u nastavi. Ako želimo prikazati kako se koriste virtualni manipulativi pametna ploča je odličan izbor, nastava će biti drugačija, zanimljivija, učenici će biti motiviraniji za učenje i uz sve to dobro se zabaviti.

6.11.1 Primjeri web stranica

Postoji niz stranica na kojima se može pronaći mnoštvo zanimljivih zadataka, koji neće samo tražiti od učenika rješenje, već i razvijanje logičkog zaključivanja.

Neki od korisnih linkova (26.06.2015.):

- http://www.mathplayground.com/math_manipulatives.html

- <http://nlvm.usu.edu/en/nav/vlibrary.html>
- <http://www.symboloo.com/mix/onlinemathmanipulatives>
- <https://illuminations.nctm.org/Activity.aspx?id=3521>
- http://www.mhhe.com/math/lbmath/bennett_nelson8e/VMK.html?initManip=patternBlocks

7 Blok uzorci

7.1 Općenito o blok uzorcima

Blok uzorci (eng. pattern blocks) dolaze u setovima koji se sastoje od 6 dijelova:

- žuti šesterokut
- zeleni trokut
- plavi paralelogram (romb)
- narančasti kvadrat
- crveni trapez
- smeđi paralelogram (romb)



Slika 11. Blok uzorci¹²

Svi komadi seta napravljeni su tako da su sve stranice oblika duljine 1 inč (oko 2.5cm), osim dulje osnovice trapeza koja je dvaput dulja od ostalih stranica (2 inča ili oko 5cm). Osim smeđeg paralelograma koji ima dva kuta od 150° , svi ostali oblici imaju kutove koji su djelitelji od $360 - 120^\circ$, 90° , 60° i 30° . No i kutovi od 150° su povezani sa ostalima budući da je 150° zbroj 120° i 30° , odnosno 90° i 60° . [14]

Osim ove veze među kutovima, *blok uzorci* su međusobno povezani nizom drugih veza. Na primjer, žuti šesterokut možemo sasvim prekriti sa 6 zelenih trokuta, 2 crvena trapeza ili 3 plava paralelograma. Ovaj primjer nam je idealan za rad s razlomcima (zbrajanje i oduzimanje razlomaka, uspoređivanje razlomaka,...).

Kada učenici počinju raditi s *blok uzorcima*, prvenstveno istražuju prostorne veze među komadima seta. Većinom gledaju jedni u drugih i preslikavaju jedni od drugih oblike, uočavajući na taj način sličnosti i razlike između svojih i oblika svojih kolega. Tijekom tog postupka treba ih poticati na razgovor o njihovim konstrukcijama, o oblicima i na koji način su ih napravili i sl.

Blok uzorci pomažu učenicima istraživanje raznih koncepata, uključujući sukladnost, sličnost, simetrije, površinu, opseg, razlomke, ... [14]

¹² Slika preuzeta <http://www.joomlawings.com/vattribute-plugin-for-virtuemart>

Uporaba *blok uzoraka* pruža nastavnicima priliku za procjenjivanje učenika. Gledajući ih kako rade s *blokovima*, nastavnici dobivaju osjećaj o tome kako učenici pristupaju matematičkom problemu. *Blok uzorci* su odlični za grupni rad učenika, jer tada nastavnici mogu kružiti razredom, slušati što učenici govore i postavljati im pitanja. Po smještanju različitih dijelova seta možemo na neki način „vidjeti“ kako učenici razmišljaju. [14]

7.2 Primjeri uporabe blok uzoraka

7.2.1 Opseg mnogokuta

Razred: 7.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

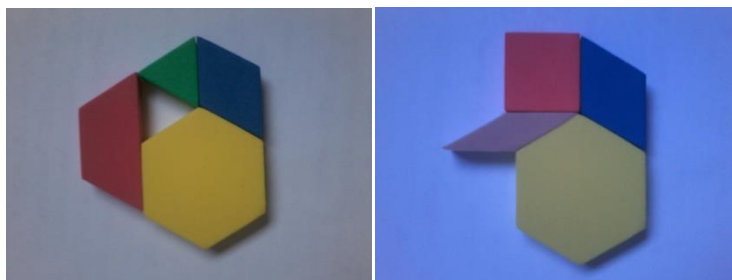
Cilj: Naučiti učenike računati opsege pravilnih i nepravilnih mnogokuta

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- objasniti što je opseg mnogokuta
- odrediti opseg svakog komada u setu *blok uzoraka*
- odrediti opsege različitih mnogokuta dobivenih kombiniranjem *blok uzoraka*
- predvidjeti promjene opsega ako povećamo/smanjimo broj blokova na određeni način

Organizacija i materijali: Razred podijelimo na grupe po 4 učenika. Svaka grupa ima isti broj setova *blok uzoraka*, 4 seta po grupi (jedan set sadrži žuti šesterokut, crveni trapez, zeleni trokut, narančasti kvadrat te dva paralelograma, smeđi i plavi).

Opis rada: Na početku ovog sata podsjetit ćemo se što je to opseg geometrijskog lika, a na komadima seta *blok uzoraka* ponovit ćemo kako se računaju opsezi likova: trokut, romb, trapez, paralelogram, kvadrat, pravokutnik. Za duljinu stranice trokuta koristit ćemo 1 inč. (Na kraju možemo pretvoriti u centimetre, a tijekom rješavanja ne moramo pisati inč, već samo broj.) Sada učenicima dijelimo radne listiće i dajemo upute za rad. Dijelove seta mogu kombinirati i spajati po volji i tako stvarati različite geometrijske likove. Nastavna cjelina su mnogokuti, pa u skladu s definicijom trebaju paziti da u mnogokutu ne smije biti rupa.



Slika 12. Primjer nepravilnog i pravilnog mnogokuta sastavljenog od blokova iz seta

Radni listić: Mnogokuti

1. Koristeći jedan set blok uzoraka pronađite što je moguće više mnogokuta s različitim opsezima. Možete koristiti koliko želite komada seta od 6 komada koji su vam na raspolaganju. Svoja rješenja nacrtajte u bilježnicu i zapišite opsege.

2. Odredite sve moguće opsege mnogokuta sastavljenih od: 

a) 2 šesterokuta, 1 trapeza, 1 trokuta i 1 smeđeg paralelograma

b) 2 šesterokuta, 1 trapeza, 1 trokuta, 1 plavog paralelograma

Podijelite se međusobno, na način da po dvoje radi svaki dio zadatka.

3. Pokušajte pronaći minimalni i maksimalni opseg mnogokuta sastavljenih od jednog seta blok uzoraka.

Kada sve grupe riješe zadatke krećemo s diskusijom rješenja. Na ploču se zapišu sva dobivena rješenja, a bitno je uočiti najmanji i najveći opseg. Kroz diskusiju provjerimo jesmo li odredili sve mogućnosti, postoje li mnogokuti s jednakim opsezima, možemo li pronaći mnogokut sa danim opsegom i dr.

Metodičke napomene: Ovaj smo sat mogli odraditi na klasičan način, gomila nacrtanih mnogokuta kojima treba odrediti opseg. No na ovaj smo način potaknuli učenike da stvaraju mnogokute i za njih računaju opsege. Time potičemo njihovu kreativnost, spajamo različite strategije u nastavi geometrije, a time činimo nastavu zanimljivijom i kvalitetnijom.

7.2.2 Unutarnji kutovi mnogokuta

Razred: 7.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Izvesti formulu za zbroj kutova u mnogokutu

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- odrediti zbroj kutova u svakom od blokova iz seta, kao i bilo kojoj kombinaciji blokova
- objasniti i izvesti formulu za računanje zbroja kutova u mnogokutu
- primijeniti formulu za računanje zbroja kutova u mnogokutu
- iz zbroja kutova u mnogokutu odrediti o kojem je mnogokutu riječ

Organizacija i materijali: Učenici rade samostalno. Svatko dobiva po dva seta *blok uzoraka*.

