PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

PETRA STANČIĆ

PETI EUKLIDOV POSTULAT U RAZNIM GEOMETRIJAMA

DIPLOMSKI RAD

Split, prosinac 2024.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

PETI EUKLIDOV POSTULAT U RAZNIM GEOMETRIJAMA

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Petra Stančić

Mentor:
red. prof. dr. sc. Jurica Perić

Split, prosinac 2024.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

PETI EUKLIDOV POSTULAT U RAZNIM GEOMETRIJAMA

Petra Stančić

Sažetak:
Peti Euklidov postulat govori o tome koliko paralelnih pravaca prolazi točkom van zadanog pravca. U euklidskoj geometriji postoji točno jedan takav pravac, u hiperboličkoj geometriji postoji beskonačno mnogo takvih pravaca, dok se u eliptičkoj geometriji svi pravci sijeku pa paralelni pravci uopće ne postoje u toj geometriji. Cilj ovog rada je proučiti osnovna svojstva ovih triju geometrija, interpretirati Peti postulat u njima te navesti posljedice koje su nastale zbog promjene Petog postulata.

Ključne riječi:
Elementi, apsolutna geometrija, euklidska geometrija, hiperbolička geometrija, funkcija Lobačevskog, Poincareov model, asimptotski trokuti, eliptička geometrija, model sfere

Podatci o radu:
90 stranica, 73 slike, 13 literaturnih navoda, jezik izvornika: hrvatski

Mentor: *red. prof. dr. sc. Jurica Perić*

Članovi povjerenstva:

red. prof. dr. sc. Milica Klaričić Bakula

Domagoj Jelić, mag. math

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *13.12.2024.g.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

EUCLID'S FIFTH POSTULATE IN VARIOUS GEOMETRIES

Petra Stančić

Abstract:

The Fifth Euclidean Postulate states how many parallel lines pass through a point outside a given line. In Euclidean geometry, there is one such line; in hyperbolic geometry, there are infinitely many such lines; whereas, in elliptic geometry, all lines intersect, so parallel lines do not exist at all in that geometry. The objective of this thesis is to describe the fundamental properties of these three geometries, interpret the Fifth Postulate within them, and show the consequences that have arisen due to the modification of the Fifth Postulate.

Key words:

Elements, absolute geometry, Euclidean geometry, hyperbolic geometry, Lobachevsky function, Poincaré model, asymptotic triangles, elliptic geometry, sphere model

Specifications:

90 pages, 73 pictures, 13 citations, language of the original: Croatian

Mentor: *professor Jurica Perić*

Committee:

professor Milica Klaričić Bakula

assistant Domagoj Jelić

BASIC DOCUMENTATION CARD

This thesis was approved by a Thesis commettee on *13.12.2024.g.*

Uvod

Geometrija je grana matematike koja je bila predmet proučavanja mnogih matematičara još iz antičkog doba. U početku su matematičari istraživali tvrdnje metodom pokušaja i pogrešaka, a često su se koristili intuicijom, te pukim pogađanjem. Unatoč tome što rezultati nisu bili u potpunosti točni, dobivene aproksimacije su im bile sasvim dovoljne za praktičnu primjenu. Kasnije se javila želja za razvojem logičkog zaključivanja koje je trebalo poboljšati dotadašnji način nalaženja i istraživanja činjenica.

Među najranijim, najpoznatijim i najutjecajnijim radovima u geometriji su zasigurno *Elementi* grčkog matematičara Euklida. Tema koja je najviše zaokupila pažnju čitatelja je definitivno Peti postulat koji nije bio intuitivan pa je došlo do pitanja je li on postulat ili se ipak može dokazati. Poznati su brojni pokušaji njegovog dokazivanja, ali se na kraju ispostavilo da su svi oni bili neuspješni. Međutim, ti neuspjeli dokazi su doveli do novih važnih spoznaja, a jedno je otkriće neeuklidske geometrije.

Cilj ovog rada je opisati važnost Petog postulata, te njegove posljedice i vezane rezultate u euklidskoj, hiperboličkoj i eliptičkoj geometriji. U prvom poglavlju spomenut je povijesni pregled razvoja i aksiomatizacije geometrije s naglaskom na Euklidove *Elemente*. U drugom poglavlju navedeni su aksiomi apsolutne i euklidske geometrije uz primjer modela euklidske geometrije. Treće poglavlje govori o osnovnim svojstvima hiperboličke geometrije, a na kraju poglavlja je ta geometrija objašnjena kroz Poincareov model. Za kraj su u četvrtom poglavlju opisane temeljne karakteristike eliptičke geometrije, kao i jedan model te geometrije.

Sadržaj

Poglavlje 1

Povijesni pregled

U ovom poglavlju opisat ćemo razvoj geometrije kroz povijest. Korištena literatura u ovom poglavlju je [1], [2], [5], [6] i [8].

1.1 Euklidovi Elementi

Euklid je oko 300. g. pr. Kr. sistematizirao i aksiomatizirao svo tadašnje znanje grčke geometrije i teorije brojeva u jednu knjigu - *Elementi*. *Elementi* su bili toliko uspješni u izlaganju elementarne geometrije na aksiomatskoj osnovi da su stoljećima bili nenadmašan uzor stroge dedukcije. Sve do 18. stoljeća, a dijelom i u 19. stoljeću su bili osnovni udžbenik geometrije. Izvorni tekst nije ostao sačuvan, kao ni tekstovi iz Euklidovih vremena koji bi ukazivali na njih. Jedino sačuvano su prijepisi iz kasnijih stoljeća koji su sadržavali poboljšanja i primjedbe na Euklidove tvrdnje. *Elementi* se sastoje od 13 knjiga. Knjige 1 - 6 bave se planimetrijom, aritmetika i teorija brojeva u geometrijskoj formi su obrađene u knjigama 7 - 10, dok je stereometrija predmet istraživanja knjiga 11 - 13.

1.2 Prva knjiga Elemenata

Kada je u pitanju aksiomatsko zasnivanje geometrije, najvažnija je prva knjiga budući su u njoj sadržani svi aksiomi na kojima se zasnivaju *Elementi*. U svakoj od 13 knjiga Euklid najprije navodi definicije onih pojmova koje koristi u toj knjizi. Tako ukupno u svim knjigama ima 118 definicija, dok ih samo u prvoj ima 23. Poslije definicija Euklid u prvoj knjizi navodi postulate (5) i aksiome (5), a onda se iz njih dokazuju propozicije (48). Teško je vidjeti razliku između pojmova aksiom i postulat. Možemo reći da je aksiom polazna tvrdnja koja se smatra istinitom i koja se ne dokazuje, dok je postulat polazna tvrdnja koja se također uzima bez dokaza, a najčešće izražava uvjet koji mora zadovoljavati neki pojam ili izražava neki odnos među pojmovima. Navedimo neke definicije iz hrvatskog prijevoda *Elemenata* (Euklid: Elementi I-VI / Hudoletnjak Grgić, Maja (ur.) Zagreb: KruZak, 1999 navedeno u [1], 2014):

(D-1) **Točka** *je ono što nema dijelova*

(D-2) **Crta** *je duljina bez širine*

(D-3) *Krajevi crte su* ***točke***

(D-4) **Dužina** *je ona crta koja jednako leži prema točkama na njoj*

(D-5) **Ploha** *je ono što ima samo duljinu i širinu*

(D-6) *Krajevi plohe su* ***crte***

(D-7) **Ravnina** *je ploha koja jednako leži prema dužinama na njoj*

Zbog dvosmislenosti i nejasnosti Euklidovih definicija ne možemo precizno odrediti što bi ovi pojmovi, davno definirani, predstavljali danas. Na primjer, definicije (D-4) i (D-7) su nejasne. Također bi crtu iz definicije (D-2) mogli shvatiti kao pravac, ali isto tako i dužinu iz definicije (D-4).

Svi pojmovi neke aksiomatske teorije moraju se strogo podijeliti na **osnovne pojmove**, koji se ne definiraju, a čija su svojstva implicitno dana aksiomima, i na **izvedene pojmove** koji se definiraju na temelju osnovnih pojmova. Međutim, to nije slučaj kod Euklida. Naime, on je želio definirati sve geometrijske pojmove, pa nema istaknutih osnovnih pojmova. Nadalje, u definicijama (D-1), (D-2) i (D-5) pojmovi točka, crta i ploha definirani su pomoću pojmova dio, duljina, širina za čiju bi definiciju bili potrebni novi pojmovi, što je logički nedopustivo. Također, u definicijama (D-1) i (D-3) pojam točke se definira na dva različita načina bez navođenja dokaza o ekvivalentnosti tih definicija.

Dakle, Euklidove definicije točke, pravca i ravnine ne omogućavaju logičko izvođenje svih svojstava tih pojmova. Međutim, očito je i sam Euklid bio svjestan logičke manjkavosti svojih definicija pa ih ni sam nije koristio. Prema tome, logički nedostatak Euklidove aksiomatike lako je uklonjiv - te definicije treba ispustiti, a za osnovne pojmove uzeti sljedeće:

- **točka**
- **pravac**
- **ravnina**

Nakon definicija, Euklid navodi **postulate** i **aksiome**. Iako nema jasne razlike između postulata i aksioma, možemo zaključiti da su postulati geometrijske tvrdnje, a aksiomi opće tvrdnje. Istaknimo postulate koji su navedeni u već spomenutom hrvatskom prijevodu *Elemenata*, te pogledajmo o čemu govore:

(P-1) *Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina*

(P-2) *I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini*

(P-3) *I da se sa svakim središtem i udaljenošću opisuje krug*

(P-4) *I da su svi pravi kutovi jednaki*

(P-5) *I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene,* *sastaju se s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta*

Nadalje, pogledajmo aksiome koji se spominju u prijevodu *Elemenata*. Oni navode sljedeće:

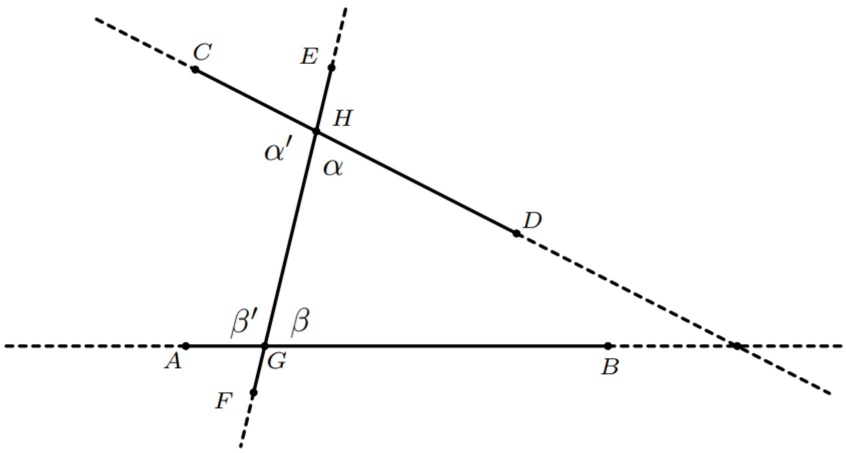
(A-1) *Stvari koje su jednake istoj stvari i međusobno su jednake*
(A-2) *Ako se jednakim stvarima dodaju jednake stvari, i cjeline su jednake*
(A-3) *Ako se od jednakih stvari oduzmu jednake stvari, i ostaci su jednaki*
(A-4) *Stvari koje se jedna s drugom poklapaju međusobno su jednake*
(A-5) *Cjelina je veća od dijela*

Pojmovi *aksiom* i *postulat* danas se smatraju sinonimima.
U navedenim postulatima i aksiomima Euklid navodi pojmove dužina i ograničena dužina. Dužina o kojoj je pričao danas predstavlja pravac, dok bi ograničena dužina bila dužina kakvom je danas smatramo.
Originalnu verziju Petog postulata predstavlja tvrdnja (P-5), a danas je on poznat i kao Aksiom o paralelama o kojem ćemo nešto više reći u odjeljku 2.6. Tijekom povijesti je iskazano još mnogo njemu ekvivalentnih tvrdnji koje su također spomenute na kraju odjeljka 2.6.
Nakon definicija, postulata i aksioma Euklid navodi propozicije koje izlaže redom po logičkoj zavisnosti kako bi se svaka tvrdnja mogla dokazati na osnovu prethodnih tvrdnji, postulata i aksioma.

1.3 Peti Euklidov postulat

Aksiomi i postulati su tvrdnje koje se prihvaćaju kao istinite, a ne mogu se dokazati iako su često naizgled očite. Takva su Euklidova prva četiri postulata. Kroz povijest je (P-5), tj. Peti postulat zadavao probleme mate-

matičarima koji su pokušavali dokazati da je zavisan o drugim aksiomima i postulatima. Privukao je najviše pažnje zbog toga što u stvarnom svijetu ne možemo točno odrediti točku presjeka dvaju pravaca. Naime, pravci u matematici su objekti koji sežu do beskonačnosti, a u stvarnosti ih predočavamo linijom koja je konačni segment. Produljivanjem dužine opet dobivamo veću, ali i dalje konačnu dužinu pa ponavljanjem ovog postupka od konačne dužine nikad nećemo dobiti pravac.
Pitanje je možemo li indirektno utvrditi da se pravci sijeku?
Prije nego navedemo objašnjenje, objasnimo neke oznake koje ćemo pritom koristiti. Naime, R je oznaka za pravi kut, dok su A, B, C i D krajnje točke dužina navedenih u Petom postulatu koje se potom neograničeno produžuju.
Ideja koju je Euklid imao kako bi to pokazao je sljedeća: treba povući transverzalu[1] - pravac EF i ako je suma kutova α i β manja od $2R$, tada će se produžene dužine s iste strane transverzale gdje leže kutovi α i β sjeći.



Slika 1.1: Peti postulat

Primijetimo sljedeće: kad bismo znali da se pravci sijeku, moglo bi se doka-

[1] **Transverzala** je pravac koji siječe dva ili više pravaca

zati da se sijeku s one strane gdje je zbroj promatranih kutova s iste strane manji od $2R$. Sada ćemo dokazati tu tvrdnju.
Pretpostavimo da se pravci sijeku. Trebamo pokazati da se sijeku s one strane gdje je zbroj promatranih kutova s iste strane manji od $2R$. Pretpostavimo suprotno, tj. da se sijeku s druge strane. Tada bismo mogli promatrati suplementarne kutove α' i β'. Kako je

$$\alpha + \alpha' = 2R,$$
$$\beta + \beta' = 2R,$$

imamo

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' = 4R.$$

Po pretpostavci je

$$\alpha + \beta < 2R,$$

pa mora biti

$$\alpha' + \beta' > 2R,$$

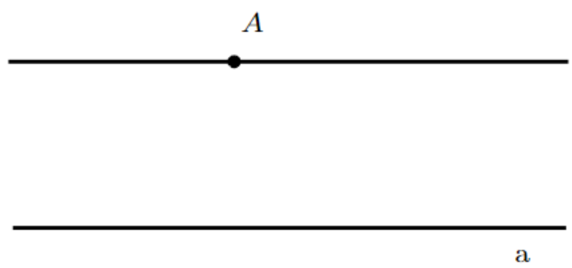
što je u kontradikciji s Propozicijom 1.1 iz Euklidovih Elemenata čiji iskaz slijedi u nastavku. Dakle, dobili smo kontradikciju pa zaključujemo da je naša pretpostavka da se pravci sijeku s druge strane netočna, odnosno zaključujemo da se oni sijeku s one strane gdje je zbroj promatranih kutova s iste strane manji od $2R$ i time je tvrdnja dokazana.

U prethodnom dokazu smo koristili sljedeću propoziciju koja govori o sumi bilo koja dva kuta u trokutu.

Propozicija 1.1 *U svakom trokutu je zbroj bilo koja dva kuta manji od dva prava kuta.*

Euklid je vjerojatno pokušavao dokazati Peti postulat te je očito da je pokušao odgoditi njegovu primjenu dokle god je to bilo moguće, pa ga nije koristio u prvih 28 propozicija. Tvrdnja koja se danas češće spominje od Petog postulata, a njemu je ekvivalentna, poznata je pod nazivom *Playfairov postulat*[2] i glasi ovako:

Postulat 1.2 ***(PP)*** *Neka je a proizvoljni pravac, A točka van njega. Tada u ravnini određenoj njima, kroz točku A možemo povući najviše jedan pravac koji ne siječe dani pravac.*



Slika 1.2: Playfairov postulat

Dakle, prema Playfairovom postulatu postoji maksimalno jedan pravac koji prolazi točkom van danog pravca i s njime je paralelan. U 2. poglavlju ćemo navesti tvrdnju koja potvrđuje egzistenciju takvog pravca, tj. govori da svakom točkom van danog pravca prolazi barem jedan njemu paralelan pravac. Radi se o Korolaru 2.34, a iz njega i Postulata 1.2 slijedi jedinstvenost takvog pravca.
Sada ćemo pokazati da su (P-5) i (PP) uistinu ekvivalentne tvrdnje. Prvo treba navesti što znači kada kažemo da su tvrdnje ekvivalentne. Neka su M i N dvije tvrdnje u teoriji koja je određena aksiomima $\{A_1, A_2, ..., A_n\}$. Kažemo da su tvrdnje M i N ekvivalentne tvrdnje s obzirom na navedeni

[2]**John Playfair** (1748. - 1819.), škotski matematičar

sustav ako i samo ako vrijedi

$$\{A_1, A_2, ..., A_n, M\} \Rightarrow N \text{ i } \{A_1, A_2, ..., A_n, N\} \Rightarrow M.$$

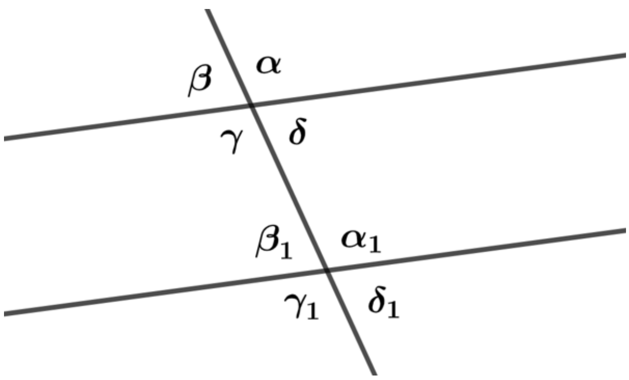
Pritom je $\Rightarrow$ oznaka za logičku implikaciju, tj. gornje izraze čitamo: N logički slijedi iz A_1, A_2,..., A_n, M i M logički slijedi iz A_1, A_2,..., A_n, N.

Teoriju dobivenu iz svih Euklidovih postulata osim Petog Euklidovog postulata (P-5) nazvat ćemo **apsolutnom geometrijom**. Kako se postulat (P-5) ne primjenjuje u prvih 28 propozicija iz Prve knjige *Elemenata*, to znači da u apsolutnoj geometriji smijemo koristiti tih prvih 28 propozicija i sve postulate osim postulata (P-5).

Iskažimo najprije propozicije iz Euklidovih Elemenata koje ćemo koristiti prilikom dokazivanja ekvivalencije tvrdnji (P-5) i (PP), kao i pojmove koji se u njima koriste.

Definicija 1.3 *Za pravce kažemo da su **paralelni** ako se podudaraju ili su disjunktni.*

Definicija 1.4 *Neka su dana dva različita paralelna pravca p i q. Svaki pravac t koji siječe pravce p i q nazivamo **transverzalom** ili **presječnicom** pravaca p i q.*



- *Kutove α i α_1, β i β_1, γ i γ_1 te δ i δ_1 nazivamo **protukutima***

- *Kutove γ i α_1 te δ i β_1 nazivamo* ***unutarnjim izmjeničnim kutovima***
- *Kutove α i γ_1 te β i δ_1 nazivamo* ***vanjskim izmjeničnim kutovima***
- *Kutove α i δ_1 te β i γ_1 nazivamo* ***vanjskim prikutima***
- *Kutove γ i β_1 te δ i α_1 nazivamo* ***unutarnjim prikutima***

Napomena 1.5 *Definicija 1.4 vrijedi za euklidsku i hiperboličku geometriju.*

Propozicija 1.6 *(Poučak o transverzali) Različiti paralelni pravci zatvaraju sa svakom transverzalom jednake protukute, jednake izmjenične kutove i suplementarne prikute. I obratno, ako dva pravca p i q presječemo trećim pravcem t, te ako je $\alpha = \alpha_1$, onda su pravci p i q paralelni. Slično vrijedi ako je $\alpha = \gamma_1$, odnosno ako je $\alpha + \delta_1$ ispruženi kut, tj. ako su α i δ_1 suplementarni.*

Propozicija 1.7 *Ako pravac siječe druga dva pravca i tvori s njima jednake unutarnje izmjenične kutove onda su ta dva pravca paralelna.*

Propozicija 1.8 *Ako pravac koji siječe dva pravca tvori s njima s iste svoje strane vanjski kut jednak unutarnjem kutu ili dva unutarnja kuta jednaka dvama pravim kutovima onda su ti pravci paralelni.*

Napomena 1.9 *Može se vidjeti veza između Propozicije 1.7 i Propozicije 1.8 sa Propozicijom 1.6. Naime, Propozicija 1.7 i Propozicija 1.8 govore o uvjetima za paralelnost pravaca o kojima govori Propozicija 1.6.*

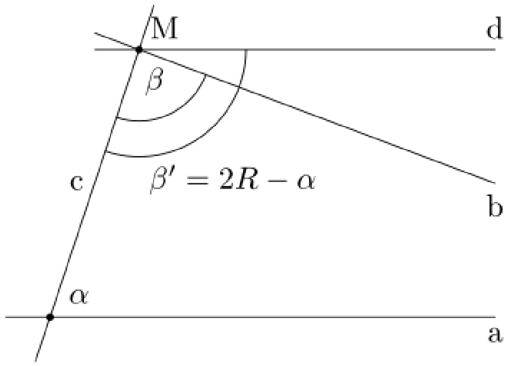
Propozicija 1.10 *Neka je dan pravac, i neka je dana točka na tom pravcu. Kroz tu točku možemo povući pravac pod pravim kutom prema danom pravcu.*

Kako bi se dokazalo da su (P-5) i (PP) ekvivalentne tvrdnje s obzirom na apsolutnu geometriju treba dokazati sljedeće:

$$\text{(a)} \quad \{\text{apsolutna geometrija}\} \wedge \text{(PP)} \Rightarrow \text{(P-5)} \quad \text{i}$$

$$\text{(b)} \quad \{\text{apsolutna geometrija}\} \wedge \text{(P-5)} \Rightarrow \text{(PP)}$$

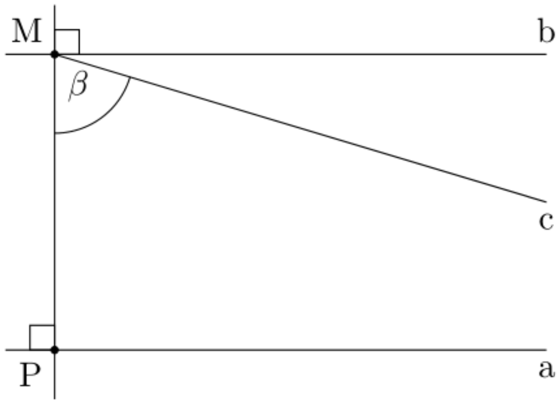
Dokaz. (a) Neka su dani pravac a i točka M van njega. Neka pravac b prolazi točkom M i neka je $\alpha + \beta < 2R$. Konstruirajmo pravac d koji prolazi točkom M tako da s pravcem c zatvara kut $\beta' = 2R - \alpha$.
Po Propoziciji 1.7 i Propoziciji 1.8 pravci a i d se ne sijeku. Pokažimo da su



Slika 1.3: Dokaz (a)

b i d različiti pravci. Zaista, jer je $\beta < 2R - \alpha$ i $\beta' = 2R - \alpha$ imamo da je $\beta < \beta'$, pa su zaista b i d različiti pravci. Budući d ne siječe a, a po postulatu (PP) on je i jedini takav pravac, slijedi da pravac b mora sjeći pravac a, dakle vrijedi postulat (P-5).
(b) Neka je P točka na pravcu a, M točka van pravca a i neka je MP okomica[3] iz M na a. U točki M dignimo okomicu b na MP (Propozicija 1.10). Pravci a i b se ne sijeku. Naime, ukoliko bi se sjekli, recimo u točki Q, dobili bi trokut $\triangle MPQ$ u kojemu bi zbroj dvaju kutova bio $2R$. To je

[3]Pogledati Definiciju 2.23



Slika 1.4: Dokaz (b)

u kontradikciji s Propozicijom 1.1. Još treba dokazati da je b jedini takav pravac. Pretpostavimo suprotno, neka postoji još jedan pravac c koji prolazi točkom M i ne siječe pravac a. Sada je $\beta < R$ i po postulatu (P-5) pravci a i c se sijeku, što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. Dakle, b je jedini pravac koji prolazi točkom M van pravca a i ne siječe pravac a, tj. dokazali smo da vrijedi postulat (PP) ■

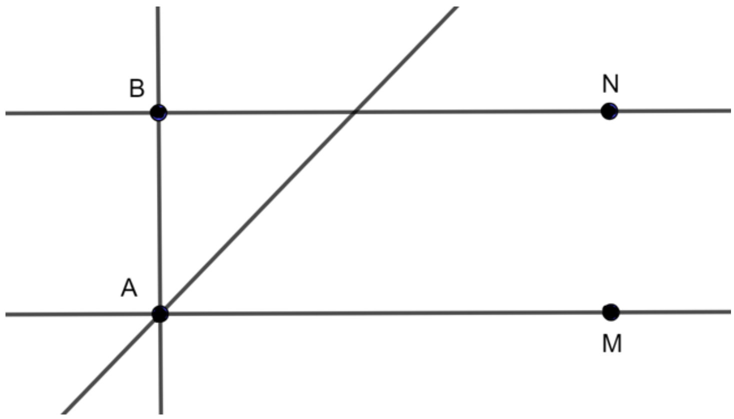
Legendre[4] je bio jedan od matematičara koji je pokušao dokazati zavisnost Petog postulata. Napisao je knjigu *"Osnove geometrije"* koja je objavljena 1794. godine. Taj udžbenik je s vremenom zamijenio Euklidove *Elemente*, a glavna tema je Peti postulat. Ovo su tvrdnje koje je uspio dokazati:

- ako je suma kutova u trokutu $\alpha+\beta+\gamma = 2R$, tada vrijedi Peti postulat
- suma kutova u trokutu je $\alpha + \beta + \gamma \leq 2R$
- ako je suma kutova u jednom trokutu $\alpha + \beta + \gamma \leq 2R$, tada je suma kutova u svakom trokutu $\alpha + \beta + \gamma \leq 2R$

Sljedeća izdanja udžbenika su imala nekorektne dokaze, ali to je barem potaknulo druge matematičare na razmišljanje o problemu Petog postulata.

