

Bellove nejednakosti

Duvnjak, Marko

Undergraduate thesis / Završni rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:023581>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-07**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science](#)



SVEUČILIŠTE U SPLITU
PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET

ZAVRŠNI RAD
BELLOVE NEJEDNAKOSTI

Marko Duvnjak

Split, rujan 2024.

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Odjel za Fiziku
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

Bellove nejednakosti

Marko Duvnjak

Sveučilišni prijediplomski studij Fizika

Sažetak:

Bellove nejednakosti matematičke su relacije koje je 1964. godine formulirao John Stewart Bell kako bi testirao mogućnost postojanja lokalnih skrivenih varijabli u kvantnoj mehanici. One uspoređuju predviđanja klasičnih teorija (koje pretpostavljaju lokalnost i realizam) s kvantnom mehanikom. Kršenje Bellovih nejednakosti, koje je eksperimentalno potvrđeno, pokazuje da kvantni sustavi ne mogu biti u potpunosti objašnjeni lokalnim realizmom i klasičnim teorijama, sugerirajući da kvantna mehanika opisuje stvarnost koja je kompliciranija i neintuitivnija od klasične fizike.

Ključne riječi: Bellove nejednakosti, Bellov teorem, lokalni realizam, EPR paradoks kvantna mehanika, problem mjerenja.

Rad sadrži: 38 stranica, 4 slike, 2 tablice i 14 literaturnih navoda.

Izvornik je na hrvatskom jeziku.

Mentor: doc. dr. sc. Marko Kovač

Ocjenjivači: doc. dr. sc. Marko Kovač

doc. dr. sc. Toni Šćulac

doc. dr. sc. Ivana Weber

Rad prihvaćen: 26. rujna 2024.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilište u Splitu.

Basic documentation card

University of Split
Faculty of Science
Department of physics
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Bachelor thesis

Bell's inequalities

Marko Duvnjak

University undergraduate study of Physics

Abstract:

Bell's inequalities are mathematical relations formulated by John Stewart Bell in 1964. to test the possibility of the existence of local hidden variables in quantum mechanics. They compare the predictions of classical theories (which assume locality and realism) with those of quantum mechanics. The violation of Bell's inequalities, which has been experimentally confirmed, shows that quantum systems cannot be fully explained by local realism and classical theories, suggesting that quantum mechanics describes a reality that is more complex and more non-intuitive than classical physics.

Keywords: Bell's inequalities, Bell's theorem, local realism, EPR paradox, quantum mechanics, measurement problem.

Thesis consists of: 38 pages, 4 figures, 2 tables and 14 references.

Original language: Croatian.

Supervisor: Assist. Prof. Dr. sc. Marko Kovač

Reviewers: Assist. Prof. Dr. sc. Marko Kovač

Assist. Prof. Dr. sc. Toni Šćulac

Assist. Prof. Dr. sc. Ivana Weber

Thesis accepted: September 26, 2024

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

Sadržaj

Uvod	1
1. Filozofske osnove fizike	2
1.1. Realizam	2
1.2. Objektivnost	2
1.3. Kauzalnost	2
1.4. Lokalnost	2
2. Kriza 20. stoljeća	4
2.1. Kvantna mehanika	4
2.2. Postulati kvantne mehanike i teorije skrivenih varijabli	6
2.3. Problem univerzalnosti	7
2.4. Problem mjerenja.....	8
2.5. Kvantno sprezanje	9
2.6. EPR paradoks	10
3. Bellova dosjetka	12
3.1. Bellov teorem	12
3.2. Kritika Bellova teorema.....	16
3.3. Kršenje Bellovih nejednakosti u kvantnoj mehanici	17
4. Kršenje Bellovih nejednakosti u eksperimentima	18
4.1. Polarizacija svjetlosti.....	18
4.2. Točka sukoba.....	20
4.3. Nova točka sukoba	22
4.4. Rješenje problema	25
5. Alternative	27
5.1. Bohmova Mehanika.....	27
5.2. Teorije objektivnog kolapsa	28

5.3.	Hipotetske višedimenzionalne teorije.....	28
5.4.	„Many-worlds“ interpretacija	29
5.5.	Retrokauzalnost	30
5.6.	Superdeterministički modeli.....	30
	Zaključak	32
	Literatura	33

Uvod

Početak 20. stoljeća u fizici se dogodila ogromna revolucija koja je potresla same temelje fizike te nas navela da preispitamo mnoge filozofske pretpostavke o svijetu koji nas okružuje koje smo do tada držali točnima. Novi eksperimenti s čijim smo rezultatima bili suočeni prisilili su nas da formiramo nove teorije. Mnoge od ovih teorija su fenomene koje su bili opaženi opisivale na veoma različite načine, no unatoč tome davale su veoma slična ili ista predviđanja. Stoga su za određivanje točnosti teorija bili potrebni sve precizniji, inovativniji i kompliciraniji eksperimenti.

Ipak u slučaju kada više teorija daju ista predviđanja, nikakav eksperiment neće moći odrediti koja od njih je zapravo točna bez obzira koliko eksperiment bio precizan i inovativan. Upravo tu do izražaja dolazi jedna od temeljnih uloga teorijske fizike. Teorijski fizičari bave se prije svega formiranjem teorija o svijetu koji nas okružuje, no također pokušavaju postojeće teorije dovesti u međusobni sukob te stvoriti konflikt tamo gdje na prvi pogled nikakvog konflikta nema.

John Stewart Bell, po kojem su Bellove nejednakosti dobile ime, uspio je upravo u takvome pothvatu kada je 1964. godine predstavio način na koji se mogla riješiti jedna od najvećih dilema u povijesti fizike – EPR paradoks. Njegove nejednakosti pokazale su kako skup teorija nazvanih teorije lokalnih skrivenih varijabli (Local hidden variables theories – LHVT) ne mogu biti točne te su ih eliminirale kao moguću interpretaciju kvantne mehanike.

1. Filozofske osnove fizike

Fizika je prirodna znanost te se kao i svaka druga prirodna znanost temelji na određenim tvrdnjama koje se ne mogu dokazati već ih se mora uzeti kao pretpostavke. Neke od ovih tvrdnji su: pojmljivost prirode, univerzalnost zakona prirode, primjenjivost znanstvene metode, opisivost prirode matematikom, postojanje slobodne volje, realizam, objektivnost, kauzalnost, lokalnost... Neke od prethodnih pretpostavki koje su bitne za našu temu ćemo poblize pogledati.

1.1. Realizam

Realizam je filozofska pozicija koja tvrdi da vanjski svijet postoji neovisno o našem opažanju, mišljenju ili znanju. U kontekstu znanosti, a posebno fizike, realizam implicira da su objekti, događaji i zakoni prirode stvarni i egzistiraju bez obzira na to promatramo li ih ili ne.

1.2. Objektivnost

Objektivnost je filozofska pozicija koja tvrdi da postoji jedna stvarnost koja je zajednička i jednaka za sve promatrače. Svi će, uz iste uvjete, opažati iste fizičke zakone i fenomene.

1.3. Kauzalnost

Kauzalnost je filozofska pozicija koja tvrdi kako je svaki događaj posljedica nekog uzroka, te kako nikakav događaj ne može nastati bez uzroka. Uzrok nužno vremenski prethodi svojoj posljedici.

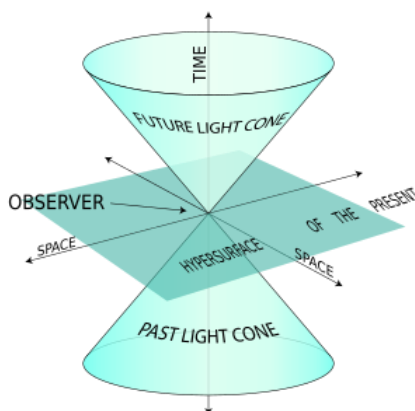
1.4. Lokalnost

Lokalnost je filozofska pozicija koja tvrdi kako na neki objekt može djelovati samo njegova neposredna okolina. Stoga bilo koji utjecaj na daljinu mora imati nekog posrednika koji će služiti kao sredstvo prijenosa interakcije.

U okvirima moderne fizike lokalnost ima dodatnu restrikciju. Kao posljedica empirijske činjenice konstantnosti brzine svjetlosti u svim inercijalnim referentnim sustavima teorije relativnosti daju dodatni uvjet na lokalnost. Uzrok određene posljedice mora prethoditi samoj posljedici u vremenu, no zbog konačnosti brzine svjetlosti i udaljenost uzroka i posljedice je ograničena. Ako su uzrok i posljedica udaljeni vremenski za vrijeme t te prostorno za udaljenost d , tada se uzrok nužno nalazi na koordinati u prostor-vremenu koja zadovoljava sljedeću relaciju.

$$d \leq ct \quad (1.1)$$

Drugim riječima bilo koji utjecaj uzroka na posljedicu ne može se širiti brzinom većom od brzine svjetlosti. Pogledajmo promatrača u vlastitom referentnom sustavu. Ako promatramo sve moguće točke u prostor-vremenu koje su mogle utjecati na promatrača te sve točke u prostor vremenu na koje promatrač može utjecati dobivamo prostor-vremenski stožac (prikazan na Slici 1).



Slika 1. Prikaz prostor-vremenskog stošca promatrača. [1]

Po kauzalnosti donji dio toga stošca koji se nalazi u promatračevoj prošlosti predstavlja sve prostor-vremenske lokacije koje su mogle utjecati na promatrača, dok gornji dio stošca koji se nalazi u budućnosti predstavlja sve lokacije u prostor-vremenu na koje promatrač može utjecati. Ipak moramo napomenuti da postojanje ovog ograničenja na lokalnost nije ni na koji način očito. Tome u prilog govori činjenica da je ova restrikcija na lokalnost tek otkrivena početkom 20. stoljeća. Činjenica da svi promatrači mjere istu brzinu svjetlosti neovisno o njihovom gibanju u odnosu na izvor svjetlosti te postojanje kozmičkog ograničenja brzine krši temeljne intuicije koje imamo o svijetu koji nas okružuje.