Opis rada: Na početku sata s učenicima ponavljamo vrste kutova i njihove mjere, te računamo kutove u dijelovima seta *blok uzoraka*. Da bismo izveli formulu za zbroj kutova u mnogokutu $K(n)$ moramo krenuti od najmanjeg mogućeg mnogokuta, odnosno trokuta. Zbroj kutova u trokutu je učenicima poznata činjenica.

$$K(3) = 180^\circ$$

Da bismo se podsjetili zbroja kutova u četverokutu iskoristit ćemo četverokute u setu *blok uzoraka* i za njih izračunati traženi zbroj.

$$K(4) = 360^\circ.$$

Sada učenici dobivaju zadatak pomoću *blok uzoraka* napraviti što više različitih vrsta peterokuta i izračunati im zbroj kutova, $K(5)$.




Slika 13. Peterokut sastavljen od narančastog kvadrata i zelenog trokuta

Kada su učenici završili sa zadatkom prodiskutiramo dobivene peterokute i zaključimo da je $K(5) = 540^\circ$.

Sada učenicima dajemo radni listić.

Radni listić: Unutarnji kutovi mnogokuta

Pomoću *blok uzoraka* istražite zbroj unutarnjih kutova mnogokuta $K(n)$, gdje je n broj vrhova mnogokuta i $n < 9$. Dobivene mnogokute skicirajte u bilježnice i odredite im zbrojeve, a potom napravite i popunite tablicu ovog oblika. Primjer tablice:

skica mnogokuta	ime mnogokuta	broj stranica, n	zbroj unutarnjih kutova, $K(n)$
	trokut	3	180°

Kada su učenici završili sa istraživanjem zajedno prodiskutiramo rješenja uspoređujući oblike koje su napravili, tj. o kojem je mnogokutu riječ i koliki su zbroj unutarnjih kutova dobili. Zajedno pokušavamo pronaći neki uzorak među brojevima te dolazimo do formule za zbroj unutarnjih kutova u mnogokutu:

$$K(n) = (n - 2) \cdot 180^\circ$$

Metodičke napomene: U gradivu matematike za osnovnu školu ne postoji previše izvoda i dokaza koji se učenicima prezentiraju. Mnogi smatraju da je to dio znanstvene matematike koji je pretežak i kompliciran za osnovnoškolce. Činjenica je da učenici bolje shvaćaju formule i gradivo, te njihovu primjenu ako znaju kako se do te formule došlo. Kada sami dođu do formule, bolje i dulje će je pamtiti, čak i kada je zaborave pamtiti će algoritam ili ideju izvoda koju mogu realizirati ako je potrebno. Osim za zbroj kutova mnogokuta, sličan primjer možemo napraviti i za određivanje zbroja unutarnjih kutova u trokutu i četverokutu (6.razred). Koristeći dijelove seta *blok uzoraka*, moguće je napraviti različite trokute i četverokute i doći do zaključka da je zbroj unutarnjih kutova u trokutu, odnosno četverokutu, uvijek isti.

7.2.3 Uspoređivanje razlomaka jednakih nazivnika

Razred: 5.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Učenicima vizualizirati razlomke jednakih nazivnika kako bi ih doveli do jasnog zaključka kako ih uspoređivati

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- vizualno prikazati razlomke
- odrediti veličinu razlomka prikazanog na slici ili pomoću komada iz seta blok uzoraka
- usporediti dva razlomka jednakih nazivnika

Organizacija i materijali: U ovom primjeru učenici rade u parovima. Svaki par ima nekoliko setova *blok uzoraka*.

Opis rada: Na početku sata nastavnici će s učenicima ponoviti sve što su do sada naučili o razlomcima: zapis, čitanje, dijelove razlomka. Započet ćemo recimo s plavim paralelogramom. Učenici trebaju naći kojim manjim likom taj paralelogram može biti prekriven i kao odgovor daju dva zelena trokuta. Jedan trokut predstavlja jednu polovinu plavog paralelograma. Da crveni trapez prekrijemo trokutima, trebat će nam tri trokuta, pa govorimo o trećinama. Uzmimo sada za primjer mnogokut koji se sastoji od crvenog trapeza i plavog paralelograma. Taj mnogokut može biti u potpunosti prekriven zelenim trokutima, s točno 5 trokuta pa je jedan trokut jedna petina.



Slika 14. Primjer kako isti mnogokut može biti prekriven različitim likovima

Sada nastavnik može uzimati različite dijelove mnogokuta i tražiti od učenika njihov zapis i izgovor.

Sada za jedno cijelo nastavnik uzima žuti šesterokut. Zajedno s učenicima prekriva ga na razne načine: sa šest trokuta, tri plava paralelograma, dva trapez ili kombinacijom. Sada ćemo uzeti trokut, koji predstavlja $\frac{1}{6}$, plavi paralelogram, predstavlja $\frac{2}{6}$ i trapez, predstavlja $\frac{3}{6}$. Vizualno uočavamo da je najveći trapez, pa zaključujemo da će od dva razlomka s zajedničkim nazivnikom biti veći onaj koji ima veći brojnik.



Slika 15. Primjer kako isti šesterokut može biti prekriven različitim likovima

Metodičke napomene: Cilj uporabe manipulativnih materijala na ovom satu bio je učenicima vizualizirati razlomke jednakih nazivnika i pomoću te vizualizacije odrediti koji je od razlomaka manji (veći). Sama vizualizacija stvara koncept koji nam je kod uspoređivanja razlomaka jednakih nazivnika bitan. Ovaj primjer je dobar i za uspoređivanje razlomaka različitih nazivnika budući crveni trapez predstavlja $\frac{1}{2}$, šesterokuta, a plavi paralelogram $\frac{1}{3}$, pa možemo zaključiti po veličini koji je veći oblik i onda to povezati sa šestinama i navesti učenike na zaključak da trebamo imati iste nazivnike kod oba razlomka jer ih onda znamo usporediti. Također, primjer se može proširiti na računanje s razlomcima istih nazivnika, zbrajanje i oduzimanje, te proširivanje i skraćivanje razlomaka.

7.2.4 Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik

Razred: 6.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat ponavljanja i uvježbavanja gradiva

Cilj: Provjeriti znanje učenika o svođenju razlomaka na zajednički nazivnik

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- proširiti ili skratiti razlomak
- odrediti zajednički nazivnik za dva ili više razlomka
- dva ili više razlomaka svesti na zajednički nazivnik

Organizacija i materijali: Učenici rade u parovima. Svaki par ima oko 12 zelenih, plavih i crvenih komada iz seta *blok uzoraka* te papir za rješavanje (Dodatak 4).

Opis rada: Na početku sata nastavnik učenicima podijeli manipulative i papire za rješavanje. Papir za rješavanje služi kao pomoćna mreža koju prekrivaju likovima kako je zadano, a potom skicu precrtaju u bilježnicu. Učenici otkrivaju veze među dobivenim likovima i određuju razlomke koji ih predstavljaju: dva zelena komada čine jedan plavi (dva trokuta jedan paralelogram) ili crveni trapez je spoj zelenog trokuta i plavog paralelograma ili tri zelena trokuta. Uz radni listić učenicima treba napomenuti da kada tražimo da jedna trećina trokuta bude zelena, to ne znači da će se trokut sastojati od jednog zelenog komada i da će taj komad predstavljati jednu trećinu, već da ukupan broj zelenih komada predstavlja jednu trećinu.