[4] **Adrien-Marie Legendre** (1752. - 1833.), francuski matematičar

Početkom 19. stoljeća se počelo gledati na njega iz druge perspektive, a to je mogućnost da je ipak nezavisan od ostalih aksioma. Jedan od prvih i najznačajnijih matematičara koji je krenuo u tom smjeru je svakako bio **Gauss**[5]. On je razmišljao o geometriji u kojoj točkom van danog pravca prolaze barem dva pravca koji dani pravac ne sijeku - time je došao do otkrića hiperboličke geometrije, a da toga ni sam nije bio svjestan. Tako je 1816. godine došao do zaključka da je neeuklidska geometrija[6] neprotuslovna[7], ali to nije objavio budući da nije htio proturječiti dotadašnjim rezultatima. Gauss je definirao paralelne pravce na sljedeći način: *Kažemo da je pravac AM paralelan s pravcem BN ako oba pravca leže u istoj ravnini i ne sijeku se ali svaki pravac povučen točkom A između*[8] *pravaca AM i AB siječe pravac BN.*



Slika 1.5: Gaussova definicija paralelnih pravaca

Neki od rezultata koje je dokazao, a opisuju karakteristike neeuklidske ge-

[5]**Johann Carl Friedrich Gauss** (1777. - 1855.), njemački matematičar

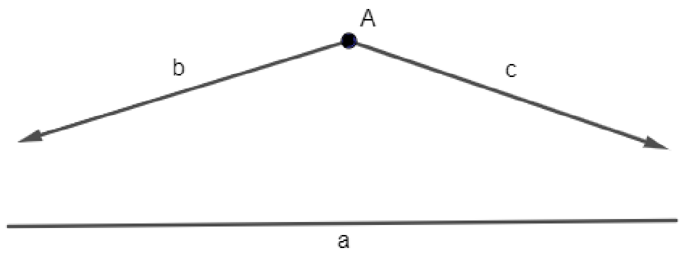
[6]Geometrija koja za aksiom o paralelama ne uzima Peti Euklidov postulat (P-5). Primjeri takve geometrije su hiperbolička i eliptička geometrija.

[7]Za sistem aksioma $\{A_1, ..., A_n\}$ teorije $\mathcal{A}$ kažemo da je neprotuslovan ako se iz tih aksioma ne mogu dokazati međusobno suprotne tvrdnje T i $\neg T$.

[8]U dijelu ravnine omeđenom pravcima AM i AB, tako da se ne podudara ni s jednim od ta dva pravca.

ometrije su sljedeći:

- Definicija paralelnih pravaca ne ovisi o izboru točaka A i B
- Relacija "biti paralelan" je simetrična i tranzitivna
- Svakom točkom izvan danog pravca prolaze dvije paralele[9] s tim pravcem, jedna prema jednom kraju, a druga prema drugom kraju (Slika 1.6)



Slika 1.6: Paralele b i c kroz točku A s pravcem a

Problem paralela je konačno riješen početkom 19. stoljeća. Naime, dvojica matematičara su u gotovo isto vrijeme izgradili novu geometriju, a radi se o hiperboličkoj geometriji - riječ je o **J. Bolyaiju**[10] i **N.I. Lobačevskomu**[11]. Za razliku od drugih matematičara u to vrijeme, oni su se usudili krenuti s razvojem teorije u kojoj je glavna pretpostavka negacija Petog postulata te su tako došli do mnogih rezultata i važnih novih pojmova, a neki od njih su:

- Definicija paralelnosti i kuta paralelnosti[12] $\pi(x)$
- Konstrukcija kuta paralelnosti

[9] Pod paralelama podrazumijevamo dva pravca koja su međusobno paralelna.
[10] **János Bolyai** (1802. - 1860.), mađarski matematičar
[11] **Nikolaj Ivanovič Lobačevski** (1792. - 1856.), ruski matematičar
[12] Više detalja o kutu paralelnosti se nalazi u 3.5.

- Granična kružnica i granična sfera
- Pridruženi trokuti
- Neeuklidska trigonometrija
- Izračunavanje funkcije kuta paralelnosti $\pi(x)$
- Uvođenje hiperbolnih funkcija
- Opseg kruga

Izgradnjom geometrije Lobačevskog i Bolyaija utvrđena je nezavisnost Petog postulata od drugih postulata i aksioma, čime je potvrđeno da je taj postulat zaista pravi aksiom u Euklidovom sistemu. Izbor osnovnih pojmova za euklidsku geometriju nije jednak kod svih matematičara te o njemu ovisi kompleksnost same aksiomatike. Najpopularniji odabir osnovnih pojmova je zasigurno onaj **D. Hilberta**[13], jer se takvim pristupom gradi geometrija na način sličan Euklidovom. Hilbert se tijekom života bavio teorijom invarijantnosti, te je proučavao međusobni odnos teorije brojeva i algebre, a potom mu je predmet interesa postala aksiomatizacija geometrije. Izdao je knjigu *Grundlagen der Geometrie* gdje je geometriji dao formalni karakter kakav se dotad mogao naći u drugim područjima poput algebre i analize. Naime, Euklidovi *Elementi* sadržavali su puno pretpostavki, nepotrebnih definicija i logičkih manjkavosti. Hilbert je shvaćao da se ne mogu svi pojmovi u matematici definirati pa je krenuo sa tri objekta koje nije definirao:

- točka
- pravac

[13]**David Hilbert** (1862. - 1943.), njemački matematičar

- ravnina

Uz to je naveo i tri relacije, također bez definicije:

- relacija incidencije
- relacija poretka
- relacija kongruencije

Nadalje, formulirao je 21 pretpostavku koje su poznate kao *Hilbertovi aksiomi*, a oni su poboljšana verzija Euklidovih aksioma i pet postulata. Više o njima navedeno je u 2. poglavlju.

1.4 Načela aksiomatike

Najveći izazov prilikom aksiomatizacije geometrije je uklanjanje zornosti, odnosno izostanak vizualnog opažanja. Naime, česta je pojava da vizualni prizori navode na krive zaključke. Zor je u većini slučajeva prilično koristan element, posebno kod uočavanja tvrdnji koje treba dokazati, ali problem nastaje kod samog dokazivanja gdje ju je potrebno eliminirati. Hilbertov pristup je potpuno apstraktan - slike nisu potrebne u njegovoj aksiomatici.

Za aksiomatsko zasnivanje matematičke teorije je nužno odrediti **osnovne pojmove** i osnovne tvrdnje - **aksiome**. Preko osnovnih pojmova definiraju se izvedeni pojmovi, dok se tvrdnje izvode iz aksioma. Sistem aksioma mora zadovoljavati tri načela: **načelo neprotuslovnosti, načelo potpunosti i načelo nezavisnosti**.

Poglavlje 2

Apsolutna i euklidska geometrija

Hilbertova aksiomatika, koju ćemo uvesti na početku ovog poglavlja, koristi se kao osnova za izgradnju geometrija koje ćemo opisati u nastavku. Apsolutna geometrija je u potpunosti utemeljena na takvoj aksiomatici i ona čini temelj ostalih geometrija poput euklidske, hiperboličke i eliptičke (doduše nije u potpunosti temelj eliptičke geometrije budući se radi zamjene Aksioma o paralelama moraju raditi i neke izmjene u prethodnim aksiomima). Nakon što se upoznamo s njenim osnovnim svojstvima, vidjet ćemo kako se dodavanjem aksioma o paralelama gradi euklidska geometrija i opisati njene glavne karakteristike i rezultate. Na kraju poglavlja ćemo se upoznati s jednim modelom euklidske geometrije. Sadržaj koji je korišten u ovom poglavlju je preuzet iz [1], [2], [3], [5], [7], [8] i [12], osim ukoliko nije drugačije naglašeno.

2.1 Uvod

Za konstrukciju apsolutne (pa poslije i euklidske geometrije) ćemo koristiti već spomenutu Hilbertovu aksiomatiku. Kao osnovne objekte uzimamo:

- točka
- pravac
- ravnina

Točke označavamo velikim tiskanim slovima $A, B, C, ...$, a skup svih točaka sa $\mathcal{T}$. Pravci se označavaju malim tiskanim slovima $a, b, c, ...$, a skup svih pravaca sa $\mathcal{P}$. Na kraju, ravnine označavamo grčkim slovima $\alpha, \beta, \gamma, ...$, dok je oznaka za skup svih ravnina $\mathcal{R}$.

Nadalje, koristit ćemo i osnovne relacije:

- relacija incidencije
- relacija poretka
- relacija kongruencije

Ovih 6 osnovnih pojmova nije definirano, ali su opisani aksiomima. Ukupan broj aksioma je 21, a razvrstani su u 5 grupa:

- *(I)* - aksiomi incidencije
- *(II)* - aksiomi poretka
- *(III)* - aksiomi kongruencije
- *(IV)* - aksiomi neprekidnosti

Ove četiri grupe aksioma čine **apsolutnu geometriju**. Ukoliko aksiomima apsolutne geometrije pridružimo posljednju grupu:

- *(V)* - aksiom o paralelama

dobit ćemo euklidsku geometriju.
Vidjet ćemo da u apsolutnoj geometriji točkom van danog pravca prolazi barem jedan pravac koji ne siječe dani pravac. Dodatkom aksioma paralelnosti osigurano je da postoji točno jedan takav pravac, što je ujedno i tvrdnja Petog postulata. Na taj način će iz apsolutne geometrije biti izgrađena euklidska geometrija.
Sada ćemo navesti aksiome iz spomenutih grupa i neke definicije i tvrdnje koje se vežu na njih, ali prije toga treba objasniti nove oznake koje se u njima javljaju.
Naime, slučaj kada točka B leži između točaka A i C označavat ćemo sa *(A-B-C)*. Nadalje, oznaka $A \in a$ znači da točka A leži na pravcu a, tj. da pravac a prolazi točkom A, oznaka $A \in \alpha$ se koristi kada želimo prikazati da točka A leži u ravnini α, dok je "$\equiv$" oznaka za kongruenciju.

2.2 Aksiomi incidencije

Aksiomi incidencije govore o relaciji incidencije I. **Relacija incidencije** I je binarna relacija $I \subseteq (\mathcal{T} \times \mathcal{P}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{R})$. Zapis $(A, a) \in I$ čitamo **točka** A **je incidentna pravcu** a (ili **točka** A **leži na pravcu** a, ili **pravac** a **prolazi točkom** A i uz to još koristimo oznaku $A \in a$). Nadalje, oznaka $(A, \alpha) \in I$ znači da je **točka** A **incidentna s ravninom** α (ili **točka** A **leži u ravnini** α, ili **ravnina** α **sadrži točku** A i uz to još koristimo oznaku $A \in \alpha$).
Napomenimo još da kada kažemo "dvije točke", "tri točke", tada podrazumijevamo da se radi o različitim točkama, ukoliko drugačije ne naglasimo. Za tri točke koje su incidentne s istim pravcem kažemo da su **kolinearne**, a ako nisu kažemo da su **nekolinearne**. Slično, ako četiri točke leže u istoj

ravnini, onda kažemo da su one **komplanarne**, a ako ne leže u istoj ravnini da su **nekomplanarne**. Sada navedimo aksiome incidencije iz Hilbertove aksiomatike:

- **Aksiom** (I_1) *Za svake dvije točke postoji pravac koji prolazi njima.*

Slika 2.1: Aksiom (I_1)

- **Aksiom** (I_2) *Za svake dvije točke postoji najviše jedan pravac koji prolazi njima.*

Sljedeća napomena navodi direktnu posljedicu aksioma (I_1) i (I_2). Naime, aksiom (I_1) osigurava egzistenciju barem jednog pravca kroz bilo koje dvije točke, dok aksiom (I_2) daje gornju granicu za broj pravaca koji prolaze dvjema točkama.

Napomena 2.1 *Iz aksioma (I_1) i (I_2) proizlazi tvrdnja da je pravac u potpunosti određen svojim dvjema točkama. Jedinstveni pravac koji određuju različite točke A i B označavamo sa p(A,B) ili AB.*

- **Aksiom** (I_3) *Na svakom pravcu leže bar dvije točke; postoje bar tri nekolinearne točke.*
- **Aksiom** (I_4) *Za svake tri nekolinearne točke postoji ravnina u kojoj leže te točke. U svakoj ravnini leži bar jedna točka.*
- **Aksiom** (I_5) *Za svake tri nekolinearne točke postoji najviše jedna ravnina u kojoj leže te točke.*

Sljedeća napomena govori o direktnoj posljedici aksioma (I_4) i (I_5). Naime, aksiom (I_4) osigurava egzistenciju barem jedne ravnine kroz bilo koje tri nekolinearne točke, dok aksiom (I_5) govori o maksimalnom broju ravnina koje prolaze kroz tri nekolinearne točke.

Napomena 2.2 *Iz aksioma* (I_4) *i* (I_5) *slijedi činjenica da je ravnina u potpunosti određena sa tri nekolinearne točke. Ravninu određenu točkama A,B i C označavamo sa* $\alpha(A,B,C)$.

- **Aksiom** (I_6) *Ako dvije točke pravca leže u ravnini onda sve točke tog pravca leže u toj ravnini.*

Kada je riječ o relaciji incidencije, upoznali smo se sa značenjem izraza *točka je incidentna pravcu* i *točka je incidentna ravnini*, a sada ćemo još vidjeti što podrazumijevamo pod incidencijom pravca i ravnine.

Definicija 2.3 *Kažemo da je* ***pravac*** a ***incidentan s ravninom*** α *(ili da* ***pravac*** a ***leži u ravnini*** α*), i pisati* $a \in \alpha$*, ako je svaka točka tog pravca incidentna s ravninom* α.

- **Aksiom** (I_7) *Ako dvije ravnine imaju jednu zajedničku točku onda one imaju još bar jednu zajedničku točku različitu od prve.*
- **Aksiom** (I_8) *Postoje bar četiri nekomplanarne točke.*

Aksiome (I_1) - (I_3) zovemo **ravninskim aksiomima incidencije**, dok su aksiomi (I_4) - (I_8) znani kao **prostorni aksiomi incidencije**.

Geometrija koja je zasnovana na aksiomima (I_1), (I_2) i (I_3) zove se **geometrija incidencije**. Pogledajmo kako glasi definicija takve geometrije.

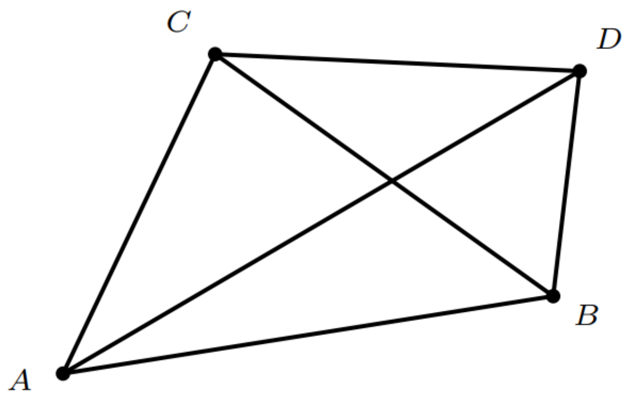
Definicija 2.4 ***Incidencijska geometrija*** *je uređena trojka* $\mathcal{S} = (\mathcal{P}, \mathcal{L}, \mathcal{I})$ *pri čemu je:*

1. $\mathcal{P} \neq \emptyset$ *skup točaka,*

2. $\mathcal{L}$ *je skup pravaca,*

3. *$\mathcal{I} \subseteq \mathcal{P} \times \mathcal{L}$ je funkcija ili relacija incidencije koja svakom pravcu $L \in \mathcal{L}$ pridružuje barem dvije točke $x \in \mathcal{P}$, te vrijedi $(x, L) \in \mathcal{I}$.*

Ukoliko incidencijska geometrija ima konačno mnogo točaka, odnosno ako je skup $\mathcal{P}$ konačan, onda je zovemo **konačnom geometrijom**.
Navedimo jedan primjer konačne incidencijske geometrije, a radi se o **euklidskoj geometriji incidencije četiriju točaka**. U takvoj geometriji je $\mathcal{P} = \{A, B, C, D\}$, dok skup $\mathcal{L}$ predstavljaju svi dvočlani podskupovi skupa $\mathcal{P}$. Pritom je incidencija interpretirana inkluzijom. Lako se provjeri da su u ovom modelu ravninski aksiomi incidencije ispunjeni. Ovaj model jest euklidska geometrija, jer se jednostavno pokaže da vrijedi Peti postulat, tj. aksiom (V_E) kojeg ćemo kasnije spomenuti. Na primjer, točka C je van pravca $\{A, B\}$ (primijetimo da je ovdje pravac $\{A, B\}$ dvočlani skup koji sadrži samo točke A i B, odnosno pravac u ovoj geometriji nije dužina $\overline{AB}$) i njom prolazi najviše jedna paralela, to je pravac $\{C, D\}$.



Slika 2.2: Euklidska geometrija incidencije četiriju točaka

2.3 Aksiomi poretka

Aksiomi poretka nam govore o relaciji "**biti između**". To je trosložna relacija na skupu točaka $\mathcal{T}$, tj. podskup od $\mathcal{T}^3$ i za izraz "**točka** B **je između točaka** A i C" koristit ćemo oznaku *(A-B-C)*.

\- **Aksiom** (II_1) *Ako točka B leži između točaka A i C, tada su A, B i C različite točke jednog pravca i točka B leži između točaka C i A.*

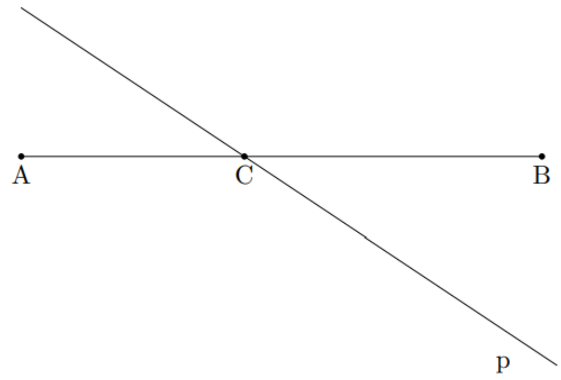
Slika 2.3: Aksiom (II_1)

\- **Aksiom** (II_2) *Ako su A i B dvije različite točke, onda postoji točka C takva da je (A-B-C).*

\- **Aksiom** (II_3) *Od tri različite točke jednog pravca najviše jedna je između preostalih dviju.*

Napomena 2.5 *Promotrimo Sliku 2.3 i uzmimo tri točke A, B i C. Točka A očito nije između točaka B i C. Zato je u aksiomu (II_3) navedeno da između tri točke jednog pravca može biti najviše jedna, a ne točno jedna točka.*

Definicija 2.6 *Neka su A i B dvije različite točke. Skup svih točaka pravca AB koje leže između točaka A i B, uključujući i točke A i B nazivamo* ***dužinom*** *i označavamo sa $\overline{AB}$ (ili $\overline{BA}$). Točke A i B nazivamo* ***krajevima dužine****, točke koje leže između A i B* ***unutarnjim točkama****, a sve ostale točke pravca AB* ***vanjskim točkama*** *dužine $\overline{AB}$. Kažemo da* ***pravac*** *p* ***siječe dužinu*** *$\overline{AB}$, ako postoji točka C pravca p takva da je (A-C-B).*



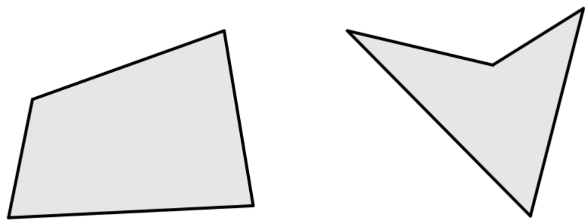
Slika 2.4: Definicija 2.6

Napomena 2.7 *Može se primijetiti da pravac AB siječe dužinu $\overline{AB}$. Naime, ako za točku C uzmemo bilo koju točku pravca AB koja leži između točaka A i B, imat ćemo (A-C-B).*

Udaljenost[1] točaka A i B označavamo sa $d(A, B)$ i taj broj nazivamo **duljinom dužine** $\overline{AB}$.
Aksiomi (II_1), (II_2) i (II_3) nazivaju se **linearnim aksiomima poretka**. Može se primijetiti da aksiomi (II_1), (II_2) i (II_3) ne osiguravaju egzistenciju triju točaka jednog pravca, kao ni postojanje unutarnje točke dužine $\overline{AB}$. Aksiom (II_2) govori o egzistenciji vanjske točke dužine $\overline{AB}$ te je očito da niti jedna konačna geometrija ne može biti model geometrije u kojoj vrijede i aksiomi poretka. Naime, u takvim geometrijama su pravci dvočlani skupovi - čine ih dvije točke, pa na njima ne možemo uopće promatrati tri različite točke.
Neka su sada A, B i C tri različite nekolinearne točke. Njima je jednoznačno određen **trokut** $\triangle ABC$. Kako bismo mogli definirati trokut, najprije se moramo upoznati s pojmovima konveksnosti i konveksne ljuske.