2. Kriza 20. stoljeća

Početak 20. stoljeća bio vrijeme korjenite revolucije u fizici. Gotovo svaka od prethodno navedenih filozofskih tvrdnji o svijetu koji nas okružuje bila je dovedena u pitanje zajedno s do tada temeljnim idejama u znanosti kao što su apsolutnost prostora i vremena. Ipak ideje ili bolje rečeno manjak ideja koje su zamijenili prethodne teško se može opisati kao napredak sa strane razumijevanja.

2.1. Kvantna mehanika

Kvantna teorija je nastala početkom 20. stoljeća kao pokušaj objašnjenja mnogih eksperimenata koji su se kosili s tadašnjom klasičnom fizikom (zračenje crnog tijela, fotoelektrični učinak, Youngov pokus, spektralne linije vodika). Razvijali su je mnogi znanstvenici, a među najpoznatijima su: Niels Bohr, Werner Heisenberg, Erwin Schrödinger, Albert Einstein te Max Planck. Najpopularnija interpretacija kvantne mehanike je Kopenhagenska interpretacija te ćemo stoga nju i analizirati.

Kvantna mehanika inzistira da se sustav prije „mjerenja“ nalazi u superpoziciji svih svojih mogućih stanja (Kopenhagenska interpretacija). Tek nakon „mjerenja“ sustav kolapsira iz superpozicije svih mogućnosti na neko određeno stanje. Temeljna veličina unutar kvantne mehanike je kompleksna valna funkcija ψ . U svojoj suštini je veoma jednostavna. Fizikalno je možemo zamisliti kao val kao što i sam naziv govori. Ona također radi sve što općenito rade valovi (pokazuje svojstva poput interferencije i ogiba). Kvadrat njenog modula daje gustoću vjerojatnosti da se čestica nađe na određenoj koordinati u prostoru (Bornovo pravilo). Za 1D slučaj imamo:

$$\rho(x) = |\psi(x)|^2. \quad (2.1)$$

Integral kvadrata njenog modula nad nekim intervalom u prostoru govori kolika je vjerojatnost da se čestica koju opisuje u istom prostoru i nađe.

$$P(a < x < b) = \int_a^b |\psi(x)|^2 dx \quad (2.2)$$

Valna funkcija prati Schrödingerovu jednadžbu te ona određuje njenu evoluciju (osim u slučaju kada se dogodi „mjerenje“).

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \frac{-\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi(x, t) + V(x)\psi(x, t) \quad (2.3)$$

Svaka se valna funkcija može razviti u Fourierov red. Fizikalno taj proces možemo zamisliti kao razdvajanje nekog kompliciranog vala u superpoziciju sinusnih i kosinusnih valova različitih frekvencija i amplituda. Međusobna interferencija neovisnih valova u superpoziciji stvara početni val te je superpozicija ekvivalentna početnom valu. U kvantnoj mehanici to nije slučaj. Superpoziciju je veoma jednostavno dobiti matematički. Uzmimo za primjer dvije valne funkcije ψ_1 i ψ_2 . Njihova superpozicija ψ je dana sa sljedećim izrazom:

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 . \quad (2.4)$$

Ipak fizikalno ponašanje superpozicije je radikalno drugačije od fizikalnog ponašanja njenih članova. Prisjetimo se da tek kvadrat modula valne funkcije ima fizikalno značenje. U ovom slučaju (uzmimo da su obje funkcije realne i pozitivne) imamo:

$$|\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2 = \psi_1^2 + 2\psi_1\psi_2 + \psi_2^2 \neq |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 . \quad (2.5)$$

Vidimo da se ponašanje superpozicije ne može općenito prikazati preko međusobno neovisnih ponašanja njenih članova. Drugim riječima ponašanje sustava ovisi o tome da li valne funkcije gledamo zasebno ili gledamo njihov zbroj. Unatoč tome što se ideja valne funkcije na prvi pogled čini jednostavna pri dubljoj analizi nailazimo na mnoge probleme. [2, 3]

2.2. Postulati kvantne mehanike i teorije skrivenih varijabli

Sam prvi postulat kvantne teorije je kontroverzan: „Fizičko stanje kvantnog sustava u potpunosti je opisano njegovom valnom funkcijom (ili vektorom stanja) te valna funkcija sadrži sve informacije o sustavu.“

Ovaj postulat inzistira na tome da je kvantna teorija potpuna. To je velika tvrdnja. Pošto je ovo postulat očito ga je nemoguće dokazati. Gotovo svi povijesni napadi na teoriju bili su usmjereni upravo preko ovog postulata.

Teorije koje kvantnu mehaniku i njene neodređenosti pokušavaju objasniti preko nekog dubljeg mehanizma zovemo teorije skrivene varijable (Hidden variable theories). Skrивene varijable predstavljaju nama nepoznata svojstva sustava koja nisu dana valnom funkcijom. Što su ove skrivene varijable je kao što i sam naziv govori nepoznato. Mogu biti skalari, vektori, skupovi istih, funkcije ovisne o istima itd... U našoj analizi uzeti ćemo najopćenitiji slučaj i reći da mogu biti bilo što (neko matematičko pravilo koje određuje svojstva sustava potpuno).

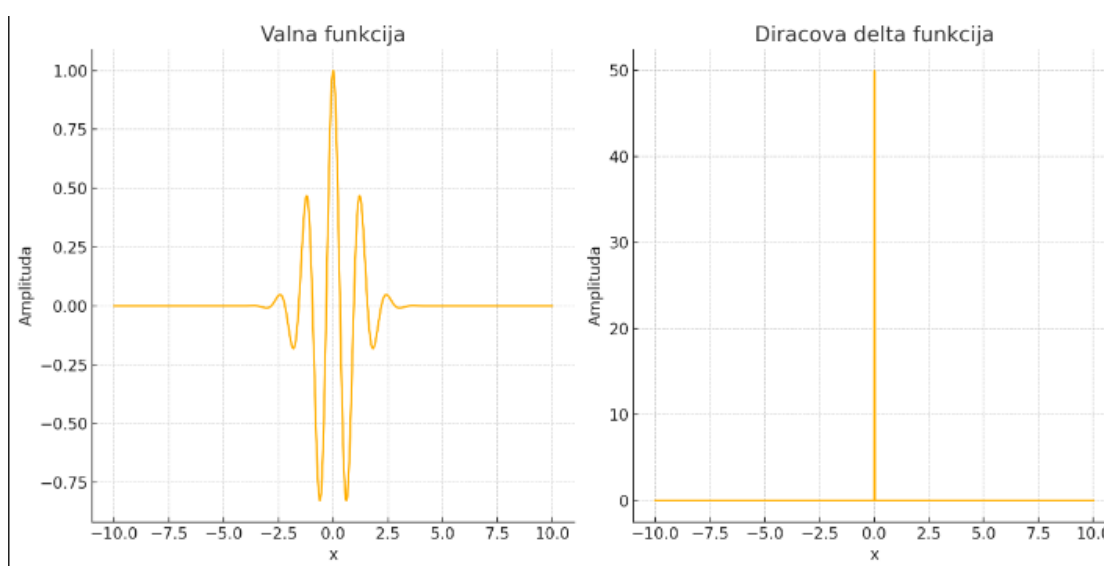
Teorije skrivenih varijabli tvrde da je kvantna mehanika nepotpuna te da valna funkcija opisuje samo statističku raspodjelu ponašanja skrivenih varijabli kroz više mjerenja. Drže da je kvantna mehanika ekvivalentna statističkoj mehanici dok pravu mehaniku predstavljaju skrivene varijable te da one određuju ishod svakog mjerenja. Na taj način bi kvantna mehanika i njeni postulati proizlazili iz dublje teorije. Problem koji do danas nije riješen je određivanje što su točno ove skrivene varijable te na koji način određuju rezultate mjerenja.

2.3. Problem univerzalnosti

Redovita obrana protiv implikacija kvantne teorije na klasične sustave je teza kako teorija opisuje samo sustave na iznimno malim razinama. Stoga se redovito uvodi distinkcija između klasičnih i kvantnih sustava koju je teško opravdati iz razloga koje ćemo iznijeti u nastavku. Sam Erwin Schrödinger u počecima kvantne mehanike vidio problem takve distinkcije. Ilustrirao ga je preko poznatog misaonog eksperimenta s mačkom koja je zatvorena u kutiji s bocom otrova i radioaktivnim atomom. Bocu otrova otvara senzor ako očita radioaktivni raspad atoma te tako ubija mačku. Veoma je lako vidjeti problem u ovom eksperimentu. Kvantna teorija inzistira da na stanje atoma prije „mjerenja“ nije određeno te da na atom prije „mjerenja“ gledamo kako na superpoziciju njegovih svih mogućih stanja. Pošto je život mačke direktno vezan za stanje atoma prisiljeni smo i mačku prije „mjerenja“ gledati kao superpoziciju svih njenih mogućih stanja. Na ovaj način stanje klasičnog sustava (mačke) direktno smo povezali sa stanjem kvantnog sustava (radioaktivnog atoma). Stoga smo prisiljeni na mačku istovremeno gledati kako na mrtvu i živu što je apsurdno. Ovaj primjer prikazuje kako je podjela sustava na klasične i kvantne bazirana samo na veličini sustava veoma slaba distinkcija.

2.4. Problem mjerenja

Schrödingerova jednačba je diferencijalna jednačba te rješavanje iste zahtjeva poznavanje početnog uvjeta $\psi(x, t = 0)$. Drugim riječima ako ne znamo stanje u kojem se valna funkcija nalazi na početku, ne znamo praktički ništa. Ukoliko znamo početno stanje valne funkcije tada primjenom Schrödingerova jednačbe možemo znati buduća stanja osim u slučaju kada dođe do „mjerenja“. Ono uzrokuje da sustav iz superpozicije svih mogućih stanja kolapsira na jedno stanje. „Mjerenje“ predstavlja prekid evolucije valne funkcije po Schrödingerovoj jednačbi. Primjerice pri mjerenju pozicije valna funkcija kolapsira te poprima oblik Diracove delta funkcije. Ovo je prikazano na Slici 2.



