Izabrani algoritmi teorije grafova

Krstić, Đana

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ĐANA KRSTIĆ

IZABRANI ALGORITMI TEORIJE GRAFOVA

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2024.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

IZABRANI ALGORITMI TEORIJE GRAFOVA

DIPLOMSKI RAD

Student(ica):
Đana Krstić

Mentor(ica):
prof. dr. sc. Damir Vukičević

Split, rujan 2024.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

IZABRANI ALGORITMI TEORIJE GRAFOVA

Đana Krstić

Sažetak:

Rad je centriran na odabranim algoritmima iz teorije grafova. Pojedini problemi, koji se općenito smatraju NP-teškima, postaju rješivi u polinomijalnom vremenu kad se primijene na specifične podklase savršenih grafova. Rad prikazuje algoritme za provjeru ispravnosti tipa tih grafova i složenost tih algoritama. Osim toga, rad uključuje i algoritam za sortiranje podatka u grafu, bavi se permutacijskim grafovima i njihovim bojanje, te provjeru planarnosti grafa.

Ključne riječi:

Matrica susjedstva, lista susjedstva, složenost algoritma, tranzitivni turnir, savršeni graf, množenje vrhova, trianguilirani graf, savršena eliminacijska shema, leksikografski BFS, tranzitivna orijentacija, graf usporedivosti, forsiranje, klasa boja, dekompozicijska shema, simpleks, TRO algoritam, permutacijski graf, labeliranje permutacije, kanonska strategija sortiranja, planarnost, G-prihvatljiv, blok, komad, mjesta kontakta

Podatci o radu:

85 stranica, 30 slika, 6 literaturnih navoda, hrvatski

Mentor(ica): *prof. dr. sc. Damir Vukičević*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Aljoša Šubašić

doc. dr. sc. Tanja Vojković

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *26. rujna 2024.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

SELECTED ALGORITHMS IN GRAPH THEORY

Đana Krstić

Abstract:

The thesis is centered on selected algorithms in graph theory. Certain problems, which are usually considered NP-difficult, solvable in polynomial time when applied to specific subclasses of perfect graphs. The thesisThe paper presents algorithms for verifying the correctness of these graph types and their complexity. Additionally, the thesis includes an algorithm for sorting data stored in as a graph, it handles permutation graphs and their coloring, and verification of graph planarity.

Key words:

Adjacency matrix, adjacency list, algorithm complexity, transitive tournament, perfect graph, multiplication of vertices, triangulated graph, perfect elimination scheme, lexicographic BFS, transitive orientation, comparability graph, forcing, color class, decomposition scheme, simplex, TRO algorithm, permutation graph, permutation labeling, canonical sorting strategy, planarity, G-admissible, block, piece, points of contact

Specifications:

85 pages, 30 images, 6 literature citations, Croatian

Mentor: *prof. dr. sc. Damir Vukičević*

Committee:

BASIC DOCUMENTATION CARD

doc. dr. sc. Aljoša Šubašić

doc. dr. sc. Tanja Vojković

This thesis was approved by a Thesis commettee on *26th of Septemeber, 2024.*

Uvod

Teorija grafova je grana matematike koja se bavi, kao što iz naziva možemo intuitivno zaključiti, grafovima. Graf je vrsta matematičkog objekta s mnogim primjenama. Najviše se koriste za olakšani prikaz različitih vrsta podataka. Primjerice, želimo li isplanirati rute raznošenja paketa, puno je jednostavnije to prikazati grafički. Potom možemo odrediti najbolje rute raznošenja uz pomoć matematičke teorije. Za samo rješavanja problema moramo osmisliti prikladan algoritam.

Sami algoritmi, metode rješavanja problema, znaju biti jako neefikasni ovisno o veličini problema, dostupnim resursima i sličnim čimbenicima. Cilj matematičara i/ili programera je taj da osmisli algoritme koji će biti što efikasniji tj. koji imaju izvedivu primjenu u pravome svijetu. Neki algoritmi postaju puno efikasniji primjenom matematičkih znanja, a zbog prikazivosti problema u grafičkom obliku, posebnu pozornost ćemo obratiti na znanja iz teorije grafova. Primjena tih znanja može značajno olakšati/ubrzati korake algoritma, no čak i tada neki algoritmi ostaju neprihvatljivi. Takvi algoritmi, u nekim slučajevima, mogu postati prihvatljivi za specifične tipove grafova.

U ovome diplomskome radu ćemo predstaviti nekoliko takvih tipova grafova koji olakšavaju rad algoritama, te algoritme koji ih prepoznavaju. Osim spomenutih algoritama, predstavit ćemo i algoritme koji rade određene funkcije na danom grafu, primjerice sortiranje.

Sadržaj

Poglavlje 1

Uvodni pojmovi

Prije nego što počnemo predstavljati algoritme, trebat ćemo se upoznati s osnovnim pojmovima teorije grafova kao što su definicije grafa, ciklusa, bojanja... Ovi pojmovi će se koristiti kroz cijeli rad, a pojmovi specifični određenom poglavlju će se uvesti u spomenutom poglavlju. Osim pojmova iz teorije grafova, uvest ćemo i definiciju algoritma i kako se grafovi mogu spremati u računalo.

1.1 Uvodni pojmovi iz područja teorije grafova

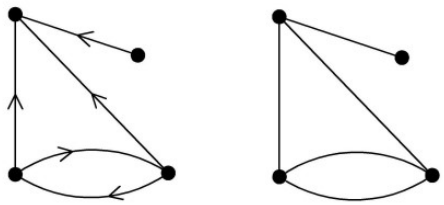
Uvest ćemo temeljni pojam rada - samu definiciju grafa. U istoj definiciji uvodimo pojmove grafa i usmjerenog grafa.

Definicija 1.1 ***Graf*** *je uređena trojka $G = (V, E, \phi)$, gdje je $V \neq \emptyset$ skup čije elemente nazivamo* ***vrhovi****, E skup čije elemente nazivamo* ***bridovi****, $V \cap E = \emptyset$, te je ϕ funkcija koja svakom bridu pridružuje neuređeni par vrhova. Funkcija ϕ se naziva* ***incidencijska funkcija****.*

Ako incidencijska funkcija ϕ pridružuje svakom vrhu uređeni par vrhova, tada kažemo da je graf ***usmjeren****. Usmjerene bridove iz ovakvog pridruživanja nazivamo* ***lukovi****.*

Kada vrijedi $\phi(e) = \{u, v\}$, onda kažemo da su vrhovi u i v krajevi brida e. Kažemo da su vrhovi u i v **incidentni** s bridom e. Kraće pišemo $e = uv$, te još kažemo da su vrhovi u i v *susjedni.* Kod usmjerenih grafova, kad vrijedi $\phi(e) = (u, v)$ kažemo da luk e ima početak u vrhu u i kraj u vrhu v.

Graf bez vrhova je također graf i takav graf se naziva **prazan graf**. Uvedimo još i pojam podgrafa.



Slika 1.1: Usmjereni i neusmjereni graf - slika iz skripte *Teorija Grafova - Anka Golemac*

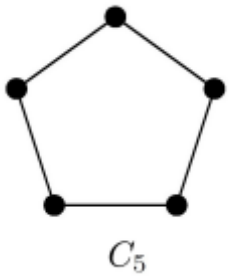
Definicija 1.2 *Za graf H kažemo da je* ***podgraf*** *grafa G tj. $H \subseteq G$, ako $V_H \subseteq V_G$ i $E_H \subseteq V_H$, gdje V_H, E_H su redom skupovi vrhova i bridova grafa H, V_G, E_G su redom skupovi vrhova i bridova grafa G.*

Ovisno o vrhovima i bridovima, postoje i grafovi koji nose posebne nazive.

Ciklus sa n vrhova je neprazni graf sa skupom vrhova $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, te skupom bridova $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$. Ciklus označavamo sa C_n. Ciklus duljine k tj. **k-ciklus**, je ciklus sa k vrhova i k bridova. Brid koji povezuje dva vrha ciklusa se naziva **kabel**.

Ciklus u kojem su svaka dva vrha povezana kabelom tvori potpun graf.

Potpuni graf je graf kojemu su svaka dva vrha susjedna i označavamo ga sa K_n.



Slika 1.2: Ciklus sa 5 vrhova - slika iz skripte *Teorija Grafova - Anka Golemac.*

Definicija 1.3 ***Klika*** *je podskup vrhova K grafa G takav da su svaka dva različita vrha iz K susjedna u G. Broj klika grafa G označavamo sa $\omega(G)$.*

Promotrimo vezu između vrhova i bridova tako da uvedemo pojam stupanj vrha. Za vrh v kažemo da je **stupnja** n ako je incidentan sa n bridova, te pišemo $deg(v) = n$. Uz pojam orijentiranog grafa uvodimo i pojmove ulaznog i izlaznog stupnja. **Izlazni stupanj** vrha v orijentiranog grafa je broj lukova s početkom u v, a **ulazni stupanj** vrha v je broj lukova s krajem u v. Redom ćemo ih označavati sa $indeg(v)$ i $outdeg(v)$. Vrh čiji je izlazni stupanj 0 naziva se **dno**.
Skup vrhova susjednih vrhu v označavat ćemo sa $Adj(v)$.
Vezu između stupnjeva i bridova prikazujemo tzv. lemom o rukovanju.

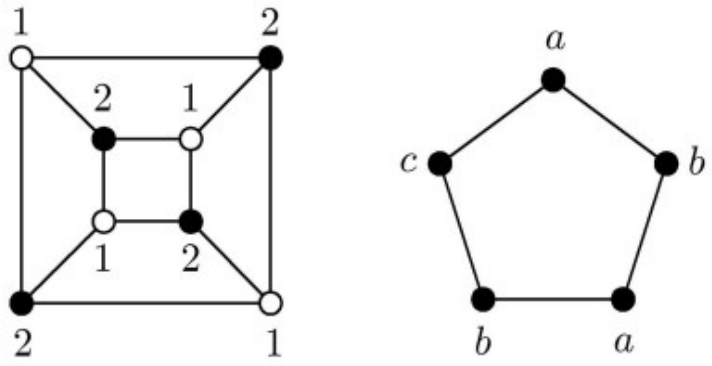
Teorem 1.4 (Lema o rukovanju) *U svakome grafu $G = (V, E)$ zbroj stupnjeva je paran. Vrijedi $\sum_{v \in V} deg(v) = 2m$, gdje je m broj bridova u G.*

Iz neusmjerenog grafa, možemo dobiti usmjereni što prikazujemo sljedećom definicijom.

Definicija 1.5 ***Orijentacija*** *grafa G je bilo koji usmjereni graf $\overrightarrow{G}$ u kojem brid $\{u, v\}$ dobiva orijentaciju (u, v) ili (v, u).*

Sad uvodimo pojam koji je često korišten u primjeni i, specifičnije, u algoritmima. Pojam bojanja grafa.

Definicija 1.6 *Neka $B = \{1, \ldots, k\}$. Za graf G, k-**bojanje vrhova** je preslikavanje $f : V(G) \to B$. Elemente skupa B nazivamo **bojama**, te kažemo da je vrh v obojen bojom b ako $f(v) = b$.*
*Bojanje grafa je **pravilno** ako su susjednim vrhovima pridružene različite boje. Graf je k-**obojiv** ako postoji pravilno bojanje njegovih vrhova.*
*Ako je graf k-obojiv i nije $(k-1)$-obojiv, onda kažemo da je **kromatski broj** $\chi(G)$ grafa G jednak k.*



Slika 1.3: Pravilno (lijevo) i nepravilno (desno) bojanje - slika iz skripte *Teorija Grafova - Anka Golemac.*

Za graf G, **stabilan skup** je skup vrhova među kojima nikoja dva nisu susjedna. **Stabilnost grafa** $\alpha(G)$ je vrijednost koja označava veličinu najvećeg stabilnog skupa u grafu. **Pokrivač** grafa G je podskup njegovih vrhova takvih da svaki brid grafa ima barem jedan kraj u tom podskupu. Sa $k(G)$,

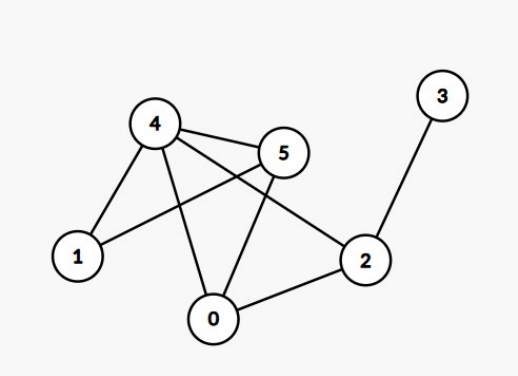
označimo *broj pokrivača klike* tj. najmanji broj potpunih podgrafova grafa G potrebnih da se pokriju vrhovi iz G.

Uvedimo pojam povezanosti grafa. Prije uvođenja pojma povezanosti, definirajmo šetnju, stazu i put.

Definicija 1.7 ***Šetnja*** *grafa G je konačni niz vrhova v_i i bridova e_i oblika $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, , e_l, v_k$.* ***Staza*** *je šetnja čiji su bridovi svi međusobno različiti.* ***Put*** *je staza s međusobno različitim vrhovima.*

Sada možemo uvesti pojam povezanosti grafa.

Definicija 1.8 *Graf G je* ***povezan*** *ako su mu svaka dva vrha povezana putem, a inače je* ***nepovezan****. Povezani podgraf (koji nije pravi podgraf ni jednog drugog povezanog podgrafa od G) naziva se* ***komponenta povezanosti*** *od G.*



Slika 1.4: Povezani graf sa 6 vrhova.

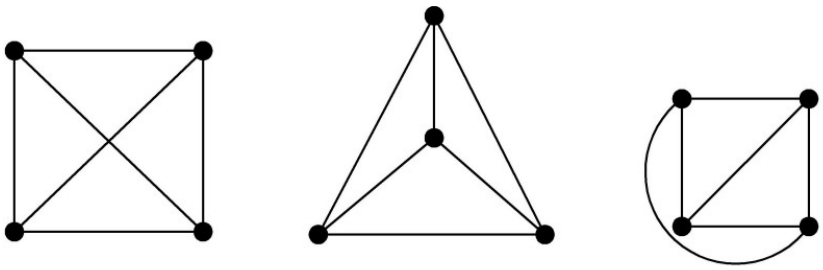
Primjer 1.9 *Promotrimo prethodni graf.* $4-0-2-4-5$ *bi bio primjer šetnje u grafu. Zbog različitosti bridova, ovo bi također bila i staza, ali zbog ponavljanja vrha 4, ovo nije put.*

Definicija 1.10 *Podskup $S \subseteq V$ je* ***separator vrhova*** *vrhova v i w (koji nisu susjedni) ako uklanjanjem podskupa vrhova S, v i w se razdvajaju u dvije odvojene komponente povezanosti. S u tom slučaju nazivamo separator v-w. U slučaju da ne postoji pravi podskup S koji je* ***separator*** *v-w, onda kažemo da je S* ***minimalni separator vrhova*** *v i w .*

Primjer 1.11 *Promotrimo ponovno graf na Slici 1.4. Separator vrhova* 4 *i* 3 *(tj. separator* 3-4*), je $S = \{2\}$ jer se uklanjanjem vrha* 2*, vrhovi* 3 *i* 4 *razdvajaju u različite komponente povezanosti.*

Definicija 1.12 *Za graf kažemo da je* ***planaran*** *ili* ***smjestiv u ravninu*** *ako se može nacrtati u ravnini bez presijecanja bridova. Područje ravnine određeno smještenjem grafa se nazivaju* ***strane****.*

Definicija 1.13 *Planarno smještenje grafa G se naziva* ***ravninski graf****.*



Slika 1.5: Potpuni graf s 4 vrha je planaran. - slika iz skripte *Teorija Grafova - Anka Golemac*

Definicija 1.14 *Neka G graf. Za brid iz grafa G kažemo da je* ***most*** *ako njegovim uklanjanjem se povećava broj komponenti grafa.*

Na grafu sa Slike 1.4 brid 23 je most.

Teorem 1.15 *Za planarno smještenje povezanog grafa $G = (V, E)$ vrijedi $f + |V| - 2 = |E|$, gdje f broja strana grafa.*

Sa $d(f)$ označimo stupanj strane f grafa G tj. stupanj strane je broj bridova u njezinom rubu, gdje se rezni bridovi broje dvostruko.

Lema 1.16 *Za planarno smještenje jednostavnog grafa G vrijedi*
$2m = \sum_i d(f_i)$.

Korolar 1.17 *Za svaki povezani, planarni grafa $G = (V, E)$, vrijedi $|E| \leq 2|V| - 4$.*

Trebat ćemo još i pojam funkcije.

Definicija 1.18 *Neka su X i Y neprazni skupovi.* ***Funkcija*** *je relacija $f \subseteq X \times Y$ za koju vrijedi:*

$$(\forall x \in X)(\exists!\ \ y \in Y)\ \ y = f(x).$$

Funkcija iz definicije je *bijekcija* ako vrijedi:

$$(\forall y \in Y)(\exists!\ \ x \in X)\ \ y = f(x).$$

1.2 Algoritmi i spremanje grafa u računalo

Ne postoji stroga definicija algoritma, ali uvedimo *algoritam* kao proces ili niz pravila za rješavanje problema u konačno mnogo koraka. U računalu, algoritmi su niz naredbi napisanih u redoslijedu koje računalo razumije i izvršava, kako bi dobili željeni rezultat.
Kako bi algoritam bio ispravan, treba vrijediti sljedeće:

1) Mora biti jednoznačno određen prvi korak.

2) Svaki sljedeći korak mora biti jednoznačno određen.

3) Algoritam mora sadržavati konačno mnogo koraka.

4) Algoritam se sastoji od konačno mnogo osnovnih instrukcija koje jednoznačno određuju njegov završetak.

5) Svaki algoritam ima konačno mnogo ulaznih vrijednosti i one su jedinstvene obzirom na problem koji trebaju rješiti.

U računarstvu, postoji pojam *klasa kompleksnosti*. Klase kompleksnosti grupiraju probleme ovisno o vremenu i prostoru potrebnom za njihovo rješavanje. Za potrebe ovog diplomskog rada, predstavimo P, NP i NP-teške klase. *P* klasa je klasa problema odluke (odgovor na pitanje mora biti da ili ne) koja se može riješiti deterministčkom strojem (za svako stanje stroja, sljedeće stanje je jedinstveno određeno) u polinomijalnom vremenu. *NP* klasa je klasa problema odluke koji se mogu riješiti nedeterminističkim strojem u polinomijalnome vremenu. Rješenja NP klase je teško naći, ali se verifikacija problema može obaviti u polinomijalnome vremenu. *NP-teška* klasa je klasa problema u kojoj je svaki problem barem težak kao i najteži problem u NP klasi. Verfikacija ovakvih problema traje dugo. Primjer NP-teškog problema je problem sume podskupa. Problem glasi: Za dani skup prirodnih brojeva i zadanu vrijednost sume, postoji li podskup danog skupa čija je suma jednaka zadanoj.