[1] Udaljenost točaka je definirana na strani 40 (formula (2.2))

Definicija 2.8 *Za skup $K \subseteq \alpha$, gdje je α ravnina, kažemo da je* ***konveksan*** *ako za svake njegove dvije točke $A, B \in K$ vrijedi da je $\overline{AB} \subseteq \alpha$.*



Slika 2.5: Definicija 2.8

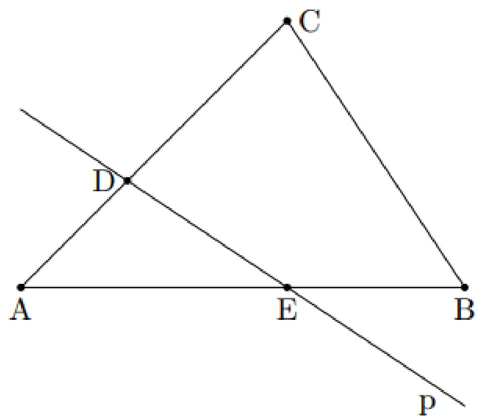
Definicija 2.9 *Neka je S proizvoljan podskup ravnine α.* ***Konveksna ljuska*** *od S, u oznaci conv S, je presjek svih konveksnih skupova iz α koji sadrže S.*

Definicija 2.10 *Neka su A, B, C tri različite nekolinearne točke i $\triangle = \{A, B, C\}$. Konveksnu ljusku od $\triangle$ nazivamo* ***trokutom*** *i označavamo conv$\triangle = \triangle ABC$. Kažemo da su točke A, B i C* ***vrhovi*** *tog trokuta, a dužine $\overline{AB}, \overline{BC}$ i $\overline{AC}$ njegove* ***stranice****.*

- **Aksiom** (II_4) (Paschov aksiom) *Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom na toj stranici, onda on siječe barem još jednu stranicu toga trokuta.*

Aksiom (II_4) naziva se **ravninskim aksiomom poretka**.

Definicija 2.11 *Neka je p pravac i O točka na pravcu p. Za svake dvije točke A, B pravca p za koje je (A-O-B) kažemo da* ***leže na pravcu*** *p* ***s različitih strana od*** *O. Ako O ne leži između A i B tada kažemo da A i B* ***leže na pravcu*** *p* ***s iste strane od*** *O.*



Slika 2.6: Paschov aksiom

Ležati na pravcu p s iste strane od točke O je relacija ekvivalencije[2] na skupu točaka pravca p i u sljedećem teoremu mislimo na nju kada govorimo o klasama ekvivalencije.

Teorem 2.12 *Svaka točka O pravca p dijeli skup svih točaka pravca p različitih od O u dvije klase tako da svake dvije točke iz iste klase leže s iste strane točke O, a svake dvije točke iz različitih klasa leže s različitih strana točke O.*

Definicija 2.13 *Dvije klase iz Teorema 2.12 nazivaju se* ***polupravci*** *pravca p* ***s početkom u točki*** *O. Takve polupravce koji leže na istom pravcu i imaju isti početak, a ne podudaraju se, nazivamo* ***komplementarnim polupravcima***.

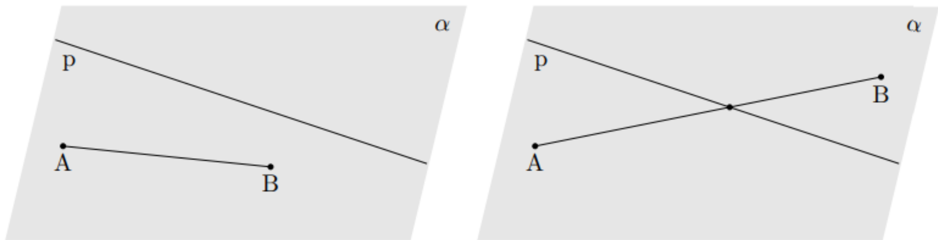
Napomena 2.14 *Može se primijetiti da točka O ne pripada polupravcima.*

Polupravac s početnom točkom A koji prolazi točkom B označavamo sa $\overrightarrow{AB}$.

Definicija 2.15 *Neka točke A, B i pravac p leže u ravnini α te neka A i B ne leže na p. Kažemo da su A i B* ***s iste strane pravca*** *p ako je ili $A =$*

[2]Relacija koja ima svojstva refleksivnosti, simetričnosti i tranzitivnosti

B ili p ne siječe $\overline{AB}$. Kažemo da su A i B ***s različitih strana pravca*** *p ako p siječe $\overline{AB}$.*



Slika 2.7: Definicija 2.15

Teorem 2.16 *Svaki pravac p ravnine α dijeli sve točke te ravnine koje ne leže na pravcu p u dvije klase tako da su svake dvije točke iz iste klase s iste strane pravca p, a svake dvije točke iz različitih klasa su s različitih strana pravca p.*

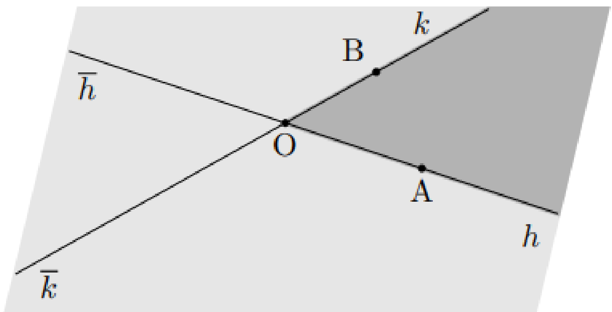
Definicija 2.17 *Dvije klase iz Teorema 2.16 nazivaju se* ***poluravninama ravnine*** *α* ***s rubom*** *p.*

Definicija poluravnine na ovaj način ima smisla budući da klase iz Teorema 2.16 ne ovise o izboru reprezentanta klase - točke A. Time je pokazana dobro poznata činjenica da svaki pravac p ravnine α dijeli tu ravninu na dvije poluravnine. Također, možemo primijetiti da točke pravca p ne pripadaju niti jednoj od tih dviju poluravnina.
U nastavku ćemo uvesti novi pojam koji je važan u geometriji, a radi se o kutu. Kako bi mogli definirati kut, trebaju nam dva polupravca s početkom u istoj točki koja ne leže na istom pravcu. Kasnije ćemo još vidjeti što podrazumijevamo pod izrazima *unutarnje i vanjsko područje kuta.*

Definicija 2.18 ***Kut*** *je par polupravaca* $\{h, k\}$ *s istim početkom* O *i koji ne leže na istom pravcu. Taj kut označavamo s* $\angle hOk$ *ili* $\angle kOh$*. Polupravci* h*,* k *nazivaju se* ***krakovima kuta****, a točka* O ***vrhom kuta****.*

Ako se na kraku h nalazi točka A, a B je točka na kraku k, onda kut označavamo sa $\angle AOB$ odnosno $\angle BOA$.

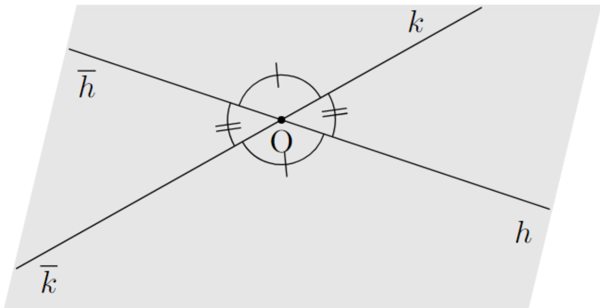
Definicija 2.19 *Neka je dan* $\angle hOk$*. Dopunimo polupravce* h *i* k *do pravaca polupravcima* $\overline{h}$ *i* $\overline{k}$*. Te pravce označavamo sa* $hO\overline{h}$ *i* $kO\overline{k}$*. Sve točke ravnine koja prolazi tim pravcima, različite od vrha kuta* O *i koje ne leže na polupravcima* h *i* k *podijeljene su kutom* $\angle hOk$ *na dva područja:*
(1) sve točke koje leže s iste strane pravca $hO\overline{h}$ *kao i* k*, a ujedno leže s iste strane pravca* $kO\overline{k}$ *kao i* h *nazivaju se* ***unutarnjim područjem*** *ili* ***nutrinom*** *kuta* $\angle hOk$*;*
(2) sve ostale točke ravnine nazivamo ***vanjskim područjem*** *kuta* $\angle hOk$*.*



Slika 2.8: Definicija 2.19

Neka su dani polupravci h i k s istim početkom u točki O. Polupravce h i k dopunimo do pravaca polupravcima $\overline{h}$ i $\overline{k}$ kao u prethodnoj definiciji. Sada možemo uvesti novu definiciju.

Definicija 2.20 *Kutovi $\angle hOk$ i $\angle\overline{h}O\overline{k}$ nazivaju se* ***vršni kutovi****, a kutovi $\angle hOk$ i $\angle\overline{h}Ok$ nazivaju se* ***sukuti****.*



Slika 2.9: Definicija 2.20

Definicija 2.21 *Neka su h, k, l tri polupravca s istim početkom O. Ako l leži u unutarnjem području kuta $\angle hOk$, onda kažemo da* ***polupravac*** *l* ***leži između polupravaca*** *h i k i pišemo (h-l-k) ili (k-l-h).*

2.4 Aksiomi kongruencije

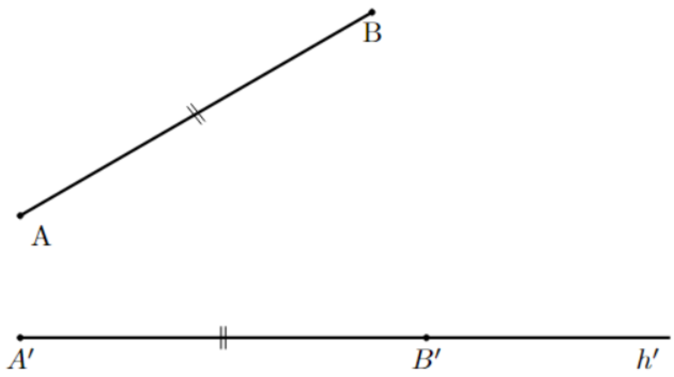
Ovi aksiomi tiču se binarne relacije " $\equiv$ " na skupu svih dužina $\mathcal{D}$ i na skupu svih kutova $\mathcal{K}$. Dva objekta su kongruentna kada se pomicanjem, preslikavanjem ili rotiranjem jednog od njih postigne njihovo podudaranje.

- **Aksiom** (III_1) (Aksiom o prenošenju dužina) *Neka je dana dužina $\overline{AB}$ i neka je A' početak polupravca h'. Tada postoji točka $B' \in h'$ tako da je $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Uvijek je $\overline{AB} \equiv \overline{BA}$.*

- **Aksiom** (III_2) *Iz $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{AB} \equiv \overline{A''B''}$ slijedi $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.*

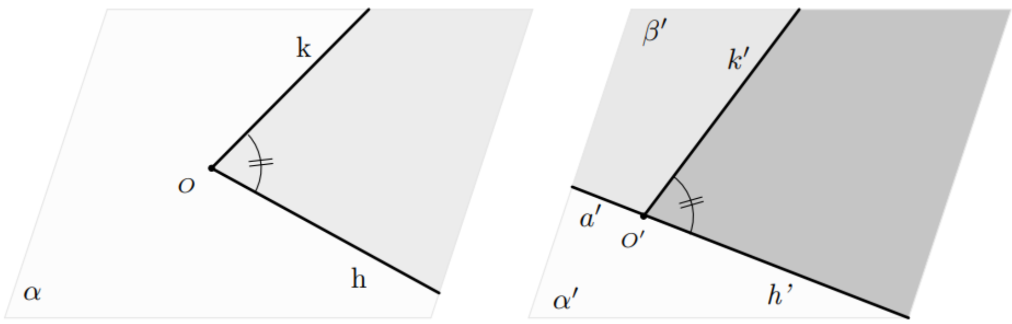
- **Aksiom** (III_3) *Ako je (A-B-C) i (A'-B'-C') te $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$ i $\overline{BC} \equiv \overline{B'C'}$, onda je $\overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$.*

- **Aksiom** (III_4) (Aksiom o prenošenju kutova) *Neka je dan kut $\angle hOk$ u*



Slika 2.10: Aksiom (III_1)

ravnini α *te neka je dana ravnina* α'*, pravac* a' *u ravnini* α' *i točka* O' *na pravcu* a'*, jedan od polupravaca* h' *pravca* a' *s početkom u* O' *te jedna od poluravnina* β' *ravnine* α' *s rubom* a'*. Tada postoji jedinstveni polupravac* h' *s početkom u* O' *u poluravnini* β' *takav da je* $\angle hOk \equiv \angle h'O'k'$*. Uvijek je* $\angle hOk \equiv \angle hOk$ *i* $\angle hOk \equiv \angle kOh$*.*



Slika 2.11: Aksiom (III_4)

- **Aksiom** (III_5) *Ako je* $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}$ *i* $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$*, onda je* $\angle CBA \equiv \angle C'B'A'$*.*

Aksiome (III_1), (III_2) i (III_3) nazivamo **linearnim aksiomima kongru-**

encije.
Aksiome (III_4) i (III_5) zovemo **ravninskim aksiomima kongruencije**. Prije sljedeće definicije uvest ćemo jednu novu oznaku. Naime, unutarnji kut trokuta pri vrhu A označavamo sa $\angle A$.

Definicija 2.22 *Za dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su **kongruentni** i pišemo $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, ako vrijedi $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}, \overline{AC} \equiv \overline{A'C'}, \overline{BC} \equiv \overline{B'C'}, \angle A \equiv \angle A', \angle B \equiv \angle B', \angle C \equiv \angle C'$.*

Definicija 2.23 *Za kut kongruentan svom sukutu kažemo da je **pravi kut**. Pravci na kojima leže krakovi pravog kuta nazivaju se **okomitim pravcima**.*

Sljedeća propozicija govori o tome koliko pravaca okomitih na dani pravac p prolazi točkom A van danog pravca p.

Propozicija 2.24 *Kroz svaku točku $A \in M$ ravnine M prolazi točno jedan pravac okomit na dani pravac $p \subset M$.*

Jedinstveni pravac iz prethodne propozicije zovemo *okomica*.
Budući da su sljedeće tvrdnje dio apsolutne geometrije, one vrijede u euklidskoj i hiperboličkoj geometriji. Kako su u eliptičkoj geometriji aksiomi kongruencije jednaki kao u apsolutnoj, s ponekom modificiranom definicijom zbog same vrste geometrije, to ove tvrdnje vrijede i u toj geometriji. Iznimka je Teorem 2.30 što je posebno naglašeno. Teorem 2.25 govori o postojanju pravog kuta, a njegova egzistencija je bitna u geometriji jer se koristi kao osnova za mnoge druge konstrukcije i dokaze.

Teorem 2.25 *Postoji pravi kut.*

Teorem 2.26 *Svaka dva prava kuta su kongruentna.*

Teorem 2.26 tvrdi da su svi pravi kutovi kongruentni. Sljedeći teorem govori o tome da se svaka dužina može podijeliti na dva jednaka dijela i to na jedinstveni način. Naime, za svaku dužinu postoji točno jedna točka koja ju dijeli na dvije kongruentne dužine. Sljedeća četiri rezultata vrijede u svim geometrijama koje spominjemo u ovom radu, osim ukoliko nije drugačije naglašeno.

Teorem 2.27 *Svaka dužina se može raspoloviti i to na jedinstveni način.*

Direktna posljedica Teorema 2.27 jest idući korolar. Naime, ako smo neku dužinu podijelili na dva jednaka dijela, onda svaki od ta dva dijela gledamo kao zasebnu dužinu pa možemo ponovno iskoristiti Teorem 2.27 i ponoviti taj postupak koliko god puta trebamo.

Korolar 2.28 *Svaka dužina može se razdijeliti na* 2^m $(m \in \mathbb{N})$ *kongruentnih dužina.*

Sljedeći teorem govori kako svaki kut možemo podijeliti na dva jednaka dijela i to na jedinstven način. Ovaj rezultat ima čestu primjenu u geometrijskim konstrukcijama i dokazima.

Teorem 2.29 *Svaki se kut može raspoloviti na jedinstveni način.*

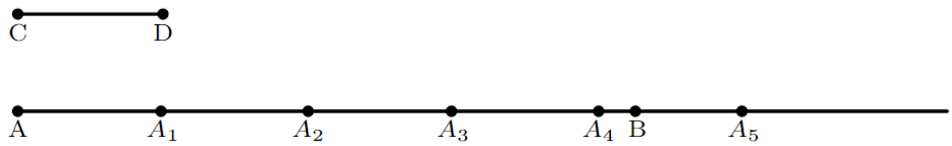
Teorem 2.30 *Svakom točkom ravnine prolazi jedinstvena okomica na dani pravac te ravnine.*

Napomena 2.31 *Treba naglasiti da Teorem 2.30, ukoliko je točka* T *van pravca* p*, nije istinita u eliptičkoj geometriji, o kojoj ćemo nešto više saznati u 4. poglavlju.*

2.5 Aksiomi neprekidnosti

U ovom odjeljku i dalje navodimo aksiome iz Hilbertove aksiomatike. Do sada smo se upoznali s prve tri grupe aksioma te nam preostaje proučiti posljednje dvije grupe. Kako bi u potpunosti opisali apsolutnu geometriju, potrebni su nam još aksiomi neprekidnosti. Dodatkom pete grupe aksioma, aksioma paralelnosti, doći ćemo do pojma euklidske geometrije. Navodimo najprije aksiome neprekidnosti:

- **Aksiom** (IV_1) (Arhimedov aksiom) *Neka su $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ proizvoljne dužine i neka su na polupravcu $\overrightarrow{AB}$ s početkom u točki A, odabrane točke $A_1, A_2, A_3, ...$ tako da vrijedi (A-A_1-A_2), (A_1-A_2-A_3),... i sve dužine $\overline{AA_1}, \overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}, ...$ su kongruentne dužini $\overline{CD}$. Tada postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je (A-B-A_n).*



Slika 2.12: Arhimedov aksiom

Arhimedov aksiom tvrdi da postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n \cdot \overline{CD} > \overline{AB}$. Bez smanjenja općenitosti može se staviti $n \cdot \overline{CD} \geq \overline{AB}$. Poanta ovog aksioma je da bilo koju dužinu možemo ograničiti, tj. "preskočiti" pomoću početne, proizvoljne dužine $\overline{CD}$, neovisno o tome koliko je $\overline{CD}$ proizvoljno "mala", a $\overline{AB}$ proizvoljno "velika".

- **Aksiom** (IV_2) (Cantorov aksiom) *Neka je dan niz dužina $\overline{A_1B_1}, \overline{A_2B_2}, ..., \overline{A_nB_n}...$ od kojih je svaka osim prve sadržana u prethodnoj i neka ne postoji dužina koja bi bila sadržana u svakoj dužini iz niza. Tada postoji jedna i samo jedna točka koja je sadržana u svakoj dužini.*

Cantorov aksiom tvrdi da postoji jedna jedina točka C (koju nazivamo *Cantorova točka*) takva da je (A_n-C-B_n), za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dedekindov aksiom, kojeg navodimo u nastavku, objedinjuje prethodna dva aksioma - Arhimedov i Cantorov. Može se pokazati da su ta dva aksioma zajedno ekvivalentna Dedekindovom aksiomu.

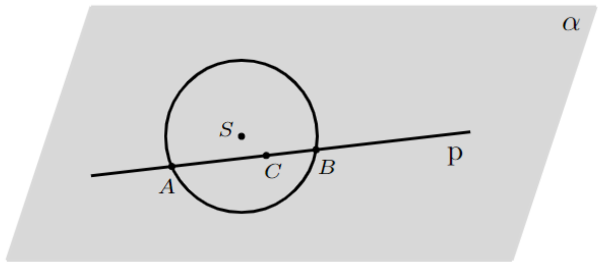
- **Aksiom** *(IV)* (Dedekindov aksiom) *Ako sve točke dužine $\overline{AB}$ uključujući i krajeve podijelimo u dvije klase tako da vrijedi:*
(a) Svaka točka je u jednoj i samo jednoj klasi, točka A je u prvoj, a B u drugoj klasi;
(b) Svaka točka prve klase, različita od A, leži između A i bilo koje točke druge klase;
onda postoji jedna i samo jedna točka C dužine $\overline{AB}$ takva da svaka točka koja se nalazi između C i B pripada u drugoj klasi. Točka C pripada ili prvoj ili drugoj klasi. Točku C nazivamo **graničnom točkom** *tih klasa,* **točkom prereza** *ili* **Dedekindovom točkom.**

Ako pravac prolazi dijelom ravnine unutar neke kružnice, onda sigurno postoje dvije točke te kružnice koje leže na tom pravcu. Rezultat koji to osigurava je sljedeći teorem:

Teorem 2.32 *Pravac koji leži u istoj ravnini sa kružnicom i prolazi unutarnjom točkom te kružnice siječe tu kružnicu u dvjema točkama.*

2.6 Aksiom o paralelama

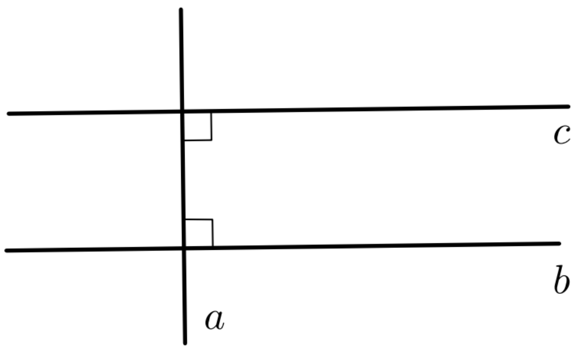
Prve četiri grupe aksioma čine geometriju koju nazivamo **apsolutna geometrija**. U takvoj geometriji točkom van danog pravca prolazi bar jedan pravac koji ga ne siječe. To je posljedica Korolara 2.34 koji slijedi u nastavku.



Slika 2.13: Teorem 2.32

Međutim, postoji geometrija u kojoj točkom van danog pravca ne prolazi niti jedan paralelan pravac, a to je eliptička geometrija o kojoj ćemo nešto više saznati u 4. poglavlju. U takvoj geometriji se prethodno navedeni aksiomi moraju modificirati, inače bi u suprotnom ona bila protuslovna.
Prije nego što iskažemo i dokažemo Korolar 2.34 navest ćemo jedan teorem koji se koristi pri njegovom dokazivanju:

Teorem 2.33 *Ako su dva različita pravca okomita na treći pravac, onda se ta dva pravca ne sijeku.*



Slika 2.14: Teorem 2.33

Dokaz. Neka su b i c različiti pravci koji su okomiti na pravac a. Pretpostavimo da se b i c sijeku i neka je njihovo sjecište točka T. Tada bi se iz točke T mogle povući dvije različite okomice na a, što je u kontradikciji s Propozicijom 2.24 ■

Korolar 2.34 *Ako je p pravac i P točka koja ne pripada pravcu p, postoji barem jedan pravac q kroz P koji je paralelan s p.*

Dokaz. Postoji pravac t kroz točku P koji je okomit na pravac l, a također postoji jedinstveni pravac m kroz točku P koji je okomit na t. Kako su l i m oboje okomiti na pravac t, prema Teoremu 2.33 slijedi $l \| m$. ■

Napomena 2.35 *Treba napomenuti da Propozicija 2.24, Teorem 2.33 i Korolar 2.34 ne vrijede u eliptičkoj geometriji.*

Sada kada zbog Teorema 2.33 znamo da postoji barem jedan pravac koji prolazi točkom van danog pravca i ne siječe ga, želimo izgraditi geometriju u kojoj bi on bio jedinstven. To ćemo postići aksiomatizacijom euklidske geometrije za što je potreban aksiom o paralelnosti:

Aksiom 2.36 *(V_E) Točkom van pravca prolazi najviše jedan pravac koji ga ne siječe.*

Dakle, Euklid je cijelo vrijeme imao dobar osjećaj u vezi toga je li Peti postulat pravi aksiom ili nije. Iz Teorema 2.33 i Aksioma (V_E) proizlazi sljedeća interpretacija aksioma o paralelama:

Točkom van pravca prolazi točno jedan pravac koji ga ne siječe.