Slika 2. Utjecaj mjerenja na valnu funkciju.

Samim time cijela buduća evolucija valne funkcije se mijena pošto je početni uvjet za buduću evoluciju valne funkcije promijenjen (valna funkcija je kolapsirala u Diracovu delta funkciju). Ukoliko ne ažuriramo valnu funkciju nakon mjerenja te mjerenje zanemarimo i evoluciju valne funkcije nastavimo po Schrödingerovoj jednačbi kao da se mjerenje nije dogodilo dobivamo krive rezultate. Što točno uzrokuje kolaps pri „mjerenju“ je veliki misterij.

Postoji razlog zašto sam riječ mjerenje dosada stavljao pod navodnike. Mjerenje je iznimno slabo definiran pojam. Mjerenje predstavlja interakciju između mjernog instrumenta i objekta kojeg se mjeri. Ova interakcija koliko god komplicirana bila, trebala bi se ultimativno moći svesti na četiri osnovne sile prirode.

Schrödingerova jednadžba sadrži član vezan za potencijal te bi ove interakcije trebala uzimati u obzir. Redovito modeliramo utjecaj raznih interakcija poput vanjskih polja na kvantne objekte. Interakcije općenito ne kolapsiraju valnu funkciju već samo mijenjaju njenu evoluciju sukladno Schrödingerovoj jednadžbi. Ipak u slučaju interakcije s mjernim instrumentom dolazi do kolapsa valne funkcije i evolucija po Schrödingerovoj jednadžbi je narušena.

Samim time nameće se pitanje što određenu interakciju čini mjerenjem? To je pravo pitanje i na to pitanje nema odgovora. Upravo to jest problem mjerenja. Koja je razlika između fotona koji interagira s elektronom prateći Schrödingerovu jednadžbu i onoga koji elektron „mjeri“ i kolapsira njegovu valnu funkciju? Koja je razlika između dva kvantna sustava u interakciji i interakciji mjernog instrumenta s kvantnim sustavom. Sam mjerni instrument je kvantni sustav. Što točno uzrokuje njegov kolaps?

2.5. Kvantno sprezanje

Kvantno sprezanje (eng. quantum entanglement) je fenomen u kvantnoj mehanici u kojem su dva ili više kvantnih sustava povezani na način da stanje jednog sustava ne može biti opisano neovisno od stanja drugog, bez obzira na udaljenost između njih. Kvantna teorija tvrdi da pri ovom sprezanju mjerenje stanja jednog sustava odmah utječe na stanje spregnutog sustava, što se događa instantano čak i ako se sustavi nalaze na velikim udaljenostima. Razlog ovom je priroda Schrödingerove jednadžbe na kojoj kvantna teorija inzistira. Početni uvjet nužno podrazumijeva poznavanje stanja valne funkcije u cijelom prostoru. Tako kolaps uzrokovan mjerenjem u određenom djelu prostora utječe na valnu funkciju u cijelom prostoru pošto mijenja početni uvjet za buduću evoluciju po Schrödingerovoj jednadžbi kako kvantna teorija inzistira. Kvantno sprezanje nastaje kada dva ili više kvantnih sustava, poput čestica, međusobno interagiraju na način da im se kvantna stanja međusobno isprepletu. Iznimno ga je teško ostvariti u eksperimentima.

2.6. EPR paradoks

Godine 1935. Albert Einstein, Boris Podolsky i Nathan Rosen, objavili su rad koji je imao za cilj pokazati da kvantna mehanika koju je razvijao Bohr, zajedno s mnogim drugim znanstvenicima poput Schrödingera i Heisenberga, nije potpuna teorija.

Promatrat ćemo alternativnu verziju njihova argumenta koju je razvio David Bohm, no koja ima iste zaključke. Kvantna mehanika tvrdi da su prije mjerenja svojstva kvantnih objekata neodređena te da su kvantni objekti zapravo superpozicija svih svojih mogućih stanja. Zamislimo česticu čiji spin iznosi 0 koja se raspada na dva potomka. Spin je očuvan te vrijedi:

$$S = 0 = S_1 + S_2 . \quad (2.6)$$

Kvantna mehanika inzistira da su spinovi oba potomka prije mjerenja neodređeni te su zapravo superpozicija svih svojih mogućih vrijednosti. Zamislimo da su potomci razdvojeni na ogromnu udaljenost (primjerice na različite krajeve svemira). Na te lokacije postavimo dva jednaka Stern-Gerlach detektora istih orijentacija. Mjerenje spina jedne čestice trenutno određuje spin druge čestice (pošto je ukupni spin očuvan). Primamljivo je i intuitivno misliti kako je spin obje čestice bio određen od početka (teorije skrivenih varijabli) te kako čin mjerenja spina jednog potomka nema utjecaja na drugi, no to nije pozicija koju zagovara kvantna mehanika.

Kvantna mehanika tvrdi da se u slučaju kada su dva kvantna sustava spregnuta oni ne mogu analizirati neovisno jedan o drugome. Promjene u jednom sustavu utječu na drugi sustav. Ako primjerice izvršimo neko mjerenje na jednom sustavu te kolapsiramo valnu funkciju to utječe na ponašanje drugog sustava i to trenutno bez obzira na međusobnu udaljenost sustava. Ovu čudnu karakteristiku trenutnog utjecaja Einstein je nazvao „spooky action at a distance“. Veoma je lako vidjeti kako je ovaj utjecaj u iznimnom neslaganju s kauzalnosti i lokalnosti.

Upravo ovo je EPR paradoks, nazvan po njegovim autorima. Einstein i njegovi suradnici ovo su smatrali problematičnim jer je to impliciralo da se utjecaj prenosi brže od svjetlosti, što je u suprotnosti s teorijom relativnosti.

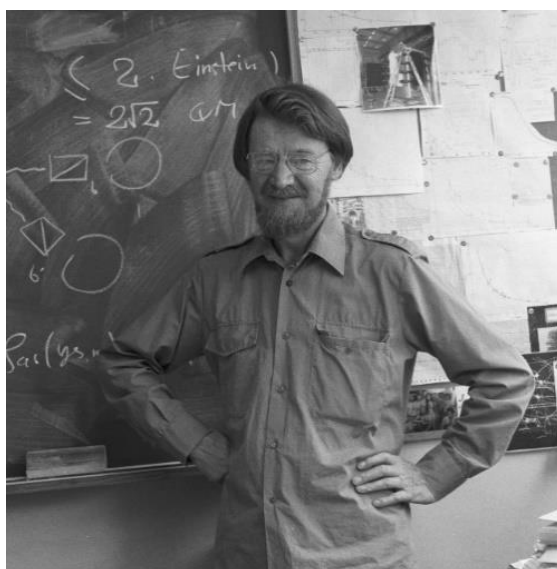
Stoga su zaključili kako je kvantna mehanika u krivu pri inzistiranju na neodređenosti stanja prije mjerenja. Zato su smatrali da moraju postojati neke "skrivenne varijable" ili neka dublja teorija koja određuje stanje u kojem se čestice nalaze, određuje na koji se način odvija kolaps, te može objasniti ove rezultate bez potrebe za "sablasnim djelovanjem na daljinu", kako je to Einstein nazvao. Bitno je primijetiti da teorija skrivenne varijable za koju su se Einstein, Podolsky i Rosen zalagali nije najopćenitija moguća, već mora zadovoljavati načelo lokalnosti. Stoga se ovaj tip teorija koje su podskup teorija skrivenih varijabli naziva teorije lokalnih skrivenih varijabli. [4]

3. Bellova dosjetka

EPR paradoks je pokazao jednu od mana kvantne teorije. Ipak Einstein i njegovi suradnici nikada nisu uspjeli pronaći teoriju koja je mogla objasniti ishode mjerenja i odrediti skrivene varijable i mehanizam koji određuje u kojem će stanju kvantni sustav biti izmjeren. Stoga je znanstvena zajednica bila podijeljena oko problema. Svakome tko ne razumije kvantnu mehaniku u dubinu činilo se kako je paradoks zapravo samo stvar filozofskog pogleda na kvantnu mehaniku te njene interpretacije te kako su obje pozicije fizikalno ekvivalentne. Kopenhagenska interpretacija je ignorirala problem dok su teorije skrivenih varijabli postojanje problema priznavale te tvrdile kako je kvantna mehanika nepotpuna te kako se rješenje problema nalazi u dubljoj teoriji, no nijedna tu istu teoriju nije odredila.

3.1. Bellov teorem

Kao što je i obično slučaj ova dilema je pala u zaborav pošto nije imala očiglednu tehnološku iskoristivost te nije bila lako rješiva eksperimentom. Tek 1964., gotovo 30 godina nakon što su Einstein, Podolsky i Rosen objavili svoj rad, sjevernoirski fizičar John Stewart Bell je pronašao teorijsku nesuglasicu između kvantne mehanike i teorija lokalnih skrivenih varijabli koja se mogla eksperimentalno testirati.