Uz algoritme vežemo i pojam kompleksnosti algoritma. *Kompleksnost algoritama* nam služi da procijenimo može li program uopće završiti u konačnom vremenu i s danim resursima. Postoje različite vrste složenosti, ali najznačajnije su vremenska i prostorna složenost. Prostorna složenost daje procjenu koliko će memorije algoritam zauzeti - svako spremanje varijable, privremeno ili ne, oduzima memoriju. Vremenska složenost nam govori vrijeme potrebno za izvršenje algoritma.

Osim prostorne i vremenski složenosti, postoje još tri vrste kompleksnosti: kompleksnost najboljeg, kompleksnost najgoreg i kompleksnost prosječnog slučaja. Najčešće se gleda kompleksnost najgoreg slučaja, tj. maksimalan broj koraka za izvođenje nekog algoritma A.

Definicija 1.19 *Neka su $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ funkcije. Kažemo da je g* ***asimptotska gornja međa*** *od f ako postoji $M > 0$ i $n_0 \in \mathbb{N}$ takvi da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $n \geq n_0$ vrijedi $f(n) \leq Mg(n)$. Označavamo f(n) = O(g(n)).*

Oznaka O se naziva i O-notacija, te označava gornju granicu ili najgori slučaj.

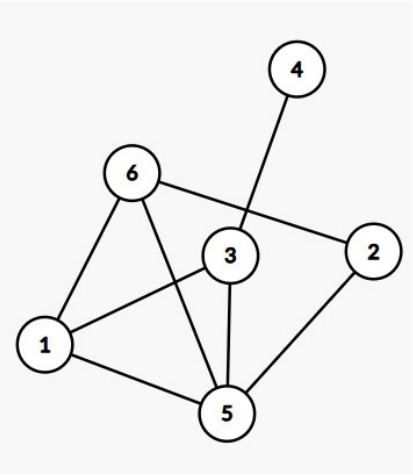
Rast kompleksnosti može biti konstantan, linearan, polinomijalan, logartiamski, eksponencijalan i faktorijelski. Polinomijalna kompleksnost je prihvatljiva, dok je eksponencijala neprihvatljiva za velike vrijednosti jer može dovesti do algoritama kojima trebaju godine da se izvrše. Iako će se algoritam izvršiti, smatra se da je toliko vremensko trajanje izvršavnja neprihvatljivo.

Primjer 1.20 $O(1) < O(logn) < O(\sqrt{n}) < O(n) < O(nlogn) < O(n^2) < O(n^3) < O(2^n) < O(10^n) < O(n!)$

Kompleksnost se računa neovisono o mogućnostima računala kao što su brzina procesora, brzina diska, compilera...

Osvrnimo se sada algoritme primjenjive na probleme teorije grafova. Prije dizajniranja algoritmima, moramo grafove spremiti u računalo. Kako bi unijeli graf u računalo, trebamo unijeti sve informacije o grafu. Primarno, mislimo na njihove vrhove i bridove tj. vrhove i njihove susjednosti. Postoje dva glavna načina unosa susjednosti grafa u računalo: matrica i lista susjeda.

Definicija 1.21 *Neka je $G = (V, E)$ graf sa n vrhova.* ***Matrica susjedstva*** *grafa G je $n \times n$ matrica $A = [a_{ij}]$, gdje a_{ij} broj bridova koji spajaju vrhove v_i i v_j iz G.*



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Slika 1.6: Primjer matrica susjedstva.

Pohranjivanje susjeda na ovaj način je jednostavno jer većina programskih jezika već ima ugrađene matrice ili slične strukture. Ovaj način spremanja bridova nam omogućuje brzo pronalaženje informacije o susjednosti jer je dovoljno provjeriti je li npr. u i-tom stupcu i j-tom retku broj različit od 0 kako bi utvrdili susjednost vrhova v_i i v_j. Koristeći takvo spremanje, provjeravanje susjednosti se može provesti u konstantnom vremenu - neovisno o količini podataka (uvijek je isti postupak traženja). Problem se jedino može pojaviti kod usmjerenih grafova u kojima je poredak bitan. Tada odredimo da npr. redci predstavljaju početni vrh usmjerenog ruba, a stupci krajnji. Tako npr. u retku i i stupcu j dobivamo informaciju o postojanju usmjerenog brida od v_i do v_j.

Jedan od nedostataka korištenja matrice susjedstva kao sredstva pohrane grafa je taj da u slučaju da želimo naći sve susjede od vrha v_i moramo prolaziti kroz cijeli redak/stupac kako bi vidjeli gdje je vrijednost različita od 0. Ovaj postupak je složenosti $O(n)$, gdje je n broj vrhova. Također, još jedan problem je količina potrošene memorije. Za graf s n vrhova, moramo rezervirati n^2 mjesta u memoriji. S obzirom da neki od vrhova ne moraju biti

susjedni, prostor se troši nepotrebno na pohranu nula. Ovo se može popraviti sa listom susjeda.

Lista susjeda nije jedna lista, već lista lista - svaki vrh grafa ima svoju listu. Na i-tom mjestu, koje reprezentira vrh v_i se nalazi lista koja sadrži sve njegove susjede. Umjesto liste možemo podliste susjeda spremati u dictionary tip podatka što je efikasnije. Dictionary je tip podatka koji sprema vrijednosti u parovima - ključ:vrijednost. Za razliku od lista, dictionary nema poredak elemenata. Dictionary je efikasniji od matrice jer olakšava pronalaženje elemenata. Primjerice, za pronaći vrijednost u listi od n elemenata, u najgorem slučju trebalo bi $O(n)$ jer moramo provjeravati svaki element liste. Ovaj postupak u dictionary-u bi trajao $O(1)$ jer bismo odmah "skočili" na mjesto na kojem se nalazi vrijednost.

Primjer 1.22 *Promotrimo graf lijevo na Slici 1.6. Spremimo li liste u listu, uzimajući da i-ta pozicija u listi predstavlja listu susjeda i-tog vrha, lista susjedstva za graf je:* $[[3,5,6],[5,6],[1,5],[3],[1,2,3,6],[1,2,3]]$. *U obliku dictionary-a, ovo bi izgledalo:* $\{1 : [3,5,6]\ ,\ 2 : [5,6]\ ,\ 3 : [1,5]\ ,\ 4 : [3]\ ,\ 5 : [1,2,3,6]\ ,\ 6 : [1,2,3]\}$.

Za razliku od matrice susjedstva koja zauzima n^2 mjesta za memoriju, lista susjedstva zauzima $2m$ mjesta, gdje je m broj bridova. Npr. ako su vrhovi v_i i v_j susjedni, to znači da se v_i sadržan na listi od v_j i obrnuto, pa se zauzima manje mjesta. Za usmjerene grafove, samo odaberemo želimo li da pozicija u glavnoj listi određuje je li vrh početni ili krajnji u odnosu na susjedne mu vrhove iz unutarnje liste.

Nedostatak liste je što može biti sporija od matrice ovisno o problemu. Primjerice, za ukloniti brid v_iv_j moramo prvo provjeriti postoji li uopće - u najgorem slučaju moramo provjeriti sve elemente lista ako nismo sigurni

na kojoj poziciji se nalazi, a u prosjeku (ako pretpostavimo da je po sredini liste) traje $O(m/n)$. Pronalaženje u matrici susjedstva traje, kao što smo ranije napomenuli, $O(1)$, što je očito bolje. Samo brisanje iz liste traje O(1), pa je ukupno vrijeme potrebno za uklanjanje brida iz liste susjeda $O(m/n)$.

Uočimo da je prosječno vrijeme nalaženje svih susjeda od specifičnog vrha u listi susjedstva još uvijek $O(m/n)$ što je brže od $O(n)$ potrebnog u matrici sujedstva.

Zaključno, odabir matrice ili liste ovisi većinski o tipu problema, te o količini dostupne memorije.

Poglavlje 2

Sortiranje

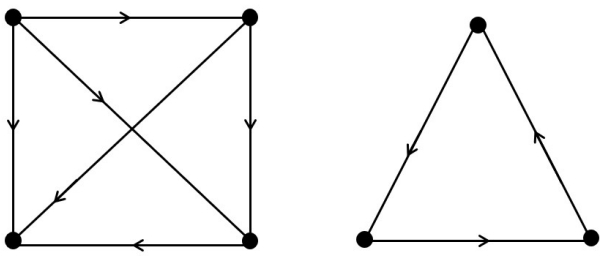
2.1 Topološko sortiranje

U pravome svijetu, često se događa da imamo niz nekakvih događaja koje imaju različite odnose i prioritete. Kad imamo jednostavan $A \rightarrow B \rightarrow C$ odnos, trivijalno je odrediti prioritet izvođenja događaja. Nažalost, postoje kompliciranije situacije gdje možda imamo još ovakvih nizova koji su nevezani ili parcijalno vezani. Primjerice, ako pišemo software i postoje ovisnosti u izvršavanju - neki file-ovi ne mogu raditi prije nego što se drugi izvrše. Topološki sort može odrediti odrediti optimalni redoslijed pokretanja fileova koji su dio software-a bez da se software sruši. Još neki primjeri su organizacija rasporeda, organizacija odrade posla, optimizacija compilera ...

Svi ovi odnosi se mogu prikazati u obliku usmjerenog grafa, ali graf ne bi smio imati usmjerenih ciklusa jer bismo onda imali loop koji se ne bi mogao sortirat. Npr. da imamo događaj A koji povlači događaj B, ali i B povlači A, to se ne bi moglo sortirati jer ne postoji jasno definiran završetak. Dakle, topološko sortiranje se primjenjuje za pronalaženje redoslijeda izvršavanja radnji prikazivih pomoću usmjerenog acikličkog grafa što ćemo prikazati u

ovome poglavlju.

Definicija 2.1 *Neka $G = (V, E)$ potpuni usmjereni graf s n vrhova. Za orijentaciju $\overrightarrow{G}$ kažemo da je* ***tranzitivni turnir*** *ako za svaku trojku vrhova $x, y, z \in V$, vrijedi da $xy \in E$ i $yz \in E$ povlači $xz \in E$.*



Slika 2.1: Tranzitivni turnir (lijevo) i graf čija orijentacija nije tranzitivni turnir (desno).

Drugim riječima, E nema 3-ciklusa. Tranzitivni turnir je usmjereni aciklički graf na kojem je primjenjivo topološko sortiranje spomenuto ranije.

Sljedeći teorem daje algoritam u linearnom vremenu za prepoznavanje tranzitivnih turnira.

Teorem 2.2 *Neka $\overrightarrow{G}$ orijentacija potpunog grafa K_n. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) $\overrightarrow{G}$ je tranzitivni turnir

(ii) $\overrightarrow{G}$ je acikličan

Štoviše, postoji linearno uređenje vrhova $[v_1, \ldots, v_n]$ takvo da vrijede sljedeća svojstva:

(iii) $indeg(v_i) = i - 1$, $\forall i$

(iv) $v_i v_j \in \overrightarrow{G}$ ako i samo ako $i < j$

Dokaz. $\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Iz definicije tranzitivnog turnira proizlazi činjenica da nema 3-ciklusa. Pretpostavimo da graf sadrži k-ciklus, gdje je k najmanji mogući. Tada postoji kabel koji povezuje 2 vrha ciklusa i tvori manji ciklus, što je kontradikcija s minimalnošću od k. Graf je acikličan.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Ako je $\overrightarrow{G}$ acikličan, onda on ima dno i označimo ga s v_n. Vrijedi $indeg(v_n) = n - 1$ zbog potpunosti. Uklanjanjem v_n iz grafa, dobiva se manji aciklički usmjereni graf. Indukcijom ponavljamo postupak i dokazujemo da tvrdnja vrijedi.

$\boxed{(iii) \Rightarrow (iv)}$ Indukcijom.

$\boxed{(iv) \Rightarrow (i)}$ Očito. ■

Prethodni teorem nam daje da je za određivanje je li graf tranzitivni turnir, dovoljno izračunati sve *indeg* i potvrditi da nema jednakih.

Postoji problem generalniji od problema provjere da li je orijentacija grafa tranzitivni turnir, a to je provjera da li je graf acikličan i usmjeren (svaki tranzitivni turnir je je ujedno i aciklični, usmjereni graf). Algoritmi koji rade s acikličkim, usmjerenim grafovima imaju širu primjenu za razliku od tranzitivnih turnira. Jedan takav algoritam je algoritam topološkog sortiranja.

Definicija 2.3 *Linearno sortiranje* $[v_1, \ldots, v_n]$ *grafa* G, $v_i \in V$, *koje zadovoljava svojstvo* $v_i v_j \in \overrightarrow{G} \rightarrow i < j \ , \forall i, j$
naziva se ***topološko sortiranje*** *grafa* G.

1: **for** $j \leftarrow |V|$ to 1 step -1 **do**
2: Nađi dno v od preostalog grafa i označi ga s v_j;
3: Izbriši v i sve rubove incidentne s v iz grafa;
4: **end for**

Prethodni algoritam prolazi kroz sve vrhove trenutnog grafa, te pronalazi

dno koje sigurno postoji zbog usmjerene acikličnosti grafa. Labelira ga i uklanja mu incidentne bridove, te ponavlja postupak na manjem tranzitivnom turniru (zbog svojstva (iv) iz Teorema 2.2). Uklanjanjem i labeliranjem dna osigurava da se npr. u slučaju $u \to v$, v u finalnom topološkom sortiranju pojavi nakon u.

Predstavimo jednu implementaciju prethodnog algoritma. Algoritam će primati usmjereni graf G, te vraćati poruku ako nije acikličan. Ako je, vraća $SORT$ tj. topološki sortiranu listu vrhova grafa, te listu $DFSNUM$ u koju spremamo numeraciju vrhova.

Koristimo i pomoćnu funkciju $TOPSORT()$ koja radi na principu DFS (*Depth-First-Search*). DFS je poznati način pretraživanja grafa koji kreće od danog početnog vrha, te rekurzivno posjećuje svaki susjedni vrh prije povratka na prethodni. DFS algoritam prolazi što je dublje moguće kroz svaku granu prije nego što prijeđe na sljedeću.

$TOPSORT$ za dani vrh x prvo označi da je posjećen ($DFSNUM$ pridruži vrijednost i). Potom prolazi kroz sve susjede od x i provjerava jesu li već posječeni (nisu ako je $DFSNUM$ od susjeda jednak 0). Ako nije posjećen, rekurzivno se na susjedu poziva $TOPSORT$. Ako je posjećen, provjerava se je li sortiran (je li $SORT$ različit od 0). Ako nije, graf nije acikličan. Na kraju, $TOPSORT$ sortira x .

Pokažimo implementaciju topološkog sortiranja temeljenog na prethodno opisanome:

Algorithm 1 Topološko sortiranje

Input: Usmjereni graf G pohranjen kao lista susjeda

Output: $SORT$ (topopološki sortirani vrhovi iz G). Alternativno, poruka o acikličnosti grafa.

1: **for** each $x \in V$ **do**
2: $DFSNUM(x) \leftarrow 0$;
3: $SORT(x) \leftarrow 0$;
4: **end for**
5: $j \leftarrow |V|$;
6: $i \leftarrow 0$;
7: **for** each $x \in V$ **do**
8: **if** $DFSNUM(x) == 0$ **then**
9: $TOPSORT(x)$;
10: **end if**
11: **end for**
12: **return** $DFSNUM$, $SORT$;

Algoritam za $TOPSORT()$ je sljedeći:

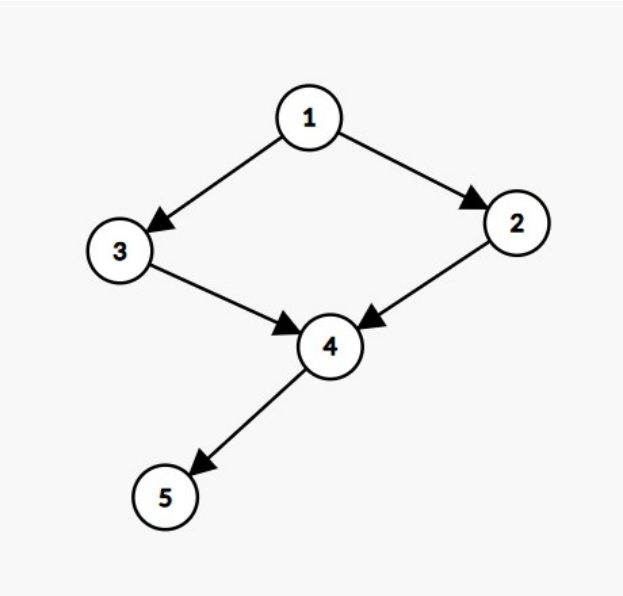
Algorithm 2 TOPSORT

Input: Vrh x, te i, j, SORT, DFSNUM i susjedi iz originalnog algoritma.

Output: Poruka o cikličnosti G

1: $i \leftarrow i + 1$
2: $DFSNUM(x) \leftarrow i$
3: **for** each $y \in Adj(x)$ **do**
4: **if** $DFSNUM(y) == 0$ **then**
5: $TOPSORT(y)$
6: **else if** $SORT(y) == 0$ **then**
7: **return** "G nije acikličan"
8: **end if**
9: **end for**
10: $SORT(x) \leftarrow j$ //smanjujemo labelu od x na manju od prethodno dodijeljene
11: $j \leftarrow j - 1$

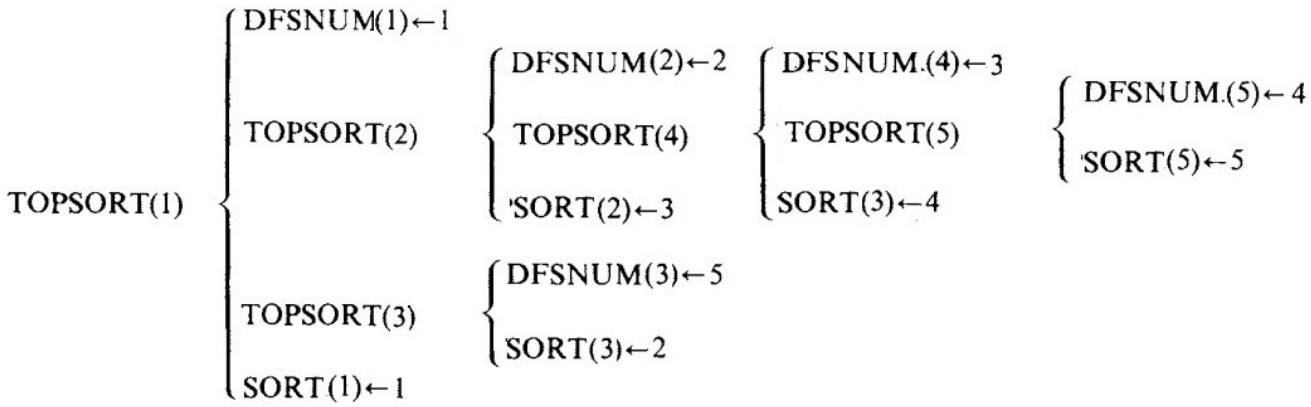
Promotrimo postupak topološkog sortiranja na primjeru.