Iz propozicije 2.42 koju ćemo navesti u nastavku slijedi da se pravci koji nisu paralelni sijeku u jednoj točki. Naime, kad bi presjek dvaju pravaca $l_1 \cap l_2$ sadržavao dvije točke, imali bismo dva pravca l_1 i l_2 kroz te dvije

točke, što je u suprotnosti sa Aksiomom (I_2). U euklidskoj geometriji jedinstveni pravac a koji prolazi točkom van danog pravca b i ne siječe ga zovemo **paralela**, a slučaj kada su pravci a i b paralelni označava se sa $a||b$.
Kroz povijest su mnogi matematičari pokušavali dokazati Peti postulat pretpostavljajući da se on može dokazati pomoću aksioma apsolutne geometrije i tvrdnji koje vrijede u njoj. Prije već spomenutih matematičara iz 1. poglavlja, i antički matematičari su predlagali nove definicije paralelnih pravaca u nadi da će uspjeti dokazati Peti postulat. Tako u **Proklovim**[3] komentarima vidimo da je **Posidon**[4] predlagao da se paralelni pravci definiraju kao oni koji imaju konstantan razmak. Tada bi trebalo dokazati da je skup svih točaka s iste strane i jednako udaljenih od danog pravca također pravac - no to je tvrdnja koja je ekvivalentna Petom postulatu. Proklo je čak "dokazao" Peti postulat, ali se ispostavilo da dokaz nije logički ispravan zbog krivih pretpostavki. Nadalje, **Nasir al-Din Tusi**[5] pokušao je dokazati Peti postulat na način da je pretpostavio egzistenciju pravokutnika, dok je **John Wallis**[6] koristio aksiom

"*Postoje slični trokuti*"

za koji se ispostavilo da je također ekvivalentan Petom postulatu. Na kraju ćemo još spomenuti neke tvrdnje koje su ekvivalentne Petom euklidovom postulatu, odnosno Aksiomu (V_E):

- Pravac koji siječe jedan od dva pravca u istoj ravnini koji se ne sijeku, siječe i drugi od ta dva pravca

[3]**Proklo** (410.- 485.), jedan od posljednjih učitelja u atenskoj školi

[4]**Posidon iz Rhodosa** (135. pr. Kr. - 51. pr. Kr.), grčki filozof, astronom i matematičar koji je osnovao školu u Rhodosu.

[5]Pravim imenom **Aub-Jafar Muhamed ben Hasan at-Thusi** (1201. - 1274.), perzijski erudit, bavio se geometrijom, astronomijom, geografijom i filozofijom. Dao je tumačenje prvih 12 knjiga Euklidovih Elemenata.

[6]**John Wallis** (1616. - 1703.), engleski matematičar

- Udaljenost između dva pravca koji leže u istoj ravnini a ne sijeku se je konačna
- Geometrijsko mjesto točaka koje leže s istih strana danog pravca i imaju istu udaljenost od njega je opet pravac
- Suma kutova trokuta jednaka je $2R$
- Za svaku točku unutar zadanog kuta može se pronaći pravac koji siječe oba kraka
- Dva pravca od kojih je jedan okomit a drugi kos prema trećem pravcu se sijeku
- Kroz tri nekolinearne točke može se uvijek povući kružnica

2.7 Model euklidske geometrije

U nekom sustavu aksioma nedefiniranim pojmovima možemo dati određeno značenje. To se zove *interpretacija* sustava aksioma. Potom se provjerava jesu li aksiomi uz takvu interpretaciju točne izjave. Ukoliko jesu, takvu interpretaciju zovemo **model**. Jedan sustav aksioma može se interpretirati na više načina, odnosno može imati više modela. Dva modela mogu biti jednaka, odnosno **izomorfna**. To znači da postoji 1-1 korespodencija između točaka modela $P \leftrightarrow P'$ te također 1-1 korespodencija između pravaca modela $l \leftrightarrow l'$ takvih da P leži na l ako i samo ako P' leži na l'.
Postoji više modela euklidske geometrije, a neki od njih su vektorski prostori $\mathbb{R}^2$ i $\mathbb{R}^3$ te euklidska ravnina E^2 i euklidski prostor E^3. $\mathbb{R}^2$ i E^2 su modeli euklidske geometrije u ravnini, dok su $\mathbb{R}^3$ i E^3 modeli euklidske geometrije u prostoru. Euklidska geometrija u prostoru je proširenje euklidske geometrije

u ravnini kod kojeg promatramo još jednu dimenziju, dok se sva teorija, definicije, teoremi i ostalo iz ravninske geometrije analogno koriste u skladu s time. Ovdje ćemo se pobliže upoznati s modelom euklidske ravnine E^2 budući da smo do sada u ovom radu uglavnom spominjali aksiome, pojmove i definicije u ravnini. Euklidska ravnina E^2 predstavlja skup $\mathbb{R}^2$ (realne točke u ravnini) u kojem imamo definiranu funkciju metrike d, o čemu ćemo više saznati uskoro. Sve napisano u ovom odlomku je preuzeto iz [2], [3, str. 1 - 2], [8], [9] i [11].
Prvo objasnimo pojmove koje ćemo ovdje koristiti.

Definicija 2.37 ***Vektorski*** *ili* ***linearni prostor nad poljem*** *F je uređena trojka $(V, +, h)$ gdje je $(V, +)$ Abelova grupa, F polje, te $h : F \times V \to V$,*

$$h(\alpha, a) =: \alpha a$$

funkcija takva da za sve $a, b \in V$ i $\alpha, \beta \in F$ vrijedi:

$\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a,$

$1a = a,$

$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a,$

$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b.$

Funkciju h nazivamo ***vanjskim*** *ili* ***hibridnim množenjem****. Ako je $F = \mathbb{R}$ onda vektorski prostor nazivamo* ***realnim vektorskim prostorom.*** *Elemente vektorskog prostora nazivamo* ***vektori****.*

Definicija 2.38 *Neka je X realni vektorski prostor. Svaku funkciju*
$\langle\ \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$, $\langle\ |\ \rangle(x, y) =: \langle x \mid y\rangle$, *koja zadovoljava uvjete:*
(U1) $\langle x, x\rangle \geq 0$,
(U2) $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$,
(U3) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$,
(U4) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$,

(U5) $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$,

za sve x, y, $z \in X$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$, *nazivamo* ***skalarnim množenjem na*** X.

Primjer 2.39 *Na realnom vektorskom prostoru* $\mathbb{R}^n$ *funkcija* $\langle \mid \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *koja svakom uređenom paru* $(P, Q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, P = (x_1, ..., x_n), Q = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$ *pridružuje realni broj*

$$\langle P \mid Q\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{2.1}$$

je skalarno množenje.

Definicija 2.40 *Neka je* X *realni vektorski prostor. Svaku funkciju* $\| \ \| : X \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi:*

(N1) $\|x\| \geq 0$,

(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \vec{0}$,

(N3) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|,\ \lambda \in \mathbb{R}$,

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,

za sve $x, y \in X$ *i* $\lambda \in \mathbb{R}$, *nazivamo* ***normom na*** X.

Definicija 2.41 ***Metrika*** *ili* ***udaljenost*** *na skupu* X *je svaka funkcija* $d : X \times X \to \mathbb{R}$ *za koju vrijedi:*

(M1) $d(x, y) \geq 0$,

(M2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

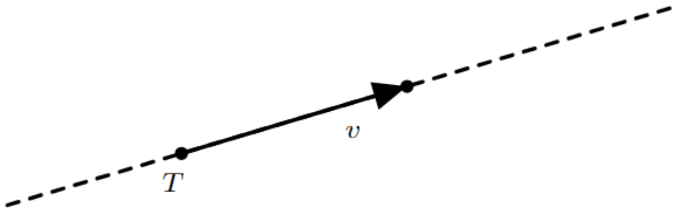
(M3) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M4) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

Sada možemo reći nešto o jednom modelu euklidske geometrije - euklidskoj ravnini E^2.

Točke euklidske ravnine E^2 su elementi vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. **Pravci** su jednodimenzionalne linearne mnogostrukosti, tj. translati jednodimenzionalnih potprostora od $\mathbb{R}^2$. To su skupovi oblika $l = T + [v]$ za $T, v \in \mathbb{R}^2, v \neq 0$.

Pritom je $[v] = \{\alpha v \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ potprostor razapet s v kojeg nazivamo **smjer** pravca l.



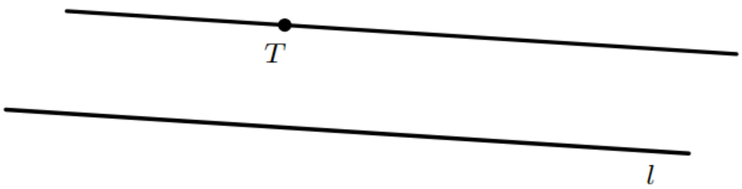
Slika 2.15: Pravac $l = T + [v]$

Navedimo neke tvrdnje koje vrijede u ovom modelu.

Propozicija 2.42 *Kroz svake dvije točke $P, Q \in E^2$ prolazi jedinstveni pravac.*

Lema 2.43 *Pravci su paralelni ako i samo ako imaju isti smjer.*

Propozicija 2.44 *Za svaki pravac l i točku T u E^2 postoji jedinstveni pravac kroz T koji je paralelan s l.*



Slika 2.16: Propozicija 2.44

U ovom modelu možemo definirati funkciju **udaljenosti** točaka iz E^2 koja je definirana formulom

$$d(P, Q) = \|Q - P\|. \tag{2.2}$$

Pritom funkciju

$$\|.\| : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad \|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$

nazivamo norma 2.2.

Ta norma je inducirana iz standardnog skalarnog množenja

$$\langle x, y\rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2$$

Funkcija d zadovoljava aksiome metrike, $\|.\|$ aksiome norme, a $\langle ., .\rangle$ aksiome skalarnog produkta. Nejednakost trokuta proizlazi iz nejednakosti Schwarz-Cauchy-Bunjakovskog.

Teorem 2.45 *(Nejednakost S-C-B). Za svaka dva vektora x, y vrijedi $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$. Jednakost se dostiže ako i samo ako su x i y proporcionalni.*

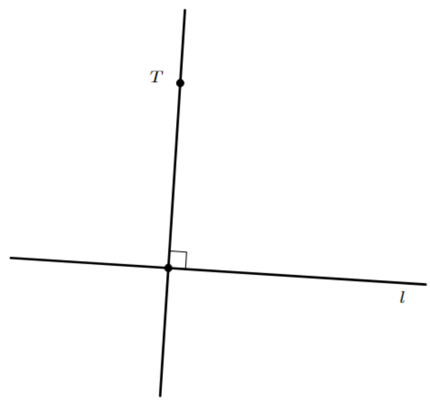
Za vektore x i y kažemo da su **okomiti** ili **ortogonalni** i pišemo $x \perp y$ ako vrijedi $|\langle x, y\rangle| = 0$.

Propozicija 2.46 *Ako su pravci l i m u E^2 okomiti, onda se sijeku, tj. nisu paralelni.*

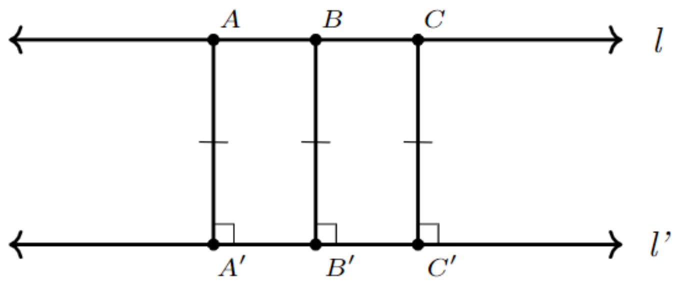
Propozicija 2.47 *Za svaki pravac l i točku T u E^2 postoji jedinstveni pravac kroz T koji je okomit na l.*

Navest ćemo još nekoliko rezultata koji vrijede u svim modelima euklidske geometrije, pa onda i u ovome. Za početak ćemo objasniti što podrazumijevamo kada kažemo da su neke točke jednako udaljene.

Definicija 2.48 *Neka su l i l' pravci, $A, B, C, ...$ točke na pravcu l i AA', BB', CC', ... okomice iz tih točaka na pravac l'. Kažemo da su točke $A, B, C, ...$ jednako udaljene od pravca l' ako su sve odgovarajuće dužine $\overline{AA'}, \overline{BB'}, \overline{CC'}, ...$ na tim okomicama između dvaju pravaca kongruentne.*



Slika 2.17: Propozicija 2.47



Slika 2.18: Definicija 2.48

Napomena 2.49 *Kako bi prethodna definicija imala smisla, na pravcu l treba uzeti barem dvije točke (a možemo i više) iz kojih se promatraju okomice na pravac l'.*

Pogledajmo kako definiramo udaljenost dvaju pravaca.

Definicija 2.50 *Neka su dani pravci l i l'. Udaljenost pravaca l i l' definirana je na sljedeći način:*

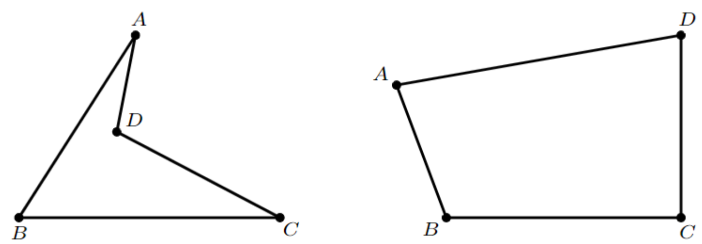
$$d(l, l') = inf\{\ d(P, Q)\ \| P \in l,\ Q \in l'\}.$$

Očito je najmanja moguća udaljenost pravaca jednaka 0, a to se postiže u slučaju kad se pravci sijeku. Sljedeći rezultat govori da je skup točaka pravca l koje su jednako udaljene od njemu paralelnog pravca l' beskonačan.

Teorem 2.51 *Bilo koja dva paralelna pravca l i l' su jednako udaljena.*

Sada ćemo se upoznati s pojmom četverokuta i vidjeti što vrijedi za zbroj njegovih kutova. Definicija je općenita, tj. vrijedi u euklidskoj geometriji, a ne posebno u ovom modelu.

Definicija 2.52 *Neka su dane četiri točke A, B, C i D takve da nijedne tri nisu kolinearne i takve da bilo koji par dužina $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}$ i $\overline{DA}$ ili nema zajedničkih točaka ili ima samo jednu zajedničku krajnju točku. Četverokut $ABCD$ se sastoji od spomenute četiri dužine koje zovemo* ***strane*** *četverokuta i od četiri točke koje se zovu* ***vrhovi*** *četverokuta.*



Slika 2.19: Definicija 2.52

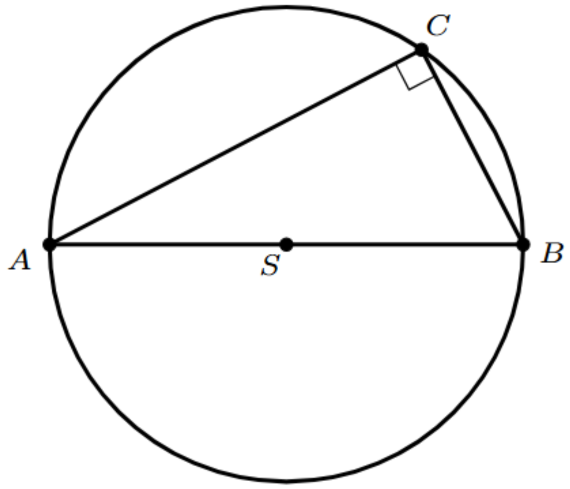
Teorem 2.53 *Suma kutova u svakom četverokutu je 2π.*

Idući teorem govori o tome kolika je suma unutarnjih kutova trokuta u euklidskoj geometriji. Kasnije ćemo vidjeti da to ne vrijedi u hiperboličkoj i eliptičkoj geometriji.

Teorem 2.54 *Suma kutova trokuta iznosi π.*

Sada ćemo navesti Talesov poučak prema kojem je obodni kut nad promjerom kružnice pravi.

Korolar 2.55 *(Talesov poučak o kutu nad promjerom) Ako je* $\overline{AB}$ *promjer kružnice, a* C *bilo koja točka kružnice različita od* A *i* B*, onda je* $\triangle ACB$ *pravokutan trokut s pravim kutom kod točke* C*.*



Slika 2.20: Korolar 2.55

Poglavlje 3

Hiperbolička geometrija

U ovom poglavlju ćemo opisati geometriju koju dobivamo ako zamijenimo Aksiom o paralelama sa jednim novim aksiomom - Aksiomom 3.1. Pogledat ćemo kako to utječe na neke važne rezultate koji govore o svojstvima paralela i trokuta, te međusobnom odnosu dvaju pravaca u ravnini. Na kraju ćemo opisati jedan model hiperboličke geometrije. Sve što ćemo ovdje spomenuti preuzeto je iz ([1], str. 73-119), [2], [8] i [10].

3.1 Uvod

U 2. poglavlju smo spomenuli četiri grupe aksioma koje tvore apsolutnu geometriju. Dodavanjem Petog postulata aksiomima apsolutne geometrije dobili smo euklidsku geometriju. Pogledajmo što ako bi umjesto Petog postulata aksiomima koji čine apsolutnu geometriju dodali aksiom o paralelama koji glasi ovako:

Aksiom 3.1 *(V_H) Točkom van pravca prolaze bar dva pravca koji ne sijeku taj pravac.*

U tom slučaju dobivamo hiperboličku geometriju. Sam aksiom o paralelama navodi da postoje barem dva pravca, ali iz toga slijedi da točkom van danog pravca prolazi beskonačno mnogo njemu paralelnih pravaca, tj. pravaca koji ne sijeku dani pravac. Dakle, promjenom aksioma paralelnosti hiperbolička geometrija se bitno razlikuje od euklidske u kojoj postoji točno jedan takav pravac. Očito je da su sve tvrdnje koje vrijede u apsolutnoj geometriji istinite i u hiperboličkoj geometriji. Međutim, svi rezultati kod kojih se prilikom dokazivanja koristi aksiom (V_H) ne moraju biti istiniti u euklidskoj geometriji. Pokažimo neke važnije rezultate koji to potvrđuju.

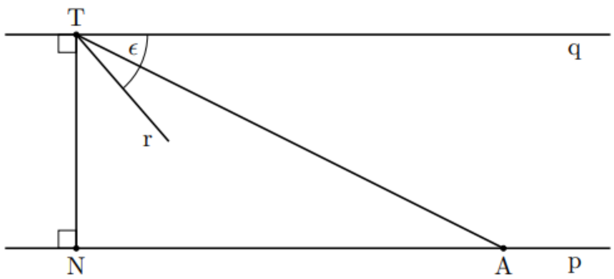
3.2 Suma kutova trokuta

Sve euklidske definicije geometrijskih likova ostaju iste i u hiperboličkoj geometriji, pa tako i definicija trokuta. Međutim, zbog same prirode hiperboličke geometrije neka svojstva su različita u toj geometriji, a upoznat ćemo ih u nastavku.
U apsolutnoj geometriji za sumu $\alpha+\beta+\gamma$ kutova u trokutu vrijedi da je ona manja ili jednaka $2R$, što je istinito i u euklidskoj i u hiperboličkoj geometriji. U euklidskoj geometriji ta nejednakost prelazi u jednakost $\alpha+\beta+\gamma = 2R$. Sljedeći teorem navodi kako je u hiperboličkoj geometriji zbroj kutova trokuta strogo manji od $2R$.

Teorem 3.2 *Suma $s = \alpha+\beta+\gamma$ kutova trokuta manja je od $2R$.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $s = 2R$.
Promotrimo sada pravac p i točku T izvan njega. Spustimo jedinstvenu okomicu iz T na pravac p i nožište označimo sa N. Zatim u točki T dignimo okomicu na pravac TN. Označimo tu okomicu sa q. Pravci p i q se ne sijeku. To smo dokazali u apsolutnoj geometriji.
Neka je sad r proizvoljni pravac kroz T koji je različit od q. Tvrdimo da on

mora sjeći pravac p. Označimo sa $\varepsilon = \angle(q, r)$. Neka je A točka na pravcu p tako da vrijedi $\angle TAN < \varepsilon$ ([1], str.70, Zadatak 35).



Slika 3.1: Teorem 3.2

Trokut $\triangle NTA$ je pravokutan pa je zbog naše pretpostavke $\angle NTA + \angle NAT \equiv R$. Kako je $\angle TAN < \varepsilon$ onda je $\angle NTA > R - \varepsilon$. Nadalje, $\angle(\overrightarrow{TN}, r) = R - \varepsilon$, dakle r je unutar kuta $\angle NTA$ pa pravac r siječe $\overline{NA}$, a onda i p. Vidimo da je q jedini pravac kroz T koji ne siječe p, što je u kontradikciji s Aksiomom (V_H).
Dakle, mora biti $s < 2R$ budući je već rečeno da za sumu kutova trokuta vrijedi $s \leq 2R$, a upravo smo pokazali $s \neq 2R$. ■
Prije nego nastavimo s navođenjem teorema i propozicija koje vrijede u hiperboličkoj geometriji, upoznajmo se s još jednim pojmom koji vrijedi u apsolutnoj geometriji, pa tako i u hiperboličkoj.

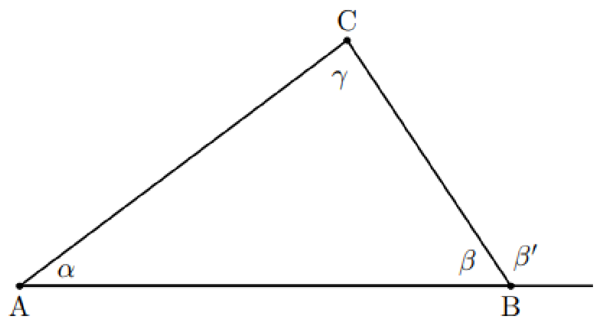
Definicija 3.3 *Vanjski kut trokuta ΔABC pri vrhu A je kut između polupravca AC i polupravca koji je komplementaran polupravcu AB.*

Napomena 3.4 *Ukoliko promatramo vanjski kut trokuta pri vrhu A, njemu nesusjedni unutarnji kutovi su oni pri vrhovima B i C.*

U hiperboličkoj geometriji vrijedi sljedeći rezultat. Možemo naslutiti da on ne važi u euklidskoj geometriji, a to ćemo potvrditi nakon što u nastavku navedemo Propoziciju 3.6.

Teorem 3.5 *Vanjski kut trokuta veći je od sume dvaju nesusjednih unutarnjih kutova.*

Dokaz. Neka je β' vanjski kut trokuta $\triangle ABC$.



Slika 3.2: Teorem 3.5

Tada je $\beta + \beta' = 2R$. Prema Teoremu 3.2 je $\alpha + \beta + \gamma < 2R$ pa je $\alpha + \beta + \gamma < \beta + \beta'$, tj. $\beta' > \alpha + \gamma$. ■

Teorem 3.5 opisuje odnos između mjere[1] vanjskog kuta trokuta i njemu nesusjednih unutarnjih kutova. Analogan rezultat ovom teoremu u euklidskoj geometriji je sljedeća propozicija:

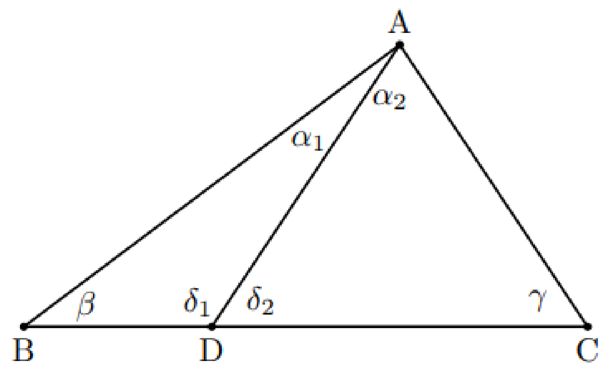
Propozicija 3.6 *Svaki vanjski kut trokuta jednak je zbroju onih unutarnjih kutova trokuta koji s njime nisu susjedni.*

[1]Neka je $\mathcal{K}$ skup svih neorijentiranih kutova. Mjera neorijentiranih kutova je svaka strogo rastuća funkcija $\varphi\colon \mathcal{K} \to \mathbf{R}_0^+$ takva da je $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, kad god je suma $\alpha + \beta$ definirana. Za svaki realni broj $s > 0$ postoji jedinstvena mjera neorijentiranih kutova $\varphi\colon \mathcal{K} \to \mathbf{R}_0^+$ za koju je $\varphi(\omega) = s$ i $\varphi\colon \mathcal{K} \to [0, s]$ je bijekcija. Posebno, ako je $s = 180$, onda je broj $\varphi(\alpha)$ mjera kuta α u stupnjevima, dok se za $s = \pi$ dobiva mjera u radijanima.