Radni listić: Razlomci



1. Napravite trokut koji je jednu trećinu zelen, a dvije trećine crven.
2. Napravite trokut koji je dvije trećine crven, jednu devetinu zelen i dvije devetine plav.
3. Napravite paralelogram koji je dvije trećine plav i jednu trećinu zelen.
4. Napravite paralelogram koji je tri četvrtine plav i jednu četvrtinu zelen.
5. Sami napravite trapez od komada seta koje imate i izrazite razlomcima koliko površine zauzima koja boja.

Nakon rješavanja treba prodiskutirati rješenja koja su učenici dobili i postupke kojima su došli do njih.

Metodičke napomene: Učenici obično imaju dosta problema s razlomcima, vizualiziranje istih im može pomoći u boljem svladavanju koncepta. Kada se sami uvjere da skraćivanjem (proširivanjem) zapravo dobivamo isti razlomak, lakše će se dosjetiti mogu li neki razlomak skratiti (proširiti) i na taj način si olakšati računanje. Ovaj primjer zgodan je kao uvod u lekciju zbrajanje i oduzimanje razlomaka različitih nazivnika.

7.2.5 Mjerenje kutova

Razred: 5.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Upoznati učenike s mjerama kutova i izražavanje jednog kuta preko drugih

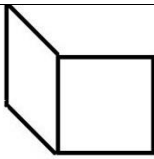
Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- odrediti kojoj vrsti kut pripada (tupi, šiljasti, pravi, izbočeni, ispruženi ili puni)
- usporediti dva kuta
- koristiti setove blok uzoraka kako bi prikazali različite kutove
- koristiti setove blok uzoraka kako bi odredili veličinu nepoznatog kuta

Organizacija i materijali: Učenici rade samostalno. Svaki učenik dobiva nekoliko setova *blok uzoraka*.

Opis rada: Učenici su prethodno naučili vrste kutova (tupi, šiljasti i pravi) i kako odrediti kojoj vrsti kut pripada. Nastavnik dodaje definicije ostalih vrsta kutova (izbočeni, ispruženi i puni) te od učenika traži da daju primjer svakog od njih, npr. kut od 125° je tupi kut. Potom učenici istražuju dijelove seta *blok uzoraka* kojeg imaju ispred sebe i određuju veličine kutova u svakom od njih.

Sada se učenicima daje zadatak: koristeći dijelove seta *blok uzoraka* prikažite što više različitih kutova, skicirajte ih i zapišite u bilježnicu koristeći sljedeću tablicu: (u tablici je dan primjer koji nacrtamo na ploču)

skica kuta	veličina kuta	kutovi koje smo koristili za dobivanje kuta	vrsta kuta
	150°	90° i 60°	tupi kut

Nakon što učenici popune tablicu slijedi komentar rješenja. Učenici odgovaraju na pitanja o načinu pronalaska kutova, veličinama kutova koje su pronašli (postoje li veći/manji kutovi koji se mogu naći), zatim uspoređuju različite načine izražavanja kuta iste veličine, ...

Metodičke napomene: Učenici će, koristeći se manipulativnim materijalima, vizualizirati kutove različitih veličina, znat će njihove nazive i moći će odrediti njihovu veličinu. Na ovaj način povezali smo nekoliko različitih prikaza kutova što učenicima omogućava strukturirati i povezati usvojeno znanje. Praveći kutove različitih veličina koristeći *blok uzorke*, učenici vježbaju i zbrajanje i oduzimanje. Osim za mjerenje kutova, *blok uzorke* možemo koristiti i kako bismo izračunali zbroj unutarnjih kutova u svim likovima seta, što je logičan nastavak ove lekcije, a ovaj primjer možemo koristiti kao uvodni primjer.

7.2.6 Osna simetrija

Razred: 8.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

Cilj: Učenicima predložiti osnu simetriju

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- odrediti je li zadani lik osnosimetričan ili ne
- osnosimetričnom liku pronaći sve osi simetrije
- zadanom liku odrediti osnosimetričan s obzirom na os simetrije

Organizacija i materijali: Učenici rade u parovima i svaki par dobiva nekoliko setova *blok uzoraka* i tanki konac koji će im služiti kao os simetrije.

Opis rada: Prethodni sat učenici su se već upoznali s pojmom osne simetrije i određivali su osnosimetrične slike točke, dužine, pravca, trokuta, kružnice, četverokuta. Na početku ovog

sata je ponavljanje i zadavanje još nekog lika kojem treba nacrtati osnosimetričan. Nakon toga učenici rade s *blok uzorcima*. Sada kada znaju kako odrediti osnosimetričnu sliku zadanog lika pitamo učenike bi li znali objasniti što je to osnosimetričan lik. Kroz diskusiju dođemo do definicije pojma osnosimetričnog lika. Da bi vidjeli jesu li dobro shvatili pojam zadamo im da za svaki lik iz seta odrede je li osnosimetričan ili ne. Likovima koji su osnosimetrični trebaju pronaći sve osi simetrije i dobiveno skicirati u bilježnicu. Kada su učenici gotovi s rješavanjem, prokomentirati njihova rješenja i nadopuniti ako je potrebno.

Drugi zadatak koji zadajemo učenicima je da koristeći *blok uzorke* naprave osnosimetrične likove, označe im osi simetrije i dobiveno skiciraju u bilježnicu.

Metodičke napomene: Pojam osne simetrije lakše je usvojiti kada ga zorno prikažemo, kada s konkretnim materijalom učenici naprave zadano. Zanimljivo je vidjeti na koji će način učenici provjeravati je li neki lik osnosimetričan ili nije te na koji će način sami napraviti neke osnosimetrične likove. Na ovaj način učenicima pomažemo razvijati zor i kreativnost. Na sličan način možemo od učenika tražiti da odrede koji su dijelovi seta *blok uzoraka* centralnosimetrični i njihove centre simetrija, kao i da sami naprave neke nove likove koristeći *blok uzorke* koji će biti centralnosimetrični.

7.2.7 Postotak / Razlomci

Razred: 7.razred, osnovna škola / 6.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat ponavljanja i uvježbavanja gradiva

Cilj: S učenicima ponoviti znanje o postotcima / razlomcima rješavajući zagonetke

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- povezivati različite komade iz seta *blok uzoraka* s postotcima / razlomcima
- svoditi razlomke na zajednički nazivnik
- računati s postotcima (ili ih pretvarati u razlomke)

Organizacija i materijali: Učenici rade u grupama. Svaka grupa dobiva oko 30 komada iz seta i papir sa zagonetkama.

Opis rada: Učenicima podijelimo komade iz seta *blok uzoraka* i tražimo da odrede i zapišu međusobne veze između određenih likova u zadanu tablicu, npr. šesterokut možemo prikazati kao dva trapeza, tri plava paralelograma ili šest trokuta. Ovo je primjer takve tablice: (u tablici je dan primjer koji nacrtamo na ploču)

veći lik	manji lik	razlomak	postotak
šesterokut	trapez	$\frac{1}{2}$	50%

Kada su učenici odredili i popunili svoje tablice (samo s razlomcima, ako su 6.razred, a ako su 7.razred samo s postotcima), nastavnik na ploču nacrtava tablicu sa svim kombinacijama. Učenici dopunjavaju svoje tablice, ukoliko je to potrebno.

Sada učenicima zadajemo prvu zagonetku. U papirnatu neprozirnu vrećicu stavimo nekoliko komada iz seta i učenicima dajemo tragove:

1. U vrećici imam pet likova iz seta.
2. Tri najmanja lika točno prekrivaju najveći lik.
3. Jedan od likova prekriva dvije trećine najvećeg lika.

Od učenika se očekuje da odrede koji se dijelovi seta *blok uzoraka* nalaze u vrećici. Rješenje: tri zelena trokuta, plavi paralelogram i crveni trapez. Kada učenici riješe prvu zagonetku dobivaju listić sa zadacima.