Slika 3. John Stewart Bell. [5]

Bell je svoj rad bazirao na proširenoj analizi i generalizaciji EPR paradoksa. Dok su u EPR postavi eksperimenta bila uključena dva Stern-Gerlach detektora istih orijentacija, Bell je dopustio da im orijentacije budu proizvoljne. Prvi detektor nazovimo A, a drugi B. Orijetacije detektora opisane su s tri jedinična vektora $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c})$. Svaki od detektora može biti orijentiran u smjeru bilo kojeg od tri vektora. U Bellovom misaonom eksperimentu promatramo raspad neutralnog π mezona u elektron i pozitron. Spin je kao i prije očuvan te iz jednadžbe (2.6) vrijedi:

$$S_1 = -S_2 . \quad (3.1)$$

Svaki od potomaka zatim pošaljemo prema detektorima koji se i dalje nalaze na ogromnoj udaljenosti (u principu na suprotnim krajevima svemira). Spinovi elektrona i pozitrona su $S_{1,2} = \pm \hbar/2$ te ćemo ih bilježiti u jedinicama $\hbar/2$. Tako će spin elektrona i pozitrona biti $S_{1,2} = \pm 1$. Bell je promatrao prosječnu vrijednost umnoška rezultata mjerenja spina za određenu orijentaciju dva detektora. Nazovimo tu veličinu $P(\hat{a}, \hat{b})$. Dobivamo je tako da eksperiment ponovimo mnogo puta (u principu beskonačno) te izračunamo prosjek umnoška rezultata mjerenja spina na detektorima.

EPR postavu eksperimenta dobivamo za $\hat{a} = \hat{b}$. Pošto su EPR postavi eksperimenta vrijednosti rezultata mjerenja $S_{1,2} = \pm 1$ i uvijek suprotna predznaka po jednadžbi (3.1) umnožak je uvijek -1 pa i njegova prosječna vrijednost $P(\hat{a}, \hat{a}) = -1$. Na isti način $P(\hat{a}, -\hat{a}) = +1$. Za proizvoljne orijentacije kvantna mehanika predviđa:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = -\hat{a} \cdot \hat{b} . \quad (3.2)$$

Bell je pokazao da je ovu relaciju nije moguće dobiti ni jednom teorijom lokalnih skrivenih varijabli (neovisno o tome koliko komplicirana bila).

Pošto valna funkcija očito ne predviđa rezultate mjerenja pretpostavimo da postoji lokalna skrivena varijabla λ koja određuje rezultate mjerenja. Samim time ona utječe i na prosječnu vrijednost umnoška rezultata mjerenja spinova $P(\hat{a}, \hat{b})$. Varijabla λ predstavlja bilo koje matematičko pravilo koje poštuje načelo lokalnosti. Ova varijabla ne mora nužno biti jedna varijabla već može predstavljati i skup varijabli proizvoljnog kardinaliteta.

Bitno je primijetiti da pošto λ po pretpostavci zadovoljava načelo lokalnosti, a naš eksperiment se u idealnom slučaju odvija na suprotnim stranama svemira, rezultat eksperimenta na jednom detektoru ne smije ni na koji način ovisiti o rezultatu eksperimenta na drugom detektoru i o orijentaciji drugog detektora. Rezultat eksperimenta mora biti predodređen u trenutku nastanka potomaka te biti određen vektorom orijentacije detektora na kojem se mjerenje odvija te s λ . Ovo je ključno.

Tako postoji funkcija $A(\hat{a}, \lambda)$ koja određuje rezultat mjerenja na detektoru A i funkcija $B(\hat{b}, \lambda)$ koja određuje rezultat mjerenja na detektoru B. Neki bi možda preferirali kada bi λ bila razdvojena na dvije varijable λ_A (koja određuje rezultat na detektoru A) i λ_B (koja određuje rezultat na detektoru B). Pošto je λ po pretpostavci lokalna ta je mogućnost potpuno sadržana u našoj analizi jer λ može biti i skup varijabli. Taj se skup po pretpostavci lokalnosti mora moći podijeliti na podskup varijabli λ_A i λ_B . Mora vrijediti:

$$A(\hat{a}, \lambda) = \pm 1, \quad (3.3)$$

$$B(\hat{b}, \lambda) = \pm 1. \quad (3.4)$$

Ove relacije vrijede za svaki vektor orijentacije detektora. Kada su detektori poravnati po jednadžbi (3.1) vrijedi:

$$A(\hat{a}, \lambda) = -B(\hat{a}, \lambda). \quad (3.5)$$

Ovo također vrijedi za svaki vektor orijentacije detektora. Tako je prosječna vrijednost umnoška rezultata mjerenja spina po svim vrijednostima λ dana sa:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = \int p(\lambda) A(\hat{a}, \lambda) B(\hat{b}, \lambda) d\lambda. \quad (3.6)$$

Uzimamo uvjet da je funkcija gustoće raspodjele umnoška rezultata mjerenja spina $p(\lambda)$ kao i svaka druga funkcija gustoće raspodjele normirana, realna i ne-negativna. Tako vrijedi:

$$\int p(\lambda) d\lambda = 1. \quad (3.7)$$

Integracija uključuje cijeli prostor u kojem lambda varira.

Koristeći jednadžbu (3.5) možemo pisati:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = -\int p(\lambda)A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda) d\lambda. \quad (3.8)$$

Za orijentaciju \hat{c} ekvivalentno vrijedi:

$$P(\hat{a}, \hat{c}) = -\int p(\lambda)A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda) d\lambda. \quad (3.9)$$

Tako je:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c}) = -\int p(\lambda) [A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda) - A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda)] d\lambda. \quad (3.10)$$

Jednadžba (3.3) vrijedi za proizvoljni vektor orijentacije detektora pa slijedi da je $[A(\hat{b}, \lambda)]^2 = 1$. Tako možemo pisati:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c}) = -\int p(\lambda) [1 - A(\hat{b}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda)] \cdot A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda) d\lambda. \quad (3.11)$$

Djelujemo modulom na obje strane jednakosti te uzimamo u obzir da je $|\int f(x) dx| \leq \int |f(x)| dx$ i da je $|f \cdot g| = |f| \cdot |g|$:

$$|P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c})| \leq \int |p(\lambda)[1 - A(\hat{b}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda)]| \cdot |A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda)| d\lambda. \quad (3.12)$$

Iz jednadžbe (3.3) i činjenice da je $p(\lambda)$ ne-negativna funkcija imamo: $|A(\hat{a}, \lambda)A(\hat{b}, \lambda)| = 1$, $p(\lambda)[1 - A(\hat{b}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda)] \geq 0$. Tako slijedi:

$$|P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c})| \leq \int p(\lambda)[1 - A(\hat{b}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda)] d\lambda. \quad (3.13)$$

Možemo prepoznati:

$$P(\hat{b}, \hat{c}) = -\int p(\lambda)A(\hat{b}, \lambda)A(\hat{c}, \lambda) d\lambda. \quad (3.14)$$

Konačno dobivamo Bellovu nejednakost:

$$|P(\hat{a}, \hat{b}) - P(\hat{a}, \hat{c})| \leq 1 + P(\hat{b}, \hat{c}). \quad (3.15)$$

Ova je nejednakost također poznata kao Bellov teorem. [2, 6, 7]

3.2. Kritika Bellova teorema

Primijetimo da Bellova nejednakost vrijedi za bilo koju teoriju lokalnih skrivenih varijabli i za svaku gustoću raspodjele skrivenih varijabli. Bellovi zaključci izvedeni su dedukcijom iz pretpostavke da su jednadžbe (3.3), (3.4) i (3.5) točne (što je eksperimentalno potvrđeno) te uz pretpostavku da varijabla λ poštuje načelo lokalnosti. Jednini način obaranja dedukcijskog argumenta je obaranje njegovih pretpostavki.

Ukoliko odbacimo restrikciju da λ poštuje lokalnost Bellov teorem ne vrijedi te pitanje potpunosti kvantne mehanike i dalje ostaje otvoreno. U ovom slučaju govorimo o teorijama ne-lokalnih skrivenih varijabli. Teorem u manjku restrikcije lokalnosti na λ pada na jednadžbi (3.6). Prije smo utvrdili da je $A(\hat{a}, \lambda, B(\hat{b}, \lambda))$ i $B(\hat{b}, \lambda, A(\hat{a}, \lambda))$ nedopustivo pošto krši načelo lokalnosti iz razloga koje smo već iznijeli. Ako dopustimo da rezultat jednog mjerenja ovisi o rezultatu drugoga tada $A(\hat{a}, \lambda, B(\hat{b}, \lambda))$ i $B(\hat{b}, \lambda, A(\hat{a}, \lambda))$ više nisu međusobno neovisne varijable. Stoga se prosječna vrijednost njihova umnoška ne može dobiti jednadžbom (3.6) koja pretpostavlja neovisne varijable. Pošto funkcije A i B imaju preklapanja u svojim varijablama te se po pretpostavci funkcije A i B ne mogu separirati po varijablama (to bi samo vratilo lokalnost) slijedi da faktorizacija između jednadžbi (3.10) i (3.11) više nije moguća. Tako u ovom slučaju Bellov teorem više ne vrijedi i nije ga moguće izvesti.

Napad na jednadžbe (3.3) i (3.4) nije moguć pošto su one direktne eksperimentalne opservacije.

Najlakši napad na Bellove zaključke je preko jednadžbe (3.5). Naime dovoljno je postulirati vanjsko polje detektora koje tjera spinove da se poravnaju s osi mjerenja detektora (paralelno ili anti-paralelno) kako bi se objasnili rezultati dani jednadžbama (3.3) i (3.4). Ipak u tom slučaju spin općenito ne bi bio očuvan zbog utjecaja pretpostavljenog vanjskog polja. Kršenje očuvanja spina nikada nije primijećeno u eksperimentima. Samim time ovo objašnjenje je oboreno.