Dokaz Propozicije 3.6 je analogan dokazu Teorema 3.5, a razlika među njima je što se umjesto Teorema 3.2 koristi njemu analogan rezultat u euklidskoj geometriji - Teorem 2.54. Iskažimo još jednu važnu tvrdnju koja se odnosi na trokute u hiperboličkoj geometriji i usporedimo je s analognom tvrdnjom u euklidskoj geometriji. Kasnije ćemo reći nešto više o trokutima u odjeljku 3.4.

Teorem 3.7 *Suma kutova trokuta nije ista za sve trokute.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da svi trokuti imaju istu sumu kutova. Promotrimo $\triangle ABC$ i odaberimo bilo koju unutrašnju točku D na stranici $\overline{BC}$. Prema pretpostavci vrijedi $(\alpha_1 + \alpha_2) + \beta + \gamma = \alpha_1 + \beta + \delta_1$. Slijedi $\alpha_2 + \gamma = \delta_1 = 2R - \delta_2$ i dalje $\alpha_2 + \gamma + \delta_2 = 2R$, no to je u kontradikciji s Teoremom 3.2 (primijenjenom na trokut $\triangle ADC$). ■



Slika 3.3: Teorem 3.7

Teorem 3.7 tvrdi da zbroj kutova trokuta nije konstantan za sve trokute u hiperboličkoj geometriji, za razliku od euklidske geometrije gdje vrijedi sljedeći teorem:

Propozicija 3.8 *Zbroj unutarnjih kutova u trokutu jednak je ispruženom kutu, tj. iznosi π radijana.*

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza, a govori o kongruenciji trokuta u hiperboličkoj geometriji. Primijetimo da se pojam kongruencije pojavljuje prije uvođenja Petog postulata, pa njena definicija ostaje ista u svim geometrijama uz drugačije interpretacije. Moguće je da uz postojeće karakteristike zbog same strukture pojedine geometrije u njoj vrijede i dodatna svojstva. Na primjer, u euklidskoj su geometriji dva trokuta slična ako se podudaraju u odgovarajućim kutevima, a kongruentna ako se podudaraju u svim stranicama i odgovarajućim kutovima. Pogledajmo sljedeći rezultat koji vrijedi u hiperboličkoj geometriji:

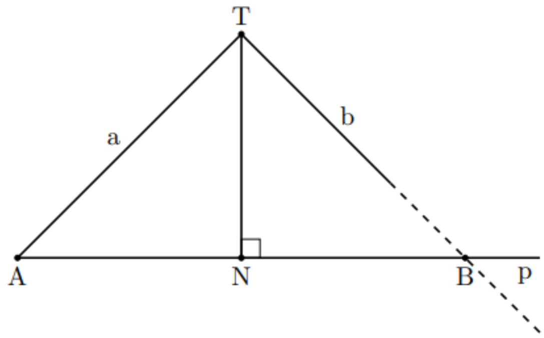
Teorem 3.9 *Dva su trokuta kongruentna ako su im odgovarajući kutovi jednaki.*

Iz ovoga slijedi da u hiperboličkoj geometriji ne postoji pojam sličnih trokuta jer Teorem 3.9 u euklidskoj geometriji zapravo predstavlja uvjet za slične trokute.

3.3 Paralele i razilazni pravci

Definicija paralela u hiperboličkoj geometriji razlikuje se od onog u euklidskoj geometriji. Razlog tomu je to što po Aksiomu (V_H) točkom van danog pravca prolaze barem dva pravca koja ne sijeku zadani pravac. U nastavku slijede četiri teorema koji će nam približiti ovu tematiku.
Sljedeća dva teorema vrijede i u euklidskoj geometriji jer se pri njihovom dokazivanju ne koristi Aksiom (V_H).

Teorem 3.10 *Neka je dana točka T van pravca p i neka je TN okomica iz točke T na pravac p. Ako pravci a i b koji prolaze točkom T zatvaraju kongruentne kutove s okomicom TN, tada pravci a i b istovremeno oba ili sijeku ili ne sijeku pravac p.*



Slika 3.4: Teorem 3.10

Dokaz. Neka je dan pravac p, točka T van njega i označimo sa N nožište okomice iz T na p. Neka su a i b pravci koji prolaze točkom T i neka vrijedi $\angle(a, \overrightarrow{TN}) \equiv \angle(b, \overrightarrow{TN})$.

Neka pravac a siječe p u točki A. Uočimo dužinu $\overline{AN}$. Odredimo točku B tako da vrijedi *(A-N-B)* i $\overline{AN} \equiv \overline{NB}$. Trokuti $\triangle ANT$ i $\triangle TNB$ su kongruentni pa je $\angle ATN \equiv \angle BTN$, tj. $\angle(a, \overrightarrow{TN}) \equiv \angle BTN$ i $\angle(a, \overrightarrow{TN}) \equiv \angle(b, \overrightarrow{TN})$ i zbog jedinstvenosti mora biti $b \equiv TB$, tj. pravac b siječe p.

Pretpostavimo sada da pravac a ne siječe p. Tvrdimo da pravac b ne siječe p. Naime, kad bi pravac b sjekao p onda bi, prema prethodnom, i pravac a sjekao p što je u kontradikciji s našom pretpostavkom. ■

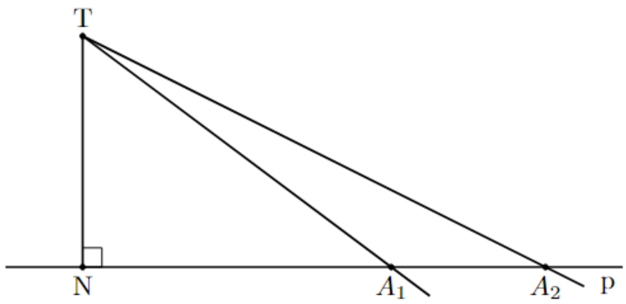
Prethodni teorem vrijedi u euklidskoj, ali također i u eliptičkoj geometriji. Međutim, u eliptičkoj geometriji se ne može dogoditi slučaj da pravci a i b iz Teorema 3.10 ne sijeku pravac p. Naime, kasnije ćemo pokazati da se u toj geometriji svaka dva pravca sijeku, pa je jedino moguće da oba pravca istovremeno sijeku p.

Teorem 3.11 *Ako je TN okomica iz točke T na pravac p i A varijabilna točka*[2] *jednog polupravca od p s početkom u N, onda kut $\angle NTA$ monotono*

[2] Nije fiksno određena točka pravca, već je možemo pomicati duž njega pa kut $\angle NTA$

raste ostajući uvijek šiljasti ukoliko duljina dužine $\overline{NA}$ monotono raste.

Dokaz. Neka je $\overline{NA_1} < \overline{NA_2}$. Tvrdimo da je $\angle NTA_1 < \angle NTA_2$.



Slika 3.5: Teorem 3.11

Kako je $\overline{NA_1} < \overline{NA_2}$ vrijedi *(N-A_1-A_2)* pa je $\overrightarrow{TA_1}$ unutarnji polupravac kuta $\angle NTA_2$, tj. $\angle NTA_1 < \angle NTA_2$. Nadalje, kako je suma kutova u trokutu manja od $2R$ i $\angle N = R$, zaključujemo da je $\angle NTA_2$ šiljasti kut. ■

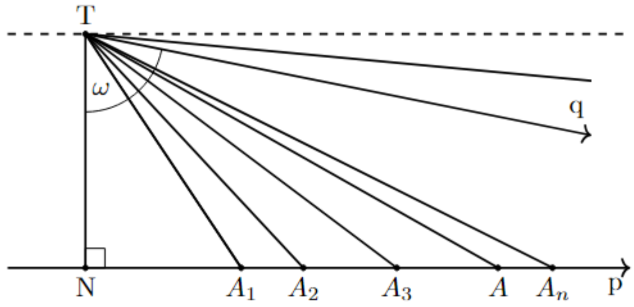
Teorem 3.12 *Ako udaljenost nožišta N okomice TN iz T na pravac p od sjecišta A pravca p s varijabilnim pravcem a kroz T neograničeno raste, tada kut $\angle(\overrightarrow{TN}, a)$ konvergira određenom kutu ω koji je manji od R. Svaki pravac a koji prolazi kroz T i s polupravcem $\overrightarrow{TN}$ tvori kut $\varphi < \omega$ siječe p, a svaki pravac b kroz T koji s polupravcem $\overrightarrow{TN}$ tvori kut $\varphi \geq \omega, \varphi \leq R$ ne siječe p.*

Dokaz. Promotrimo polupravce s početkom u točki T koji sijeku pravac p. Neka su to polupravci $a_1, ..., a_n, ...$, sjecišta tih polupravaca s pravcem p označimo sa $A_1, A_2, ..., A_n, ...$, i neka udaljenosti od A_i do N neograničeno rastu. Označimo sa $\varphi_n = \angle NTA_n, n \in \mathbb{N}$. Prema Teoremu 3.11, kutovi φ_n monotono rastu, tj. $\varphi_n \leq \varphi_{n+1}$ i vrijedi $\varphi_n < R$ za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, (φ_n) je monotono rastući i odozgo omeđeni niz pa postoji $\lim_{n\to\infty} \varphi_n = \omega$ i

ovisi o položaju točke A.

$\omega \leq R$.

Neka je q pravac za koji je $\angle(\overrightarrow{TN}, q) = \omega$. Neka je a pravac kroz T sa svojstvom da je $\angle(\overrightarrow{TN}, a) = \varphi < \omega$.



Slika 3.6: Teorem 3.12

(1) Pravac a siječe p.

Kako je $\omega = \lim_{n\to\infty} \varphi_n$, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varphi < \varphi_n < \omega$, čim je $n \geq n_0$. Dakle, za gotovo sve $n \in \mathbb{N}$ je $\angle(\overrightarrow{TN}, a) = \varphi < \varphi_n$, tj. a je unutarnja zraka kuta $\varphi_n, n \geq n_0$. Kako je $\varphi_n = \angle NTA_n$, tj. a je unutarnji polupravac kuta $\angle NTA_n$, mora a sjeći $\overline{NA_n}$, dakle postoji točka A na pravcu a i *(N-A-A_n)* ([1], str. 45, Teorem 2.2.17).

(2) Pravac q ne siječe p.

Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji zajednička točka Q pravaca p i q. Kako dužina $\overline{NA_n}, n \in \mathbb{N}$, stalno raste, mora postojati $n \in \mathbb{N}$ tako da vrijedi $\overline{NQ} < \overline{NA_n}$. No, to bi povlačilo da je $\angle NTQ < \angle NTA_n$, tj. $\omega < \varphi_n$ - što je u kontradikciji s činjenicom da je $\varphi_n < \omega$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(3) Proizvoljni pravac b koji prolazi točkom T i za koji vrijedi $\angle(\overrightarrow{TN}, b) = \varphi$ i $\omega \leq \varphi \leq R$ ne siječe p.

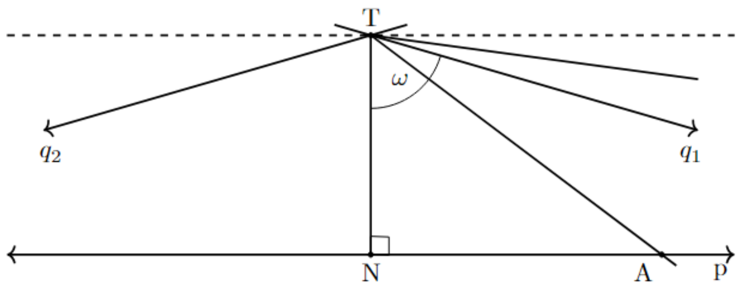
Kada bi pravac b sjekao p onda bi pogotovo pravac q morao sjeći p, što je u kontradikciji s prethodno dokazanom tvrdnjom.

(4) Preostaje dokazati da je $\omega < R$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $\omega = R$. Tada bi svaki pravac a sa svojstvom $\angle(\overrightarrow{TN}, a) < \omega$ sjekao pravac p pa bi q bio jedini pravac koji ne siječe p što je u kontradikciji a Aksiomom (V_H) koji kaže da postoje barem dva različita takva pravca. ∎

Teorem 3.11 i Teorem 3.12 vrijede i u euklidskoj geometriji. Posljedica prethodna dva teorema je da vrijedi sljedeći teorem.

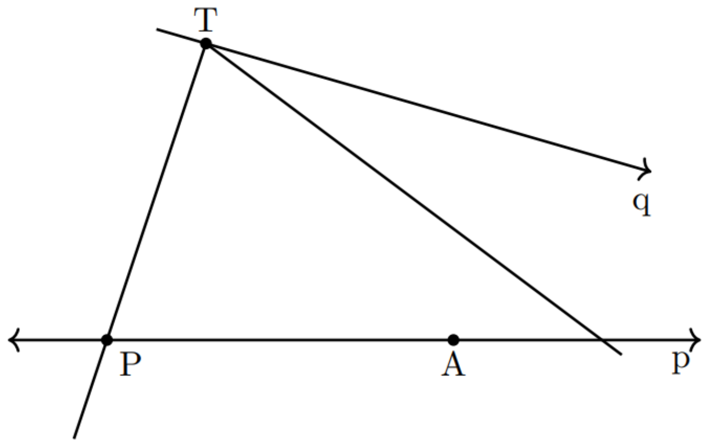
Teorem 3.13 *Neka je T bilo koja točka koja nije na pravcu p. Tada postoje točno dva pravca q_1 i q_2 točkom T, simetrična[3] obzirom na okomicu iz T na p, koji ne sijeku pravac p i imaju svojstvo da svaki pravac koji prolazi točkom T unutar onog kuta $\angle(q_1, q_2)$ u kojem je okomica iz T na p, siječe pravac p, a svi ostali pravci točkom T ne sijeku pravac p.*



Slika 3.7: Teorem 3.13

Definicija 3.14 *Neka je p bilo koji pravac i T bilo koja točka izvan njega te P i A bilo koje točke pravca p. Tada ćemo pravac q koji prolazi točkom T zvati* ***paralelom s pravcem** p **kroz točku** T **u smjeru od** P **prema** A, i pisati $q \underset{\overrightarrow{PA}}{\overset{T}{\|}} p$, ako pravac q ne siječe p i ako svaki polupravac unutar kuta $\angle(\overrightarrow{TP}, q)$ u kojem leži točka A siječe pravac p.*

[3]Za informacije o osnoj simetriji s obzirom na pravac pogledati Aksiom 3.50

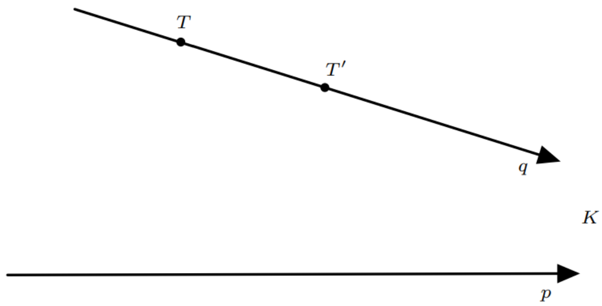


Slika 3.8: Definicija 3.14

U euklidskoj geometriji se za paralelne pravce kaže da oni imaju beskonačno daleku zajedničku točku. Analogno tome, u hiperboličkoj geometriji postoje dvije zajedničke točke u beskonačnosti, dva kraja, pa je smisleno pisati $q \underset{K}{\overset{T}{\|}} p$, što je oznaka za paralelu q sa p kroz T prema kraju K.

Pogledajmo o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 3.15 *Ako je $q \underset{K}{\overset{T}{\|}} p$ i $T' \neq T$ proizvoljna točka pravca q različita od T, onda je i $q \underset{K}{\overset{T'}{\|}} p$.*



Slika 3.9: Teorem 3.15

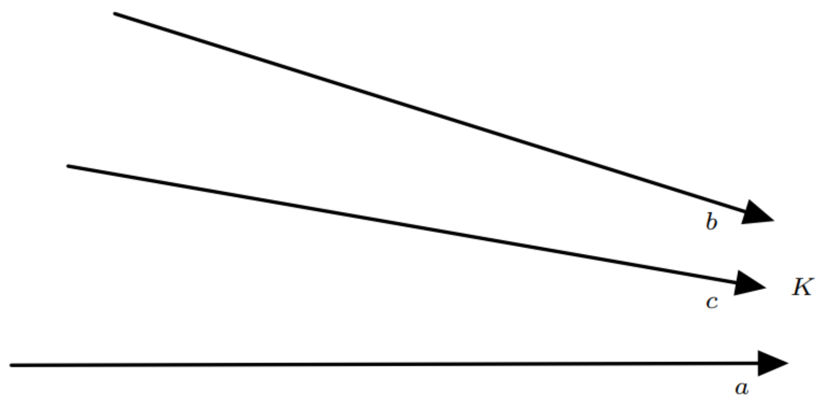
Iz prethodnog teorema slijedi da se uloga točke T može zanemariti pa se zbog toga može koristiti nova oznaka: $q \underset{K}{\|} p$.
Prethodni, kao i sljedeća tri teorema navodimo bez dokaza, a pokazuju da je relacija "biti paralelan" simetrična i tranzitivna. Zainteresirani ih mogu pronaći u ([1], str. 80-85).
Sad slijede dva teorema, za simetričnost i tranzitivnost.

Teorem 3.16 *Ako je $q \underset{K}{\|} p$, onda je i $p \underset{K}{\|} q$.*

Teorem 3.17 *Ako je $a \underset{K}{\|} c$ i $b \underset{K}{\|} c$ onda je i $a \underset{K}{\|} b$.*

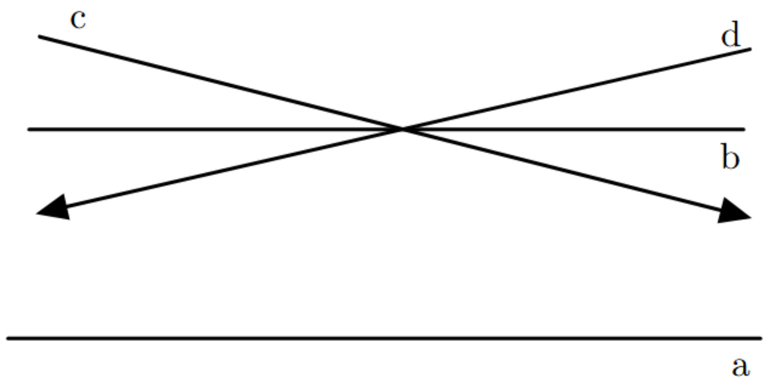
Napomena 3.18 *Budući se refleksivnost podrazumijeva, iz prethodnih teorema slijedi da je "biti paralelan" relacija ekvivalencije i u hiperboličkoj geometriji (kao i u euklidskoj) među pravcima.*

Teorem 3.19 *Ako je $a \underset{K}{\|} b$ te pravci a i b leže sa suprotnih strana pravca c, onda je $c \underset{K}{\|} a$ i $c \underset{K}{\|} b$.*



Slika 3.10: Teorem 3.19

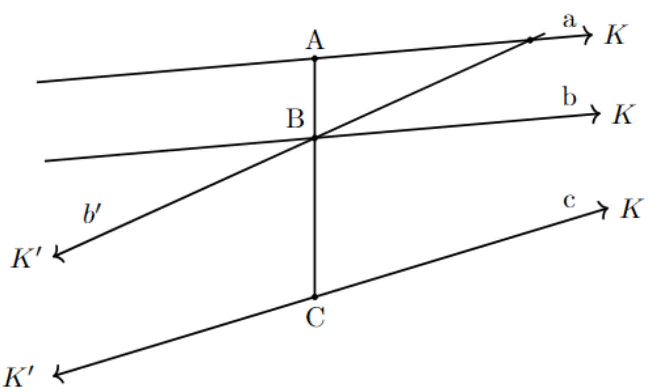
Definicija 3.20 *Za dva pravca u istoj ravnini koji se ne sijeku i nisu paralelni kažemo da su **razilazni**.*



Slika 3.11: Definicija 3.20 - Pravac a je paralelan s pravcima c i d, a razilazan s pravcem b

Za razilazne pravce a i b koristi se oznaka $a)(b$.

Napomena 3.21 *U hiperboličkoj geometriji postoji pravac koji siječe dvije paralele, ali treću paralelu ne siječe.*

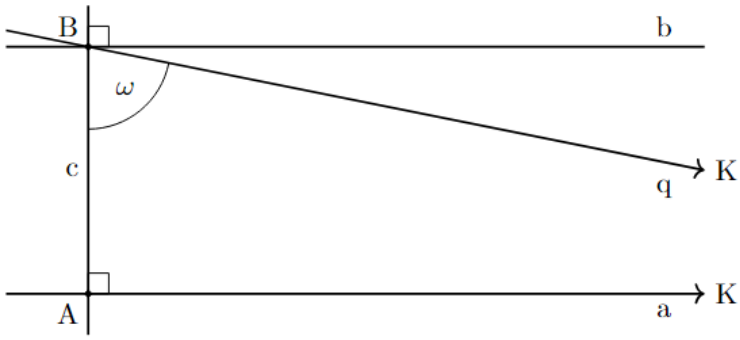


Slika 3.12: Napomena 3.21

Razmotrimo malo takvu konstrukciju. Neka je $a \underset{K}{\|} b$ i $b \underset{K}{\|} c$. Odaberimo proizvoljne točke $A \in a$ i $C \in c$. Budući su A i C sa suprotnih strana pravca b to postoji točka $B \in b$ u kojoj b siječe $\overline{AC}$. Točkom B povucimo paralelu $b' \underset{K'}{\|} c$. Paralela b' siječe pravce b i a, a ne siječe pravac c.

Teorem 3.22 *Neka su a, b i c pravci. Ako su a i b okomiti na pravac c onda su oni razilazni.*

Dokaz. Povucimo točkom B paralelu q s pravcem a, $q \underset{K}{\|} a$. Neka je $\omega = \angle ABK$.



Slika 3.13: Teorem 3.22

Vrijedi $\omega < R$, jer po Teoremu 3.11 imamo da se pravci a i b ne sijeku. Osim toga, b nije paralelan sa a. Dakle, a i b su razilazni pravci. ■

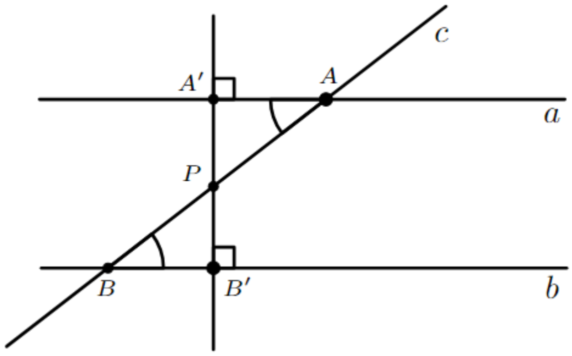
Prethodni teorem vrijedi u hiperboličkoj geometriji. Njegov analogon u euklidskoj geometriji je sljedeći rezultat.

Teorem 3.23 *Ako su dva pravca okomita na treći pravac, onda se ta dva pravca ne sijeku.*

Dakle, Teorem 3.23 nam govori o tome kada možemo zaključiti da su dva pravca u euklidskoj geometriji paralelna.

Teorem 3.24 *Ako pravac c siječe pravce a i b i tvori s njima kongruentne izmjenične kutove, onda su pravci a i b razilazni.*

Prethodni rezultat, Teorem 3.24 vrijedi u hiperboličkoj geometriji, a njemu analogna tvrdnja u euklidskoj geometriji je sljedeća propozicija.