Radni listić: Razlomci



1. zagonetka:

Površina svih likova zajedno je jednaka površini 24 zelena trokuta.

Tri lika zajedno daju $\frac{3}{4}$ ukupne površine.

Zeleni likovi prekrivaju $\frac{1}{2}$ površine koju prekrivaju plavi likovi.

2. zagonetka:

Imamo devet likova.

Površina prekrivena žutim likovima je jednaka površini prekrivenoj plavim likovima.

Površina prekrivena crvenim likovima je $\frac{1}{8}$ površine prekrivene žutim i plavim likovima zajedno.

3. zagonetka:

Imamo osam likova.

$\frac{1}{2}$ likova su oni koji od kojih bi svaki prekrivao $\frac{1}{3}$ najvećeg lika.

$\frac{1}{4}$ likova su oni koji od kojih bi svaki prekrivao $\frac{1}{2}$ najvećeg lika.

U vrećici imamo likove crvene, plave, zelene i žute boje.

4. zagonetka:

Imamo dva lika.

Likove možemo složiti tako da tvore šesterokut koji ima dva prava kuta.

Opseg šesterokuta je 7 inča (1 inč je duljina jedne stranice zelenog trokuta.)

5. Neka svaki član grupe napravi svoju zagonetku, a ostali neka je pokušaju riješiti.

Radni listić: Postotci



1. zagonetka:

Površina svih likova zajedno je jednaka površini 24 zelena trokuta.

Tri lika zajedno daju 75% ukupne površine.

Zeleni likovi prekrivaju 50% površine koju prekrivaju plavi likovi.

2. zagonetka:

Imamo devet likova.

Površina prekrivena žutim likovima je jednaka površini prekrivenoj plavim likovima.

Površina prekrivena crvenim likovima je 12.5% površine prekrivene žutim i plavim likovima zajedno.

3. zagonetka:

Imamo osam likova.

50% likova su oni koji od kojih bi svaki prekrivao 33.3% najvećeg lika.

25% likova su oni koji od kojih bi svaki prekrivao 50% najvećeg lika.

U vrećici imamo likove crvene, plave, zelene i žute boje.

4. zagonetka:

Imamo dva lika.

Likove možemo složiti tako da tvore šesterokut koji ima dva prava kuta.

Opseg šesterokuta je 7 inča (1 inč je duljina jedne stranice zelenog trokuta.)

5. Neka svaki član grupe napravi svoju zagonetku, a ostali neka je pokušaju riješiti.

Rješenja:

1. Tri žuta šesterokuta, dva plava paralelograma i dva zelena trokuta.
2. Dva žuta šesterokuta, jedan crveni trapez i šest plavih paralelograma.
3. Jedan žuti šesterokut, dva crvena trapeza, četiri plava paralelograma i jedan zeleni trokut.
4. Jedan crveni trapez i jedan narančasti kvadrat.

Metodičke napomene: Zadatci na ovom satu nisu tipični matematički zadatci, posebiji su. Od učenika se zahtijeva kombiniranje oblika i veličina, dobro baratanje postotcima (razlomcima), a to možda neće moći svaki učenik. Zadatci ovog tipa i njihovo rješavanje trebalo bi učenicima pomoći da budu strpljiviji i kreativniji u rješavanju problema koji su pred njima te da ne odustaju čim naiđu na prepreku ili neuspjeh. U 6.razredu kod obrade linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom te u 7.razredu kod obrade sustava dviju linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice možemo koristiti *blok uzorke* na sličan način kao u ovom primjeru.

7.2.8 Četverokut

Razred: 6.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat ponavljanja i uvježbavanja gradiva

Cilj: Ponoviti vrste i svojstva četverokuta.

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- opisati i prepoznati svojstva četverokuta

- po dodiru odrediti i opisati koja svojstva ima četverokut kojeg drže u ruci te zaključiti o kojem je četverokutu riječ
- odrediti opseg četverokuta

Organizacija i materijali: Učenici rade u grupama. Svaka grupa ima nekoliko komada četverokuta iz seta *blok uzoraka* (kvadrat, paralelogrami i trapez), papirnatu vrećicu i maramu.

Opis rada: Na početku sata zajednički se ponove vrste i svojstva obrađenih četverokuta. Učenici su podijeljeni u grupe i svaka grupa dobiva komade seta *blok uzoraka*. Jednom se učeniku maramom zavežu oči, on tada uzme lik iz vrećice i stavi ga u ruke ispod klupe. Vrteći ga u rukama učenik dobiva informacije o tome koja svojstva ima dani četverokut. Opisuje ga drugim učenicima koji njegov opis zapisuju. Učenici trebaju pogoditi o kojem je četverokutu riječ, da bi bilo interesantnije mogu postavljati pitanja.

Na primjer, učenik je izvukao lik i drži ga u ruci. Prvo što kaže ostalim učenicima jest da nema pravih kutova. Potom ga učenici mogu upitati koliki je opseg četverokuta, tako da eliminiraju trapez ili paralelograme, jer su s prvim tragom eliminirali kvadrat.

Kada su svi iz grupe vadili i opisivali četverokut iz vrećice, kao sljedeći zadatak trebaju svi izvaditi isti lik iz vrećice držeći oči zatvorene, npr. svi trebaju izvaditi trapez.

Metodičke napomene: U ovakvom načinu rada učenici se moraju osloniti na nekoliko sposobnosti: opipom dobiti relevantne informacije o objektu, verbalizirati otkriveno i povezati sa naučenim. Nije dovoljno nabrojati svojstva, ako ih ne znamo primijeniti na rješavanje problema koji je pred njima. Ovakav način rada možemo koristiti za ponavljanje svojstava mnogokuta, na način na u vrećici budu svi dijelovi seta *blok uzoraka*.

7.2.9 Kvadriranje racionalnih brojeva

Razred: 8.razred, osnovna škola

Vrsta sata: Sat obrade novog gradiva

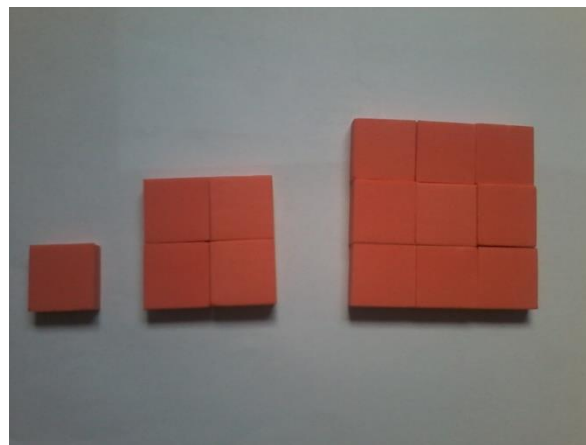
Cilj: Učenicima vizualizirati kvadrate brojeva

Obrazovni ishodi: Učenici će znati:

- kvadrirati racionalne brojeve
- prepoznati koji su brojevi kvadrati nekih brojeva

Organizacija i materijali: Učenici rade u parovima, svaki par ima 20 narančastih kvadrata iz seta *blok uzoraka*.

Opis rada: Kvadrata iz seta koriste se u uvodnom dijelu sata. Učenicima se zada da naprave što više kvadrata koristeći najviše 10 kvadrata. Učenici bi trebali doći do zaključka da ne mogu napraviti kvadrat od dva narančasta kvadrata, niti od tri. Nakon jednog kvadrata, prvi sljedeći kojeg mogu napraviti je od 4 kvadrata, a zatim od 9 kvadrata. Dakle želimo doći do zaključka da ne možemo od bilo kojeg broja kvadrata napraviti novi kvadrat. Sada na ploči skiciramo dobivene kvadrata, uključujući onaj najmanji stranice 1.