Slika 2.2: Graf s 5 vrhova.

Provedimo algoritam na prethodnom grafu. Pretpostavimo da je susjednost spremljena u listu. Sortiranje započnimo od vrha 1.

Rekurzivni proces algoritma je vidljiv na slici ispod:



Počinjemo sa $TOPSORT(1)$, te se redom ugnježđeno pozivaju $TOPSORT(2)$,

$TOPSORT(4)$ i $TOPSORT(5)$. Nakon što se ponovno vratimo u $TOPSORT(1)$, poziva se još i $TOPSORT(3)$.

Finalni rezultat sortiarnja je:

Vrh	DFSNUM	SORT
1	1	1
2	2	3
3	5	2
4	3	4
5	4	5

Poglavlje 3

Savršeni grafovi

Savršeni grafovi su bitni u računalstvu zbog svoje široke primjene u rješavanju optimizacijskih problema, te dizajnu algoritama. Podsjetimo se oznaka uvedenih u uvodnom poglavlju potrebnih za definiranje savršenog grafa.
Neka je $G = (V, E)$ neusmjereni graf.

$\omega(G)$ predstavlja veličinu maksimalne klike grafa G tj. broj njezinih vrhova.

$\chi(G)$ predstavlja kromatski broj grafa G tj. minimalan broj boja potrebnih za pravilno bojanje vrhova. Uočimo da je skup vrhova koji su obojani istom bojom stabilan.

$\alpha(G)$ predstavlja veličinu najvećeg stabilnog skupa grafa G.

$k(G)$ predstavlja kardinalnost najmanjeg pokrivača grafa klikama tj. minimalan broj potpunih podgrafova A_i takvih da $V = A_1 \cup \ldots \cup A_{k(G)}$.

Teorem 3.1 *Vrijedi* $\omega(G) = \alpha(G^C)$ *, te* $\chi(G) = k(G^C)$*, gdje* G^C *komplement grafa* G*.*

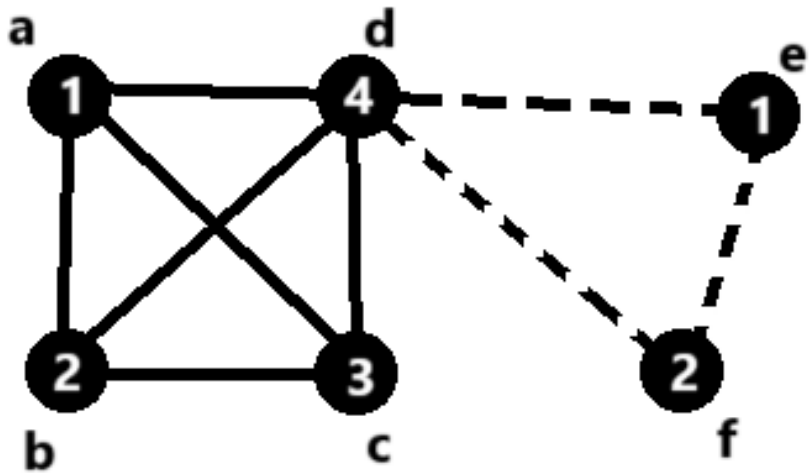
Dokaz. Znamo da vrijedi da $e \in E$ ako i samo ako $e \notin E^C$. Neka je $k \in \mathbb{N}_0$.

Ako je $\omega(G) = k$ tj. k je veličina maksimalne klike, onda je k vrhova iz klike međusobno povezano. U G^C, ti vrhovi neće biti povezani pa će tvoriti

stabilni skup veličine k koji će biti maksimalan zbog maksimalnosti klike. Suprotni smjer je analogan, pa vrijedi $\omega(G) = \alpha(G^C)$.

Neka je sad $\chi(G) = k$ tj. $V = B_1 \cup \ldots \cup B_k$, gdje je B_i $(i = 1, \ldots, k)$ skup vrhova obojan u boju i. Skupovi B_i su stabilni. U G^C, vrhovi iz klase B_i će svi biti međusobno povezani, pa će vrhovi u B_i u G^C tvoriti potpuni skup tj. kliku od G^C. Zaključujemo $k(G^C) = k = \chi(G)$.

■



Primjer 3.2 *Promotrimo graf G na Slici 3.2. Vrhovi grafa su označeni s $V = \{a, b, c, d, e, f\}$.*

$\chi(G) = 4$, te je na slici prikazano jedno bojanje gdje su boje označene s brojevima od 1 do 4.

$\alpha(G) = 2$, te je $\{b, e\}$ primjer stabilnog skupa grafa.

$\omega(G) = 4$, te je maksimalna klika podgraf od G induciran s vrhovima $\{a, b, c, d\}$ (bridovi nacrtani ispunjenom linijom).

$k(G) = 2$, *te se* V *može prikazati kao suma klike abcd (ispunjena linija) i klike def (iscrtkana linija).*

Označimo sa G_A podgraf grafa G induciran skupom vrhova $A \subseteq G$.

Definicija 3.3 *Neusmjereni graf* G *sa svojstvima:*

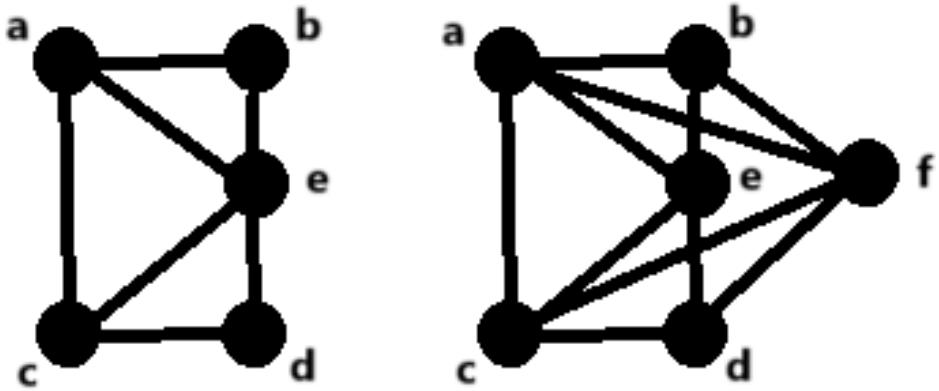
$S1)$ $\omega(G_A) = \chi(G_A)$, $\forall A \subseteq V$

$S2)$ $\alpha(G_A) = k(G_A)$, $\forall A \subseteq V$

naziva se ***savršeni graf****.*

Iz teorema 3.1 slijedi da ako vrijedi S1) za graf G, onda vrijedi S2) za njegov komplement G^C.

Uvedimo pojam *množenja vrhova.* Neka je G graf sa vrhom v. Graf Gv dobivamo dodavanjem novog vrha w koji je susjedan svim $u \in Adj(v)$. Tada ka?emo da je Gv dobiven množenjem vrha v sa G.



Slika 3.1: Graf G (lijevo) i graf Ge (desno).

Pojam množenja grafa možemo i proširiti.

Neka je $G = (V, E)$ neusmjereni graf, te neka $v_1, \ldots, v_n \in V$. Neka je $h = (h_1, \ldots, h_n)$ vektor takav da $h_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, n$. Za graf $H = Gh$ dobiven zamjenom svakog v_i sa stabilnim skupom $\{v_i^1, \ldots, v_i^{h_i}\}$ sa h_i elemenata, te za koji vrijedi: $v_i^q v_j^k \in E_H$ ako i samo ako $v_i v_j \in E$, kažemo da je dobiven iz G **množenjem vrhova**.

Može se pokazati ekvivalencija svojstava iz definicije savršenog grafa. Svojstva $S1$) i $S2$) će biti ekvivalentna i sa trećim svojstvom :

$S3$) $\qquad \omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|$, $\forall A \subseteq V$.

Uvedimo prvo dvije pomoćne leme.

Lema 3.4 *Neka je H = Gh graf dobiven iz G = (V,E) množenjem vrhova. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

1) Za G vrijedi svojstvo S1) ⇒ Za H vrijedi svojstvo S1).

2) Za G vrijedi svojstvo S2) ⇒ Za H vrijedi svojstvo S2).

Dokaz. Provedimo dokaz indukcijom. Lema vrijedi za $|V| = 1$.

Pretpostavimo da lema vrijedi za sve grafove sa manje od $|V|$ vrhova. Neka $H = Gh$. Ako je $h_i = 0$, za neki i, onda se H dobije iz $G - v_i$ množenjem vrhova. Primijetimo da ako vrijedi $S1$) za G, onda vrijedi i za $G - v_i$. Analogno za $S2$). Iz pretpostavke indukcije vrijede svojstva 1) i 2).

Sada možemo pretpostaviti da je svaki $h_i \geq 1$. Pošto se H može dobiti kao niz manjih množenja, dovoljno je pokazati rezultat za $H = Gv$. Sa w označimo dodanu kopiju od v.

1) Pretpostavimo da za G vrijedi S1). Vrijedi $\omega(Gv) = \omega(G)$ zbog nesusjednosti od v i w. Neka je $\omega(G)$ broj boja s kojima je G obojen, te neka su v i w obojani istom bojom. Tada smo dobili bojanje od Gv sa $\omega(Gv)$ boja, pa za Gv vrijedi $S1$).

Krenemo li od $\chi(G)$, znamo da se v i w mogu obojati istom bojom u Gv zbog njihove nesusjednosti, pa $\chi(G) = \chi(Gv)$. Pošto su v i w obojani istom bojom, vrijedi $\omega(Gv) = \omega(G)$, pa vrijedi $S1$) za Gv.

Pokažimo da $S1$) vrijedi i za sve inducirane mu podgrafe. Neka $B \subseteq V(Gv)$. Ako je $w \in B$, onda je B inducirani podgraf od G, pa vrijedi $S1$). Neka $w \notin B$ tj. neka je $B = B_1 \cup \{w\}$ inducirani podgraf od Gv. $\omega(G_B)$ je ili jednak $\omega(G_{B_1})$ (ako postoje vrhovi maksimalne klike od B_1 s kojima w nije susjedan) ili jednak $\omega(G_{B_1}) + 1$ (ako je w susjedan sa svim vrhovima iz maksimalne klike od B_1 - tada tvori veću kliku). Analogno na $\chi(G_B)$. Iz pretpostavke $S1$) za G vrijedi ili $\omega(G_B) = \omega(B_1) + 1 \Rightarrow \chi(G_B) = \chi(G_{B_1}) + 1$ ili $\omega(G_B) = \omega(B_1) \Rightarrow \chi(G_B) = \chi(G_{B_1})1$, pa $S1$) vrijedi za svaki inducirani podgraf od Gv.

$\boxed{2)}$ Pretpostavimo da za G vrijedi $S2$). Tvrdimo da $\alpha(Gv) = k(Gv)$. Sa N označimo pokrivač klike od G, $|N| = k(G) = \alpha(G)$, K_v klika od N koja sadrži v. Tada može vrijediti jedno od sljedećega:

2.1) v je sadržan u stabilnom skupu S od G tj. $|S| = \alpha(G)$.

Tada je $S \cup \{w\}$ stabilan skup od Gv, pa $\alpha(Gv) = \alpha(G) + 1$. Pošto je $N \cup \{\{w\}\}$ pokrivač od Gv, vrijedi $k(Gv) \leq k(G) + 1 = \alpha(G) + 1 = \alpha(Gv) \leq k(Gv)$ tj. $\alpha(Gv) = k(Gv)$.

Pokažimo da vrijedi za svaki $B \subseteq Gv$. Odaberimo proizvoljni B. Ako su $v, w \in B$, onda vrijedi analogna logika iz prethodno provedenog dokaza 2.1), te je $S \cup \{w\}$ stabilan skup od G_B i $\alpha(G_B) = \alpha(G_{B-v}) + 1$. Ako $w \notin B$, onda $S1$) za Gv slijedi direktno iz pretpostavke. Slučaj kad $w \in B, v \notin B$ ne treba promatrati jer je w uveden kao kopija v, pa nema smisla gledati slučaj kad $w \in B, v \notin B$.

2.2) Niti jedan maksimalni stabilni skup ne sadrži v.

Tada $\alpha(Gv) = \alpha(G)$. Svaka klika od N siječe maksimalni stabilni skup

točno jednom, ovo posebno vrijedi i za K_v.

v nije element niti jednog maksimalnog, stabilnog skupa, pa $D = K_v - \{v\}$ siječe svaki maksimalni stabilni skup od G točno jednom. Ovo povlači:

$$\alpha(G_{V-D}) = \alpha(G) - 1 \Rightarrow k(G_{V-D}) = \alpha(G_{V-D}) = \alpha(G) - 1 = \alpha(G_v) - 1$$

Pokrivač od Gv dobivamo tako da uzmemo pokrivač klike od G_{V-D} veličine $\alpha(Gv) - 1$ sa dodanom klikom $D \cup \{w\}$. Tada $\alpha(Gv) = k(Gv)$.

Promotrimo opet podgraf od Gv induciran skupom vrhova B. Ako ni v ni w nisu u B, vrijedi trivijalno iz pretpostavke. Ako su oba u B, onda vrijedi ista logika opisana u 2.2) i za Gv jer w ne povećava broj najvećeg stabilnog skupa grafa, nego samo tvori novu kliku sa D. Ako je v u B, a w nije, onda se $S2$) nasljeđuje iz G, jer nismo uveli novi vrh. Tada $S2$) vrijedi za Gv.

■

Lema 3.5 *Neka je G neusmjereni graf čiji koji zadovoljava S2), te neka je H graf dobiven iz G množenjem vrhova. Ako za G vrijedi S3), vrijedi i za H.*

Dokaz. Neka vrijedi $S3$) za G. Pretpostavimo suprotno - odaberimo H takav da se dobije množenjem najmanjeg mogućeg broja vrhova iz G, ali neka je H i takav da za njega ne vrijedi $S3$). Tada $\omega(H)\alpha(H) \leq |X|$, gdje X vrhovi od H i $S3$) ne vrijedi za svaki inducirani podgraf od H. Smijemo pretpostaviti da se G množi barem sa 1 (iz dokaza Leme 3.4), te da se neki vrh u množi sa $h \geq 2$.

Neka su $U = \{u^1, \ldots, u^h\}$ vrhovi od H susjedni u. Promotrimo vrh u^1. Zbog minimalnosti od H, $S3$) vrijedi za H_{X-u^1}. Slijedi:

$$|X| - 1 = |X - u^1| \overset{(*)}{\leq} \omega(H_{X-u^1})\alpha(H_{X-u^1}) \leq \omega(H)\alpha(H) \overset{(**)}{\leq} |X| - 1.$$

$(*)$ - jer H_{X-u^1} inducirani podgraf od H, pa primijenimo $S3$).

$(**)$ - jer smo pretpostavili $\omega(H)\alpha(H) \leq |X|$.

Sada $\omega(H_{X-u^1})\alpha(H_{X-u^1}) = \omega(H)\alpha(H)$

Definirajmo:

$p = \omega(H_{X-u^1}) = \omega(H)$, jer uklanjanje u^1 ne mijenja veličinu maksimalne klike,

$q = \alpha(H_{X-u^1}) = \alpha(H)$, jer uklanjanje u^1 ne mijenja veličinu maksimalnog stabilnog skupa,

$pq = \omega(H)\alpha(G) = |X| - 1$.

Iz Leme 3.4 slijedi da H_{X-U} zadovoljava $S2$) (jer H_{X-U} dobiven iz $G - u$ množenjem vrhova). Tada se H_{X-U} može pokriti sa q potpunih podgrafova od H i neka su $K_1, \ldots, K_q$ ti podgrafovi. Smijemo pretpostaviti da su oni međusobno disjunktni i da vrijedi $|K_1| \geq \ldots \geq |K_q|$.

Vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{q} |K_i| = |X - U| = |X| - h = pq - (h - 1)$$

.

Zbog $|K_i| \leq p$, najviše $h - 1$ od K_i ne pridonose sumi, pa $|K_1| = \ldots = |K_{q-h+1}| = p$.

Neka H' podgraf od H induciran sa $X' = K_1 \cup \ldots \cup K_{q-h+1} \cup \{u^1\}$. Tada $|X'| = p(q - h + 1) + 1 < pq + 1 = |X|$.

Iz minimalnosti od H slijedi da $\omega(H')\alpha(H') \geq |X'|$.

Iz $p = \omega(H) \geq \omega(H')$, slijedi $\alpha(H') \geq |X'|/p > q - h + 1$.

Neka S' stabilni skup od H' veličine $q - h + 2$. $u^1 \in S'$ jer bi inače, po

definiciji H', sadržavao dva vrha kilke.

Sada je $S = S' \cup$ U stabilni skup od H veličine $q+1$, što je kontradikcija s definicijom q (jer je q po definiciji maksimalna veličina stabilnog skupa).

■

Teorem 3.6 (Teorem savršenog grafa) *Za neusmjereni graf G = (V,E), sljedeže tvrdnje su ekvivalentne:*

S1) $\omega(G_A) = \chi(G_A)$, $\forall A \subseteq V$

S2) $\alpha(G_A) = k(G_A)$, $\forall A \subseteq V$

S3) $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|$, $\forall A \subseteq V$

Dokaz.

$\boxed{S1) \Rightarrow S3)}$ Pretpostavimo da $\omega(G_A)$ broj boja s kojim možemo obojati graf G_A. Pošto ima maksimalno $\alpha(G_A)$ vrhova dane boje, slijedi da $\omega(G_A)\alpha(G_A) \geq |A|$.

$\boxed{S3) \Rightarrow S1)}$ Neka $G = (V, E)$ zadovoljava svojstvo $S3$). Indukcijom po broju vrhova se može pokazati da svaki podgraf induciran od pravog podskupa vrhova u G zadovoljava $S1) - S3)$. Za $|V| = 1$, $S1)$ vrijedi trivijalno. Pretpostavimo da teorem vrijedi za sve grafove sa manje vrhova od G. Pokažimo i da $\omega(G) = \chi(G)$.