Stoga je lokalnost varijable λ jedina pretpostavka Bellovog teorema u koju se može sumnjati jer jedina nije direktna eksperimentalna opservacija. [2, 6, 7]

3.3. Kršenje Bellovih nejednakosti u kvantnoj mehanici

Pogledajmo eksperimentalnu postavu s detektorima postavljenima na način da je:

$$\angle(\hat{a}, \hat{b}) = 90^\circ, \quad \angle(\hat{a}, \hat{c}) = \angle(\hat{b}, \hat{c}) = 45^\circ. \quad (3.16)$$

Kvantna mehanika stoga predviđa da su prosječne vrijednosti umnožaka rezultata mjerenja spina dane s jednadžbom (3.2) sljedeće:

$$P(\hat{a}, \hat{b}) = 0, \quad P(\hat{a}, \hat{c}) = P(\hat{b}, \hat{c}) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0.707. \quad (3.17)$$

Uvrštavanjem u (3.15) imamo:

$$|0 - (-0.707)| \leq 1 + (-0.707), \quad (3.18)$$

$$0.707 \leq 0.293. \quad (3.19)$$

Jednadžba (3.19) je očito netočna. Stoga vidimo da kvantna mehanika predviđa kršenje Bellove nejednakosti. Tako je Bell svojom modifikacijom EPR paradoksa pokazao više nego što su se Einstein, Podolsky i Rosen mogli i nadati. Ako su oni u pravu i u eksperimentima Bellova nejednakost nije prekršena to pokazuje, ne samo da je kvantna mehanika nepotpuna, već i netočna. S druge strane kršenje Bellove nejednakosti bi značilo da nikakva teorija lokalnih skrivenih varijabli ne može objasniti rezultate eksperimenta.

Eksperimenti koje ćemo detaljnije analizirati u sljedećim poglavljima pokazali su da su Bellove nejednakosti prekršene te u konačnici presudili u korist kvantne mehanike. Na taj način pokazali su kako nikakva teorija lokalnih skrivenih varijabli ne može objasniti rezultate koje predviđa kvantna mehanika i koji su opaženi u eksperimentima. Ipak kršenje Bellovih nejednakosti značajno je utjecalo i na kvantnu mehaniku. Mnogi fizičari smatrali su kako je nelokalnost kvantne mehanike samo nefizikalan artefakt formalizma teorije čije se posljedice ne mogu opaziti u eksperimentima. Ta je ideja oborena opservacijom kršenja Bellovih nejednakosti zajedno s teorijama lokalnih skrivenih varijabli. [2, 6, 7]

4. Kršenje Bellovih nejednakosti u eksperimentima

Više eksperimenata je pokazalo da su Bellove nejednakosti narušene. Mi ćemo promatrati eksperimente s polarizacijom svjetlosti.

4.1. Polarizacija svjetlosti

Ako svjetlost gledamo kao val tada je njen intenzitet dan sa srednjom vrijednosti modula Poyntingovog vektora:

$$I = \langle |\vec{S}| \rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_0} |\vec{E} \times \vec{B}| \right\rangle. \quad (4.1)$$

U vakuumu vrijedi:

$$|\vec{E}| = c|\vec{B}|, \quad (4.2)$$

$$\vec{E} \perp \vec{B}. \quad (4.3)$$

Ako se val širi u smjeru osi x imamo:

$$I = \left\langle \frac{c}{\mu_0} |\vec{E}|^2 \right\rangle = \frac{c}{\mu_0} E_0^2 \langle \sin^2(kx - \omega t) \rangle = \frac{c}{2\mu_0} E_0^2. \quad (4.4)$$

Stoga je intenzitet proporcionalan s kvadratom električnog polja

Ukoliko imamo polarizator on će propuštati elektromagnetske valove čije je električno polje paralelno njegovoj ravnini polarizacije. Bilo koje električno polje može se rastaviti na komponentu paralelnu ravnini polarizacije te na onu okomitu na ravninu polarizacije.

$$\vec{E} = \vec{E}_{||} + \vec{E}_{\perp} \quad (4.5)$$

Ukoliko se između ravnine polarizacije i ravnine titranja električnog polja nalazi kut θ tada kroz polarizator prolazi polje iznosa:

$$|\vec{E}_{||}| = E \cos \theta. \quad (4.6)$$

Stoga je intenzitet:

$$I = \frac{c}{2\mu_0} E_0^2 \cos^2 \theta = I_0 \cos^2 \theta. \quad (4.7)$$

Nakon prolaska kroz polarizator električno polje elektromagnetskog vala titra samo u ravnini polarizacije.

Neka je I_0 intenzitet ulazne svjetlosti, a I_n intenzitet svjetlosti nakon prolaska kroz n -ti polarizator. Uzmimo da na prvi polarizator pada monokromatska nepolarizirana svjetlost. Intenzitet koji prolazi je dan s jednadžbom (4.7)

Pošto su svi kutovi jednako zastupljeni vršimo usrednjenje po kutu te dobivamo:

$$I_1 = \frac{c}{2\mu_0} E_0^2 \langle \cos^2 \theta \rangle = \frac{c}{4\mu_0} E_0^2 = \frac{I_0}{2}. \quad (4.8)$$

Ako dodamo drugi polarizator tako da je okomit na prvi polarizator imamo:

$$I_2 = I_1 \cos^2 90^\circ = \frac{I_0}{2} \cos^2 90^\circ = 0. \quad (4.9)$$

Vidimo da dva okomita polarizatora potpuno blokiraju svjetlost. Dodajmo sada između ova dva polarizatora novi polarizator pod kutom od 45° . Imamo:

$$I_3 = I_2 \cos^2 45^\circ = I_1 \cos^4 45^\circ = \frac{I_1}{4} = \frac{I_0}{8}. \quad (4.10)$$

Možemo primijetiti nešto veoma čudno. Dodatak polarizatora (koji je praktički filter svjetlosti) omogućuje da u konačnici prođe više svjetlosti.

Na svjetlost možemo gledati i kao na roj fotona. U tom slučaju polarizator određene fotone propušta dok određene blokira po nekom pravilu te je ponašanje intenziteta jednostavno statistička pojava. Ukupno energija koja prolazi kroz polarizator je zbroj energija svih fotona. Stoga je u slučaju monokromatske svjetlosti broj fotona koji prolaze kroz polarizator proporcionalan intenzitetu (pošto svaki foton ima energiju $E = hf$).

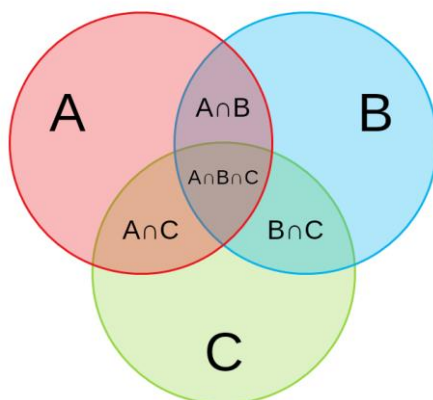
$$N = kI \quad (4.11)$$

4.2. Točka sukoba

Zamislimo eksperiment s polarizacijom svjetlosti u kojem koristimo tri polarizatora (A, B i C). Neka se nalaze pod kutovima od A (0°), B (22.5°), C (45°). Neka na polarizator A upada monokromatska nepolarizirana svjetlost. Pretpostavimo da je svakom fotonu određeno kao svojstvo putem nekog nepoznatog pravila (skrivenne varijable) kroz koje od tri polarizatora foton prolazi a kroz koje ne. Neka je $N(A, B, C)$ broj fotona koji na kraju prođu kroz postavu eksperimenta koja uključuje polarizatore A, B i C, a $N(A, C)$ broj fotona koji prođu kroz postavu eksperimenta koja uključuje polarizatore A i C. Trebalo bi vrijediti:

$$N(A, B, C) \leq N(A, C). \quad (4.12)$$

Ovo je vidljivo s Vennova dijagrama prikazanog na Slici 4. pošto je $N(A, B, C)$ podskup od $N(A, C)$.



Slika 4. Vennov dijagram. [8]

Analogno prethodnom računu za slučaj kada u eksperimentu samo sudjeluju polarizatori A i C imamo:

$$I_C = I_A \cos^2 45^\circ = \frac{I_A}{2} = \frac{I_0}{4}. \quad (4.13)$$

U slučaju kada koristimo sva tri polarizatora:

$$I_C = I_B \cos^2 22.5^\circ = I_A \cos^4 22.5^\circ = 0.7289 I_A = 0.7289 \frac{I_0}{2}. \quad (4.14)$$

Drugim riječima klasična elektrodinamika zajedno s eksperimentima nam govori kako u prvom slučaju 50% fotona koju prolaze kroz A budu blokirani na C, dok je u drugom slučaju na svakom od polarizatora B i C blokirano otprilike nešto manje od 15% fotona koji prolaze kroz A.

Ubacivanjem u jednadžbu (4.12) i djelanjem s ukupnim brojem fotona koji su prošli polarizator A te uzimanjem u obzir činjenice da je broj fotona direktno proporcionalan intenzitetu (4.11) imamo:

$$\frac{N(A, B, C)}{N(A)} \leq \frac{N(A, C)}{N(A)}, \quad (4.15)$$

$$\frac{kI(A, B, C)}{kI(A)} \leq \frac{kI(A, C)}{kI(A)}, \quad (4.16)$$

$$\frac{I(A, B, C)}{I(A)} \leq \frac{I(A, C)}{I(A)}, \quad (4.17)$$

$$\cos^4 22.5^\circ \leq \frac{1}{2}, \quad (4.18)$$

$$0.7286 \leq 0.5. \quad (4.19)$$

Jednadžba (4.19) očito nije istinita. Jesmo li dokazali da su teorije skrivene varijable u krivu te kako skrivena varijabla ne može postojati. Nipošto! Naša analiza ima jednu veoma krivu pretpostavku. Pretpostavili smo da je svakom fotonu određeno svojstvo putem nekog nepoznatog pravila (skrivena varijable) kroz koje od tri polarizatora foton prolazi a kroz koje ne. Ipak nemamo razloga vjerovati da je ova varijabla konstantna i nepromjenjiva. Sasvim je moguće da se prilikom prolaska kroz polarizator skrivena svojstva fotona mijenjaju te samim time i odgovor na pitanje kroz koja od tri polarizatora foton prolazi. To utječe na prolaz kroz sve buduće polarizatore. Ovo je očito objašnjenje.