Slika 16. Primjeri kvadrata

Sljedeći korak je da učenici predvide kolika će biti stranica idućeg kvadrata i od koliko će manjih kvadrata biti napravljen. Neka provjere svoja predviđanja. Nakon toga nastavnik može povezati napravljeno s kvadratima prirodnih brojeva, kao i činjenicu da svaki racionalan broj nije kvadrat nekog racionalnog broja, ali da svaki racionalni broj ima svoj kvadrat i nastavlja sa obradom novog gradiva.

Metodičke napomene: Kvadriranje je računski operacija koju učenici koriste od ovog trenutka u 8.razredu osnovne škole, pa sve dok imaju doticaja s matematikom u svom školovanju. Zbog toga je bitno pokazati im što je kvadriranje, kako ga možemo vizualizirati i

odakle ime toj operaciji. Na taj način algoritam i postupak se povezuje s geometrijom i tako stvara sustav asocijacija koje grade koncept pojma kvadriranja. Primjer je zgodno koristiti i kao uvod u lekciju korjenovanja.

8 Zaključak

Bilo da matematičke manipulativne materijale koristimo cijeli sat ili u samo jednom dijelu sata, njihova uporaba pruža mnoge pogodnosti, kako učenicima, tako i nastavnicima. Kao što slika vrijedi tisuću riječi, manipulativni materijali mogu pružiti vizualnu reprezentaciju ideja, pomažući tako učenicima znati i razumjeti matematiku. Manipulativni materijali povećavaju mogućnosti učenika na svim razinama razumijevanja i komuniciranja. Rad s manipulativnim materijalima produbljuje razumijevanje koncepata i veza, vještine vježbanja čini smislenima te vodi do zadržavanja i primjene informacija u problemskim situacijama koje od učenika traže rješenja.

Rad s manipulativnim materijalima zahtijeva puno truda i angažiranosti od strane nastavnika i dobru povratnu informaciju od učenika. Uvijek će postojati razredi i učenici s kojima će rad s manipulativnim materijalima biti skoro nemoguć. Ipak, ukoliko nastavnik uspije zainteresirati učenike, više od pola posla je napravljeno. Iako će morati uložiti puno vremena i energije kako bi osmislio satove, vrijeme i energija će biti dobro uloženi jer će od takvog sata svi imati višestruku korist.

Uporaba manipulativnih materijala ima svojih prednosti i nedostataka. Na svakom nastavniku je da odredi koje strategije će koristiti u nastavi i da sam procijenikada uporaba manipulativnih materijala povećava efikasnost nastave.

9 Literatura

1. *Why Teach Mathematics with Manipulatives?*
<http://www.hand2mind.com/resources/whyteachmathwithmanipulatives> (26. veljače 2015.)
2. Post, T.: *The Role of Manipulative Materials in the Learning of Mathematical Concepts*, 1981.
http://www.cehd.umn.edu/ci/rationalnumberproject/81_4.html (11. listopada 2014.)
3. http://en.wikipedia.org/wiki/Zolt%C3%A1n_P%C3%A1l_Dienes (17. travnja 2015.)
4. http://hr.wikipedia.org/wiki/Maria_Montessori (17. travnja 2015.)
5. Leiebeck, P.: *Kako djeca uče matematiku?*, metodički priručnik za učitelje razredne nastave, nastavnike i profesore matematike; prevela Jakovlev J., Educa, Zagreb, 1995.
6. Swan, P., Marshall, L., *Exploring the Use of Mathematics Manipulative Materials: Is It What We Think It Is?*, 2008. <http://ro.ecu.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1032&context=ceducom> (11. listopada 2014.)
7. *Math Manipulatives*
<http://www.scholastic.com/parents/resources/article/more-homework-help/math-manipulatives> (11. listopada 2014.)
8. Marić, D.: *Mogućnosti primjene nastavnih medija*, srpanj 2014.
<https://prezi.com/hkxocuk3xvjh/mogucnosti-primjene-nastavnih-medija/> (11. listopada 2014.)
9. Herjavec, D., Glasnović Gracin, D.: *Računska gusjenica*, MIŠ 57, 2010./2011., str. 59-63
<http://mis.element.hr/fajli/1014/57-03.pdf> (26. veljače 2015.)
10. https://en.wikipedia.org/wiki/Cuisenaire_rods (17. travnja 2015.)
11. https://en.wikipedia.org/wiki/Manipulative_%28mathematics%29 (11. listopada 2014.)
12. Hills, V.: *The SUPER SOURCE Tangrams Grades 5-6*, ETA/Cuisenaire 2007, 1996
13. Hills, V.: *The SUPER SOURCE Geoboards 5-6*, ETA/Cuisenaire 2007, 1996
14. Hills, V.: *The SUPER SOURCE Pattern Blocks 5-6*, ETA/Cuisenaire 2007, 1996
15. <http://www.pmfst.unist.hr/~zzoric/MNM%201&2/prazni%20materijali/> (19. lipnja 2015.)

10 Dodatci

Dodatak 1: Tablica po kojoj je pravljen plan za rad s manipulativnim materijalima

Tema:	
Razred:	
Vrsta sata:	
Cilj:	
Obrazovni ishodi:	
Organizacija i materijali:	
Opis rada:	
Metodičke napomene:	

Dodatak 2: kvadratna geoploča¹³

Geoboard Dot Paper
5 x 5 (10 mm)

Name _____ Date _____

• •	• •	• •
• •	• •	• •
• •	• •	• •
• •	• •	• •

A2- Mastergrids for Mathematics

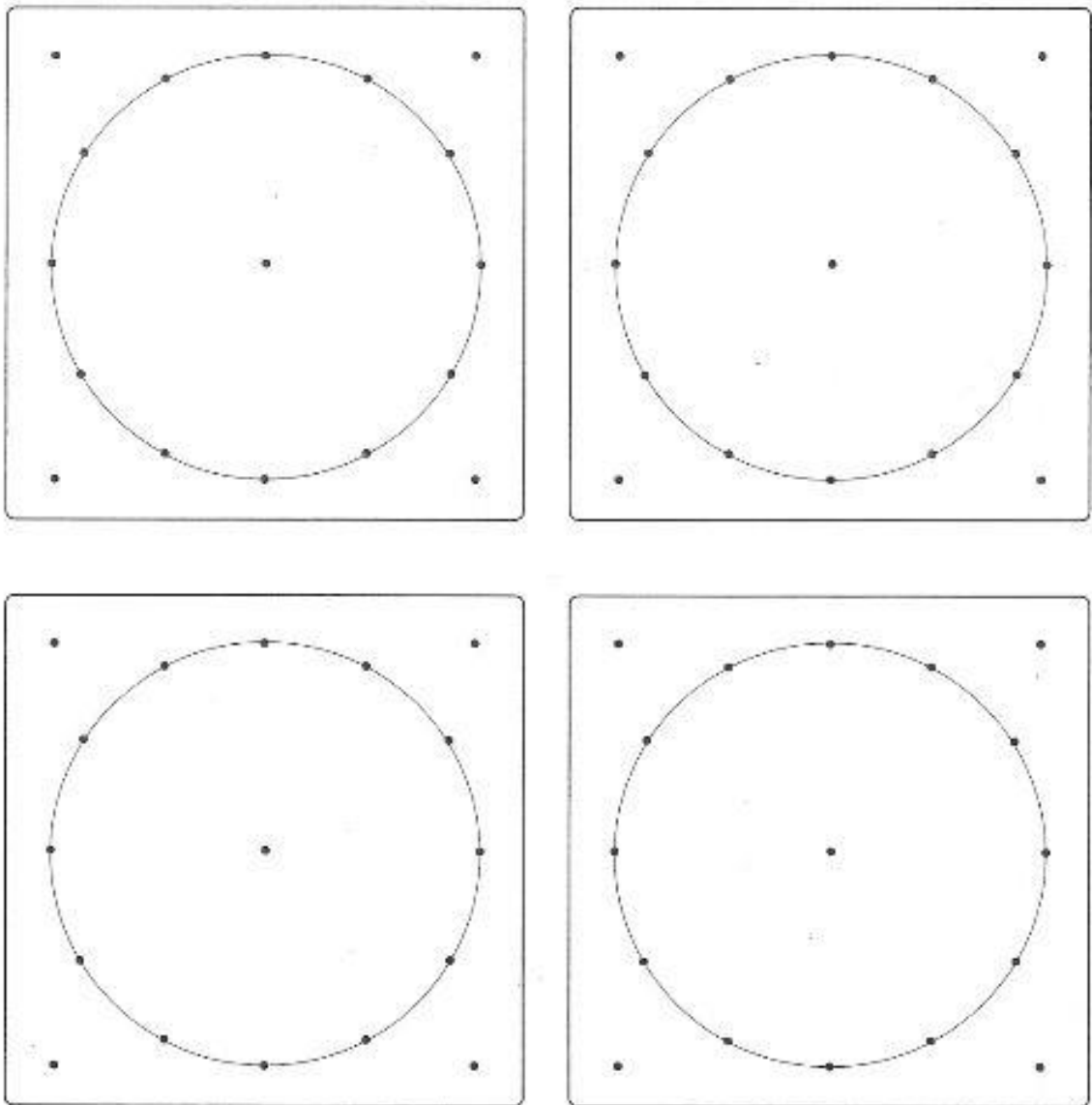
www.worldteacherspress.com ©World Teachers Press®