Da je S stabilan skup od G takav da $\omega(G_{V-S}) < \omega(G)$, mogli bismo S obojati jednom bojom, a G_{V-S} s preostalih $\omega(G) - 1$ boja. Tada imamo $\chi(G) \leq \omega(G)$.

Pretpostavimo da $\chi(G) < \omega(G)$. Neka G_{V-S} ima $\omega(G)$-kliku $K(S)$ za svaki stabilni S od G. Označimo sa $\mathbb{S}$ kolekciju svih stabilnih skupova od G. Uočimo da vrijedi $S \cap K(S) = \emptyset$. Za svaki $x_i \in V$, sa h_i označimo broj klika $K(S)$ koje sadrže x_i. Neka $H = (X, F)$ dobiven iz G množenjem x_i sa h_i. Po Lemi 3.5 vrijedi $\omega(H)\alpha(H) \geq |X|$. Vrijedi:

$$|X| = \sum_{x_i \in V} h_i = \sum_{S \in \mathbb{S}} |K(S)| = \omega(G)|\mathbb{S}|,$$

$$\omega(H) \leq \omega(G),$$

$$\alpha(H) = \max_{T \in \mathbb{S}} \sum_{X_i \in T} h_i = \max_{T \in \mathbb{S}} \left[\sum_{S \in \mathbb{S}} |T \cap K(S)| \right] \leq |\mathbb{S}| - 1$$

Iz ovoga slijedi $\omega(H)\alpha(H) \leq \omega(G)(|\mathbb{S}| - 1) < |X|$ što je kontradikcija.

$\boxed{\text{S2)} \iff \text{S3)}}$ Iz prethodno dokazanog slijedi :

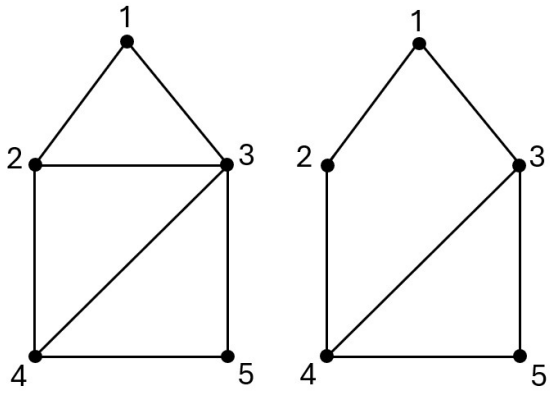
G zadovoljava $S2) \iff G^C$ zadovoljava $S1) \iff G^C$ zadovoljava $S3) \iff G$ zadovoljava $S3)$ ■

3.1 Triangulirani grafovi

Jedan primjer savršenog grafa je tzv. triangulirani graf. Triangulirani grafovi imaju brojne primjene u računarstvu, ali glavna im je uloga da se njihovim korištenjem pojednostavljaju brojni algoritmi. Primjerice, tringulirani grafovi se mogu koristiti u optimiziranju redoslijeda upita koji se unose u baze podataka, u radu na Bayesovim neuronskim mrežama, modeliranju društvenih mreža, u biologiji za razumijevanje interakcije gena...

Još jedan dobar primjer je pronalaženje maksimalne klike trinaguliranog grafa. Problem pronalaženja maksimalne klike se smatra NP teškim problemom. Na trianguliranim grafovima, taj problem se može riješiti u linearnome vremenu.

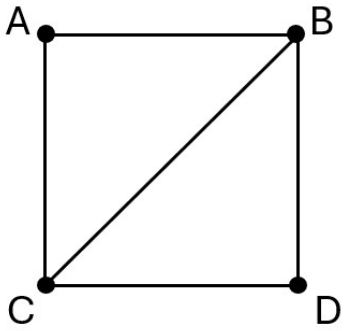
Definicija 3.7 *Za neusmjereni graf G kažemo da je* ***trianguliran*** *ako svaki ciklus duljine strogo veće od 3 sadrži kabel.*



Slika 3.2: Primjer trianguliranog (lijevo) i netrianguliranog (desno) grafa.

Za vrh v grafa G kažemo da je *jednostavan* ako Adj(v) inducira potpuni podgraf od G tj. $Adj(v)$ je klika iako ne nužno maksimalna.

Posebno, vrh w stupnja 0 također smatramo jednostavnim jer je $Adj(w) = \emptyset$ trivijalno klika.



Slika 3.3: Graf s 4 vrha.

Primjer 3.8 *U grafu 3.3, A i D su jednostavni vrhovi, a B i C nisu jer brid* $\{A, D\}$ *nije u grafu.*

Može se pokazati da svaki triangulirani graf ima barem dva jednostavna vrha (dokaz kasnije u poglavlju), te su 1965. godine Fulkerson i Gross

predložili iterativni način prepoznavanja triangularnih grafova temeljen na ovome svojstvu. Ideja je ta da se ponavljano traže jednostavni vrhovi i eliminiraju iz grafa sve dok ili ostanemo bez vrhova - i time dokažemo da je graf trianguliran - ili dođemo do toga da više nemamo jednostavnih vrhova - tada graf nije trianguliran.

Za algebarsko definiranje prethodno opisanog algoritma trebamo definirati *savršenu shemu*.

Definicija 3.9 *Neka $G = (V, E)$ neusmjereni graf i neka $\sigma = [v_1, \ldots, v_n]$ jedan poredak njegovih vrhova. Kažemo da je σ* ***savršena shema za uklanjanje vrhova*** *ili savršena shema ako je svaki v_i jednostavan vrh induciranog podgrafa $G_{v_i,\ldots,v_n}$.*

Drugim riječima, svaki skup $X_i = \{v_j \in Adj(v_i) \mid j > i\}$ je potpun.
Uočimo da savršena shema ne mora biti jedinstvena.

Primjer 3.10 *Promotrimo graf lijevo na Slici 3.2. Njegova shema nije jedinstvena. Primjerice, i $[1, 2, 4, 3, 5]$ i $[5, 4, 3, 2, 1]$ su sheme zadanog grafa.*

Teorem 3.11 *Neka $G = (V, E)$ neusmjereni graf. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) G je trianguliran

(ii) G ima savršenu shemu. Dodatno, svaki jednostavni vrh može biti početak savršene sheme.

(iii) Svaki minimalni separator vrhova inducira potpuni podgraf od G.

Dokaz. $\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Neka $[a, x, b, y_1, \ldots, y_k, a]$, gdje $k \geq 1$, jednostavni ciklus u G. Bilo koji minimalni separator a-b mora sadržavati vrhove x i y_i , za neki i takav da $xy_i \in E$, što će predstavljati kabel ciklusa.

$\boxed{(i) \Rightarrow (iii)}$ Pretpostavimo da S minimalni separator a-b s odgovarajućim komponentama G_A i G_B koje sadrže vrhove a i b redom. Zbog minimalnosti od S, svaki x iz S je susjedan nekom vrhu iz $A = V(G_A)$ i nekom vrhu iz $B = V(G_B)$, pa za bilo koja dva vrha x i y iz S postoje putevi $xa_1 \dots a_r y$ i $yb_1 \dots b_t x$, gdje $a_i \in A$ i $b_i \in B$, i neka su putevi odabrani tako da budu minimalne duljine. Slijedi da je $xa_1 \dots a_r y b_1 \dots b_t x$ jednostavni ciklus duljine barem 4 što povlači da mora imati kabele. Ali, pošto po definiciji separatora vrhova vrijedi $a_i b_j \notin E$ i pošto po minimalnosti odabranih putova $a_i a_j \notin E$ i $b_i b_j \notin E$, jedini mogući kabel je xy iz E, pa smo došli do kontradikcije.

Kako bismo mogli nastaviti s dokazom, trebamo prvo pokazati da vrijedi Diracova lema.

Lema 3.12 (Dirac) *Svaki triangulirani graf $G = (V, E)$ ima jednostavni vrh. Štoviše, ako G nije klika, onda ima dva nesusjedna jednostavna vrha.*

Dokaz. Ako je G potpun graf, lema je trivijalna (po definiciji jednostavnog vrha).

Pretpostavimo da G ima dva nesusjedna vrha a i b, te da lema vrijedi za sve grafove s manje vrhova od G. Neka je S minimalni separator a-b, te neka su G_A i G_B komponente povezanosti grafa G_{V-S} koje redom sadrže a i b. Promotrimo komponentu A. Indukcijom, ili G_{A+S} ima dva nesusjedna vrha od kojih jedan mora biti u komponenti koja sadrži a (pošto S inducira potpuni podgraf po Teoremu 3.11) ili G_{A+S} je sam potpun, te je bilo koji vrh iz komponente koja sadrži a jednostavan u G_{A+S}.

Pošto $Adj(A) \subseteq A + S$, onda je jednostavni vrh od G_{A+S} u A je jednostavan u cijelom G. Analogno za B.

■

Diracova lema nam daje mogućnost odabira barem dva vrha za svaku poziciju prilikom konstruiranja sheme. Sada možemo odabrati neki vrh v_n kojeg ćemo izbjegavati kako bismo ga mogli staviti na zadnje mjesto tj. n-to mjesto. Potom biramo v_{n-1} koji je susjedan sa v_n kojeg ćemo sačuvati za (n-1)-vo mjesto u shemi. Susjeda biramo kako bismo očuvali definiciju savršene sheme. Potom biramo susjeda v_{n-2} od v_{n-1} za $(n-2)$-o mjesto u shemi itd. Takvim procesom se shema kreira unatrag.

Sada nastavimo s dokazom Teorema 3.11.

$\boxed{(i) \Rightarrow (ii)}$ Po Diracovoj lemi, iz trijangularnosti od G slijedi postojanje jednostavnog vrha. Označimo taj vrh sa v_1 i dodamo ga na kraj naše savršene sheme koja je za sada prazna. Pošto je G_{V-v} trianguliran i manji od G, onda je i G_{V-v} trianguliran. Tada opet primijenimo Diracovu lemu i odabremo jednostavni vrh w iz G_{V-v} i stavljamo ga iza v u shemi. Nastavljanjem postupka dobivamo savršenu shemu.

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Neka C jednostavni ciklus od G, te neka v vrh iz C s najmanjim indeksom u savršenoj shemi. Pošto $|Adj(v) \cap C| \geq 2$, onda nadolazeća jednostavost od v garantira postojanje kabela u C.

■

Matematičari Rose, Tarjan i Leuker su predstavili algoritam, temeljen na Diracovoj lemi, za prepoznavanje triangularnih grafova koji se može izvesti u linearnom vremenu. Algoritam koristi leksikografksi BFS. BFS tj. *breadth-first search* je način pretrage grafa takav da se prvo pretraži odarbrani vrh, potom se pretražuju svi vrhovi s prve razine tj. svi vrhovi susjedni originalnom vrhu. Nakon toga prelazimo na drugu razinu tj. vrhove koji su susjedni

s vrhovima s prve razine (koje još nisu posjećeni). Postupak se nastavlja dok svi vrhovi nisu pretraženi. Općenito, BFS pretražuje jednu po jednu razinu vrhova gdje je razina r skup svih vrhova susjednih vrhovima iz razine $r-1$. Leksikografski BFS koristi leksikografski uređaj za biranje vrhova. Primjerice, $[1,2,3,4] < [1,3,5]$.

Idući algoritam, koji koristi leksikografski BFS, će vraćati poredak vrhova P čiji će inverz tvoriti savršenu eliminacijsku shemu. Naime, $P(i) = v$ govori da se vrh v nalazi na i-toj poziciji u savršenoj eliminacijskoj shemi tj. inverz P^{-1} vraća poziciju danog vrha u savršenoj shemi.

Algorithm 3 Leksikografski BFS

Input: Liste susjeda neusmjerenog grafa G

Output: Uređenje P vrhova iz G

1: Incijaliziramo vrijednosti od P na *null* (označimo svaki vrh s *null*)
2: Incijaliziramo vrijednosti od L na $\{\}$
3: **for** $i \leftarrow n : 1$ **do**
4: Odaberimo vrh v označen s *null* čija je vrijednost L leksikografski najveća.
5: $P(i) = v$ //Numeriranje vrha v s indeksom i
6: **for** svaki nenumerirani vrh w iz $Adj(v)$ **do**
7: Dodaj i u $L[w]$ //Dodavanje i u labelu od w
8: **end for**
9: **end for**
10: **Return** P;

Za svaki i, označimo s $L_i(x)$ labelu od x kad je i-ti vrh numeriran. Primjerice, $L_{n-1}(x) = \{n\}$ ako i samo ako $x \in Adj(P(n))$, gdje P numeriranje vrhova iz algoritma. Labela od x je skup poredan leksikografki unazad. Vrh

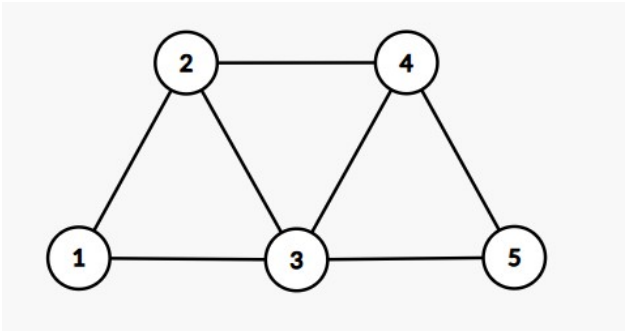
x s leksikografski najvećom labelom je kandidat za jednostavni vrh u trenutnom koraku. Vrijede sljedeća svojstva:

(L1) $L_i(x) \leq L_j(x)$, $j \leq i$

(L2) $L_i(x) \leq L_i(y) \Rightarrow L_j(x) \leq L_j(y)$, $j \leq i$

(L3) Ako $P^{-1}(a) < P^{-1}(b) < P^{-1}(c)$ i $c \in Adj(a) - Adj(b)$, onda postoji vrh $d \in Adj(b) - Adj(a)$ takav da $P^{-1}(c) < P^{-1}(d)$

Primjer 3.13 *Pronađimo savršenu eliminacijsku shemu za sljedeći graf.*



	1		2		3		4		5		6	
vrh	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P	L	P
1	{}	-	{5}	-	{5}	4	{5}	4	{5}	4	{5}	4
2	{}	-	{5}	-	{5,4}	-	{5,4}	3	{5,4}	3	{5,4}	3
3	{}	-	{}	5	{}	5	{}	5	{}	5	{}	5
4	{}	-	{5}	-	{5}	-	{5,3}	-	{5,3}	2	{5,3}	2
5	{}	-	{5}	-	{5}	-	{5}	-	{5,2}	-	{5,2}	1

Pošto su sve vrijednosti od L prazni skupovi, biramo proizvoljno vrh 3*, stavljamo $P(5) = 3$ i update-amo vrijednosti skupova od L. Pošto u idućem koraku nema najveće vrijednosti L, proizvoljno biramo vrh* 1*. U idućem koraku je leksikografski najveći $L(3) = \{5, 4\}$, pa biramo vrh* 3 *itd. dok ne dobijemo cijeli P.*

Napomena! Poredak P se povećava što je vrh bliže korijenu pretraživanog stabla.

Podsjetimo se da $P^{-1}(v) = i$ označava poziciju i vrha v u eliminacijskoj shemi.

Teorem 3.14 *Neusmjereni graf $G = (V, E)$ je trianguliran ako i samo ako je poredak P dobiven Algoritmom 3 savršena shema.*

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$ Dokaz provodimo indukcijom. Za $|V| = n = 1$, dokaz trivijalan. Pretpostavimo da teorem vrijedi za sve grafove sa manje od n vrhova, $n \in \mathbb{N}$, te neka P poredak koji dobijemo kad provedemo algoritam na trianguliranom G. Indukcijom, dovoljno je pokazati da je $v = P(1)$ jednostavan vrh od G.

Pretpostavimo suprotno tj. da v nije jednostavan. Odaberimo $v_1, v_2 \in Adj(v)$ takve da v_1v_2 nije brid u G i takve da je v_2 najveći mogući obzirom na poziciju u P. Prisjetimo se da vrijedi gornja napomena.

Promotrimo sljedeći induktivni postupak. Pretpostavimo da za dane vrhove $v_1, \ldots, v_m$ vrijedi: $\forall i, j > 0$

(1) $vv_i \in E$ ako i samo ako $i \leq 2$,

(2) $v_iv_j \in E$ ako i samo ako $|i - j| = 2$,

(3) $P^{-1}(v_1) < P^{-1}(v_2) < \ldots < P^{-1}(v_m)$,

(4) v_j je najveći vrh ovisno o P za koji vrijedi $v_{j-2}v_j \in E$ i $v_{j-3}v_j \notin E$.

Označimo $v_0 = v$ i $v_{-1} = v_1$. Već smo pokazali slučaj sa dva brida.

v_{m-2}, v_{m-1}, v_m zadovoljavaju hipotezu svojstva (L3) za a,b,c , pa biramo v_{m+1} za najveći vrh veći od v_m koji je susjedan vrhu v_{m-1}, ali nije susjedan v_{m-2}. Ako je v_{m+1} susjedan v_{m-3}, onda svojstvo (L3) primijenjeno na $v_{m-3}, v_{m-2}, v_{m+1}$ povlači postojanje vrha većeg od v_{m+1} koji je susjedan s v_{m-2}, ali ne i sa v_{m-3}. Pošto znamo da v_{m+1} veći od v_m, dolazimo do kontradikcije sa svojstvom (4). Stoga, v_{m+1} nije susjedan s v_{m-3}. Još iz svojstava (1), (2) i činjenice da svaki ciklus sa 4 ili više vrhova ima kabel, slijedi $v_iv_{m+1} \notin E$, $\forall i = 0, \ldots, m-4, m$.

Opisani induktivni postupak se može provoditi beskonačno što je kontradikcija s konačnošću grafa. Stoga v mora biti jednostavan.

$\boxed{\Leftarrow}$ Iz Teorema 3.11.

■

Ovime je dokazana ispravnost prethodnog algoritma. Pokažimo još i moguću složenost leksikografskog BFS.

U koraku 1, inicijalizacija svakog vrha traje $O(n)$, gdje je n broj vrhova. Koraci od 2 do 5 (for petlja) su složenosti $O(n+m)$, gdje je m broj bridova, jer moramo proći bar kroz svaki vrh i brid u postupku.

Promotrimo konkretnu implementaciju linija 5 i 6, te uvedimo potrebne varijable.