Sjetimo se analize iz prethodnog poglavlja u kojoj smo između dva okomita polarizatora doveli novi polarizator pod kutom od 45° . U prvom djelu analize svaki foton koji je prošao kroz polarizator A bio je blokirani na C. Kada smo dodali polarizator B dio fotona koji su prošli kroz A sada su prošli i kroz C (njih 25%). Samim time djelovanje polarizatora B na fotone promijenilo je njihova svojstva (skrivena varijablu) te im omogućilo da prođu kroz polarizator C. Dodatak novog polarizatora je u konačnici omogućio prolazak više svjetla.

4.3. Nova točka sukoba

Postavimo sada novi eksperiment. U njemu ćemo koristiti tri polarizatora pod kutovima od 0° , 120° te 240° (tri različite konfiguracije polarizatora). No umjesto da fotoni prolaze kroz više polarizatora jedan za drugim u različitim vremenskim trenucima, sada će spregnuti par fotona proći kroz polarizatore gotovo istovremeno. Spregnuti par fotona u našoj analizi čine dva fotona koja se ponašaju na isti način. Ako jedan foton prolazi kroz određeni polarizator tada prolazi i drugi, te ako je jedan foton blokiran na određenom polarizatoru tada je i drugi.

Izaberimo dvije lokacije u prostoru koje su veoma udaljene jedna od druge (primjerice nalaze se na suprotnim krajevima svemira). U svaku od lokacija šaljemo jedan foton iz spregnutog fotonskog para. U svakoj točki stoji promatrač koji nasumično bira polarizator kojim će testirati foton koji je njemu poslan te bilježi da li taj foton prolazi ili ne. Ovo ponavljamo mnogo puta za razne spregnute fotonske parove (praktički šaljemo monokromatsku nepolariziranu svjetlost foton po foton) te bilježimo rezultate. Pošto smo eksperiment ponovili mnogo puta (u teoriji beskonačno) možemo reći kako su sve vrste fotonskih spregnutih parova (svaka konfiguracija skrivene varijable) zastupljene (ne nužno jednako).

Pojedini foton ima osam mogućih konfiguracija skrivene varijable. Sve moguće kombinacije prikazane su u Tablici 1. Skrivena varijabla nam u ovom slučaju govori kroz koje polarizatore foton prolazi. Neke od ovih kombinacija su možda i nemoguće (prva i zadnja primjerice), no to nije bitno za našu analizu.

Tablica 1. Moguće konfiguracije skrivene varijable

Konfiguracija fotona	A	B	C
1	Da	Da	Da
2	Da	Da	Ne
3	Da	Ne	Da
4	Da	Ne	Ne
5	Ne	Da	Da
6	Ne	Da	Ne
7	Ne	Ne	Da
8	Ne	Ne	Ne

Gledamo moguće izbore polarizatora od strane dvaju promatrača (9 je mogućnosti AA, BB, CC, AB, BA, BC, CB, AC, CA) te bilježimo u kojim slučajevima promatrači opažaju isti rezultat (pri prolasku kroz polarizatore oba fotona prolaze ili su oba blokirana), a u kojima različite rezultate (jedan foton prolazi a drugi je blokirana). Za isti rezultat koristimo kraticu (Same - S), a za različit (Different - D). Svi mogući rezultati prikazani su u Tablici 2.

Tablica 2. Predviđeni rezultati eksperimenta

Konfiguracija fotona	AA	B,B	CC	AB	BA	BC	CB	AC	CA
1	S	S	S	S	S	S	S	S	S
2	S	S	S	S	S	D	D	D	D
3	S	S	S	D	D	D	D	S	S
4	S	S	S	D	D	S	S	D	D
5	S	S	S	D	D	S	S	D	D
6	S	S	S	D	D	D	D	S	S
7	S	S	S	S	S	D	D	D	D
8	S	S	S	S	S	S	S	S	S

Možemo vidjeti da u slučajevima 1 i 8 za sva mjerenja dobivamo isti rezultat, dok u ostalim slučajevima isto rezultat dobivamo u 5/9 mjerenja. Sveukupno sigurno mora vrijediti da je najmanja šansa da dobijemo isto mjerenje 5/9 pošto ne postoji situacija u kojoj je šansa manja od 5/9. Dakle vrijedi:

$$p(S) \geq \frac{5}{9}. \quad (4.20)$$

Prethodno opisani eksperiment je misaoni, no ekvivalentna verzija ovog eksperimenta je izvedena od strane Alaina Aspecta i njegovih kolega s Instituta za teorijsku i primijenjenu optiku sveučilišta Paris-Saclay u Orsayu 1983. godine. Njihov eksperiment je bio izveden sa spregnutim fotonskim parovima nastalima emisijom iz laserom pobuđenih atoma kalcija. Polarizatori su bili udaljeni oko 13 metara jedan od drugoga. Ovo se možda čini kao mala udaljenost, no eksperiment je bio postavljen na takav način da bi interakcija između fotona koja bi mogla utjecati na mjerenje, ukoliko postoji, zahtijevala brzinu veću od brzine svjetlosti.

Njihovi eksperimenti zajedno s još nekima utvrdili su dvije eksperimentalne činjenice [9]:

1. Ukoliko su oba polarizatora postavljena na istu konfiguraciju uvijek opažamo isti rezultat.
2. Ukoliko analiziramo sveukupan broj mjerenja isti rezultat dobivamo u 50% slučajeva

Kao što vidimo eksperimenti pokazuju da se isti rezultat dobije samo u 50% slučajeva što je u konfliktu s jednadžbom (4.20). Na prvi pogled možda izgleda kako ove eksperimentalne opservacije nisu intuitivno čudne te da je neslaganje samo stvar tehničke prirode. Stoga pogledajmo поближе na koja nas očekivanja svaka od opservacija navodi.

Prva opservacija nas vodi ka zaključku da su fotoni isti jer se ponašaju isto.

Druga opservaciju bi očekivali primijetiti u slučaju kada na polarizatore šaljemo fotone nasumičnih polarizacija (nepolariziranu svjetlost). Po jednadžbi (4.8) vidjeli smo da u takvom slučaju kroz polarizator prolazi 50% fotona. Samim time u 50% slučajeva bismo vidjeli da dva polarizatora daju isti rezultat.

$$p(S) = p_1(Da) \cdot p_2(Da) + p_1(Ne) \cdot p_2(Ne) = 0.5 \cdot 0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = 0.5 \quad (4.21)$$

Tako da su ove dvije opservacije u najmanju ruku neintuitivne, a i mnogo više od toga kako kršenje jednadžbe (4.20) nalaže. [9]

Jedan od posljednjih eksperimenata koji je potvrdio kršenje Bellovih nejednakosti odvijao se u LHC-u između 2015. i 2018. godine. Korištenjem prikupljenih podataka istraživači su uspjeli demonstrirati kvantnu sprezanje između top kvarkova. Eksperiment je obuhvatio analizu sudara proton-proton, pri čemu su u određenom postotku slučajeva generirani spregnuti top kvarkovi. ATLAS detektor omogućio je znanstvenicima da precizno mjere korelacije između svojstava spregnutih kvarkova, otkrivajući njihovu intrinzičnu povezanost na kvantnom nivou. Ovaj eksperiment fokusirajući se na kvantno sprezanje pri visokim energijama predstavlja značajan korak naprijed u eksperimentalnoj fizici. Time pokazuje kako su kvantni efekti vidljivi i na visokim energijama te kako je problem univerzalnosti kvantne mehanike i dalje neriješen. Naime po Kopenhagenskoj interpretaciji u principu ne postoji ograničenje na veličinu ili energiju objekata koji mogu biti kvantno spregnuti. [10]

4.4. Rješenje problema

Kršenje jednadžbe (4.20) predstavlja ogromni problem. Prisjetimo se da smo prije (u odjeljku 4.2) ekvivalentno ponašanje objašnjavali kao utjecaj polarizatora na foton. Drugim riječima tvrdili smo kako prolazak kroz polarizator može promijeniti konfiguraciju u kojoj se foton nalazi (utjecati na skrivenu varijablu). No to nam objašnjenje ovdje ne pomaže. Vršimo mjerenje s dvije „kopije“ fotona (spregnutim parom) u istom trenutku na dvije daleke lokacije. Ako su kauzalnost i lokalnost točne dvije kopije fotona ne mogu utjecati jedna na drugu u razumnom vremenu (pošto se u ovom eksperimentu nalaze na suprotnim krajevima svemira).

Svaka od kopija fotona prolazi kroz jedan polarizator. Taj polarizator možda i utječe na nju i mijenja joj konfiguraciju, no konfiguracija se mijenja tek nakon prolaska kroz polarizator. Pošto nakon prolaska kroz polarizator fotoni više ne sudjeluju u eksperimentu ta nam je promjena konfiguracije beznačajna. No i dalje vidimo da se fotoni ne ponašaju u skladu s očekivanjem. I u ovom slučaju to ponašanje ne možemo pripisati utjecaju prethodnog mjerenja na buduća mjerenja pošto svaki foton mjerimo samo jednom. Ako bi dozvolili trenutni ili gotovo trenutni utjecaj mjerenja jednog fotona na drugi rezultate bi bilo veoma lako objasniti s istim argumentom kao u odjeljku 4.2, no to bi značilo da je lokalnost prekršena. Stoga ovo pokazuje kako imamo neku drugu krivu pretpostavku.

Možda je to inzistiranje na postojanju skrivene varijable. Moguće, no ne nužno. Inzistiranje na postojanju skrivene varijable je ništa drugo nego vjernost filozofskom realizmu. Kršenje Bellovih nejednakosti nas je natjeralo da preispitamo tri filozofske ideje na kojima smo bazirali naša razmatranja (realizam, kauzalnost i lokalnost). Sva tri istovremeno ne mogu biti točna. Ipak imamo više izbora pri biranju koja od tri pretpostavke je prekršena.

Kvantna mehanika (Kopenhagenska interpretacija) tvrdi da je prekršen realizam pošto kvantni objekti prije mjerenja nemaju definirana svojstva te da je prekršena lokalnost zbog kolapsa valne funkcije.