Slika 3.14: Teorem 3.24

Propozicija 3.25 *Ako pravac c siječe druga dva pravca a i b i tvori s njima jednake unutarnje izmjenične kutove onda su pravci a i b paralelni.*

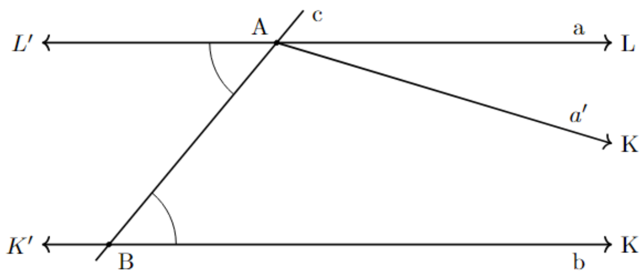
Neka su sada a i b pravci sa svojstvom da ih pravac c siječe u točkama A i B i tvori jednake izmjenične kutove. Povucimo točkom A paralelu a' s b prema kraju K. Po pretpostavci je $\angle ABK \equiv \angle BAL'$. Kako je $\angle BAL' + \angle BAL = 2R$, vrijedi $\angle ABK + \angle BAL = 2R$. Nadalje, iz $a)(b$ imamo da je $\angle BAL > \angle BAK$. Dakle, vrijedi $\angle BAK + \angle ABK < 2R$. Dobili smo: ako je $a' \underset{K}{\|} b$, onda vrijedi $\angle BAK + \angle ABK < 2R$. Time je dokazana tvrdnja koja je negacija Petog Euklidovog postulata.

Pogledajmo kako glasi negacija originalne izreke Petog postulata (P-5):

Neka dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta. Tada se dvije dužine, neograničeno produžene, ne sastaju s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Dakle, u gornjem primjeru imamo pravac c koji siječe paralelne pravce a' i b i čini unutarnje kutove s iste strane manjima od $2R$. Također znamo da se pravci a' i b ne sastaju s te strane, jer su oni paralelni.

Teorem 3.26 *Pravac c koji siječe dva paralelna pravca a i b u točkama A i B tvori sa njima unutrašnje kutove čiji je zbroj manji od 2R.*



Slika 3.15: Teorem 3.26

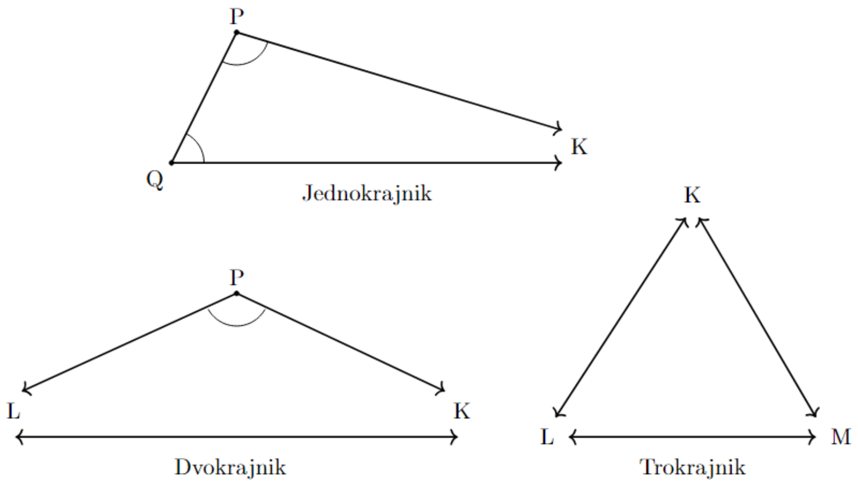
3.4 Asimptotski trokuti

Definicija 3.27 *Figuru koju čine dvije točke P i Q, njihova spojnica $\overline{PQ}$ i polupravci $\overrightarrow{PK}$ i $\overrightarrow{QK}$ paralelni prema kraju K zovemo* ***jednokrajnikom****. Figuru koju čine točke P, dva kraja K i L, pravac KL i polupravci $\overrightarrow{PK}$ i $\overrightarrow{PL}$ paralelni s pravcem KL prema njihovim krajevima K i L, nazivamo* ***dvokrajnikom****. Figuru koju čine tri kraja K, L i M te tri pravca KL, KM i LM paralelna u parovima prema krajevima K, L i M, ali ne sva tri paralelna prema istom kraju, nazivamo* ***trokrajnikom****.*

Jednokrajniku PQK točke P i Q su konačni vrhovi, K kraj ili beskonačni vrh, $\overline{PQ}$ konačna stranica, a $\angle KPQ$ i $\angle KQP$ kutovi jednokrajnika. Dvokrajniku PKL točka P je konačni vrh, K i L su beskonačni vrhovi, a $\angle KPL$ kut dvokrajnika. Trokrajnik KLM nema kutova, ima tri beskonačna vrha i tri beskonačne stranice. Jednokrajnici, dvokrajnici i trokrajnici se kraće nazivaju **asimptotskim trokutima**.

Teorem 3.29 koji slijedi u nastavku je analogan sljedećoj propoziciji koja vrijedi u euklidskoj geometriji:

Propozicija 3.28 *Ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom tog trokuta, onda on siječe točno još jednu stranicu toga tro-*



Slika 3.16: Definicija 3.27

kuta.

Propozicija 3.28 slijedi iz prvih dviju grupa aksioma, tj. iz Paschovog aksioma iz čega je jasno da se za nju ne koristi Peti postulat.

Teorem 3.29 *Ako pravac a ne prolazi niti jednim vrhom asimptotskog trokuta, a siječe jednu njegovu stranicu, onda a siječe još točno jednu stranicu tog trokuta.*

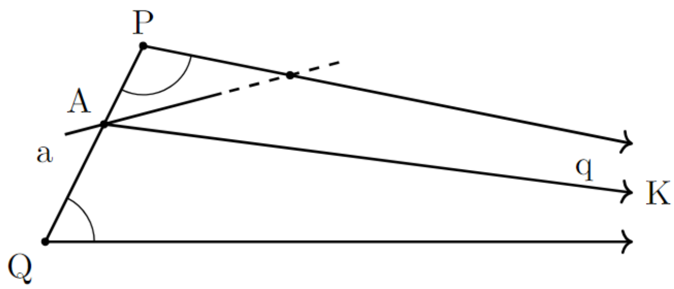
Dokaz. Dajemo dokaz samo za jednokrajnik. Neka su dani jednokrajnik PQK i pravac a. Razlikujemo dva slučaja:

(A) Pravac a siječe konačnu stranicu, tj. neka a siječe stranicu $\overline{PQ}$ u točki A, tj. neka vrijedi *(P-A-Q)*.

(1) Povucimo točkom A paralelu q sa pravcem QK prema kraju K.

Tada pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle QAK$ ili pak nutrinom kuta $\angle PAK$. Primijetimo da je $a \neq q$, jer bi u tom slučaju a prolazio vrhom K.

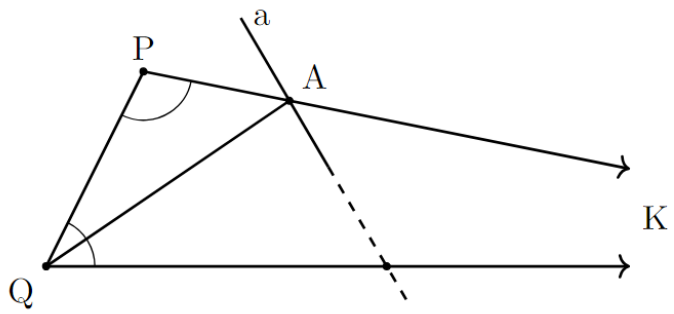
(2) Ako pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle PAK$, onda zbog $q \underset{K}{\|} PK$ on siječe polupravac $\overrightarrow{PK}$.



Slika 3.17: Teorem 3.29 - (A)

(3) Ako pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle QAK$, onda zbog $q \underset{K}{\|} QK$ on siječe polupravac $\overrightarrow{QK}$.

(B) Pravac a siječe beskonačnu stranicu $\overrightarrow{PK}$ u točki A.



Slika 3.18: Teorem 3.29 - (B)

(1) Spojimo A sa Q. Tada pravac a ili prolazi nutrinom kuta $\angle PAQ$ ili nutrinom kuta $\angle QAK$. Ne može biti na spojnici $\overline{AQ}$, jer bi u tom slučaju pravac a prolazio vrhom Q.

(2) Ako pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle PAQ$, onda on siječe $\overline{PQ}$ (Po Teoremu 2.2.17, [1]).

(3) Ako pravac a prolazi nutrinom kuta $\angle QAK$, onda zbog $PK \underset{K}{\|} QK$ siječe $\overrightarrow{QK}$. ■

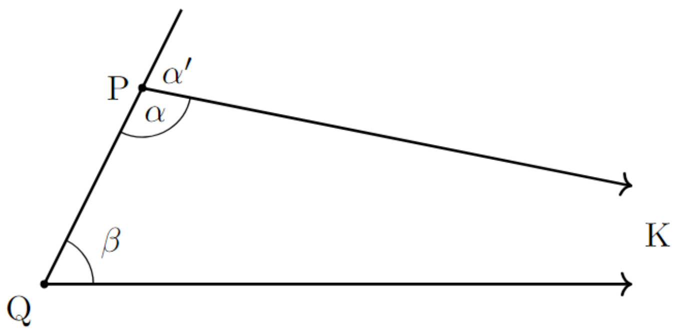
Prema Paschovom aksiomu, ako pravac siječe jednu stranicu trokuta i ne prolazi niti jednim vrhom na toj stranici, onda taj pravac siječe barem još jednu stranicu tog trokuta. Teorem 3.29 je "jača" tvrdnja u odnosu na njega i govori o točnom broju stranica asimptotskog trokuta koje pravac siječe ukoliko ne prolazi niti jednim vrhom tog trokuta.

Teorem 3.29 možemo shvatiti kao poopćenje Propozicije 3.28 zbog toga što su asimptotski trokuti u hiperboličkoj geometriji poopćenje trokuta iz euklidske geometrije.

Sljedeći teorem govori o odnosu vanjskog i nesusjednog unutrašnjeg kuta jednokrajnika u hiperboličkoj geometriji.

Teorem 3.30 *Vanjski kut jednokrajnika veći je od nesusjednog unutrašnjeg kuta.*

Dokaz. Prema Teoremu 3.26 je $\alpha + \beta < 2R$.



Slika 3.19: Teorem 3.30

No, s druge strane je $\alpha + \alpha' = 2R$, tj. $\alpha + \beta < \alpha + \alpha'$. Slijedi $\beta < \alpha'$, što je i trebalo dokazati. ∎

Za razliku od prethodnog rezultata, u euklidskoj geometriji imamo tvrdnju koja opisuje odnos vanjskog kuta trokuta i nesusjednih unutrašnjih kutova.

Propozicija 3.31 *Svaki vanjski kut trokuta jednak je zbroju onih unutarnjih kutova trokuta koji s njime nisu susjedni.*

Definicija 3.32 *Za dva jednokrajnika kažemo da su* ***kongruentni*** *ako su im kongruentne konačne stranice te ako su im odgovarajući kutovi kongruentni.*

U sljedećem teoremu ćemo vidjeti kada su trokuti u euklidskoj geometriji kongruentni, odnosno sukladni.

Teorem 3.33 *(Poučak K-S-K) Dva su trokuta kongruentna ako i samo ako se podudaraju u jednoj stranici i dva kuta uz tu stranicu.*

U nastavku ćemo navesti iskaz teorema koji govori o tome kad su dva jednokrajnika kongruentna. Dokaz tog teorema može se pronaći u [[1], str.88, Teorem 3.3.5]

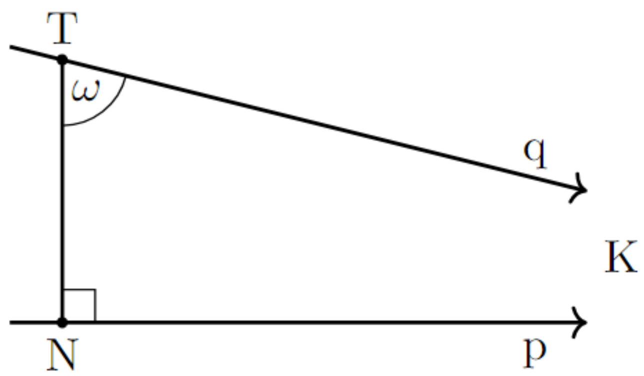
Teorem 3.34 *Vrijedi:*
(a) Dva su jednokrajnika kongruentna ako su im kongruentne konačne stranice i jedan kut.
(b) Dva su jednokrajnika kongruentna ako su im kongruentni kutovi.

Analogon Teoremu 3.34 (b) u euklidskoj geometriji bio bi rezultat kojeg smo već naveli u odjeljku 3.3, a riječ je o Teoremu 3.9.

3.5 Funkcija Lobačevskog

Sada ćemo se upoznati s novim pojmom, a radi se o funkciji Lobačevskog. O njoj ćemo raspravljati samo u ovom poglavlju jer ona nije definirana u ostalim geometrijama.
Neka je dan pravac p i točka T van njega. Budući da kroz točku T prolazi

beskonačno mnogo paralela s p prema kraju K, u nastavku ćemo podrazumijevati da promatramo onu paralelu q za koji je pripadni kut $\angle NTK$ najmanji. Označimo sa N nožište jedinstvene okomice iz točke T na p.



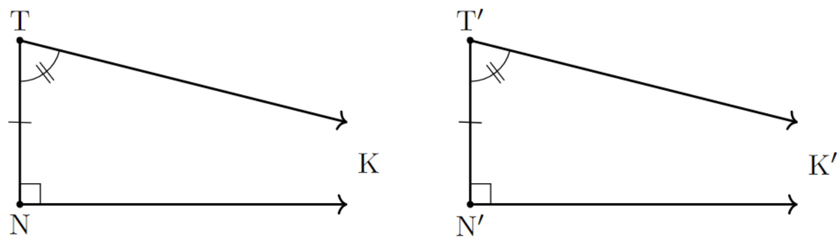
Slika 3.20: Definicija 3.35

Definicija 3.35 *Kut $\angle NTK$ naziva se **kutom paralelnosti dužine** $\overline{TN}$, a dužina $\overline{TN}$ **distancom paralelnosti kuta** $\angle NTK$.*

Teorem 3.36 *Neka je dan pravac p, točka T van njega i pravac q paralelan s p koji prolazi točkom T prema kraju K. Neka je N nožište okomice iz točke T na pravac p. Također, neka su dani pravac p', točka T' van njega i pravac q' paralelan s p' koji prolazi točkom T' prema kraju K'. Neka je N' nožište okomice iz točke T' na pravac p'. Ako je $\overline{TN} \equiv \overline{T'N'}$, onda je $\angle NTK \equiv \angle N'T'K'$, tj. kongruentnim dužinama odgovaraju kongruentni kutovi paralelnosti.*

Dokaz. Neka su TNK i $T'N'K'$ jednokrajnici kojima je $\angle N \equiv \angle N' \equiv R$ i $\overline{TN} \equiv \overline{T'N'}$.

Po Teoremu 3.34 (a) jednokrajnici TNK i $T'N'K'$ su kongruentni što znači da je $\angle NTK \equiv \angle N'T'K'$, tj. i kutovi paralelnosti su kongruentni. ■



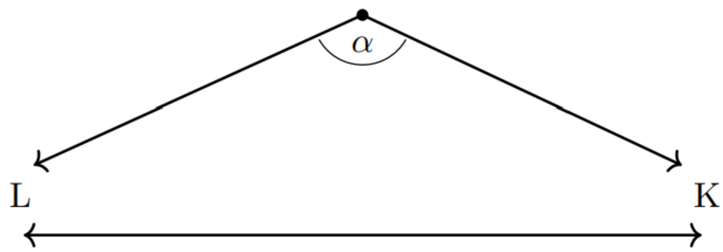
Slika 3.21: Teorem 3.36

Iz prethodnog teorema zaključujemo kako je za danu dužinu $\overline{TN}$ jednoznačno određen pripadni kut paralelnosti kojeg ćemo označiti sa $\omega \equiv \pi(\overline{TN})$. Funkciju $\pi\colon \mathbb{R}^+ \to \langle 0, R\rangle$ nazivamo **funkcijom Lobačevskog**. Sljedeća četiri teorema navodimo bez dokaza, a pomoći će nam da bolje upoznamo svojstva funkcije Lobačevskog.

Teorem 3.37 *Funkcija Lobačevskog je bijekcija.*

Teorem 3.38 *Funkcija Lobačevskog $\pi : \mathbb{R}^+ \to \langle 0, R\rangle$ je monotono padajuća, neprekidna funkcija za koju vrijedi $\lim\limits_{\overline{TN}\to\infty} \pi(\overline{TN}) = 0$ i $\lim\limits_{\overline{TN}\to 0} \pi(\overline{TN}) = R$.*

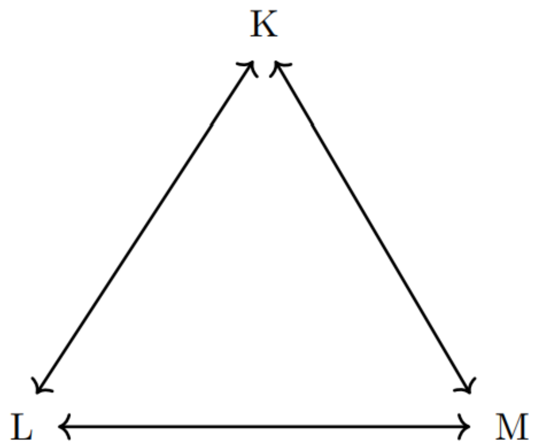
Teorem 3.39 *Za svaki kut $\alpha < 2R$ postoji jednoznačno određen pravac koji je paralelan s krakovima tog kuta prema njihovim krajevima, tj. postoji dvokrajnik.*



Slika 3.22: Teorem 3.39

Neposredna posljedica prethodnog teorema je sljedeći rezultat:

Teorem 3.40 *Postoji trokrajnik.*



Slika 3.23: Teorem 3.40

Sada možemo uočiti zašto u drugim geometrijama koje ovdje spominjemo nema funkcije koja bi bila analogna funkciji Lobačevskog. Naime, u eliptičkoj geometriji paralelni pravci ne postoje pa se takva funkcija ne bi niti mogla definirati. S druge strane, u euklidskoj geometriji je kut paralelnosti jednak R neovisno o duljini okomice $\overline{TN}$, pa bi takva funkcija bila konstanta, tj. vrijedilo bi $\pi(\overline{TN}) = R$, bez obzira na udaljenost točaka T i N.

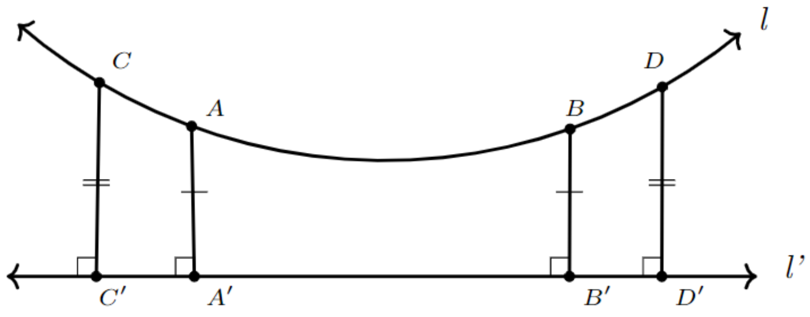
3.6 Međusobni odnosi dvaju pravaca u ravnini

U 1. i 2. poglavlju smo pomoću navedenih rezultata mogli naučiti nešto o međusobnom odnosu dvaju pravaca u apsolutnoj, pa tako i u euklidskoj geometriji. U ovom odlomku ćemo navesti nekoliko tvrdnji koje opisuju međusoban odnos dvaju pravaca u ravnini u hiperboličkoj geometriji. Navodimo ih bez dokaza, a zainteresirani ih mogu pronaći u [1, str. 104-109], [2],

[3]. Prvo ćemo navesti teorem koji govori o broju parova točaka takvih da točke iz jednog para leže na dva različita pravca i jednako su udaljene.

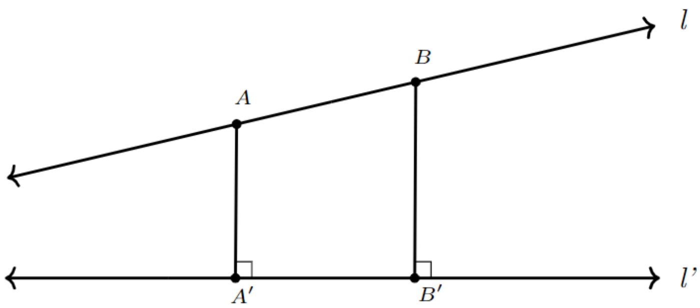
Teorem 3.41 *Ako su l i l' dva različita paralelna pravca u hiperboličkoj geometriji, onda bilo koji skup točaka na pravcu l koje su jednako udaljene od pravca l' sadrži najviše dvije točke.*

Teorem 3.41 tvrdi da su najviše dvije točke na pravcu l jednako udaljene od pravca l'. Slika 3.24 prikazuje slučaj kada postoje dvije takve točke, dok je



Slika 3.24: Dva para točaka koje su jednako udaljene

na Slici 3.25 prikazana situacija kada ne postoji niti jedan takav par točaka. Teorem 3.41 je analogan Teoremu 2.51 iz euklidske geometrije kojeg smo

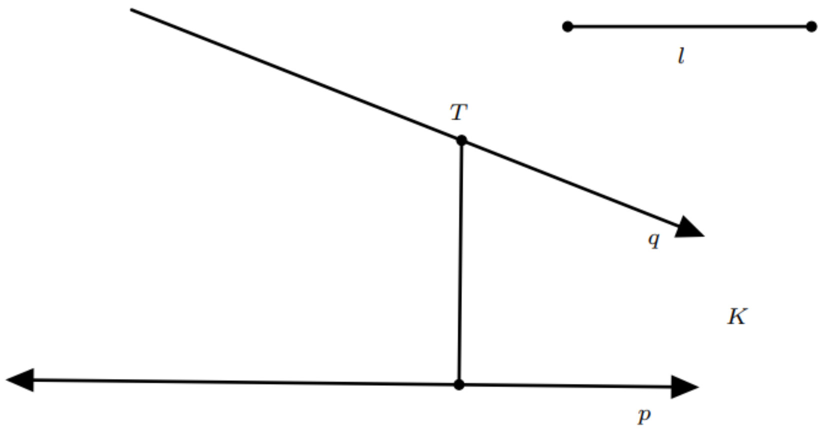


Slika 3.25: Ne postoji niti jedan par točaka koje su jednako udaljene

naveli u 2. poglavlju.

Teorem 3.42 *Udaljenost točaka jedne od dviju paralela monotono opada u smjeru zajedničkog kraja.*

Teorem 3.43 *Ako je* $p \underset{K}{\|} q$ *i* $l > 0$ *dana dužina, tada na pravcu* q *postoji jedinstvena točka* T *koja je od pravca* p *udaljena za* l.