Neka je Q red skupova $S_l = \{v \in V : labela(v) = l \text{ i } P^{-1}(v) \text{ nije definiran}\}$ poredanih leksikografski od najmanjeg prema najvećem.

Svaki S_l predstavimo kao duplo-vezanu listu tj. listu gdje svaki element i njegov susjed obostrano pokazuju jedno na drugo. Originalno se u Q nalazi samo V tj. $S_\emptyset = V$. Ovo znači da svi vrhovi za skup labela imaju prazan skup.

Uvedimo i funkciju $FLAG$ koju ćemo inicijalizirati tako da svakom skupu iz Q pridružimo 0. FLAG se koristi kako bismo znali jesmo li u stanju updateanja ili brisanja.

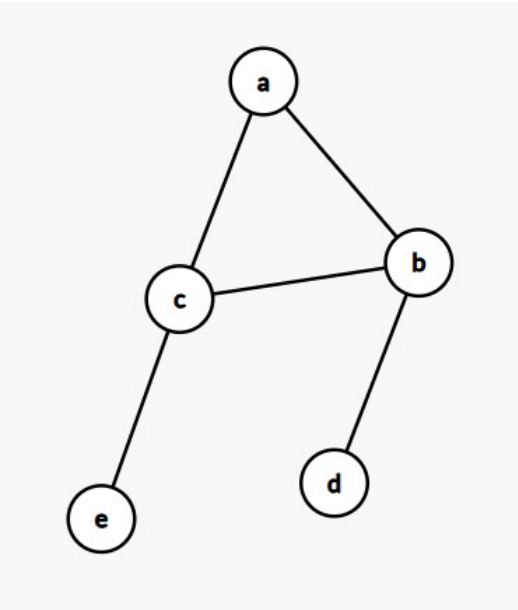
$SET(w)$ je referentna funkcija koja pokazuje na S_i u kojem je vrh w. Prilikom stvaranja novog S_{i+1}, $SET(w)$ će prestati pokazivati S_i i početi pokazivati na S_{i+1}. Lista $LIST$ je originalno prazna i ona prati stanja skupova vrhova kroz algoritam. P i P^{-1} su predstavljeni nizovima.

Vrh v biramo iz zadnjeg skupa iz Q (leksikografski maksimum) i brišemo ga iz $SET(v)$, te kreiramo novi S_{l_i} za svaki stari S_l koji je sadržavao nenumerirani vrh $w \in Adj(v)$.

Algorithm 4 Implementacija linija 5 i 6 Algoritma 3

1: **for** svaku nenumerirani $w \in Adj(v)$ **do**
2: **if** $FLAG(SET(w)) == 0$ **then**
3: Kreirajmo novi skup S i ubacimo ga u Q odmah nakon $SET(w)$;
4: $FLAG(SET(w)) = 1$;
5: $FLAG(S) = 0$;
6: (Stavljamo pokazivač od $SET(w)$ na $LIST$)
7: **end if**
8: Postavimo S odmah nakon $SET(w)$ u Q
9: Izbrišimo w iz $SET(w)$
10: Dodajmo w u S
11: $SET(w) \rightarrow S$;
12: **end for**
13: **for** svaki skup T u $LIST$ **do**
14: $FLAG(T) = 0$;
15: **if** T $== \emptyset$ **then**
16: Izbriši T iz Q;
17: **end if**
18: **end for**

Složenost implementacije je $|Adj(v)|$, pa je finalna složenost $O(|Adj(v)|)+$ $O(n) + O(n+m) = O(n+m)$.



Slika 3.4: Graf s 5 vrhova

Primjer 3.15 *Prikažimo stanja od Q za vrijeme provedbe leksikografskog BFS na grafu 3.4.*

$Q = [S_\emptyset] = \{a, b, c, d, e\}$ *izbacimo* e

$Q = [\{a, b, d\}, \{c\}]$ *(primijetimo* $\{a, b, d\} < \{c\}$*), izbacimo* c

$Q = [\{a, b\}, \{d\}]$ *izbacimo* d

$Q = [\{a\}, \{b\}]$ *izbacimo* b

$Q = \emptyset$

Prikažimo i algoritam za testiranje savršene sheme potreban kako bismo mogli s Leksikografskim BFS prepoznavati triangulirane grafove.

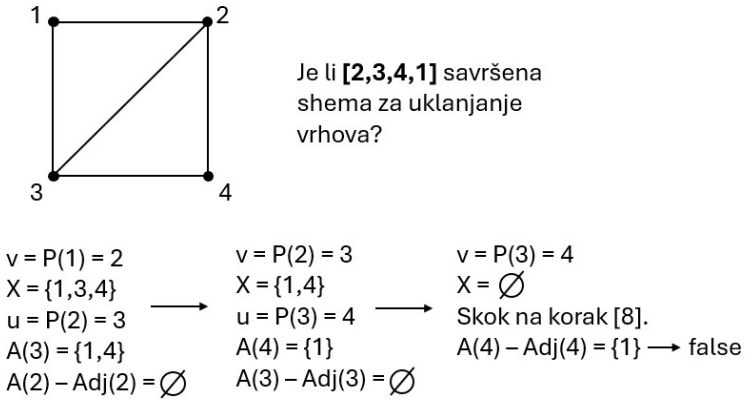
Algorithm 5 Test - savršena shema

Input: Lista susjeda od G i poredak P od V.

Output: true ako P savršena shema, inače false

1: $A(v) = \emptyset \ \forall v$
2: **for** $i = 1 : (n\text{-}1)$ **do**
3: $v = P(i)$;
4: $X = \{x \in Adj(v) : P^{-1}(v) < P^{-1}(x)\}$; //skup vrhova koji se pojavljuju nakon v u P
5: Ako $X == \emptyset$, idi na [8]
6: $u = P(minP^{-1}(x) : x \in X)$;
7: Dodaj X-$\{u\}$ u $A(u)$;
8: **if** $A(v) - Adj(v) \neq \emptyset$ **then**
9: **return** false
10: **end if**
11: **return** true
12: **end for**

Algoritam za svaki vrh provjerava tvore li preostali vrhovi kliku. U slučaju da za neki vrh preostali podgraf ne tvori kliku, vraća se $false$. Pozivom algoritma, lista $A(u)$ skuplja sve vrhove za koje se kasnije provjerava jesu li susjedni s u tj. u $A(u)$ spremamo vrhove s kojima u mora biti povezan kako bi P bila savršena shema. Provjera se vrši tek kad $u = P(i)$ kako u $P^{-1}(v)$-toj iteraciji ne bi došlo do pretrage $Adj(u)$.



Slika 3.5: Postupak algoritma za testiranje savršene sheme. Za dani graf, $[2, 3, 4, 1]$ nije savršena shema.

Za P i P^{-1} koristimo nizove, a $Adj(v)$ i $A(v)$ spremamo u liste. Složenost koraka od [4 do 7] se može izvesti istovremeno u jednom prolasku kroz Adj(v), a skok u koraku [5] će se izvesti točno $j - 1$ puta, gdje je j broj povezanih komponenti u G. Korak [8] koji traži vrh u $A(v)$ koji nije susjedan v se može izvesti sa složenošću $O(|Adj(v)| + |A(v)|)$ ako koristimo niz $TEST$ duljine n koji inicializiran nule na sljedeći način:

```
1: for w ∈ Adj(v) do
2:     TEST(w) = 1;
3: end for
4: for w ∈ A(v) do
5:     if TEST(w) == 0 then
6:         return "nije prazno";
7:     end if
8: end for
9: for w ∈ Adj(v) do
10:    TEST(w) = 0;
11: end for
12: return "prazno";
```

Ukupna složenost algoritma za testiranje savršene sheme je proporcionalna

$$|V| + \sum_{v \in V} |\mathrm{Adj}(v)| + \sum_{u \in V} |A(u)|$$

, gdje $A(u)$ finalna vrijednost.

Pošto se $Adj(v)$ pojavljuje kao dio najviše jednog $A(u)$, možemo zamijeniti zadnja dva sumanda sa $O(|E|)$. Finalna složenost je tada proporcionalna $|V| + |E|$.

Teorem 3.16 *Algoritam 5 korektno testira je li dan poredak vrhova P savršena eliminacijska shema. Složenost algoritma je $|V| + |E|$.*

Dokaz. Dokažimo da je algoritam korektan. Algoritam vraća false u $P^{-1}(u)$ - toj iteraciji ako i samo ako postoje vrhovi u, v i w, gdje je u definiran kao u liniji [4] za vrijeme $P^{-1}(v)$ - te iteracije, te su u i w susjedi od v, ali u i w sami nisu susjedni.

Pretpostavimo da P nije savršena shema, te da algoritam vraća true. Neka v vrh s najvećim $P^{-1}(v)$ takvim da $X = \{x \in Adj(v) : P^{-1}(v) < P^{-1}(x)\}$ nije potpun. Neka u definiran u liniji [6] u $P^{-1}(v)$-toj iteraciji, nakon čega $X - \{u\}$ u sljedećem koraku dodajemo u $A(u)$. Pošto u $P^{-1}(v)$ - toj iteraciji preskačemo korak [9], svaki $x \in X - \{u\}$ je susjedan u i svaki par $x, y \in X - \{u\}$ je susjedan.

Činjenica da svaki par $x, y \in X - \{u\}$ je susjedan, slijedi iz makismalnosti od $P^{-1}(v)$, pa je X potpun, što je kontradikcija. Znači da mora algoritam vraćati false kad nije savršena shema. ■

3.2 Graf usporedivosti i TRO

Još jedan poznati primjer savršenih grafova su grafovi usporedivosti, koji će biti definirani u Definiciji 3.17. Baš kao i triangulirani grafovi, primjena grafova usporedivosti dopušta rješavanje problema koji su u općem slučaju (kad graf nije graf usporedivosti) NP-teški, te omogućuju optimiziranje brojnih algoritma. Kao i kod trinaguliranih grafova, grafovi usporedivosti primjenjivi su u mnogim područjima kao što su stvaranje rasporeda, bojanje grafova, biologija, društve mreže... U poglavlju ćemo konstruirati tzv. TRO (Transitive Orinetation) algoritam, te ćemo uvesti matematičku pozadinu potrebnu za definiranje tog algoritma. Predstavit ćemo i pojam dekompozicije grafa koji će nam biti potreban u ovom postupku i uvesti algoritam za samo provođenje dekompozicije koji je jako koristan u računalstvu, ali i sam za sebe. Primjerice, dekompozicija grafova je korisna u paralelnom programiranju gdje različite komponente grafa možemo rasporediti u različite procese kako bi se mogli istovremeno izvršavali.

Za usmjereni graf G s orijentiranim skupom bridova F, sa F^{-1} ćemo

označiti skup orijentiranih bridova s orijentacijom suprotnom od orijentacije bridova u F. Označimo još sa $A + B$ uniju disjunktnih skupova A i B.

Definicija 3.17 *Neusmjereni graf $G = (V,E)$ nazivamo **grafom usporedivosti** ako postoji orijentacija $\overrightarrow{G} = (V, F)$ takva da vrijede svojstva:*

(S1) $F \cap F^{-1} = \emptyset$,

(S2) $F + F^{-1} = E$,

(S3) $F^2 \subseteq F$,

*gdje F^2=$\{ac : ab, bc \in F$ za neki vrh $b\}$. F se naziva **tranzitivna orijentacija** od G.*

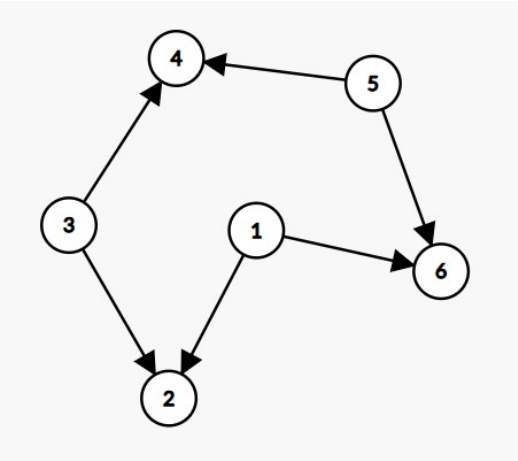
Primjer 3.18 *Promotrimo graf s bridovim as $\{\{a, b\}, \{a, c\}\}$. Promotrimo orijentaciju bridova $F = \{(a, b), (a, c)\}$. Nema dvostrukih orijentacija, pa vrijedi (S1), te oba brida imaju orijentaciju, pa vrijedi (S2). Uočimo da je $F^2 = \emptyset \subseteq F$, pa vrijedi (S3). Postoji usmjerena orijentacija danih bridova koja zadovoljava svojstva (S1)-(S3), pa je graf s danim bridovima graf usporedivosti. Uočimo da smo mogli odabrati i orijentaciju za koju ne bi vrijedila tranzitivnost npr. $\{(b, a), (a, c)\}$.*

Uvedimo sad još neke pojmove koji će nam biti potrebni za definirati algoritme. Definirajmo binarnu relaciju R na bridovima neusmjerenog grafa $G = (V, E)$ na sljedeći način:

$abRcd$ ako i samo ako $\{$ $a = c$ i $bd \notin E$ ili $b = d$ i $ac \notin E$ $\}$

Kažemo da *ab direktno forsira cd* kada su bridovi ab i cd u relaciji R tj. ovako definirana relacija R se naziva **relacija forsiranja**.

Primijetimo da je relacija R irefleksivna tj. brid ne može forsirati samog sebe zato što ne vrijedi da, za neki brid xy, xy forsira yx, a $xy = yx$ zbog neusmjerenosti grafa.



Slika 3.6: Forsiranje grafa obzirom na orijentaciju brida (1,2).

Refleksivno i tranzitivno zatvorenje R^* od R je relacija ekvivalenije, te razdvaja E u klase koje ćemo nazivati *implikacijskim klasama* od G. Uočimo, ab i cd će biti u istoj implikacijskoj klasi ako i samo ako postoji niz bridova $ab = a_0b_1Ra_1b_1R \dots a_kb_k = cd$, $0 \leq k$. Ovakav niz nazivamo R**-lanac** od ab do cd. Tada **ab forsira cd**.

Uočimo da vrijedi $abRcd$ akko $baRdc$, te abR^*cd akko baR^*dc.

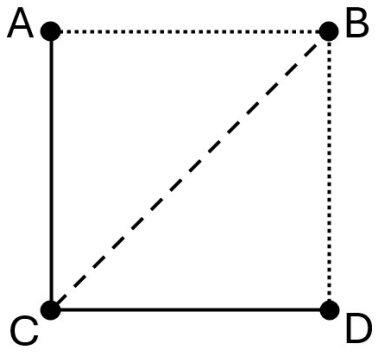
Primjer 3.19 *Promotrimo put* $G = (\{1,2,3,4\}, \{\{1,2\},\{2,3\},\{3,4\}\})$. *Postoji lanac 12 R 32 R 34, pa kažemo da 12 forsira 34.*

Označimo sa $\sigma(G)$ kolekciju implikacijskih klasa od G. Definiramo $\widehat{\sigma} = \{\widehat{A} : A \in \sigma(G)\}$, gdje $\widehat{A} = A \cup A^{-1}$ simetrično zatvorenje od A. Članovi od $\widehat{\sigma}$ se nazivaju *klasama boja.*

Primjer 3.20 *Graf na slici 3.3 ima šest implikacijskih klasa:*

$$A_1 = \{BC\}\ ,\ A_2 = \{AB, DB\}\ ,\ A_3 = \{AC, DC\},$$
$$A_1^{-1} = \{CB\}\ ,\ A_2^{-1} = \{BA, BD\}\ ,\ A_3^{-1} = \{CA, CD\},$$

Tada $\widehat{\sigma} = \{\widehat{A_1}, \widehat{A_2}, \widehat{A_3}\}$. *Na slici 3.7 je prikazano bojanje obzirom na* $\widehat{\sigma}$.



Slika 3.7: Bojanje grafa obzirom na njegovu klasu boja $\widehat{\sigma}$.

Teorem 3.21 *Neka je A implikacijska klasa neusmjerenog grafa G. Ako G ima tranzitivnu orijentaciju F, onda je* $A \cap \widehat{A} = \emptyset$, *te vrijedi jedno od sljedećeg:*

1) $F \cap \widehat{A} = A$

2) $F \cap \widehat{A} = A^{-1}$

Dokaz. Za prije definiranu relaciju R vrijedi $xyRx'y'$ i $xy \in F$, onda $x'y' \in F$. Ponavljanjem postupka dobivamo da vrijedi $F \cap A = \emptyset$ ili da vrijedi $A \subseteq F$. Iz $A \subseteq F + F^{-1}$ slijedi

$F \cap A = \emptyset \Rightarrow A \subseteq F^{-1} \Rightarrow A^{-1} \subseteq F \Rightarrow F \cap \widehat{A} = A^{-1}$,

a iz $F \cap F^{-1} = \emptyset$ slijedi

$A \subseteq F \Rightarrow A^{-1} \subseteq F^{-1} \Rightarrow F \cap A^{-1} = \emptyset \Rightarrow F \cap \widehat{A} = A$. ■

Neka $ab = a_0b_0Ra_1b_1R \ldots Ra_kb_k = cd$. Za svaki $i = 1, \ldots, k$ vrijedi $a_{i-1}b_{i-1}Ra_ib_{i-1}Ra_ib_i$ jer zbrojeni srednji bridovi daju jedan od preostala dva. Tada vrijedi sljedeća lema.

Lema 3.22 *Ako* abR^*cd, *onda postoji R-lanac od ab do cd oblika* $ab = a_0b_0Ra_1b_0Ra_1b_1Ra_2b_1R \ldots Ra_kb_k = cd$.

Lanac iz prethodne leme nazivamo *kanonskim R-lancem.*

Lema 3.23 (Lema o trokutu) *Neka su A, B i C implikacijske klase neusmjerenog grafa G = (V,E) takve da* $A \neq B$, $A \neq C^{-1}$ *sa bridovima* $ab \in C$, $ac \in B$ *i* $bc \in A$.

(1) Ako $b'c' \in A$, *onda* $ab' \in C$ *i* $ac' \in B$.

(2) Ako $b'c' \in A$ *i* $a'b' \in C$, *onda* $a'c' \in B$.

(3) Ni jedan brid u A nije incidentan sa vrhom a.