Kršenje realizma ostaje na razini interpretacije. Ni jedna eksperimentalna činjenica nas ne prisiljava da odustanemo od realizma. Ipak ako odustanemo od realizma možemo spasiti lokalnost. Ako je realizam netočan tada prije mjerenja objekti zaista nemaju definirana svojstva. Njihova svojstva stvorena su pri mjerenju te je tako lokalnost spašena.

Kršenje kauzalnosti je nemoguće te ga nećemo ni uzimati kako mogući izbor. Iziskivalo bi da uzročno-posljedične veze mogu teći unatrag u vremenu (retrokauzalnost) što stvara ogromne paradokse.

Kršenje lokalnosti je očita opcija. Iznimno je neprirodno vjerovati kako daleki objekti mogu djelovati na određeni objekt bez ikakvog posrednika. Stoga lokalnost u filozofskom smislu ne bi smjela biti prekršena. Ipak unutar generalne teorije relativnosti postoje prostor vremenske geometrije koje omogućuju stvaranje crvotočina (worm holes). One utječu na metriku prostor-vremena te temeljito redefiniraju veličine d i t iz jednadžbe (1.1). Naizgled ne-lokalne efekte koje opažamo bi možda mogli objasniti interakcijama kroz crvotočine. Ovo je čista spekulacija te je samo spomenuta kao opcija. Ipak može se pokazati da se kroz mehanizam kvantnog sprezanja ne može odvijati nikakav prijenos informacija brže od svjetlosti. Tako je na neki način lokalnost očuvana.

Kršenje Bellovih jednadžbi izniman je dokaz protiv lokalnog realizma (tvrdnje da su lokalnost i realizam istiniti). Ipak postoje neki načini na koje bi se lokalni realizam mogao obraniti (barem djelomično).

5. Alternative

Lokalni realizam ozbiljno je doveden u pitanje zbog rezultata eksperimenata koji potvrđuju kršenje Bellovih nejednakosti. Pitanje o tome postoji li način za spašavanje lokalnog realizma nakon kršenja Bellovih nejednakosti jedno je od najdubljih i najprovokativnijih u modernoj fizici. Postoje neka razmatranja koja pokušavaju naći put za očuvanje lokalnog realizma ili barem za ublažavanje zaključaka koje Bellove nejednakosti impliciraju.

5.1. Bohmova Mehanika

Bohmova interpretacija kvantne mehanike, također poznata kao teorija pilot-valova (pilot wave theory), zadržava realizam, ali ne i lokalnost. Razvio ju je David Bohm 1950-ih a zajedno s nekim drugim teorijama spada pod kategoriju teorija ne-lokalnih skrivenih varijabli. U Bohmovo mehanici, čestice imaju točno određene položaje i brzine u svakom trenutku, ali je njihova evolucija u vremenu determinirana pilot-valom koji je ne-lokalan, tj. promjene u jednom dijelu sustava mogu utjecati na drugi dio sustava trenutno. Na ovaj način, teorija izbjegava kršenje lokalnog realizma, ali na štetu očuvanja lokalnosti.

Pilot val je analogan valnoj funkciji u Kopenhagenskoj interpretaciji, no u ovom slučaju čestica ima definitivan položaj i brzinu, a pilotni val samo određuje na koji način položaj i pozicija evoluiraju (možemo ga zamisliti poput neke vrste polja potencijala). Time je funkcija gustoće vjerojatnosti koju dobivamo eksperimentima i koja odgovara kvadratu modula valne funkcije ništa drugo nego statistička pojava generirana dubljim mehanizmom (Bohmovom mehanikom). Ovo izbjegava problem mjerenja pošto su svojstva čestica uvijek definirana i nema kolapsa valne funkcije koji je prisutan u Kopenhagenskoj interpretaciji. Ipak bitno je primijetiti kako ovo ne znači nužno da možemo predvidjeti rezultate pojedinog mjerenja. To bi zahtijevalo poznavanje određene skrivene varijable (koja u ovom slučaju opisuje utjecaj mjerenja na sustav) i početnog uvjeta u nekom trenutku. Tako da problem modeliranja mjerenja i njegova utjecaja na sustav i dalje ostaje prisutan.

Ipak Kopenhagenska interpretacija i dalje ostaje glavna i najpopularnija interpretacija kvantne mehanike. Jedan od razloga tome je što je Bohmova mehanika matematički kompliciranija jer uz Schrödingerovu jednadžbu sadrži dodatnu jednadžbu koja određuje interakciju između pilot vala i čestice (eng. guiding equation). [11,12]

5.2. Teorije objektivnog kolapsa

Ove vrste teorija nisu interpretacije kvante mehanike (fizikalno ekvivalentne kvantnoj mehanici) već su zasebne teorije. Većina njih pokušava kolaps valne funkcije uključiti u Schrödingerovu jednadžbu dodavanjem novih članova (skrivenih varijabli). Na taj način kolaps bi bio objektivn. Vjerojatno najpoznatiji zagovaratelj ovakvog pristupa je Roger Penrose koji se zajedno s nekim drugim znanstvenicima zalaže za teoriju koja pokušava proširiti kvantnu mehaniku kako bi uključila gravitaciju. On tvrdi da kvantna mehanika, u svom trenutnom obliku, nije potpuna i da mora biti modificirana dodavanjem određenih članova u Schrödingerovu jednadžbu kako bi se objasnili gravitacijski efekti na kvantnoj razini. Prema Penroseovoj ideji, kvantna superpozicija može trajati samo ograničeno vrijeme, a zatim se spontano kolabira zbog gravitacijskih efekata. Tako je vrijeme života superpozicije obrnuto proporcionalno masi. Na taj način rješava se problem univerzalnosti kvantne mehanike i distinkcija između kvantnih i klasičnih sustava postaje bolje definirana. Ovakav pristup ipak ne može spasiti lokalni realizam. Tehnički Penroseova teorija nije ni lokalna ni realna u klasičnom smislu. Dopušta ne-lokalne utjecaje i tvrdi da je sustav zaista u superpoziciji svih mogućih stanja. Ipak za razliku od Kopenhagenske interpretacije u kojoj se kolaps odvija pri „mjerenju“ kolaps se ovdje odvija zbog gravitacijskih utjecaja i objektivn je (fizikalno uzrokovan te ne nužno ovisan o promatraču ili činu mjerenja). [13,14]

5.3. Hipotetske višedimenzionalne teorije

Neke spekulativne teorije (bazirane na Holografskom načelu i AdS/CFT korespondenciji) predlažu da bi se konflikti između kvantne mehanike i lokalnog realizma mogli riješiti u višim dimenzijama ili kroz interakcije s dodatnim stupnjevima slobode koji nisu uobičajeni u standardnim fizikalnim teorijama. Neki fizičari istražuju mogućnost da su kvantni procesi koji uzrokuju kršenje Bellovih nejednakosti, rezultat dubljih mehanizama koji se odvijaju u višedimenzionalnom prostoru-vremenu. U takvim scenarijima, ono što izgleda kao ne-lokalnost u našem 4-dimenzionalnom prostoru-vremenu može biti lokalno u nekoj višoj dimenziji. Međutim, ove ideje još nisu dovoljno formulirane pošto ne postoje dovoljno razvijene eksperimentalne metode preko kojih bi se ove teorije mogle testirati.

5.4. „Many-worlds“ interpretacija

Ova interpretacija pokušava zaobići kolaps valne funkcije tvrdeći da se svaki mogući ishod mjerenja zaista događa u nekom paralelnom svemiru. Ni na koji način ne objašnjava što točno određuje koji ishod mjerenja će se ostvariti u našem svemiru. Dok Kopenhagenska interpretacija tvrdi da se odvija kolaps na jedan ishod i da svi ostali mogući ishodi prestaju postojati, „Many-worlds interpretacija“ (MWI) tvrdi da svi ishodi postoje te ih tretira jednako, no sve osim onoga koji primjećujemo u našem svemiru nije moguće ni na koji način detektirati pošto se nalaze u paralelnim svemirima.

Ipak ovaj pokušaj zaobilaska kolapsa valne funkcije je samo diverzija. Kolaps se i dalje događa. Prije mjerenja kvantni sustav se nalazi u superpoziciji svih mogućih stanja. Gustoća vjerojatnosti određenog stanja dana je kvadratom modula valne funkcije ψ koja evoluira po Schrödingerovoj jednačini. Samim time pošto rješavanje Schrödingerove jednačine zahtijeva poznavanje valne funkcije u cijelom prostoru (početni uvjet) „popunjenost“ svakog stanja (dana s $|\psi|^2$) u nekom trenutku utječe na popunjenost svakog stanja u budućem trenutku. Tako su popunjenosti stanja „povezane“ te se prije mjerenja nalaze u istom svemiru i utječu jedne na druge. Ipak prilikom mjerenja ova veza puca te se događa kolaps. Dok Kopenhagenska interpretacija tvrdi da popunjenosti svih stanja osim izmjenjenog kolapsiraju u 0 te da jednostavno nestanu, MWI tvrdi kako neizmjerena stanja samo pređu u paralelni svemir.

Problem mjerenja u slučaju Kopenhagenske interpretacije predstavlja nepoznati mehanizam koji u slučaju mjerenja sva stanja osim izmjenjenog kolapsira u 0. U slučaju MWI problem mjerenja predstavlja nepoznati mehanizam koji u slučaju mjerenja sva stanja osim izmjenjenog šalje u paralelne svemire. U oba slučaja neizmjerena stanja više nemaju nikakav utjecaj na izmjereno stanje. Jedina razlika MWI u odnosu na Kopenhagensku interpretaciju je što svako od mogućih stanja tretira jednako te sva stanja kolapsiraju u vlastiti paralelni svemir. Stoga MWI također možemo nazvati i interpretacijom mnogo kolapsa. Zbog prethodno navedenih razloga MWI zadržava gotovo sve probleme Kopenhagenske interpretacije.