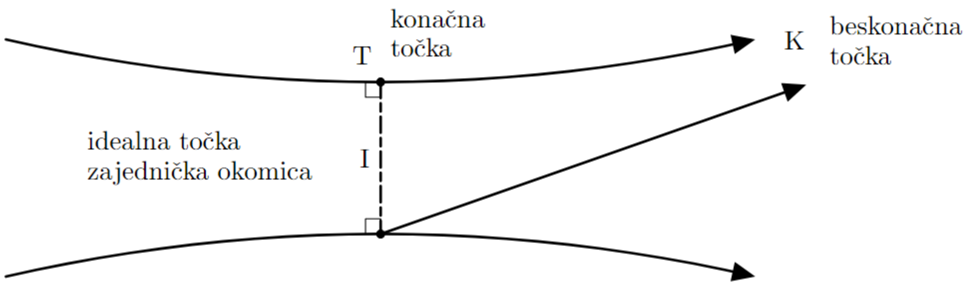


Slika 3.26: Teorem 3.43

Teorem 3.44 *Ako su* A, B *i* C *tri točke jednog pravca, a* P *točka van tog pravca, tada polovišta dužina* $\overline{PA}, \overline{PB}$ *i* $\overline{PC}$ *nisu kolinearne točke.*

U hiperboličkoj geometriji razlikujemo tri vrste točaka. Točke koje su sjecišta pravaca zovu se "konačne točke" i označujemo ih sa T. Krajevi paralelnih pravaca su "beskonačne točke" i njihova oznaka je K. Posljednje su "idealne točke" čiji je predstavnik zajednička okomica dvaju razilaznih pravaca, a takve točke označavamo sa I.
Kao što smo već spomenuli u odlomku 3.4, postoje tri "poopćenja" trokuta:

- jednokrajnik (TTK)



Slika 3.27: "Točke" u hiperboličkoj geometriji

- dvokrajnik (TKK)
- trokrajnik (KKK)

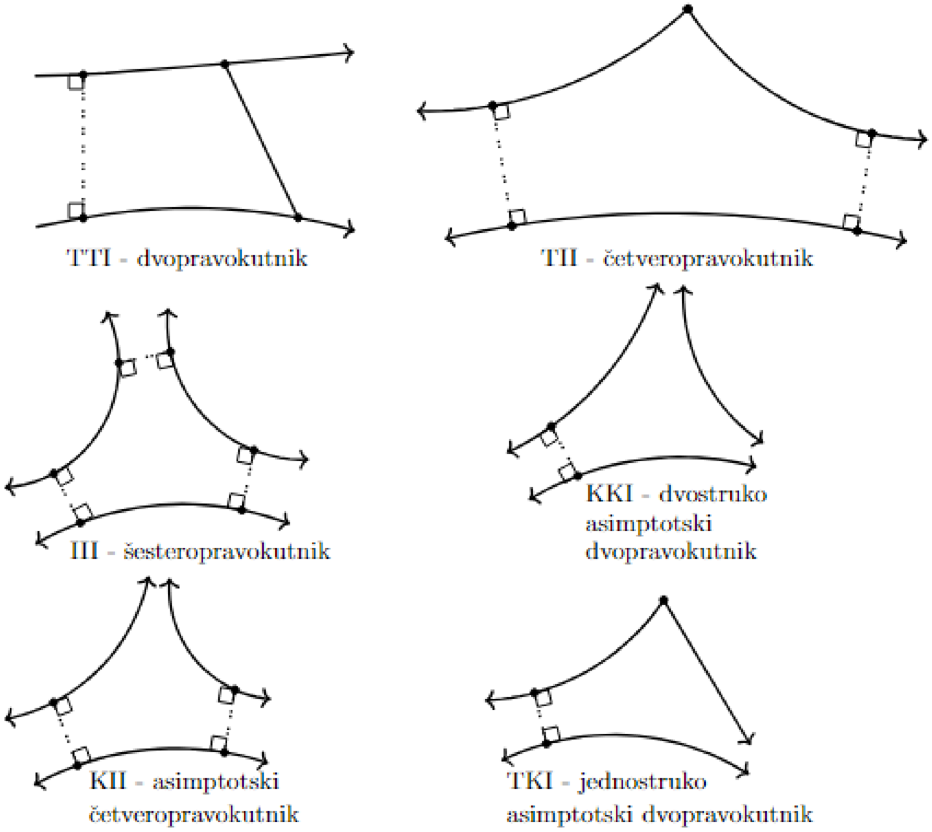
i prema tome možemo imati sljedeća "poopćenja" pravokutnika (Slika 3.28):

- TTI - dvopravokutnik
- TII - četveropravokutnik
- III - šesteropravokutnik
- KKI - dvostruko asimptotski dvopravokutnik
- KII - asimptotski četveropravokutnik
- TKI - jednostruko asimptotski dvopravokutnik

Za sumu kutova četverokuta ovdje vrijedi sljedeći teorem.

Teorem 3.45 *Suma kutova četverokuta manja je od četiri prava kuta.*

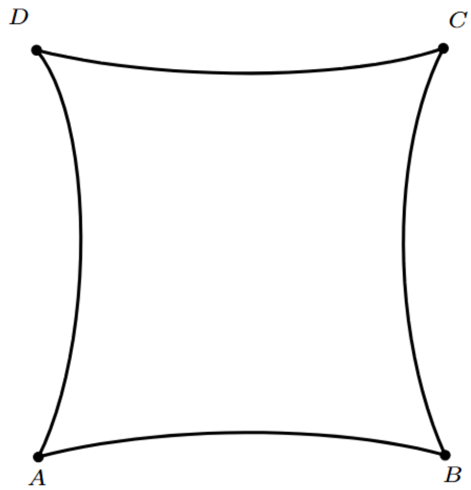
Dakle, promatrajući Teorem 3.45 i Teorem 2.53 vidimo da rezultat koji vrijedi u hiperboličkoj geometriji ne vrijedi u euklidskoj, što je posljedica promjene Petog postulata.



Slika 3.28: "Poopćenja" u hiperboličkoj geometriji

U hiperboličkoj geometriji nemamo definiciju kvadrata, ali postoji **pseudokvadrat**. Taj pojam predstavlja četverokut kojem su stranice kongruentne, a svi kutovi su mu šiljasti. Nadalje, u hiperboličkoj geometriji ne vrijedi ni Poučak o obodnom i središnjem kutu iz euklidske geometrije. To implicira da ne vrijedi ni Talesov poučak, odnosno Korolar 2.55 prema kojem je obodni kut nad promjerom kružnice pravi. Umjesto njega, u hiperboličkoj geometriji vrijedi njegov analogon:

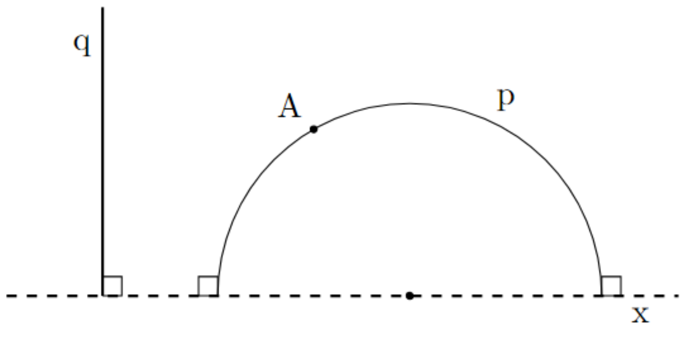
Teorem 3.46 *Obodni kut nad promjerom kružnice je šiljasti.*



Slika 3.29: Pseudokvadrat

3.7 Poincareov model hiperboličke geometrije

Sada ćemo reći nešto o **Poincareovom** modelu hiperboličke geometrije - geometrije ravnine, jednom od najvažnijih poznatih modela. U njemu za osnovne objekte - točke i pravce uzimamo sljedeće:

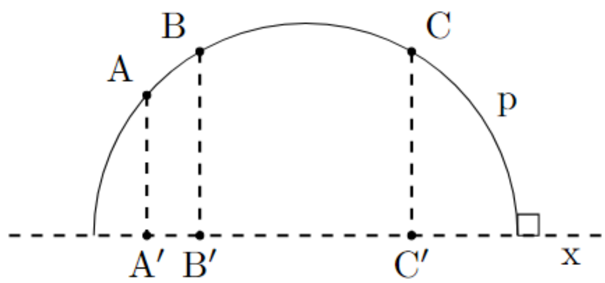


Slika 3.30: Točke i pravci

- **točke** su sve točke jedne euklidske poluravnine, ne uključujući rub. Rub je granični pravac, označavat ćemo ga sa x

- sve polukružnice u toj poluravnini okomite[4] na granični pravac smatramo **pravcima**, kao i sve polupravce te poluravnine koji su okomiti na njezin granični pravac. Polukružnice i polupravce ćemo kraće nazivati *h-pravci*

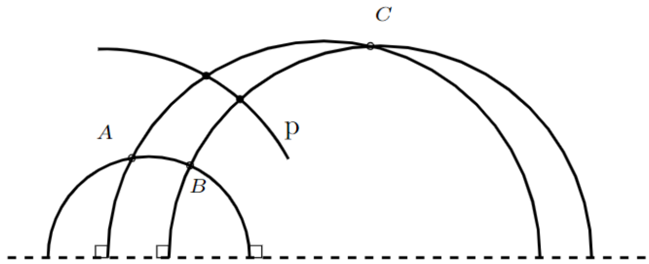
Incidencija se interpretira kao i u euklidskoj geometriji: $A \in p$ ako točka A leži na polukružnici (polupravcu) p. Pritom su svi planimetrijski aksiomi incidencije ispunjeni.



Slika 3.31: Relacija poretka

Također je i druga grupa aksioma, aksiomi poretka, ispunjena ako poredak definiramo na način: na h-pravcu p vrijedi **poredak** (A-B-C) ako vrijedi (A'-B'-C'), gdje su A', B' i C' ortogonalne projekcije točaka A, B i C na granični pravac x. Ukoliko se točke A, B i C nalaze na h-pravcu p onda je (A-B-C) poredak u euklidskom smislu. Na Slici 3.32 je prikazana interpretacija Paschovog aksioma u ovom modelu hiperboličke geometrije. Tu imamo trokut određen vrhovima A, B i C, dok je polukružnica p pravac koji siječe stranicu $\overline{BC}$, ne prolazi niti jednim vrhom na toj stranici (B ili C) i siječe još stranicu $\overline{AC}$.

[4]Polukružnica je okomita na granični pravac x ako njeno središte leži na x



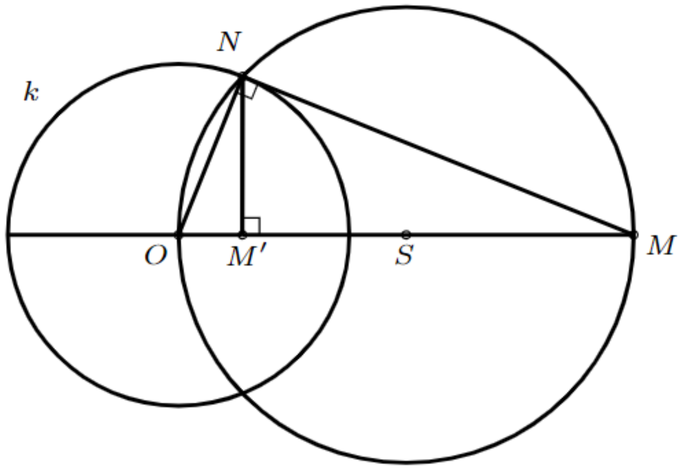
Slika 3.32: Paschov aksiom

Dedekindov aksiom 2.5 očito vrijedi za h-dužinu[5] iz razloga što h-dužine imaju svojstva neprekidnosti analogna onima u euklidskoj geometriji.
Kako bi interpretirali aksiome kongruencije, trebamo uvesti novo preslikavanje - inverziju u odnosu na kružnicu. Duljinu dužine $\overline{AB}$ označavat ćemo sa $|AB|$.

Definicija 3.47 *Neka je α euklidska ravnina i $k(O,r) \subset \alpha$ kružnica. Preslikavanje f koje svakoj točki M ravnine, različitoj od O, pridružuje točku $f(M) = M'$ te ravnine tako da vrijedi:*
(a) točke O, M i M' su kolinearne,
(b) točke M i M' su s iste strane od O i
(c) $|OM| \cdot |OM'| = r^2$,
nazivamo ***inverzijom*** *(simetrijom)* ***u odnosu na kružnicu*** *k.*

Točku O zovemo **pol inverzije**, oznaka za kružnicu $k(O, r)$ je k i zovemo je **kružnica inverzije**, dok polumjer r zovemo **radijus inverzije**. Ukoliko još skupu točaka dodamo "beskonačno daleku točku" ∞ (kojom prolaze svi euklidski pravci), tada smatramo da se pol O preslikava u točku ∞.
Inverzija preslikava točke ravnine tako da one ostaju s iste strane od O i

[5]Kao što je u euklidskoj geometriji dužina skup svih točaka pravca AB koje leže između A i B, tako je u hiperboličkoj geometriji h-dužina skup svih točaka h-pravca AB koje leže između A i B



Slika 3.33: Konstrukcija pridružene točke

pritom će onu točku A koja se približava točki O preslikati u točku A' koja se približava točki ∞. Također, unutrašnjost kružnice preslikava izvan nje i obratno, dok točke sa kružnice preslikava u njih same.

Pogledajmo na primjeru kako to preslikavanje djeluje. Neka je $k = k(O, r)$ kružnica inverzije i M bilo koja točka. Neka je N diralište tangente iz točke M na kružnicu inverzije k, a M' točka presjeka okomice iz N na pravac OM i pravca OM. Vrijedi da je točka M' inverzna slika točke M. Naime, uvjeti (a) i (b) su ispunjeni pa preostaje još samo provjeriti uvjet (c). Kako su trokuti $\triangle OMN$ i $\triangle ONM'$ slični, imamo $|OM|: |NO| = |NO|: |OM'|$ iz čega slijedi $|OM| \cdot |OM'| = r^2$.

Inverzija je definirana i u euklidskoj geometriji, a osim nje postoje i neka druga preslikavanja ravnine. Na primjer, u euklidskoj, ali i u hiperboličkoj geometriji postoji preslikavanje koje se zove osna simetrija. Osna simetrija je izometrija, tj. preslikavanje koje čuva udaljenost. Pogledajmo što su izometrije i kako je definirana osna simetrija.

Definicija 3.48 *Reći ćemo da je preslikavanje $f : M \to M$* ***izometrija***

ravnine *M ako je*

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B) \text{ za sve } A, B \in M$$

Identiteta[6] $id_M : M \to M$ je primjer izometrije ravnine M.

Definicija 3.49 *Neka je $f : M \to M$ izometrija. Reći ćemo da je točka $T \in M$* ***fiksna točka izometrije*** *f ako je $f(T) = T$.*

Sada dolazimo do preslikavanja koje zovemo osna simetrija s obzirom na pravac, a ono je osigurano aksiomom simetrije:

Aksiom 3.50 *Za svaki pravac $p \subset M$ postoji jedinstvena izometrija $s_p : M \to M$ različita od id_M za koju je $s_p(T) = T$, za svaki $T \in p$. Ta se izometrija zove* ***osna simetrija s obzirom na pravac*** *p, a pravac p se zove* ***os simetrije.***

Osna simetrija s_p djeluje kao "presavijanje ravnine po pravcu p" ili "zrcaljenje s obzirom na pravac p". Sljedeći teorem je važan, a daje nam vezu između izometrija i osnih simetrija.

Teorem 3.51 *(Osnovni teorem o izometrijama) Svaka izometrija $f : M \to M$ je ili osna simetrija ili kompozicija najviše triju osnih simetrija.*

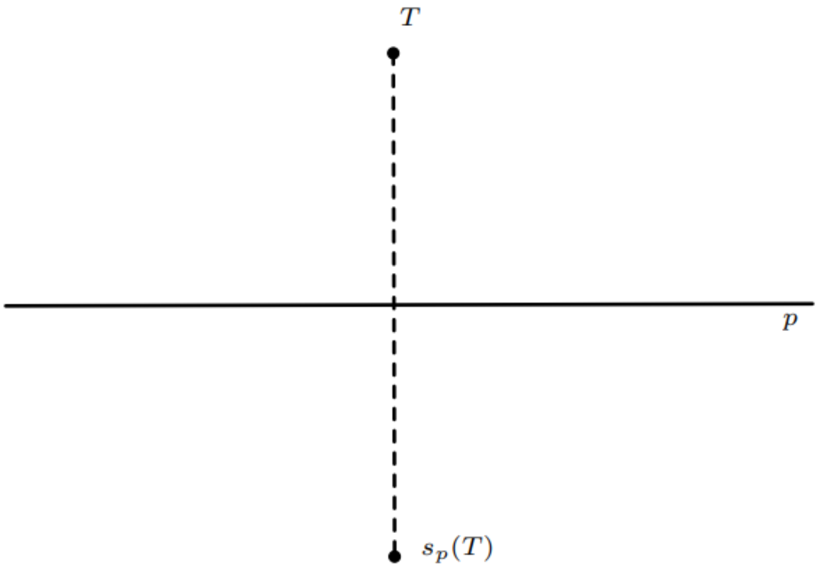
U iduće dvije tvrdnje ćemo se upoznati sa osnovnim svojstvima inverzije.

Teorem 3.52 *Pravac koji prolazi polom inverzije O preslikava se na samog sebe (bez točke O).*

Teorem 3.53 *Pravac koji ne prolazi polom inverzije O preslikava se na kružnicu koja sadrži O (bez O). Vrijedi i obrnuto: kružnica kroz pol O (bez O) preslikava se na pravac (koji ne sadrži O).*

---

[6] Neka je A neprazan skup. Identiteta je svako preslikavanje $f : A \to A$ za koje vrijedi $f(a) = a$, za svaki $a \in A$.



Slika 3.34: Osna simetrija s obzirom na pravac p

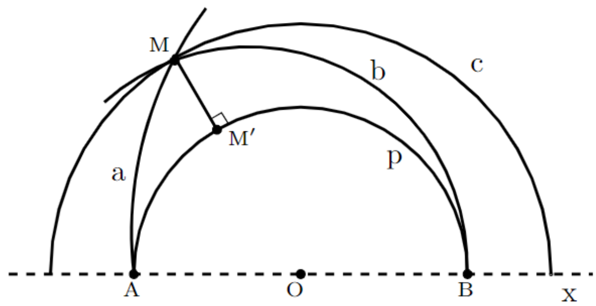
Prije nego što vidimo na koji je način interpretirana posljednja grupa aksioma - aksiomi kongruencije u ovom modelu, upoznajmo se s pojmom grupe.

Definicija 3.54 *Neprazan skup G s binarnom operacijom $\cdot$ naziva se grupa ako zadovoljava sljedeća svojstva:*
(i) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ za sve $a, b, c \in G$,
(ii) postoji element $e \in G$, kojeg nazivamo neutralni element ili jedinica, takav da je $a \cdot e = e \cdot a = a$ za svaki $a \in G$,
(iii) za svaki $a \in G$ postoji element $b \in G$, kojeg nazivamo inverzni element, takav da je $a \cdot b = b \cdot a = e$

Neka je sada $\mathcal{G}$ grupa generirana svim inverzijama u odnosu na (polu)kružnice i (polu)pravce ortogonalne na granični pravac x u Poincareovom modelu.

Definicija 3.55 *Reći ćemo da je dužina $\overline{AB}$* ***kongruentna*** *dužini $\overline{A'B'}$, oznaka $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$, ako postoji $f \in \mathcal{G}$ tako da je $f(\overline{AB}) = \overline{A'B'}$. Analogno,* *reći ćemo da je kut $\angle AOB$* ***kongruentan*** *kutu $\angle A'O'B'$, oznaka $\angle AOB \equiv \angle A'O'B'$, ako postoji inverzija $f \in \mathcal{G}$ tako da je $f(\angle AOB) = \angle A'O'B'$.*

Sada ćemo za primjer interpretirati aksiom (III_2), dok se ostali aksiomi kongruencije interpretiraju na sličan način.
Treba dokazati da iz $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$ i $\overline{A''B''} \equiv \overline{AB}$ slijedi $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.
Naime, ako je $\overline{A'B'} \equiv \overline{AB}$, onda postoji $f \in \mathcal{G}$ tako da je $f(\overline{A'B'}) \equiv \overline{AB}$. Da je $\overline{A''B''} \equiv \overline{AB}$ znači da postoji $g \in \mathcal{G}$ tako da je $g(\overline{A''B''}) \equiv \overline{AB}$. Sada za kompoziciju $g^{-1} \circ f \in \mathcal{G}$ vrijedi $(g^{-1} \circ f)(\overline{A'B'}) = g^{-1}(f(\overline{A'B'})) = g^{-1}(\overline{AB}) = \overline{A''B''}$ pa je $\overline{A'B'} \equiv \overline{A''B''}$.
Dakle, za sada smo vidjeli da su u Poincareovom modelu ispunjeni svi aksiomi apsolutne geometrije. Preostaje još provjeriti vrijedi li Aksiom (V_E) ili Aksiom (V_H). Međutim, očito je Aksiom (V_H) ispunjen u Poincareovom modelu, jer točkom M van pravca p (p je euklidska polukružnica kojoj je $\overline{AB}$ promjer a O središte) prolazi beskonačno mnogo pravaca koji ne sijeku pravac p. Pravci a i b su paralelni s pravcem p (to su euklidske polukružnice kojima su euklidske dužine $\overline{AM}$ i $\overline{BM}$ sekante). Na Slici 3.35 je pravac c



Slika 3.35: Paralele i razilazni pravci

razilazan s pravcem p, a pravac MM' je okomica iz M na pravac p.

Poglavlje 4

Eliptička geometrija

U prethodnom poglavlju smo se upoznali sa svojstvima geometrije koja je dobivena zamjenom Petog postulata novim aksiomom paralelnosti. Sada ćemo vidjeti osnovna obilježja geometrije koju dobijemo ukoliko umjesto Petog postulata postavimo uvjet da u njoj ne postoje paralelni pravci. Uz to će biti potrebno izmijeniti neke aksiome apsolutne geometrije kako ne bi došlo do kontradikcije. Takva geometrija se zove eliptička geometrija i opisat ćemo jedan model te geometrije. Literatura korištena u ovom poglavlju je [2, str. 39, 438 - 442], [3], [4], [8] i [13].

4.1 Uvod

Za sada smo se upoznali s činjenicom da u euklidskoj geometriji uzimamo kao aksiom tvrdnju da točkom P van danog pravca p prolazi najviše jedan pravac q koji ga ne siječe, dok za aksiom u hiperboličkoj geometriji uzimamo da postoje barem dva pravca koja ga ne sijeku - posljedično iz tog aksioma slijedi da u hiperboličkoj geometriji točkom van danog pravca prolazi beskonačno mnogo pravaca koji ne sijeku početni pravac. Prirodno se postavlja pitanje geometrije u kojoj bi vrijedilo sljedeće:

Aksiom 4.1 *(V_{EL}) Točkom van pravca ne prolazi niti jedan pravac koji ga ne siječe.*

Međutim, takvu geometriju **ne možemo formirati na analogan način** kao i hiperboličku geometriju gdje smo Aksiom (V_H) pridružili aksiomima apsolutne geometrije. Kada bi im dodali Aksiom (V_{EL}), bilo bi **narušeno načelo neprotuslovnosti**.

Naime, u apsolutnoj geometriji vrijedi Korolar 2.34 koji govori o egzistenciji paralelnih pravaca u apsolutnoj geometriji. Prema njemu postoji barem jedan pravac kroz točku van danog pravca koji je s njime paralelan. S druge strane, Aksiom 4.1 je negacija tog korolara. Zato Aksiom 4.1 ne možemo pridružiti aksiomima apsolutne geometrije, jer bi u tom slučaju došlo do kontradikcije. Kako bi izbjegli tu situaciju, treba promijeniti neke od postojećih aksioma.

4.2 Model sfere

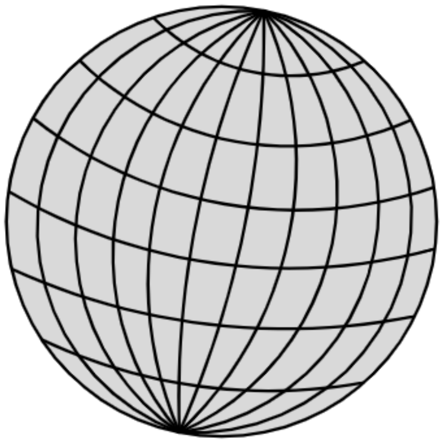
Prije nego opišemo osnovne pojedinosti vezane za svojstva eliptičke geometrije, predstavit ćemo jedan njen model kako bismo ih kasnije mogli lakše predočiti kroz primjere. Radi se o modelu sfere S^2.