Dokaz. Po prethodnoj lemi postoji kanonski R-lanac $bc = b_0c_0Rb_1c_0Rb_1c_1R \dots Rb_kc_k = b'c'$. Pokažimo prvo (1). Indukcijom po i, vrijedi sljedeće:

$ac_i \in B$, $b_{i+1}c_i \in A$, ac_i nije u relaciji R s $b_{i+1}c_i \Rightarrow ab_{i+1} \in E$,

$b_{i+1}b_i \notin E \Rightarrow ab_{i+1}\mathrm{R}ab_i$, $ab_i \in C$,

$b_{i+1}a \in C^{-1}$, $b_{i+1}c_{i+1} \in A$, $b_{i+1}a$ nije u relaciji R s $b_{i+1}c_{i+1} \Rightarrow ac_{i+1} \in E$,

$c_{i+1}c_i \notin E \Rightarrow ac_{i+1}\mathrm{R}ac_i$, $ac_i \in B$.

Posebno, iz ovoga vrijedi $ab' = ab_k \in C$, $ac' = ac_k \in B$, što dokazuje (1).

Za dokazati svojstvo (2), pretpostavimo $b'c' \in A$, $a'b' \in C$. Iz (1) slijedi $ac' \in B$. Promotrimo lanac $ab = a_0b_0Ra_1b_0Ra_1b_1R \dots Ra_lb_l = a'b'$. Iz ovog lanaca dobivamo $ac' = a_0c'Ra_1c'R \dots Ra_lc' = a'c'$. Tada $ac'R^*a'c'$ i $a'c' \in B$ dokazuje (2).

(3) direktno slijedi iz (1). ■

Teorem 3.24 *Neka je A implikacijska klasa od neusmjerenog grafa* $G = (V, E)$. *Vrijedi točno jedno od sljedećeg:*

1) $A = \widehat{A} = A^{-1}$

2) $A \cap A^{-1} = \emptyset$, *A i* A^{-1} *su tranzitivni, te su jedina tranzitivna orijentacija od* $\widehat{A}$.

Dokaz. 1) Pretpostavimo da $A \cap A^{-1} \neq \emptyset$, te da je $xy \in A \cap A^{-1}$. Pretpostavimo još da vrijedi $xy\mathrm{R}^*yx$. Za bilo koji $ab \in A$ vrijedi $ab\mathrm{R}^*xy$ i baR^*yx. Iz ekvivalencije relacije R^* slijedi da abR^*ba i $ba \in A$ što povlači $A = \widehat{A}$.

2) Pokažimo da vrijedi tranzitivnost. Pretpostavimo $A \cap A^{-1} = \emptyset$, $xy, yz \in A$. Pretpostavimo da $xz \notin E$. Tada $xyRzy$, pa iz toga slijedi da $zy \in A$. Sada $yz \in A^{-1}$, što je kontradikcija. Tada $xz \in E$.

Pretpostavimo da je B implikacijska klasa od G koja sadrži xz, te pretpostavimo da je A različit od B. Iz $A \neq A^{-1}$ i $xy \in A$ lema o trokutu povlači da $xy \in B$ što je također kontradikcija. Sada je $xz \in A$ i A je tranzitivan. Ovo povlači i tranzitivnost od A^{-1}.

Pošto je A implikacijska klasa od $\widehat{A}$, iz Teorema 3.21 slijedi da su A i A^{-1} jedine tranzitivne orijentacije od $\widehat{A}$. ■

Definirajmo simpleks kako bi mogli uvesti pojam dekompozicije grafa.

Definicija 3.25 *Neka $G = (V, E)$ neusmjereni graf. Potpuni podgraf (V(S),S) na r vrhova zovemo* ***simpleksom ranga r*** *ako je svaki brid xy iz S sadržan u različitoj klasi boja u G.*

Osim simpleks, postoji još i multipleks. *Multipleks* dobiven iz simpleksa S ranga r definiramo kao neusmjereni podgraf $(V(M), M)$, gdje $M = \{xy \in E : xyR^*ab$, za neki $ab \in S\}$. Alternativno, M je unija svih klasa boja od G koje zadovoljavaju da u presjeku sa S nisu prazne. Za multipleks kažemo da je maksimalan ako nije pravilno sadržan ni u jednom većem multipleks.

Primjer 3.26 *Na grafu sa Slike 3.7, podgraf sastavljen od vrhova $a - b - d$ čini simpleks ranga 3.*

Definicija 3.27 *Neka $G = (V, E)$ neusmjereni graf. Particiju skupa bridova $E = \widehat{B_1} + \ldots + \widehat{B_k}$ zovemo* ***G-dekompozicijom*** *od E ako je B_i implikacijska klasa od $\widehat{B_1} + \ldots + \widehat{B_k}, \forall i = 1, \ldots, k$.*

Niz bridova $[x_1y_1, \ldots, x_ky_k]$ *se naziva* ***dekompozicijska shema*** *od* G *ako postoji* G*-dekompozicija* $E = \widehat{B_1} + \ldots + \widehat{B_k}$ *za koju vrijedi da* $x_iy_i \in B_i$, $\forall i = 1, \ldots, k$.

Alternativno, graf ima dekompoziciju ako se može prikazati kao netrivijalna kompozicija induciranih si podgrafova. Dekompozicijsku shemu ćemo nazivati još i samo shemom.

Za danu G-dekompoziciju postoji više odgovarajućih dekompozicijskih shema, ali obrat ne vrijedi. Za danu dekomozicijsku shemu postoji samo jedna odgovarajuća G-dekompozicija.

Prikažimo sad algoritam koji provodi dekompoziciju danog neusmjerenog grafa G.

Algorithm 6 Algoritam dekompozicije

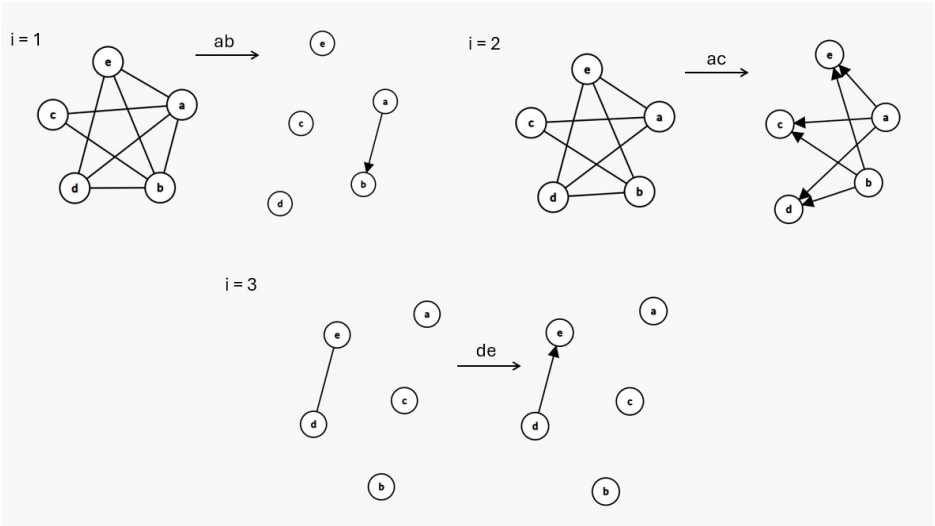
Input (i preduvjeti): Neka $G = (V, E)$ neusmjereni graf, te uzmimo i=1 i $E_1 = E$.

Result: Dekompozicijska shemu $[x_1y_1, \ldots, x_ky_k]$ i odgovarajuća G-dekompozicija $\widehat{B_1} + \ldots + \widehat{B_k}$.

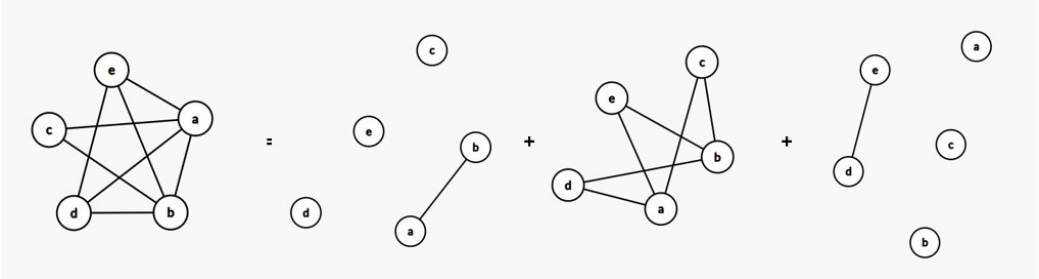
1: Odaberimo proizvoljni brid $e_i = x_iy_i \in E_i$
2: Numerirajmo implikacijske klase B_i od E_i koje sadrže x_iy_i
3: $E_{i+1} := E_i - \widehat{B_i}$
4: **if** $E_{i+1} = \emptyset$ **then**
5: $k = i$; //broj boja
6: STOP
7: **else**
8: i+=1;
9: Povratak na korak 1.
10: **end if**

3.2. Graf usporedivosti i TRO

Primijetimo da možemo uzeti $y_i x_i$ umjesto $x_i y_i$, ali onda u G-dekompoziciji B_i mijenjamo s B_i^{-1}.



Slika 3.8: Primjer provedbe dekompozicijskog algoritma. Grafovi lijevo predstavljaju E_i, na liniji je odabrani $x_i y_i$, a desno su B_i



Slika 3.9: E = $\widehat{B}_1 + \widehat{B}_2 + \widehat{B}_3$, sa Slike 3.8

Teorem 3.28 *Neka A implikacijska klasa od neusmjerenog grafa G=(V,E), te neka C implikacijska klasa od* $E - \widehat{A}$. *Vrijedi jedno od sljedećeg:*

(i) C je implikacijska klasa od E, te je A je implikacijska klasa od $E - \widehat{C}$.

(ii) $C = B + D$, *gdje su B i D implikacijske klase od E, a* $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}$ *je multipleks od E ranga 2.*

Dokaz. Uklanjanje $\widehat{A}$ iz E može uzrokovati stapanje nekih implikacijskih klasa od E, pa označimo sa C uniju k implikacijskih klasa od E.

Pretpostavimo $k \geq 2$. Tada postoji trokut na vrhovima a, b, d takav da $bd \in \widehat{A}$, te su ili $ad \in B$ i $ab \in D$ ili $da \in B$ i $ba \in D$, gdje su B i D različite implikacijske klase od E koje su sadržane u C. Bez gubitka općenitosti (jer postupak analogan za C^{-1}) pretpostavimo da $ad \in B$ i $ab \in D$. Pretpostavimo da $B = D^{-1}$. Tada $ba, ad \in B$, ali $bc \notin B$, pa po Teoremu 3.24 je $B = \widehat{B} = B^{-1}$. Ovo povlači $B = D$ što je kontradikcija, pa $\widehat{B} \cap \widehat{D} = \emptyset$ i trokut $\{a, b, d\}$ je obojan u 3 boje što znači da je $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{D}$ multipleks ranga 2.

Bilo koji R-lanac u $E - \widehat{A}$ koji sadrži bridove iz $\widehat{B}$ i $\widehat{D}$ ne smije sadržavati bridove iz drugih implikacijskih klasa jer svi trokuti iz E s jednim bridom u $\widehat{A}$ i drugim u $\widehat{B}$, moraju imati treći u $\widehat{D}$. Isto vrijedi za sve kombinacije pripadnosti bridova. Tada bi R-lanac bio izomorfan kao simpleks sa $\{a, b, d\}$ trokutom, pa je $k = 2$ i $C = B + D$.

Preostaje pokazati da je za $k = 1$, A implikacijska klasa od $E - \widehat{C}$. Iz prethodno pokazanoga, ako A nije implikacijska klasa od $E - \widehat{C}$, onda je $C + \widehat{A} + \widehat{A}_1$ multipleks ranga 2 u E, gdje je A_1 neka treća implikacijska klasa od E. Tada C ne može sam biti implikacijska klasa od $E - \widehat{A}$, pa $k \neq 1$ što je kontradikcija.

■

Napokon, iskažimo i dokažimo TRO teorem koji će nam biti jako važan za konstrukciju algoritma.

Teorem 3.29 (TRO teorem) *Neka $G = (V, E)$ neusmjereni graf s G-dekompozicijom $E = \widehat{B_1} + \ldots + \widehat{B_k}$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(i) G je graf usporedivosti,

(ii) $A \cap A^{-1} = \emptyset$, za svaku implikacijsku klasu A od E,

(iii) $B_i \cap B_i^{-1} = \emptyset, i = 1, \ldots, k$,

(iv) svaki ["ciklus"] bridova $v_1v_2, \ldots, v_qv_1 \in E$ takvi da $v_{q-1}v_1, v_qv_2, v_{i-1}v_{i+1} \notin E$ je parne duljine, $i = 2, \ldots, q-1$.

Dodatno, uz ova svojstva, $B_1 + \ldots + B_k$ je tranzitivna orijentacija od E.

Dokaz. $\boxed{\text{(i)} \Rightarrow \text{(ii)}}$ Iz Teorema 3.21.

$\boxed{\text{(ii)} \Rightarrow \text{(iii)}}$ Dokaz indukcijom. Pošto je B_1 implikacijska klasa od E, onda vrijedi $B_1 \cap B_1^{-1} = \emptyset$. Za k=1, dokaz gotov. Pretpostavimo da implikacija vrijedi za sve G-dekompozicije grafa duljine $< k$. Tada, posebno, implikacija vrijedi i za $E - \widehat{B_1}$. Neka C implikacijska klasa od $E - \widehat{B_1}$. Po Teoremu 3.28, ili je C implikacijska klasa od E, pa vrijedi $C \cap C^{-1} = \emptyset$, ili je $C = B + D$, gdje su B i D implikacijske klase od E za koje vrijedi $\widehat{B} \cap \widehat{D} = \emptyset$. Ovo povlači :

$$C \cap C^{-1} = (B + D) \cap (B^{-1} + D^{-1}) = (B \cap B^{-1}) + (D \cap D^{-1}) = \emptyset$$

Indukcijom dobijemo $B_i \cap B_i^{-1} = \emptyset, \forall i = 2, \ldots, k$.

$\boxed{\text{(iii)} \Rightarrow \text{(i)}}$ Neka je $E = \widehat{B_1} + \ldots + \widehat{B_k}$ G-dekompozicija od E, $B_i \cap B_i^{-1} = \emptyset$. Po Teoremu 3.24, B_1 je tranzitivan. Za k=1, implikacija vrijedi. Pretpostavimo da implikacija vrijedi za sve G-dekompozicije grafa duljine $< k$. Po pretpostavci, $F = B_2 + \ldots + B_k$ je tranzitivna orijentacija od $E - \widehat{B_1}$. Preostaje pokazati da $B_1 + F$ tranzitivna.

Neka $xy, yz \in B_1 + F$. Ako su oba vrha u B_1 ili su oba u F, onda po tranzitivnosti B_1 i F, $xz \in B_1 + F$. Stoga, bez gubitka općenitosti, pretpostavimo $xy \in B_1, yz \in F$, što povlači xyR^*zy tako da $xz \in E$.

Pokažimo da xz mora biti u $B_1 + F$. Da nije, onda bi zx bio u $B_1 + F$. Ali tada $zx \in B_1, xy \in B_1$ što povlači $zy \in B_1$ što je kontradikcija, te $zx \in F, yz \in F$, pa $yx \in F$ što povlači još jednu kontradikciju. Sada xz mora biti u $B_1 + F$. Analogno $xy \in F, yz \in B_1$ povlači $xz \in B_1 + F$.

Vrijedi da je $B_1 + \ldots + B_k$ tranzitivna orijentacija od E.

$\boxed{\text{(iv)} \iff \text{(i)}}$ Neka $v_1v_2 \in A \cap A^{-1} \neq \emptyset$. Po Lemi 3.22, postoji R-lanac oblika v_1v_2 R v_3v_2 R v_3v_4R $\ldots$ R v_qv_{q-1} R $v_qv_{q+1} = v_2v_1$.

Pošto sve prve koordinate imaju neparan indeks, q je očito neparan. Također, $v_1v_2v_3 \ldots v_qv_1$ je ciklus, pa dobivamo kontradikciju.

Ako je E ciklus neparne duljine q, onda v_1v_2 R v_3v_2 R v_3v_4 $R \ldots R$ v_qv_{q-1} R v_qv_1 R v_2v_1 predstavlja jedan R-lanac u E, što povlači $A \cap A^{-1} \neq \emptyset$ za implikacijske klase koje sadrže v_1v_2 što je kontradikcija.

■

Kombinacijom TRO teorema i dekompozicijskog algoritma napokon dobivamo TRO algoritam koji nam služi za prepoznavanje grafova usporedivosti i pridruživanja tim grafovima tranzitivne orijentacije.

Algorithm 7 TRO algoritam

Input: Neka zadan neusmjereni graf $G = (V, E)$.

Output: Vraća se ili tranzitivna orijentacija F grafa G ili poruka da uneseni graf nije graf usporedivosti.

1: $i = 1$;
2: $E_i = E$;
3: $F = \emptyset$;
4: Proizvoljno biramo $x_i y_i \in E_i$;
5: Numeriramo implikacijske klase B_i od E_i koje sadrže $x_i y_i$;
6: **if** $B_i \cap B_i^{-1} = \emptyset$ **then**
7: Dodaj B_i u F.
8: **else return** G nije graf usporedivosti.
9: **end if**
10: $E_{i+1} := E_i - \widehat{B_i}$;
11: **if** $E_{i+1} = \emptyset$ **then**
12: $k = i$; **return** F;
13: **else**
14: i+=1;
15: Povratak na korak [4].
16: **end if**

Algoritam može vraćati različite F ovisno o odabranoj shemi, ali može se pokazati da će broj iteracija k uvijek biti isti bez obzira na odabranu shemu. Ta činjenica slijedi direktno iz Golumbicevog teorema kojeg ćemo dokazati nakon idućeg pomoćnog teorema.

Teorem 3.30 *Neka* $[e_1, \ldots, e_k]$ *dekompozicijska shema grafa G, te neka* π *permutacija brojeva* $1, \ldots, k$. *Tada* $[e_{\pi(1)}, \ldots, e_{\pi(k)}]$ *također dekompozicijska*

shema od G.

Dokaz. Dokaz provodimo za $k \geq 2$ (jer za k=1 se nema što dokazati). Neka $\widehat{B_1} + \ldots + \widehat{B}_k$ G-dekomozicija sheme iz iskaza teorema. Fiksirajmo $i < k$. Neka $E_i = \widehat{B_i} + \ldots + \widehat{B}_k$, C_i implikacijska klasa od E_i koja sadrži e_{i-1}, te C_{i+1} implikacijska klasa od $E_i - \widehat{C}_i$ koja sadrži e_i. Po Teoremu 3.28 ili $B_{i+1} = C_i, B_i = C_{i+1}$ ili postoji implikacijska klasa A od E_i takva da $\widehat{B}_{i+1} = \widehat{A} + \widehat{C}_i$ i $\widehat{C}_{i+1} = \widehat{A} + \widehat{B}_i$. Bilo koji od ovih rezultata povlači $\widehat{B}_i + \widehat{B}_{i+1} = \widehat{C}_i + \widehat{C}_{i+1}$. Tada je $\widehat{B}_1 + \ldots + \widehat{C}_i + \widehat{C}_{i+1} + \ldots + \widehat{B}_k$ G-dekompozicija od E sa shemom $[e_1, \ldots, e_{i+1}, e_i, \ldots, e_k]$ ■

Teorem 3.31 (Golumbic) *Neka $G = (V, E)$ neusmjereni graf.*

(i) Svaka shema od G je jednake duljine.