5.5. Retrokauzalnost

Retrokauzalni modeli predlažu da uzročno-posljedične veze mogu teći unatrag u vremenu. U tom kontekstu, budući mjerni izbori mogli bi utjecati na prošla stanja čestica, što bi moglo spasiti lokalni realizam. No kako smo već prije rekli kršenje kauzalnosti je nemoguće jer stvara ogromne paradokse. Stoga se ovu opciju ne može shvatiti ozbiljno.

5.6. Superdeterministički modeli

Jedan od načina za spašavanje lokalnog realizma je prihvaćanje superdeterminističkih modela. Ovi modeli predlažu da postoji dublji nepoznati mehanizam (skrivena varijabla) koja određuje ne samo stanja čestica, već i izbore koje znanstvenici rade pri postavljanju eksperimenata. Ovaj model pokušava zaobići restrikcije Bellovih nejednakosti napadanjem jednog od njihovih aksioma – mogućnost neovisnog mjerenja. Tvrdi da postavke mjernog uređaja i eksperimenata ne mogu biti postavljene slobodno već su određene valnom funkcijom koja u ovom slučaju uključuje i mjerni uređaj i promatrača.

Povijesno proizlaze iz ideje da se proces raspada u Bellovom teoremu ne može gledati kao neovisan događaj, te kako na rezultat raspada utječu orijentacije dvaju detektora. Ova ideja je bila oborena od strane jednog od eksperimenata Alaina Aspecta [8]. U tom eksperimentu orijentacije detektora su bile nasumično mijenjane nakon što se raspad dogodio. Nisu primijećene ovisnosti rezultata eksperimenata o orijentaciji detektora u trenutku raspada.

Stoga su pobornici ove ideje prihvatili radikalniji pristup. Tvrdili su kako je orijentacija detektora predodređena te kako potomci „znaju“ u kojem će položaju detektori biti u trenutku kada do njega stignu. Tako su funkcije u jednadžbama (3.3) i (3.4) u ovom slučaju ovisne o orijentaciji detektora (ili fizikalnom stanju čestica koje ga čine) u nekom proizvoljnom trenutku t prije mjerenja za kojega je jednadžba (1.1) zadovoljena. Tako imamo:

$$A(\hat{a}, \lambda, \hat{b}(t)) = \pm 1, \quad (5.1)$$

$$B(\hat{b}, \lambda, \hat{a}(t)) = \pm 1. \quad (5.2)$$

Po pretpostavci superdeterminizma orijentacije detektora u trenutku mjerenja $\hat{a}(t = 0)$ i $\hat{b}(t = 0)$ su predodređene i dane s početnim uvjetima $\hat{a}(t)$ i $\hat{b}(t)$ te sa zakonima fizike koji opisuju kako će se odvijati buduća vremenska evolucija. Zakoni fizike lokalno su dostupni pošto su po definiciji univerzalni (vrijede u svakoj točki prostor-vremena). Početni uvjeti su lokalno dostupni pod uvjetom da postoji trenutak t u kojem su svi utjecaji na sustav sadržani u regiji prostor-vremena koja zadovoljava jednadžbu (1.1). Za stare teorije stabilnog stanja svemira koje tvrde da je svemir vječan ovo ne predstavlja nikakav problem pošto t može biti proizvoljno velik. Ipak za teoriju velikog praska t je ograničen sa starosti svemira.

Stoga moramo uvesti dodatnu pretpostavku koja tvrdi da je svemir pratio takvu vremensku evoluciju koja je omogućila da u nekom trenutku t svaka točka prostor vremena bude lokalno povezana sa svim drugim točkama. Drugim riječima naša pretpostavka tvrdi da svaka čestica u svemiru zna početno stanje svake druge čestice u nekom trenutku t te samim time, koristeći zakone fizike, zna i svako buduće. Većina inflacijskih modela i teorija ranog svemira podržava ovu pretpostavku (korisna je za objašnjavanje velike homogenosti u kozmičkoj mikrovalnoj pozadini).

Ovo je superdeterminizam te spašava i lokalnost i realizam. Gotovo ga je nemoguće eksperimentalno oboriti pošto za trenutak t u principu možemo uzeti trenutak neposredno nakon Velikog praska. Superdeterminizam zaobilazi Bellov teorem iz istih razloga kao teorije ne-lokalnih skrivenih varijabli. Ovi razlozi izneseni su u odjeljku 3.2. Iako je superdeterminizam teoretski moguć, on se kosi s jednim od temeljnih filozofskih pretpostavki znanosti – postojanjem slobodne volje te mogućnosti obavljanja neovisnih mjerenja. Stoga, ako bi se pokazao točnim, dao bi nam velik razlog za sumnju u znanstvenu metodu pošto po njemu slobodna mjerenja nisu moguća. Superdeterminizam je iz toga razloga samo-poražavajuća filozofska pozicija koja ruši temelje na kojima je izgrađena.

Zaključak

Unatoč svim pokušajima zaobilaska Bellovih nejednakosti, većina fizičara smatra da su rezultati eksperimenata jak argument protiv lokalnog realizma, barem u njegovom klasičnom smislu. Dok neki od prethodno spomenutih pristupa redefinišu ili prilagođavaju klasične pojmove lokalnosti i realizma, nijedan od njih ne vraća u potpunosti lokalni realizam u smislu u kojem je zamišljen prije Bellovih teorema. Neki od pristupa žrtvuju lokalnost, realizam ili oboje, dok neki žrtvuju neke druge pretpostavke u filozofiji znanosti. Iako neki fizičari i filozofi i dalje istražuju ove pristupe, većina znanstvene zajednice prihvaća da eksperimentalni rezultati jednostavno ne dopuštaju održanje tradicionalnog lokalnog realizma, barem ne bez ozbiljnih modifikacija.

Ipak teorije skrivenih varijabli općenito nisu eliminirane. Bellove nejednakosti samo stvaraju restrikciju na teorije lokalnih skrivenih varijabli. Teorije ne-lokalnih skrivenih varijabli nažalost zauzimaju periferiju u istraživanjima u fizici.

Kvantna mehanika je zasigurno nepotpuna teorija jer ne uračunava gravitaciju. Gravitacija je jedna od skrivenih varijabli koje izmiču kvantnoj mehanici. Sasvim je moguće da postoje i druge te bi njihovo postojanje moglo bolje objasniti kvantne pojave. Kvantna mehanika u svojoj trenutnoj formi ne omogućuje adekvatno razumijevanje kvantnih sustava. Ovome u prilog govori poznata izreka Richarda Feynmana: "I think I can safely say that nobody understands quantum mechanics". Dijelim Feynmanov stav i mislim da ne postoji ni jedan znanstvenik koji bi se usudio izjaviti da mi zaista znamo što se događa na kvantnoj razini.

Po mom mišljenju Bohmova mehanika je daleko najrazumljivija od svih interpretacija kvantne mehanike pošto zadržava realizam, no ni ona nije potpuna pošto ne uzima gravitaciju u obzir. Teorije objektivnog kolapsa izgledaju obećavajuće pošto rješavaju problem mjerenja i problem univerzalnosti te vjerujem kako se putem njih možemo nadati napretku u razumijevanju kvantnih fenomena u bližoj budućnosti. Zadovoljstvo trenutnim stanjem i razumijevanjem kvantne mehanike je najgora opcija. Sumirano je u pristupu Davida Mermina „Shut up and calculate“ koji je kategorički antiznanstven. Bellove nejednakosti nam pokazuju kako je kroz dovoljno duboku analizu teorija koje imamo moguće pronaći neslaganja te konstruirati eksperimente koji mogu odrediti koja od teorija je u pravu.

Literatura

- [1] Light cone. Wikipedia. (15.9.2024)
https://en.wikipedia.org/wiki/Light_cone
- [2] Griffiths, D. J., & Schroeter, D. F. (2018). *Introduction to Quantum Mechanics* (3rd ed.). Cambridge University Press.
- [3] Shankar, R. (1994). *Principles of Quantum Mechanics* (2nd ed.). Springer.
- [4] Einstein–Podolsky–Rosen paradox, Wikipedia. (15.9.2024):
https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein%E2%80%93Podolsky%E2%80%93Rosen_paradox
- [5] John Stewart Bell. Wikipedia. (15.9.2024)
https://en.wikipedia.org/wiki/John_Stewart_Bell
- [6] Bell, J. S. (1964). On the Einstein Podolsky Rosen Paradox. *Physica Physique Физика*, 1(3), 195–200.
- [7] Bell's theorem, Wikipedia. (15.9.2024):
https://en.wikipedia.org/wiki/Bell%27s_theorem
- [8] Three circle Venn diagram. (15.9.2024):
<https://www.mydraw.com/templates-venn-diagram-three-circle-venn-diagram>
- [9] Mermin, David. "What's Wrong with This Pillow?" *Physics Today*, vol. 38, no. 4, 1985, pp. 38-46.
<https://lilith.fisica.ufmg.br/~fqii/Mermin-PhysToday85.pdf>
- [10] The Atlas collaboration "Observation of Quantum Entanglement with Top Quarks at the ATLAS Detector." *Nature*, vol. 615, 2024, pp. 493-499.
<https://doi.org/10.1038/s41586-024-07824-z>
- [11] De Broglie–Bohm theory, Wikipedia. (15.9.2024)
https://en.wikipedia.org/wiki/De_Broglie%E2%80%93Bohm_theory
- [12] Bohm, D. (1952). A Suggested Interpretation of the Quantum Theory in Terms of "Hidden" Variables. *Physical Review*, 85(2), 166–179. Einstein–Podolsky–Rosen paradox, Wikipedia. (15.9.2024):
https://en.wikipedia.org/wiki/Einstein%E2%80%93Podolsky%E2%80%93Rosen_paradox

[13] Penrose, R. (1989). *The Emperor's New Mind: Concerning Computers, Minds, and the Laws of Physics*.

Oxford University Press John Stewart Bell. Wikipedia. (15.9.2024)

[14] Penrose interpretation. Wikipedia. (15.9.2024)

https://en.wikipedia.org/wiki/Penrose_interpretation