Sfera u $\mathbb{R}^3$ je skup svih vektora čija je norma jednaka 1, odnosno:

$$S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\| = 1\}.$$

Ulogu pravaca na sferi imaju velike kružnice koje su dobivene kao presjek sfere s ravninama kroz ishodište. Jednadžbe tih ravnina su oblika $\langle a, x\rangle = 0$, za $a \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Jednadžba velike kružnice kroz $P, Q \in S^2$ je $\langle P \times Q, x\rangle = 0$, pri čemu se



Slika 4.1: Model sfere

vektorski produkt u $\mathbb{R}^3$ računa Laplaceovim razvojem determinante po prvom retku:

$$P \times Q = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ p_1 & p_2 & p_3 \\ q_1 & q_2 & q_3 \end{vmatrix}.$$

Pritom su $e_1 = (1,0,0), e_2 = (0,1,0)$ i $e_3 = (0,0,1)$ vektori kanonske baze, dok su p_i i q_j komponente vektora P i Q.

Presjek dviju velikih kružnica koje su zadane jednadžbama $\langle a, x\rangle = 0$ i $\langle b, x\rangle = 0$ je par antipodalnih točaka sfere

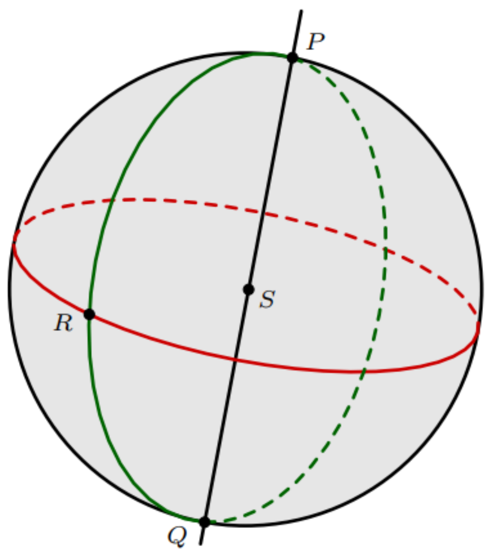
$$\pm\frac{a \times b}{\|a \times b\|},$$

iz čega slijedi da u sfernoj geometriji nema paralelnih pravaca, jer se svaka dva pravca sijeku u paru antipodalnih točaka.

Udaljenost točaka na sferi S^2 ne podudara se s udaljenosti u prostoru $\mathbb{R}^3$. Ideja je da $d(P,Q)$ bude najkraća udaljenost od točke P do točke Q prilikom gibanja po sferi. Ukoliko točke nisu antipodalne, onda kroz njih prolazi točno jedna velika kružnica, a ako su one antipodalne, onda beskonačno mnogo velikih kružnica prolazi njima. Dakle, kako bi izračunali udaljenost $d(P, Q)$ zapravo trebamo računati duljinu dijela velike kružnice koja prolazi točkama P i Q, a to se podudara s mjerom kuta između vektora $\measuredangle(P, Q)$. Kako je $\|P\| = \|Q\| = 1$, udaljenost računamo po sljedećoj formuli:

$$d(P, Q) = \arccos\langle P, Q\rangle.$$

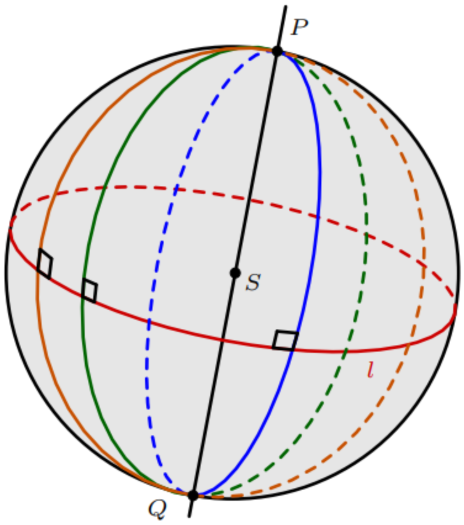
Najveću moguću udaljenost na sferi imaju antipodalne točke, a ona je jed-



Slika 4.2: $d(P, Q) = \pi$ i $d(P, R) = \pi/2$

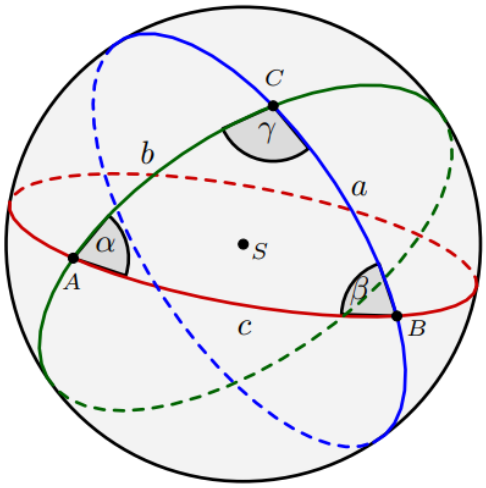
naka $d(P, -P) = \arccos(-1) = \pi$.
Naglasimo kako je definicija okomitosti pravaca slična kao u apsolutnoj geometriji, ali uz malu preinaku. Ako gledamo kut između dviju velikih kružnica, taj kut je jednak kutu između njihovih tangenti u točki zajedničkog presjeka. Dakle, dva pravca u eliptičkoj geometriji su okomita ako su tangente na njih u točki njihovog presjeka okomite.
Nadalje, ako imamo pravac l, svi pravci okomiti na njega nisu međusobno paralelni, ali imaju zajedničku točku zvanu **pol** pravca l. Na primjer, pol

ekvatora je sjeverni, odnosno južni pol budući se njih dvoje poistovjećuju jer su antipodalni. U 2.poglavlju naglasili smo kako Propozicija 2.24 i Teorem



Slika 4.3: Pravci okomiti na pravac l sijeku se u polu P, odnosno Q

2.33 ne vrijede u eliptičkoj geometriji. Sada kada smo se upoznali s njenim prikazom, možemo objasniti zašto te tvrdnje ne vrijede. Naime, pogledajmo neku veliku kružnicu na sferi i njen pol. Svaki pravac koji prolazi kroz taj pol je okomit na početnu veliku kružnicu, a očito je da se ti pravci sijeku. Kako bismo si to lakše dočarali, možemo zamisliti ekvator na sferi i sjeverni pol. Svaki meridijan je okomit na ekvator, a meridijani se sijeku u sjevernom polu. **Sferni trokut** čine tri nekolinearne točke $A, B, C \in S^2$, odnosno točke koje ne pripadaju istoj velikoj kružnici. Duljine stranica trokuta označavamo sa $a = d(B, C), b = d(A, C)$ i $c = d(A, B)$. Kutovi trokuta su kutovi između odgovarajućih velikih kružnica BC, AC i AB, odnosno kutovi između tangenti na te velike kružnice u točkama njihovih presjeka. Njihove mjere odgovaraju mjerama kutova između pripadnih ravnina u $\mathbb{R}^3$, tj. njihovih vektora



Slika 4.4: Sferni trokut ΔABC

normale $B \times C, A \times C$ i $A \times B$. Računaju se po formuli

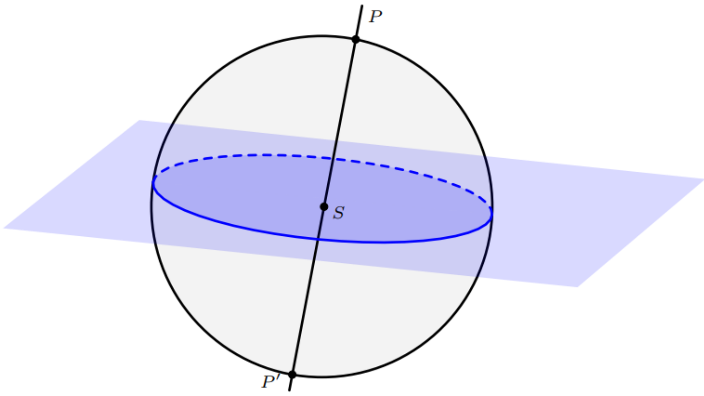
$$\alpha = \arccos \frac{\langle A \times B, A \times C \rangle}{\|A \times B\| \cdot \|A \times C\|},$$

a analogno i za β i γ.

Zbroj mjera kutova sfernog trokuta veći je od π. Kao što smo vidjeli u Teoremu 2.54, suma kutova trokuta u euklidskoj geometriji iznosi π, a iz Teorema 3.2 slijedi da je suma kutova trokuta u hiperboličkoj geometriji manja od π.

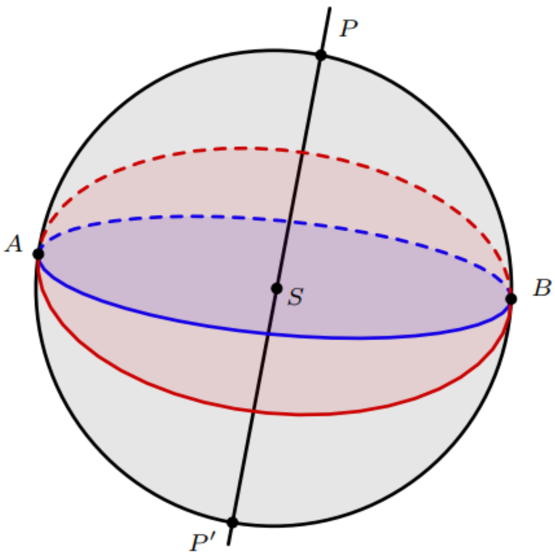
4.3 Aksiomi eliptičke geometrije

Sada ćemo istražiti osnovne pojmove u eliptičkoj geometriji kroz dani model. Promotrimo kružnicu na sferi čije je središte jednako središtu sfere, a radijus joj je jednak radijusu sfere. Takvu kružnicu zovemo **velika kružnica**. Lako se vidi da se velika kružnica dobije kao presjek sfere i ravnine koja prolazi kroz njeno središte. Svake dvije različite točke sfere leže na jedinstvenoj velikoj kružnici, osim u slučaju kada su te točke antipodalne, tj. kada su točke



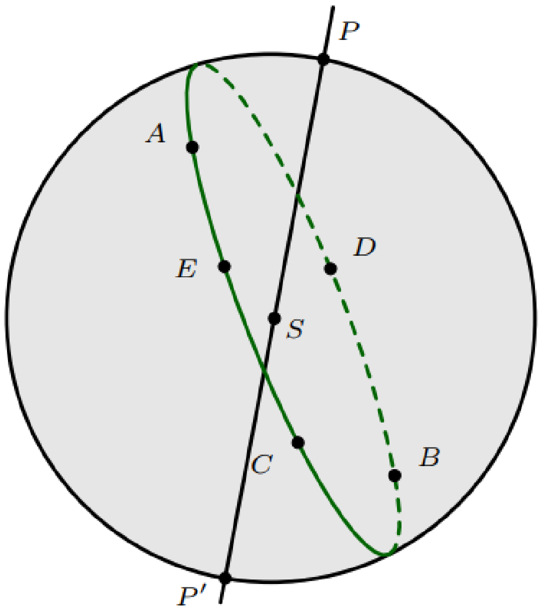
Slika 4.5: Presjek sfere i ravnine koja prolazi njenim ishodištem

krajevi promjera velike kružnice. Kroz dvije antipodalne točke prolazi beskonačno mnogo velikih kružnica. Sada možemo promotriti sferu i zamisliti



Slika 4.6: Dvije kružnice koje prolaze antipodalnim točkama A i B

pravac kao veliku kružnicu na toj sferi. Tada zaista ne bi postojali paralelni pravci. Međutim, to nije jedina razlika u eliptičkoj geometriji. Na primjer, ne možemo reći kada točka B leži između točaka A i C na kružnici. Dakle, umjesto aksioma poretka treba uvesti **aksiome separacije**, njih ukupno sedam. Na Slici 4.7, točke A i B odvajaju točke C i D na kružnici, jer ne možemo ići od C do D bez prolaska preko A ili B. Zato ćemo u tom slučaju



Slika 4.7: Aksiomi separacije 1-6

koristiti relaciju "*A i B odvajaju C i D*" i koristiti oznaku $(A, B|C, D)$. Sada možemo navesti aksiome separacije.

Aksiom separacije 1. *Ako je $(A, B|C, D)$, onda su točke A, B, C i D kolinearne i različite.*

Aksiom separacije 2. *Ako je $(A, B|C, D)$, onda je i $(C, D|A, B)$ i $(B, A|C, D)$.*

Aksiom separacije 3. *Ako je $(A, B|C, D)$, onda ne vrijedi $(A, C|B, D)$.*

Aksiom separacije 4. *Ako su točke A, B, C i D kolinearne i različite, onda je $(A, B|C, D)$ ili $(A, C|B, D)$ ili $(A, D|B, C)$.*

Aksiom separacije 5. *Ako su točke A, B i C kolinearne i različite, onda postoji točka D takva da je $(A, B|C, D)$.*

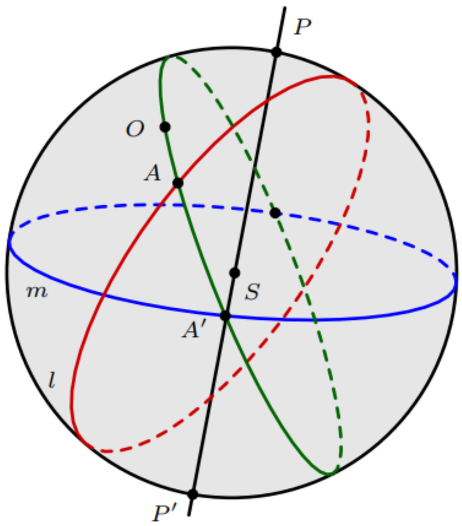
Aksiom separacije 6. *Za bilo kojih pet različitih i kolinearnih točaka*

A, B, C, D i E, ako je $(A, B|D, E)$, onda je ili $(A, B|C, D)$ ili $(A, B|C, E)$.

Prije nego navedemo i posljednji aksiom, prvo se upoznajmo s pojmom **perspektivno preslikavanje**.

Definicija 4.2 *Neka su dani pravci l i m i O točka koja ne pripada niti jednom od njih. Za svaku točku A na pravcu l pravac OA siječe pravac m u dvjema točkama koje su antipodalne. Preslikavanje koje svakoj točki A pravca l pridruži dvije antipodalne točke pravca m zovemo* ***perspektivno preslikavanje*** *s l na m i centrom O.*

Napomena 4.3 *Kasnije ćemo objasniti kako par antipodalnih točaka možemo identificirati kao jednu točku, pa možemo reći da perspektivno preslikavanje svakoj točki A pravca l pridruži točno jednu točku A' pravca m, gdje pod A' zapravo podrazumijevamo dvije antipodalne točke.*

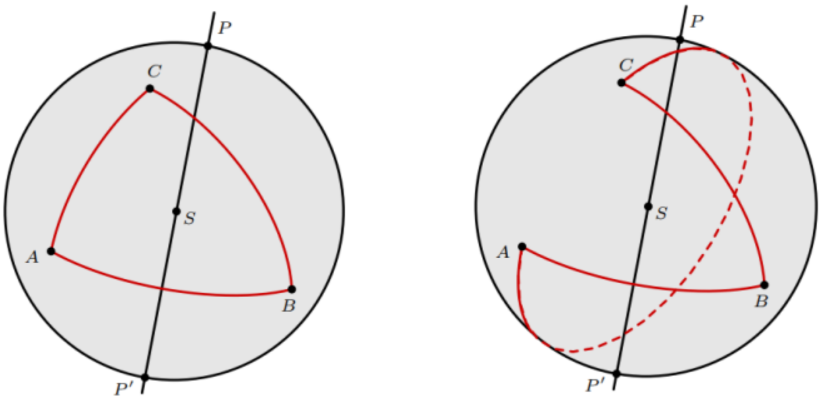


Slika 4.8: Definicija 4.2

Aksiom separacije 7. *Perspektivno preslikavanje čuva separaciju, tj. ako vrijedi $(A, B|C, D)$, gdje točke A, B, C i D pripadaju pravcu l, i ako su*

A', B', C' i D' odgovarajuće točke na pravcu m dobivene perspektivnim preslikavanjem s l na m, onda je $(A', B'|C', D')$.

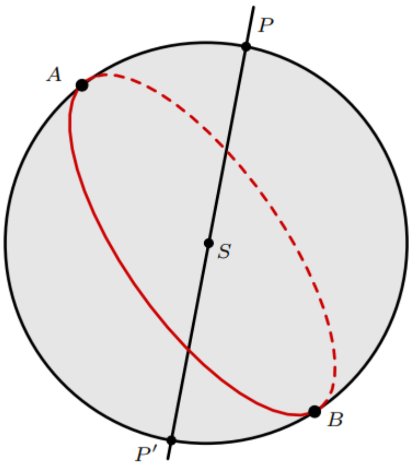
Budući da se ne može koristiti relacija "biti između", treba oprezno promijeniti sve ono u geometriji gdje se to koristi. Na primjer, kod definicije dužine $\overline{AB}$ u euklidskoj geometriji uzima se da ona sadrži točke A, B i sve točke koje su između njih na pravcu AB. Međutim, ovo nema smisla kad govorimo o kružnici pa u tom slučaju trebamo tri točke. Dakle, možemo jedino govoriti o dužini koja je određena trima kolinearnim točkama, a sastoji se od točaka A, B, C i svih točaka koje nisu odvojene od B točkama A i C. Slično, trebamo izmijeniti pojam trokuta, budući mu stranice sada više nisu



Slika 4.9: Dva različita trokuta s istim vrhovima

određene trima vrhovima, kao što se može vidjeti na Slici 4.9. Kada se ti pojmovi prilagode, aksiomi kongruencije i neprekidnosti imaju smisla kada se formuliraju na drugačiji način.

Ipak, ostaje još jedan problem, a radi se o aksiomu incidencije (I_2). Naime, on tvrdi da dvije točke pripadaju najviše jednom pravcu. To je netočno u slučaju velikih kružnica na sferi jer antipodalne točke leže na beskonačno mnogo pravaca. Rješenje tog problema skriva se u činjenici da možemo identificirati antipodalne točke, odnosno isto kao što velike kružnice gledamo kao pravce, tako i par antipodalnih točaka možemo shvatiti kao jednu točku. Znači, trebamo zamisliti kako smo zalijepili dvije antipodalne točke u jednu, imajući na umu da se to zapravo ne može napraviti. Posljedica toga je novo



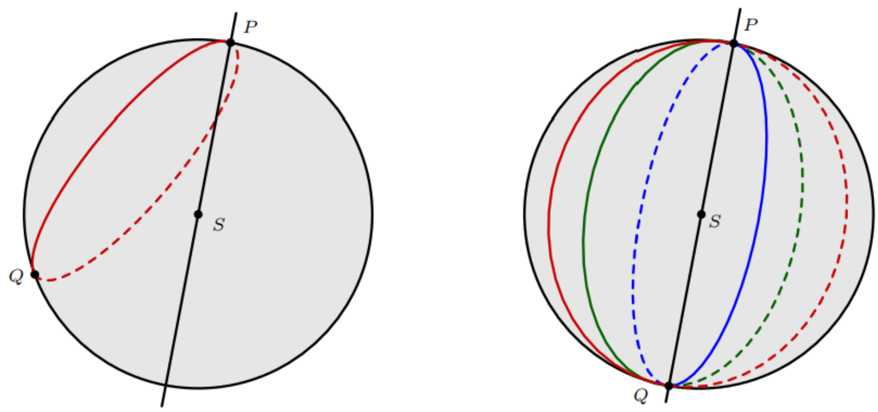
Slika 4.10: Antipodalne točke A i B

svojstvo - pravac više ne dijeli sferu na dva dijela jer možemo "preskočiti" veliku kružnicu prelaskom s trenutne točke na njen antipodalni par koji se nalazi s druge strane pravca. Takvo svojstvo "jednostranosti" se zove **neorijentabilnost**.

Dakle, ravninski aksiomi eliptičke geometrije obuhvaćaju one iste aksiome incidencije, kongruencije i neprekidnosti koji čine apsolutnu geometriju (s novim definicijama dužine, trokuta, itd.). Nadalje, aksiomi poretka su zamijenjeni aksiomima separacije, dok za aksiom o paralelama uzimamo Aksiom (V_{EL}).

Za kraj ćemo još spomenuti jednu tvrdnju koja vrijedi u eliptičkoj geometriji, a govori o broju pravaca koji prolaze dvjema različitim točkama sfere.

Propozicija 4.4 *Za svake dvije točke $P, Q \in S^2$ postoji velika kružnica koja* *ih sadrži. Ona je jedinstvena osim ako su P i Q antipodalne ($Q = -P$), a u tom slučaju postoji beskonačno mnogo takvih kružnica.*



Slika 4.11: Propozicija 4.4

Dokaz. Neka je O ishodište, tj. središte sfere S^2. Ako P i Q nisu antipodalne, onda su točke O, P, Q nekolinearne i određuju jedinstvenu ravninu. Presjek te ravnine sa sferom je jedinstvena velika kružnica kroz P i Q. Ako su P i Q antipodalne, točke O, P, Q leže na pravcu. Svaka ravnina koja sadrži taj pravac određuje veliku kružnicu kroz P i Q. ■

Dakle, kada se radi o antipodalnim točkama u eliptičkoj geometriji, postoji beskonačno mnogo pravaca koje prolaze njima, za razliku od euklidske i hiperboličke geometrije u kojoj prema Napomeni 2.1 kroz dvije različite točke prolazi točno jedan pravac. Doduše, na stranici 88 je ponuđeno "rješenje" s obzirom na činjenicu da se to svojstvo eliptičke geometrije protivi aksiomu incidencije (I_2), ali bez obzira na to promjene Petog postulata su uzrokovale razlike u tim geometrijama.

Literatura

[1] B. Červar, G. Erceg, I. Lekić, *Osnove geometrije*, skripta, PMF Split, 2014.

[2] M. J. Greenberg, *Euclidean and Non-Euclidean Geometries; Development and History*, Treće izdanje, W.H. Freeman and Company, New York, 1993.

[3] V. Krčadinac, *Neeuklidska geometrija*, skripta, PMF Zagreb, 2023.

[4] I. Kavčić, V. Krčadinac, *Sferna i hiperbolička trigonometrija*, Matematičko fizički list, vol.69, br. 273, str. 17-25, 2018. [Online]. Dostupno na: `https://hrcak.srce.hr/221293`. [Citirano: 04.06.2024.]

[5] M. Klaričić Bakula, S. Braić, *Uvod u matematiku*, skripta, PMF Split, 2008. [Online]. Dostupno na: `https://mapmf.pmfst.unist.hr/~milica/Uvod_u_matematiku/Materijali_za_predavanja/UvoduMatematiku.pdf`. [Citirano: 17.06.2024.]

[6] C. B. Boyer, U. C. Merzbach, *A History of mathematics*, Drugo izdanje, John Wiley & Sons, New York, 1989.

[7] E. W. Weisstein, *Finite Geometry*, 2024. [Online]. Dostupno na: `https://mathworld.wolfram.com/FiniteGeometry.html`. [Citirano: 20.06.2024.]

[8] S. Braić, *Predavanja iz Metodike nastave elementarne geometrije*, skripta, PMF Split, 2012.

[9] S. Braić, *Matematička analiza II*, skripta, PMF Split, 2017.

[10] S. Krešić - Jurić, *Algebarske strukture*, skripta, PMF Split, 2013.

[11] I. Sarig, 2021, *Geometry Help*. [Online]. Dostupno na: `https://geometryhelp.net/parallel-lines-equidistant/`.[Citirano: 03.07.2024.]

[12] S. Obadić, 2022, *Neke familije incidencijskih geometrija*, Završni rad, Sveučilište u Rijeci. [Online]. Dostupno na: `https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:196:548615`.[Citirano: 06.09.2024.]

[13] Fiveable, 2024, Area and excess in Elliptic Geometry. [Online]. Dostupno na: https://library.fiveable.me/non-euclidean-geometry/unit-8/area-excess-elliptic-geometry/study-guide/bTmsUhFzXvy9nLeo.[Citirano: 5.10.2024.]