(ii) Svaka G-dekompozicija je jednake duljine.

(iii) Ako su $[e_1, \ldots, e_k]$ i $[f_1, \ldots, f_k]$ sheme od G, onda za bilo koji e_i postoji f_j takav da $[e_1, \ldots, e_{i-1}, f_j, e_{i+1}, \ldots e_k]$ koji je također dekompozicijska shema od G.

Dokaz. Ako G ima implikacijsku klasu A za koju $E = \widehat{A}$, onda je bilo koja dekompozicijska shema duljine 1 i bilo koji brid može biti odabran kao dekompozicijska shema. Stoga pretpostavimo da teorem vrijedi za sve grafove koji imaju manje implikacijskih klasa od G. Neka tada $[e_1, \ldots, e_k]$ i $[f_1, \ldots, f_m]$, $k, m \geq 2$, dekompozicijske sheme od G. Odaberimo e_i takav da nije na prvoj poziciji (što smijemo po prošlom teoremu). Ako je $E = \widehat{B_1} + \ldots + \widehat{B_m}$ G-dekompozicijska koja je pridružena $[f_1, \ldots, f_m]$, onda $e_1 \in \widehat{B_q}$ za neki q. Tada $[f_1, \ldots, f_{q-1}, e_1, f_{q+1}, \ldots f_m]$ također dekompozicijska shema, a po Teoremu 3.30 to je i $[e_1, f_1, \ldots, f_{q-1}, f_{q+1}, \ldots f_m]$.

Sada su i $[e_2, \ldots, e_i, \ldots e_k]$ i $[f_1, \ldots, f_{q-1}, f_{q+1}, \ldots f_m]$ dekompozicijske sheme od $E - \widehat{C}$, gdje je C implikacijska klasa od E koja sadrži e_1. Pošto

$E-\widehat{C}$ ima manje implikacijskih klasa nego E, duljine $k-1$ i $m-1$ su indukcijom jednake i postoji f_j koji može zamijeniti e_i u njegovoj dekompozicijskoj shemi.

Pošto sve odgovarajuće G-dekompozicije i dekompozicijske sheme imaju istu duljinu, možemo zaključiti da sve G-dekompozicije imaju jednaku duljinu. ■

Promotrimo sljedeću realizaciju prije spomenutog dekompozicijskog algoritma.

Neka $G = (V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E)$ neusmjereni graf. U algoritmu koristimo funkciju $KLASA$ definiranu na sljedeći način:

$$KLASA(i,j) = \begin{cases} 0 & , \quad v_i v_j \notin E \\ k & , \quad v_i v_j \text{ zadan u } B_k \\ -k & , \quad v_i v_j \text{ zadan u } B_k^{-1} \\ \text{undefined} & , \quad v_i v_j \text{ još uvijek nije zadan nikome} \end{cases} \tag{3.1}$$

Uvedimo i varijablu $FLAG$ koja će biti 0 ako je dani graf graf usporedivosti, a 1 inače. U slučaju da $FLAG = 0$, onda tranzitivnu orijentaciju od G dobivamo tako da kombiniramo sve bridove s pozitivnom vrijednošću koje dobivamo iz $KLASA$.

Algorithm 8 Implementacija dekompozicijskog algoritma

Input: Neka zadan neusmjereni graf $G = (V = \{v_1, \ldots, v_n\}, E)$, te neka vrijedi da $j \in Adj(i)$ ako i samo ako $v_i v_j \in E$.

Output: G-dekompzicija iz $KLASA$ i rezultat varijable $FLAG$.

```
1: k = 0;
2: FLAG = 0;
3: for svaki brid v_i v_j ∈ E do
4:     if KLASA[i, j] = undefined then
5:         k = k + 1;
6:         KLASA[i, j] , KLASA[j, i] = k , −k ;
7:         PRETRAŽIVANJE(i, j);
8:     end if
9: end for
```

Prethodni algoritam nastavlja s radom dok svi bridovi nisu posječeni. U k-toj iteraciji, neposječeni brid smještamo u B_k, te anžuriramo $KLASA$. Nakon smještanja brida u B_k, rekurzivno se dodavaju u B_k bridovi koji su u relaciji R.

Varijabla $FLAG$ se mijenja iz 0 u 1 čim nađemo B_k takav da $B_k \cap B_k^{-1} \neq \emptyset$. Po TRO teoremu za G u tom trenu znamo da nije graf usporedivosti.

$v_i v_j \in E$ ako i samo ako $KLASA[i, j] == k$ ili je nedefinirano do k-tog koraka.

Prikažimo još i funkciju $PRETRAŽIVANJE$ koja se koristi u TRO algoritmu.

Algorithm 9 PRETRAŽIVANJE

Input: (i, j) - numeracije vrhova iz brida $v_i v_j$

for svaki $l \in Adj(i)$ takve da $[l \notin Adj(j)\ ili\ |KLASA[j,l]| < k]$ **do**
  if KLASA[i,l] == undefined **then**
    $KLASA[i,l]$, $KLASA[l,i] = k$, $-k$;
    $PRETRAŽIVANJE(i,l)$;
  else
    if $KLASA[i,l] == -k$ **then**
      $KLASA[i,l]$, $FLAG = k$, 1;
      $PRETRAŽIVANJE(i,l)$;
    end if
  end if
end for
for svaki $l \in Adj(j)$ takve da $[l \notin Adj(i)\ ili\ |KLASA[i,l]| < k]$ **do**
  if $KLASA[l,j] == undefined$ **then**
    $KLASA[l,j]$, $KLASA[l,j] = k$, $-k$;
    $PRETRAŽIVANJE(l,j)$;
  else
    if $KLASA[l,j] == -k$ **then**
      $KLASA[l,j]$, $FLAG = k$, 1;
      $PRETRAŽIVANJE(l,j)$;
    end if
  end if
end for

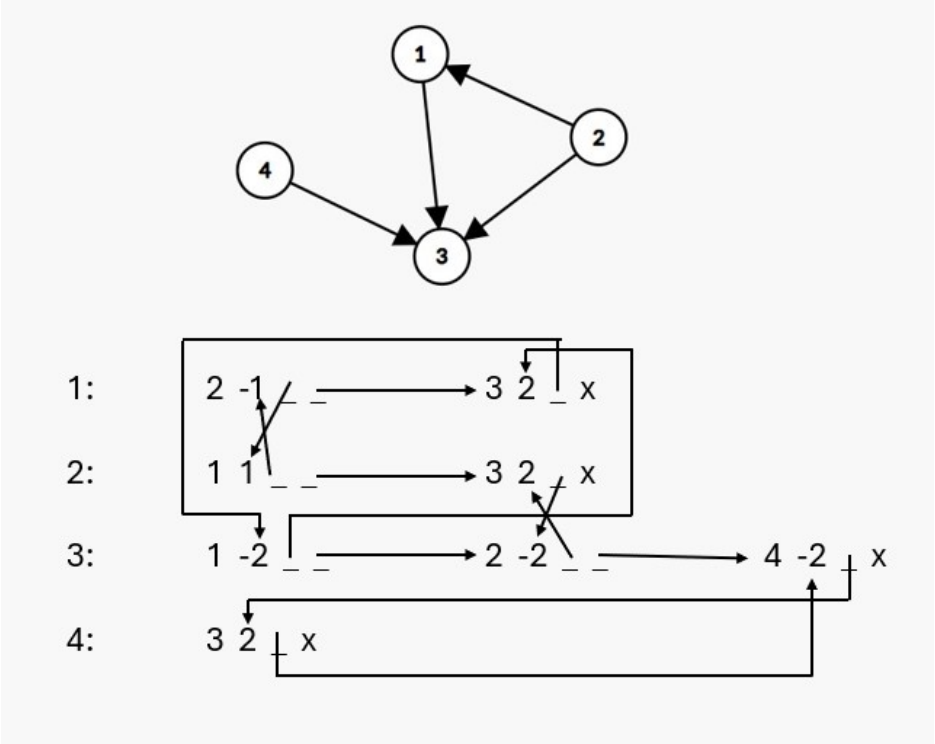
Promotrimo sada kompleksnost prikazanog TRO algoritma.

3.2. Graf usporedivosti i TRO

Uzmimo da su susjednosti grafa spremljene u vezanu listu i podaci su poredani uzlazno.

Podatak $Adj(i)$ reprezentira brid $v_i v_j$ sa poljima koja sadrže: j, $KLASA[i,j]$, pokazivač na $KLASA[j,i]$, te pokazivač na susjeda od $Adj(i)$. Za pohranu je potrebno $O(|V|+|E|)$.

Promotrimo još i vrijeme potrebno za pristup i mijenjanje funkcije $KLASA$. Za nalaženje KLASA[i,l] treba $O(d_i)$ koraka, gdje d_i stupanj vrha v_i, kako bi prošli cijeli $Adj(i)$, osim ako privremeni pokazivač nije u susjedstvu. Tada referiranje na $KLASA[i,l]$ ili $KLASA[l,i]$ bi trebalo trajati fiksan broj koraka.



Slika 3.10: Primjer spremanja Adj(i) u TRO algoritmu na gore opisan način.

Preostaje još analizirati funkciju $PRETRAŽIVANJE[i,j]$. Dva privremena pokazivača paralelno prolaze kroz $Adj(i)$ i $Adj(j)$ i traže vrijednosti

m koje zadovoljavaju for uvjete. Zbog sortiranosti listi i susjednih pokazivača, petlja se može izvesti u $O(d_i + d_j)$ koraka. Analogno je kompleksnot od $PRETRAŽIVANJE(i, j)$ jednaka $O(d_i + d_j)$.

U glavnom programu, privremeni pokazivač u *for* petlji prolazi kroz sve liste susjeda, što daje složenost od $O(|E|)$. Algoritam jednom poziva $PRETRAŽIVANJE$ za svaki brid ili njegov inverz (oboje ako implikacijske klase nisu disjunktne), pa cijela složenost algoritma koji provjerava je li graf graf usporedivosti i pridružuje mu tranzitivnu orijentaciju će biti:

$$\sum_{v_i v_j \in E} (d_i + d_j) = 2 \sum_{i=1}^{n} d_i^2 \leq 2 \max \deg(G) \sum_{i=1}^{n} d_i = 2 \max \deg(G)|E|$$

tj. najviše $O(maxdeg(G)|E|))$.

Poglavlje 4

Permutacijski grafovi

Definicija 4.1 ***Permutacija*** *skupa* $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ *je bijekcija* $f : S \to S$.

Broj permutacija skupa od n elemenata je $n!$.

Primjerice, promotrimo funkciju $S : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2, 3\}$, za koju vrijedi $S(1) = 2$, $S(2) = 3$, $S(3) = 1$. Tada kažemo da je $\{2, 3, 1\}$ permutacija skupa $\{1, 2, 3\}$. Laički, permutacije služe za prikazivanje elemenata u određenom redoslijedu.

Permutacije imaju brojne primjene u stvarnome svijetu. Permutacije se često koriste u igrama, logici i biologiji. Mogu se koristiti i u računarstvu, primjerice u algoritmima pretraživanja, te kriptografiji (stvaranju lozinka).

Osim u standardnom obliku, permutacije se mogu reprezentirati uz pomoć grafova što može olakšati rad s njima. Intuitivnije je uočiti uzorke ako ih vizualiziramo, ali i sama svojstva grafa (npr. ima li ciklus) mogu dovesti do zaključaka vezanih za permutaciju. Naravno, kao i kod prethodnih algoritama, permutacijski grafovi mogu pomoći pri optimiziranju pojedinih postojećih algoritama i korisni su za sortiranje.

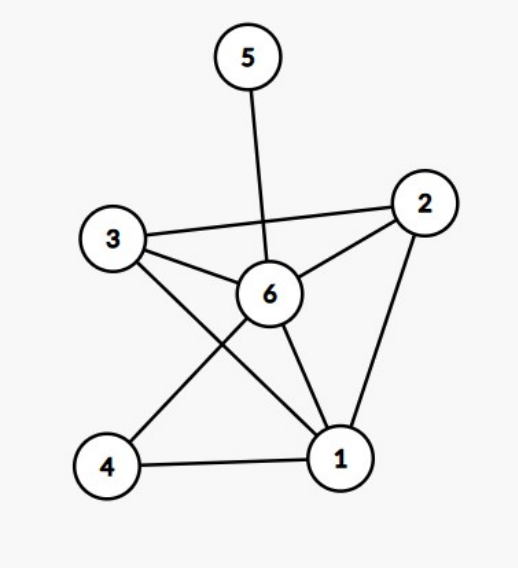
Inverzna permutacija π^{-1} od π je permutacija za koju vrijedi $\pi(\pi^{-1}(i)) = i$ i $\pi^{-1}(\pi(i)) = i$.

Primjer 4.2 *Inverzna permutacija od permutacije* [6 3 2 4 1 5] *je* [5 3 2 4 6 1]. *Inverzna permutacija nam govori na kojoj poziciji u zadanoj permutaciji se nalazi element s trenutne pozicije.*

Definicija 4.3 *Neka je* $\pi = [\ p_1\ \ldots\ p_n\ ]$ *proizvoljna permutacija skupa* $V=\{1,\ldots,n\}$. *Neka je* $G[\pi] = (V,E)$ *neusmjereni graf za koji vrijedi:*

$$xy \in E \Leftrightarrow (x-y)\left(\pi^{-1}(x) - \pi^{-1}(y)\right) < 0.$$

Za graf $G[\pi]$ *kažemo da je* ***permutacijski****.*



Slika 4.1: Graf permutacije [6 3 2 4 1 5].

Komplement permutacijskog grafa je također permutacijski jer vrijedi $G[\pi^p] = G[\pi]^C$ gdje π^p permutacija koju dobijemo kad "obrnemo" redoslijed od π tj. ako $\pi = [\ p_1\ p_2\ \ldots\ p_n\ ]$, onda $\pi^p = [\ p_n\ \ldots\ p_2\ p_1\ ]$

Također vrijedi da se permutacijski graf može tranzitivno orijentirati - to bismo dobili tako da po redu svaki element usmjerimo prema njegovom sljedbeniku. Štoviše, vrijedi i sljedeći teorem.

Teorem 4.4 *Neusmjereni graf G je permutacijski ako i samo ako su G i G^C grafovi usporedivosti.*

Dokaz. $\boxed{\Rightarrow}$Pretpostavimo da $G \equiv G[\pi]$. Tada je G graf usporedivosti jer $G[\pi]$ ima tranzitivnu orijentaciju. G^C je također graf usporedivosti jer $G^C \equiv G[\pi^p]$.

$\boxed{\Leftarrow}$Uzmimo da su (V, F_1) i (V, F_2) tranzitivne orijentacije od $G = (V, E)$ i G^C=(V,E^C) redom. Pokažimo da je (V,$F_1 + F_2$) aciklična orijentacija potpunog grafa (V,E + E^C). Pretpostavimo da $F_1 + F_2$ ima ciklus $v_0v_1 \ldots v_lv_0$ minimalne duljine l. Ako je l veći od 3, onda se ciklus može skratiti uklanjanjem v_0v_2 ili v_2v_0, pa dobivamo kontradikciju. Ako je $l = 3$, onda bar dva brida ciklusa se nalaze u istom F_i što povlači da F_i nije tranzitivan. Stoga je (V, $F_1 + F_2$) acikličan. Analogno je i $(V, F_1^{-1} + F_2)$ acikličan.

Konstruirajmo još i permutaciju π takvu da $G \equiv G[\pi]$. Aciklična orijentacija potpunog grafa je tranzitivna i određuje jedinstven, linearni poredak vrhova. Promotrimo sljedeći postupak:

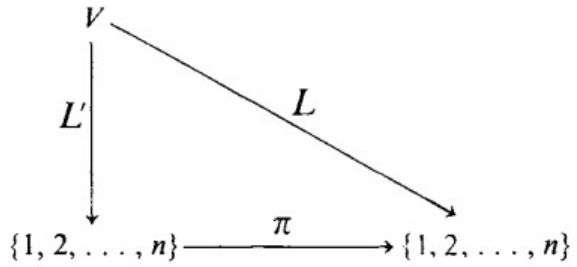
1) Labeliramo vrhove ovisno o redoslijedu u F_1+F_2. Primjerice, $L(x) = i$, gdje je $indeg(x) = i - 1$.

2) Labeliramo vrhove ovisno o redoslijedu u $F_1^{-1} + F_2$, $L'(x) = i$, gdje je $indeg(x) = i - 1$.

(*) Primijetimo da vrijedi $xy \in E \iff [L(x) - L(y)][L'(x) - L'(y)] < 0$, jer su bridovi u E promijenili orijentaciju između 1) i 2).

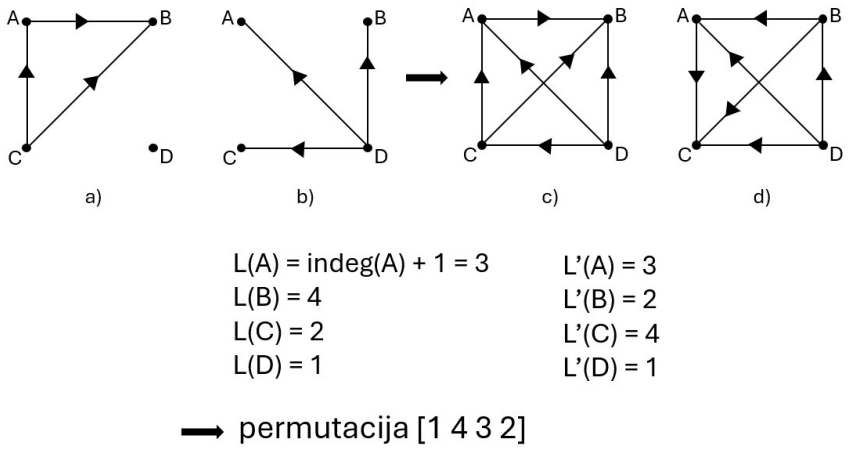
3) Definirajmo π: Za svaki vrh x, ako $L(x) = i$, onda $\pi_i^{-1} = L'(x)$. Sada po (*), π je tražena permutacija, a L traženi izomorfizam.