www.didax.com/2-5195

¹³materijal preuzet s http://www.didax.com/support/manipulatives/geoboards/2-5195_pg42.pdf

Dodatak 3: kružna geoploča¹⁴

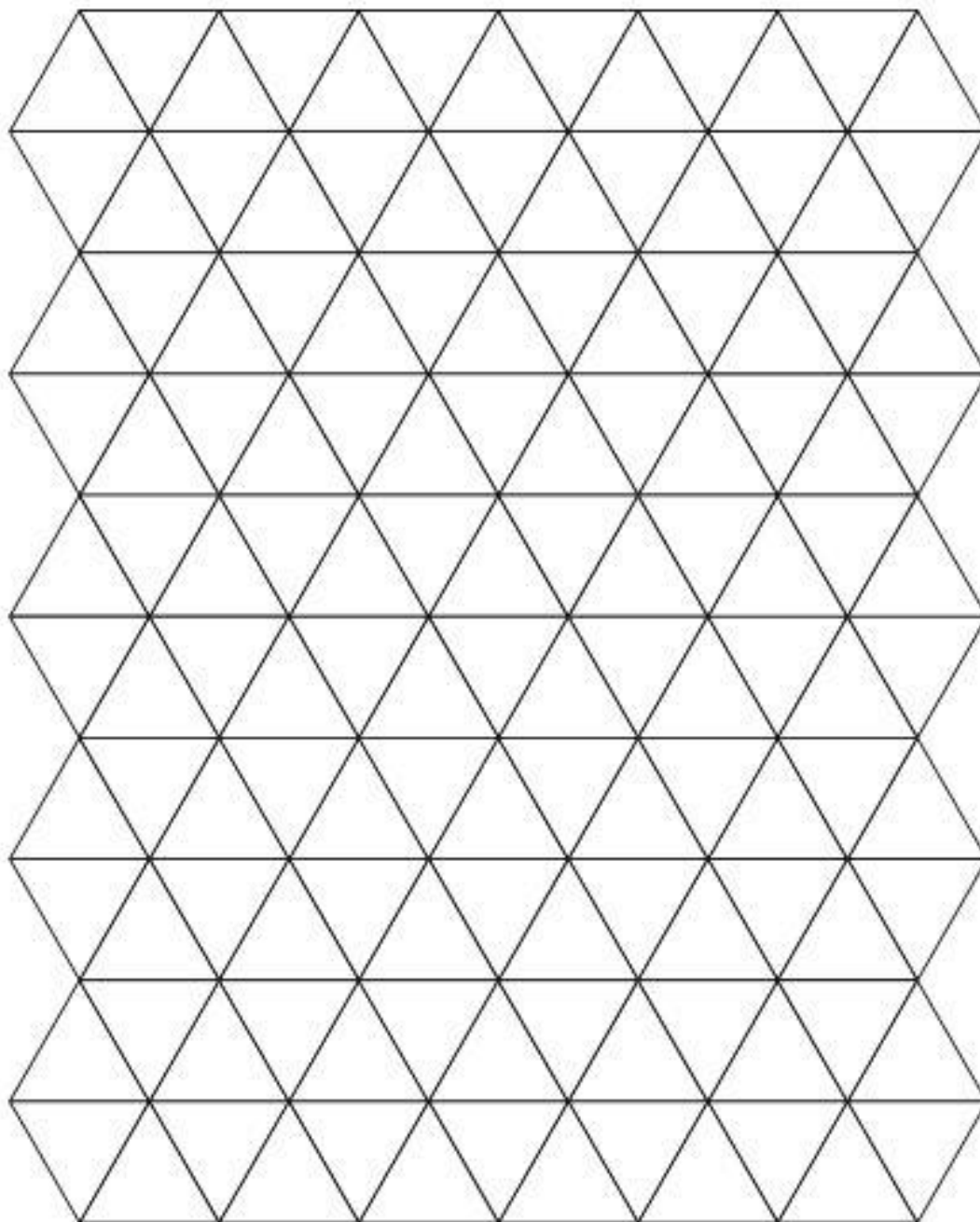
CIRCULAR GEODOT PAPER - 4 GRIDS



¹⁴materijal preuzet s
<ftp://www.grsc.k12.ar.us/mathresources/Technology/Knowledge%20Box/Knowledge%20Box%20Teacher%20Resources/Circular%20Geodot%20Paper%20-%20%204%20Grids.pdf>

Dodatak 4: papir za rješavanje zadataka s blok uzorcima¹⁵

PATTERN BLOCK TRIANGLE PAPER



© ETA/Cuisenaire®

¹⁵materijal preuzet s
http://www.grsc.k12.ar.us/mathresources/bydomain_strand/measurement/AREA/One%20Hundred%20Pattern%20Block%20Triangle%20Paper.pdf

Dodatak 5: Uspoređivanje prirodnih brojeva

1. Sljedeće brojeve prikaži pomoću numicon komada i prikaži slikom koristeći se *numicon* setom:

a) 74

b) 67

c) 717

d) 123

e) 9985

f) 1254

2. Koristeći *numicon* komade usporedite sljedeće brojeve:

a) 254 i 524

b) 125 i 225

c) 1542 i 1546

d) 2583 i 2538

e) 9875 i 9785

f) 1254 i 1254

g) 1325 i 1142

Dodatak 6: Prirodni brojevi

1. Bez brojanja odredite koji je broj crvena kuglica i objasnite kako ste došli do tog broja.



2. Zbrojite koristeći računsku gusjenicu:

- a) $46 + 34$
- b) $31 + 49$
- c) $43 + 56$
- d) $28 + 39$
- e) $77 + 14$

3. Oduzmite koristeći računsku gusjenicu:


- a) $77 - 37$
- b) $84 - 54$
- c) $83 - 14$
- d) $53 - 28$
- e) $38 - 23$

4. Izračunajte koristeći računsku gusjenicu:

- a) $56 + 14$
- b) $18 + 31$
- c) $49 - 19$
- d) $69 - 22$
- e) $28 + 22$
- f) $56 - 16$

Dodatak 7: Frekvencija i dijagrami

Za svaki od zadataka napravite tablicu frekvencija, dijagram pomoću temeljnih kocki i nacrtajte dijagram.

1. Dječak baca kockicu 30 puta. 7 puta je pao broj 6 na kockici, 3 puta 5, 2 puta 4, 9 puta 3, 4 puta 2 i 5 puta je pao broj 1. 
2. U razredu je na kraju školske godine bilo sljedeće stanje s ocjenama:
5 učenika je prošlo s odličnim uspjehom, 8 učenika s vrlo dobrim, 6 s dobrim, 7 s dovoljnim i 2 učenika idu na produžnu nastavu iz jednog ili dva predmeta.
3. U nekom društvu je 16 osoba. Od ukupnog broja osoba 5 osoba ima plave oči, 7 ima crne, 3 osobe imaju zelene i 1 osoba ima smeđe oči.
4. U društvu smo mladih glazbenika. Njih sedmero svira gitaru, troje violinu, petero klavir i dvoje trubu.



Dodatak 8: Množenje prirodnih brojeva

Odredi umnožak sljedećih brojeva:

1. $28 \cdot 3$

2. $18 \cdot 5$

3. $33 \cdot 7$

4. $65 \cdot 4$

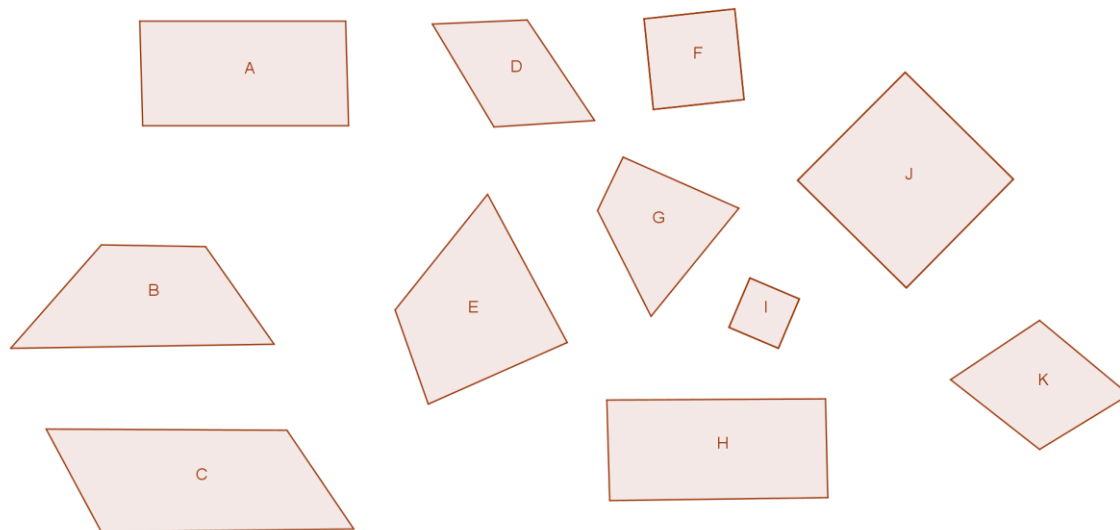
5. $77 \cdot 5$

6. $12 \cdot 9$

7. $92 \cdot 6$

Dodatak 9: Pravokutnik i kvadrat

Razvrstajte dane likove i objasnite po kojem ste ih kriteriju razvrstali.



1. Koristeći matematičke pločice napravite kvadrat koji sadrži jednak broj manjih kvadrata crvene, plave, zelene i žute boje. Skicirajte kvadrat koji ste napravili.
2. Koristeći matematičke pločice napravite pravokutnik koji sadrži jednak broj manjih kvadrata crvene, plave, zelene i žute boje. Skicirajte pravokutnik koji ste napravili.
3. Je li moguće napraviti pravokutnik od 13 malih kvadrata? Ako da, napravite ga i skicirajte rješenje. Ako ne, obrazložite svoj odgovor.
4. Je li moguće napraviti kvadrat od 10 manjih kvadrata? Ako da, napravite ga i skicirajte rješenje. Ako ne, obrazložite svoj odgovor.
5. Dano je 12 pločica. Sastavite sve moguće kvadrate i pravokutnike od danih pločica. Izvedite zaključke.
6. Dano je 16 pločica. Sastavite sve moguće kvadrate i pravokutnike od danih pločica. Izvedite zaključke.

Dodatak 10: Postotci

Prikaži postotke u svim mogućim zapisima:

1. $70\% =$

2. $\frac{25}{100} =$

3. $\frac{1}{25} =$

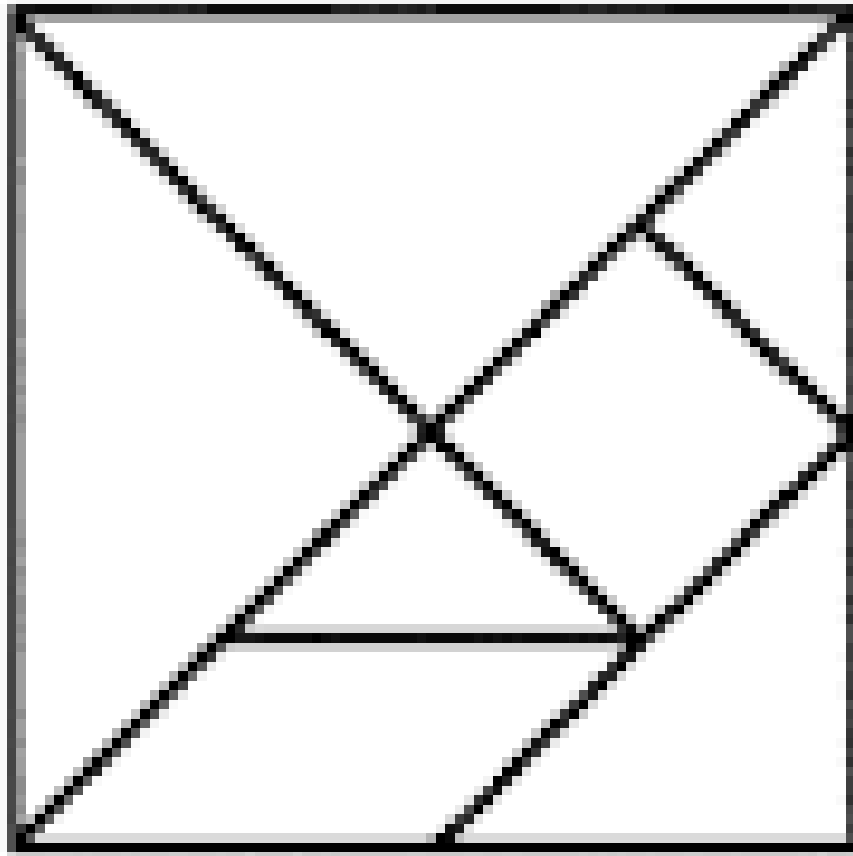
4. $0.2 =$

5. $\frac{4}{5} =$

6. $43\% =$

7. $\frac{7}{100} =$

8. $0.06 =$



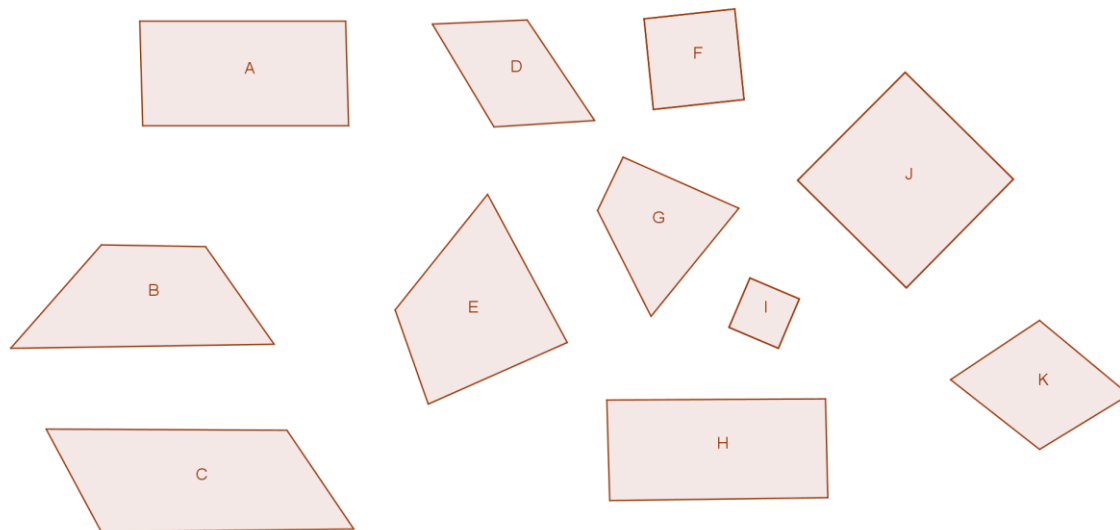
1. Neka jedan od učenika uzme između 3 i 6 komada iz tangram seta i neka prekrije s tim komadima dio kvadrata na listiću. Ostali učenici neka skiciraju kvadrat i zapišu koliki je postotak kvadrata prekriven.
Postupak ponavljajte dok se svi u grupi ne izredate na prekrivanju kvadrata.
2. Prekrijte zadani dio kvadrata i skicirajte rješenje u bilježnicu.
 - a) 25%
 - b) 75%
 - c) 37.5%

Dodatak 11: Četverokut

1. Napravite na geoploči četverokut i smislite asocijacije kojima ćete svom paru objasniti o kojem se četverokutu radi i gdje se na *geoploči* nalazi. Apsolutno je zabranjeno imenovati četverokut koji ste napravili. Sve napravljeno trebate imati napisano i nacrtano u bilježnici. Potom izračunajte površinu napravljenog četverokuta.
2. Na svojoj geoploči napravite oblik koji se sastoji od nekoliko četverokuta. Oblik napravite po želji. Na isti način kao u prvom zadatku navodite kolegu da na svojoj geoploči napravi isti oblik i precrta ga na papir. Izračunajte površine oblika koje ste napravili.

Dodatak 12: Kvadrat i pravokutnik

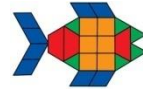
Razvrstajte dane likove i objasnite po kojem ste ih kriteriju razvrstali.



1. Pronađite što više kvadrata na svojim geopločama. Precrtajte ih na papir. Izračunajte im opsege i površine i zapišite ih.
2. Pronađite što više pravokutnika na svojim geopločama. Precrtajte ih na papir. Izračunajte im opsege i površine i zapišite ih.
3. Odredite na geoploči kvadrat i pravokutnik opsega 8. Odredite im površine.
4. Napravite na geoploči, a potom precrtajte na papir, kvadrat i pravokutnik koji imaju iste površine. Postoje li kvadrat i pravokutnik jednakih opsega i površina?

Dodatak 13: Opseg mnogokuta


1. Koristeći jedan set blok uzoraka pronađite što je moguće više mnogokuta s različitim opsezima. Možete koristiti koliko želite komada seta od 6 komada koji su vam na raspolaganju. Svoja rješenja nacrtajte u bilježnicu i zapišite opsege.



2. Odredite sve moguće opsege mnogokuta sastavljenih od:
 - a) 2 šesterokuta, 1 trapeza, 1 trokuta i 1 smeđeg paralelograma
 - b) 2 šesterokuta, 1 trapeza, 1 trokuta, 1 plavog paralelogramaPodijelite se međusobno, na način da po dvoje radi svaki dio zadatka.
3. Pokušajte pronaći minimalni i maksimalni opseg mnogokuta sastavljenih od jednog seta blok uzoraka.

Dodatak 14: Unutarnji kutovi mnogokuta

Pomoću blok uzoraka istražite zbroj unutarnjih kutova mnogokuta $K(n)$, gdje je n broj vrhova mnogokuta i $n < 9$. Dobivene mnogokute skicirajte u bilježnice i odredite im zbrojeve, a potom napravite i popunite tablicu ovog oblika. Primjer tablice:

skica mnogokuta	ime mnogokuta	broj stranica, n	zbroj unutarnjih kutova, $K(n)$
	trokut	3	180°

Dodatak 15: Svođenje razlomaka na zajednički nazivnik



1. Napravite trokut koji je jednu trećinu zelen, a dvije trećine crven.
2. Napravite trokut koji je dvije trećine crven, jednu devetinu zelen i dvije devetine plav.
3. Napravite paralelogram koji je dvije trećine plav i jednu trećinu zelen.
4. Napravite paralelogram koji je tri četvrtine plav i jednu četvrtinu zelen.
5. Sami napravite trapez od komada seta koje imate i izrazite razlomcima koliko površine zauzima koja boja.

Dodatak 16: Postotak / Razlomci



1. zagonetka:

Površina svih likova zajedno je jednaka površini 24 zelena trokuta.

Tri lika zajedno daju $\frac{3}{4}$ ukupne površine.

Zeleni likovi prekrivaju $\frac{1}{2}$ površine koju prekrivaju plavi likovi.

2. zagonetka:

Imamo devet likova.

Površina prekrivena žutim likovima je jednaka površini prekrivenoj plavim likovima.

Površina prekrivena crvenim likovima je $\frac{1}{8}$ površine prekrivene žutim i plavim likovima zajedno.

3. zagonetka:

Imamo osam likova.

$\frac{1}{2}$ likova su oni koji od kojih bi svaki prekrivao $\frac{1}{3}$ najvećeg lika.

$\frac{1}{4}$ likova su oni koji od kojih bi svaki prekrivao $\frac{1}{2}$ najvećeg lika.

U vrećici imamo likove crvene, plave, zelene i žute boje.

4. zagonetka:

Imamo dva lika.

Likove možemo složiti tako da tvore šesterokut koji ima dva prava kuta.

Opseg šesterokuta je 7 inča (1 inč je duljina jedne stranice zelenog trokuta.)

5. Neka svaki član grupe napravi svoju zagonetku, a ostali neka je pokušaju riješiti.



1. zagonetka:
Površina svih likova zajedno je jednaka površini 24 zelena trokuta.
Tri lika zajedno daju 75% ukupne površine.
Zeleni likovi prekrivaju 50% površine koju prekrivaju plavi likovi.
2. zagonetka:
Imamo devet likova.
Površina prekrivena žutim likovima je jednaka površini prekrivenoj plavim likovima.
Površina prekrivena crvenim likovima je 12.5% površine prekrivene žutim i plavim likovima zajedno.
3. zagonetka:
Imamo osam likova.
50% likova su oni koji od kojih bi svaki prekrivao 33.3% najvećeg lika.
25% likova su oni koji od kojih bi svaki prekrivao 50% najvećeg lika.
U vrećici imamo likove crvene, plave, zelene i žute boje.
4. zagonetka:
Imamo dva lika.
Likove možemo složiti tako da tvore šesterokut koji ima dva prava kuta.
Opseg šesterokuta je 7 inča (1 inč je duljina jedne stranice zelenog trokuta.)
5. Neka svaki član grupe napravi svoju zagonetku, a ostali neka je pokušaju riješiti.