■



Slika 4.2: Odnos L, L' i π iz Teorema 4 - slika iz *Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs - Martin Charles Golumbic.*

Prethodni algoritam govori da ako nađemo tranizitivnu orijenatciju, onda je graf permutacijski. Konstrukcija u dokazu nam pokazuje kako naći odgovarajuću permutaciju. Složenost ovog postupka je $O(n^2)$.



Slika 4.3: a) F_1 b) F_2 c) $F_1 + F_2$ d) $F_1^{-1} + F_2$

Slika 4.3 prikazuje konstrukcija permutacije [1 4 3 2] iz tranzitivnih orijentacija F_1 i F_2

Kako bismo grafu mogli pravilno pridružiti vrijednosti permutacije moramo uvesti funkciju koja će to omogućiti.

Za neusmjereni graf $G = (V, E)$ uvedimo bijekciju $L : V \to \{1, \ldots, n\}$ koja označava vrhove. Funckija L se naziva **labeliranje permutacije** ako postoji permutaciji π skupa od 1 do n takva da:

$xy \in E$ ako i samo ako $[L(x) - L(y)][\pi^{-1}(L(x)) - \pi^{-1}(L(y))] < 0$.

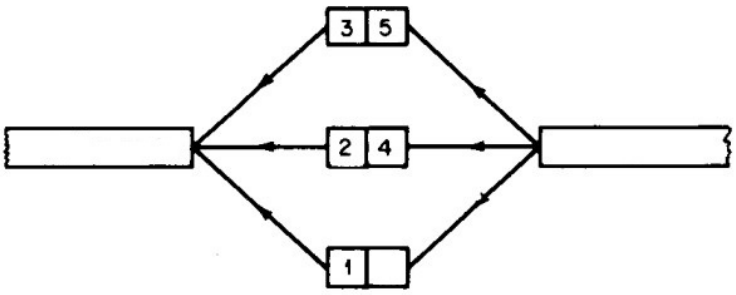
Permutacijski graf mora imati bar jedno labeliranje, te labeliranje ne mora biti jedinstveno.

Promotrimo kako bismo provodili sortiranje permutacije koristeći redove.

Red je način spremanja podataka koji radi po principu *first-in-first-out* tj. FIFO. Točnije, ono što smo stavili prije u red mora prije i izaći.

Koristit ćemo paralelno k redova na način da gledamo svaki element koji želimo sortirati i stavljamo ga u privremeni red. Na kraju elemente stavljamo u sortirani red na način da po veličini skidamo elemente s privremenih redova. Promotrimo na primjeru.

Primjer 4.5 *Neka $\pi = [3, 2, 5, 1, 4]$. Krećemo od prvog elementa 3 i stavljamo ga na prvi red Q_1. Sljedeći element, 2, ne smijemo staviti u Q_1 jer ne bi više mogli doći do njega, pa ga stavljamo u Q_2. 5 smijemo staviti na Q_1, ali 1 ne smijemo staviti ni u Q_1, ni u Q_2, pa ga stavljamo u novi Q_3. 4 ne može u Q_1, ali može u Q_2, pa ga stavljamo u njega i nakon toga sortiramo elemente. U ovom slučaju su nam trebala 3 privremena reda za sortiranje.*



Iz primjera možemo uočiti da sadržaj svakog reda Q_i mora biti uzlazno

sortiran kako bi imali točan redoslijed pri rezultatu. Također nije bitno hoćemo li prvo popuniti sve pomoćne redove prije slaganja rezultata ili ćemo istovremeno i namještati finalni rezultat.

Prethodni primjer je obavljen sa tzv. *kanonskom strategijom sortiranja* koja funkcionira na način da vrijednosti iz permutacija stavljamo na prvi red koji je dostupan.

Promotrimo razlog stavljanja brojeva u različite redove u kontekstu grafova. Brojevi se pojavljuju u suprotnom poretku od π, pa ako su vrhovi v i w susjedni u $G[\pi]$, onda će biti stavljeni u različite redove.

Predstavimo algoritam za bojanje permutacijskog grafa. Dokažimo prvo da postoji veza sortiranja permutacija i bojanja grafa.

Propozicija 4.6 *Neka $\pi = [p_1, \ldots, p_n]$ permutacija prirodnih brojeva od 1 do n. Postoji jedan-na-jedan veza između pravilnog k-bojanja of $G[\pi]$ i uspješnog sortiranja permutacije s k paralelnih redova.*

Dokaz. Pretpostavimo da svaki red Q_i boji brojeve sa svojom bojom. Postupkom sortiranja s k redova opisanim ranije, susjedni vrhovi v i w iz $G[\pi]$ će biti obojani različitim bojama.

Sada provedimo sljedeći postupak nad pravilnim bojanjem permutacijskog grafa s k boja: ako je boju vrha x označimo sa b, spremimo x u Q_b.

Pretpostavimo da će ovo rezultirati neuspješnim sortiranjem. Tada mora postojati neki red Q_c takav da su vrhovi x i y spremljeni u krivom redoslijedu. Ali tada x i y moraju biti i u obrnutom redoslijedu i u π. Tada su x i y susjedi u permutacijskom grafu, ali su obojani istom bojom (jer su u istom redu), pa je to kontradikcija. Sortiranje je uspješno.

Stoga, postoji bijekcija između pravilnog k-bojanja i uspješnog sortiranja permutacije s k paralelnih redova. ■

Korolar 4.7 *Za permutaciju π sljedeći brojevi su jednaki:*

(i) $\chi(G[\pi])$

(ii) duljina najduljeg silaznog podniza od π

(iii) minimalni broj redova potrebnih za sortiranje π

Dokaz. $\boxed{\text{(i)} \iff \text{(iii)}}$ Direktno iz ropozicije 4.6.

$\boxed{\text{(i)} \iff \text{(ii)}}$ Iz činjenice da najdulji podniz možemo poistovjetiti s maksimalnom klikom od $G[\pi]$ koja je duljine $\chi(G[\pi])$ zbog savršenosti grafa. ■

Iz kanonske strategije sortiranja dobivamo sljedeći algoritam za kanonsko bojanje permutacijskog grafa - algoritam vraća minimalno bojanje.

Algorithm 10 Kanonsko bojanje permutacije

Input: Permutacija $\pi = [p_1, \ldots, p_n]$ bojeva od 1 do n

Output: Bojanje vrhova grafa $G[\pi]$ i kromatski broj grafa

1: $k = 0$;
2: **for** $j = 1 : n$ **do**
3: $\quad i =$ prvi dopustivi red;
4: $\quad BOJA[p_j] = i$;
5: $\quad ZADNJI[i] = p_j$;
6: $\quad k = max\{k, i\}$;
7: **end for**
8: $\chi = k$;

Prethodni teorem radi na način da u j-toj iteraciji p_j stavi u red Q_i sa najmanjim indeksom i takvim da p_j veći ili jednak zadnjem elementu iz Q_i. Ne trebamo spremati cijeli Q_i, pa u niz $ZADNJI[i]$ spremamo zadnji element iz Q_i. k je brojač koji koji pamti broj iskorištenih boja tj. redova.

Sljedeći teorem dokazuje točnost prethodnog algoritma.

Teorem 4.8 *Neka π permutacija brojeva od 1 do n. Kanonsko bojanje od $G[\pi]$ iz Algoritma 10 je minimalno.*

Dokaz. Bojanje je očito pravilno, pa preostaje još pokazati $\chi = \chi(G[\pi])$. Dovoljno je pokazati (po prošlom korolaru) da π ima padajući podniz duljine χ.

Definirajmo funkciju f na sljedeći način: Ako $BOJA[p_j] = i$ (≥ 2), onda $p_{f(j)} = ZADNJI[i-1]$ za vrijeme j-te iteracije. Tada $p_{f(j)} > p_j$ i $f(j) < j$ jer je činjenica da je $p_{f(j)}$ u Q_{i-1} uzrokovala da stavimo p_j u Q_i. Tada $p_{j_1}, \ldots, p_{j_\chi}$ gdje $BOJA[p_{j_\chi}] = \chi$, te $p_{j_{i-1}} = p_{f(j_i)}$, i $= \chi, \chi - 1, \ldots, 2$ je tražen silazeći podniz. ■

Složenost algoritma je $O(nlogn)$ i ne ovisi o broju bridova od G.

Poglavlje 5

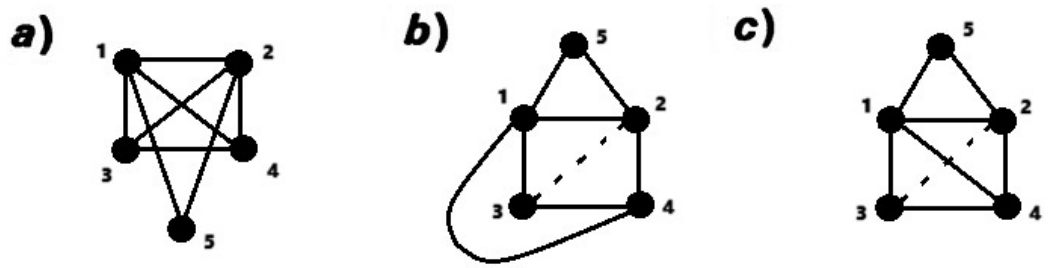
Planarni grafovi

Planarnost je još jedno bitno svojstvo u teoriji grafova, a njihova najčešća uloga u primjeni je pitanje postoji li mogućnost organiziranja bridova bez bespotrebnog presijecanja. Ovo je, primjerice, korisno u organizaciji prometa, te u telekomunikacijama. Kako rasporediti antene koje su povezane, bez da se signali poklapaju? Planarnost je također interesantna pri dizajniranju igara, te u geografiji. Primjerice, u kreiranju mapa je koristan tzv. Teorem o četiri boje koji govori da se svaki planarni graf može obojati u četiri boje.

Podsjetimo se iz Uvoda da se graf naziva planarnim ako se može nacrtati u ravnini bez presijecanja bridova. Takvo smještenje se naziva planarno ili ravninski graf.

Zbog ovih razloga, korisno je imati algoritam koji provjerava je li dani graf planaran o ćemu ćemo govoriti u ovoj sekciji. Prije algoritma, uvedimo dva pojma koja će nam biti potrebna za daljnji rad.

Definicija 5.1 *Za planarni smještaj $\tilde{H}$ podgrafa H grafa G kažemo da je G-**prihvatljiv** ako postoji planarni smještaj $\tilde{G}$ takav da $\tilde{H} \subseteq \tilde{G}$.*



Slika 5.1: a) G b) G-prihvatljiv graf c) nije G-prihvatljiv graf

Definicija 5.2 ***Blok*** *je maksimalni povezani podgraf grafa G koji nema reznih vrhova.*

Sa $\tilde{G}$ ćemo označavati planarno smještenje grafa.

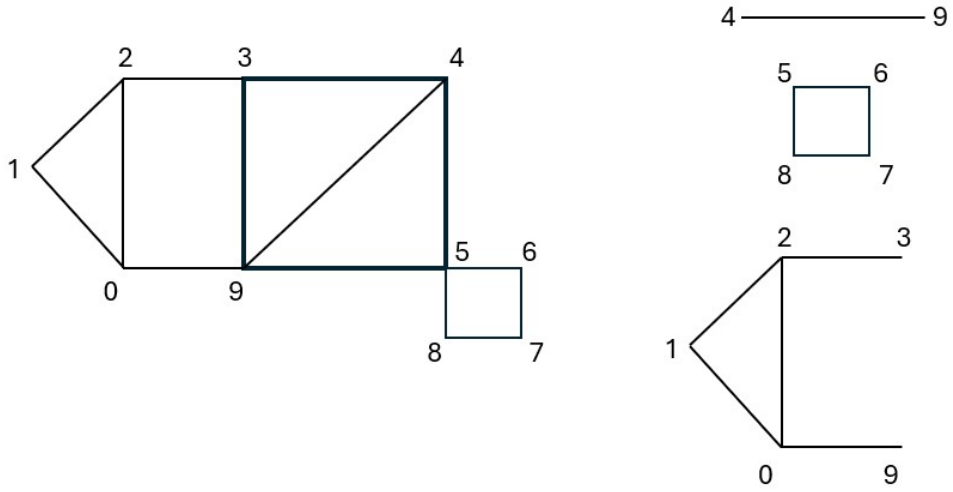
Graf je planaran ako i samo ako mu je svaki blok planaran.

Definicija 5.3 *Neka je $G_1 = (V_1, E_1)$ podgraf grafa $G = (V, E)$.* ***Komadom*** *grafa G u odnosu na G_1 nazivamo jedno od sljedećeg:*

a) brid $uv \in E$ takav da $uv \notin E_1$ i $u, v \in V$.

b) povezana komponenta od $G - G_1$ u uniji bridovima iz E takvim da su vrhovi iz dobivene komponente susjedni s vrhovima iz V_1.

Za svaki komad B, zajednički vrhovi od B i G_1 nazivaju se **mjestima kontakta** od B. Ako komad ima dva ili više mjesta kontakta, onda se naziva **mostom**. Ova definicija mosta se razlikuje od definicije mosta spomenute u uvodu, ali primijetimo da je ova definicija proširenje definicije kabela iz uvoda.



Primjer 5.4 *Promotrimo graf G na Slici 5.4 lijevo, te njegov podebljano označen podgraf $G_1 = \{\{3,4\},\{4,5\},\{5,9\},\{3,9\}\}$. Desno na slici su prikazana 3 komada od G u odnosu na G_1:*

- brid $\{4,9\}$ sa mjestima kontakta 4 i 9 (svojstvo a) iz definicije)

- podgraf $\{\{5,6\},\{6,7\},\{7,8\},\{5,8\}\}$ sa vrhom kontakta 5 (svojstvo b) iz definicije)

- podgraf $\{\{1,2\},\{2,3\},\{0,2\},\{0,1\},\{0,9\}\}$ sa vrhovima kontakta 3 i 9 (svojstvo b) iz definicije

Prvi i treći komad su mostovi jer imaju ≥ 2 mjesta kontakta.

Primjer 5.5 *Promotrimo graf na Slici 5.1 i uzmimo da je $G_1 = 12 - 24 - 24 - 13$ (ciklus) promatrani podgraf. Njegovi komadi su sljedeći:*

1) $12 - 15 - 25$ *sa vrhovima kontakta* 1 *i* 2

1) 14 *sa vrhovima kontakta* 1 *i* 4

1) 23 *sa vrhovima kontakta* 2 *i* 3

Primijetimo da su 2) i 3) kabeli.

5.1 Testiranje planarnosti grafa

Uvedimo sad algoritam koji provjerava planarnost zadanog grafa. Neki postupci mogu olakšati algoritam. Primjerice, zasebno provodimo algoritam na različitim komponentama povezanosti, uklanjamo višestruke bridove prije provedbe algoritma, razdvojimo graf na blokove ako je to moguće ...

Napomenimo da algoritam provjere planarnosti nije jedinstven i prikazan algoritam je implementacija algoritma za provjeru planarnosti. Algoritam prima graf koji je blok.

Neka je G_i podgraf grafa G. Uvedimo da je $F(B, \tilde{G}_i)$ skup stranica od $\tilde{G}_i$ u koje možemo smjestiti B.

Algoritam je implementiran na sljedeći način:

Algorithm 11 Algoritam za provjeru planarnosti

Input: Graf G koji je blok.

Output: Poruka o planarnosti grafa G.

1: Nađi ciklus C u grafu G
2: $i = 1$;
3: $G_1 = C$;
4: $\tilde{G_1} = C$;
5: $f = 2$;
6: $SMJESTIV =$ true;
7: **while** $f \neq |E| - n + 2$ i $SMJESTIV ==$ true **do**
8: Nađi svaki most B od G u odnosu na G_i i pridruži mu $F(B, \tilde{G_i})$
9: **if** $F(B, \tilde{G_i}) = \emptyset$, za neki B **then**
10: $SMJESTIV =$ false;
11: **return** "G nije planaran";
12: **end if**

Algorithm 12 Algoritam za provjeru planarnosti (nastavak)

if $SMJESTIV ==$ true **then**
  if $|F(B, \tilde{G}_i)| == 1$, za neki B **then**
    $F = F(B, \tilde{G}_i)$;
  else
    Neka B neki most i F neka strana za koju vrijedi $F \in F(B, \tilde{G}_i)$
  end if
  Nađi put $P_i \subseteq B$ koji povezuje dvije točke kontakta iz B sa G_i
  $G_{i+1} = G_i + P_i$;
  Nađi planarno smještenje $\tilde{G}_{i+1}$ od G_{i+1} tako da nacrtamo P_i u stranici F od $\tilde{G}_i$;
  i += 1;
  f += 1;
  if $f = |E|$ - n + 2 **then**
    return "G je planaran";
  end if
end if
end while

Algoritam pronalazi $G_1, G_2, \ldots (G_i \subset G_{i+1})$ i njihova planarna smještenja $\tilde{G}_1, \tilde{G}_2, \ldots$.

Algoritam provjerava planarnost tako da provjerava G-prihvatljivost svakog $\tilde{G}_i$. Ako su svi $\tilde{G}_i$ G-prihvatljiv, onda će graf biti planaran i $\tilde{G}_{|E|-n+1}$ će biti njegovo planarno smještenje. Ako nađemo most B takav da $F(B, \tilde{G}_i) = \emptyset$, graf nije planaran.

Algoritam prvo pronalazi ciklus C koji mora postojati jer je G blok. G_1 je taj ciklus i onda ujedno i planaran. $SMJESTIV$ je varijabla koja pamti smjestivost grafa i zadana vrijednost joj je true. SMJESTIV prelazi u false

ako nađemo most B takav da $F(B, \tilde{G}_i) = \emptyset$. f je varijabla koja pamti broj strana od $\tilde{G}_i$.

Svaka iteracija *while* petlje konstruira novi $\tilde{G}_{i+1}$ tako da iz trenutnog $\tilde{G}_i$ nađe skup svih mostova u odnosu na G_i, te za svaki takav most B nađe njegov skup $F(B, \tilde{G}_i)$. Ako postoji B koji je smješten samo u jednoj stranici F od $\tilde{G}_i$, onda $\tilde{G}_{i+1}$ konstruiramo tako da nacrtamo put između vrhova kontakta B u F (ako takav most ne postoji onda uzmemo put između točaka kontakta bilo kojeg mosta). Put dijeli F na dva dijela i povećava se f (broj strana).

Iz Teorema 1.15 znamo da planarni G ima $|E|-n+2$ strana što je kriterij zaustavljanja algoritma.

Teorem 5.6 *Algoritam za provjeru planarnosti je ispravan.*

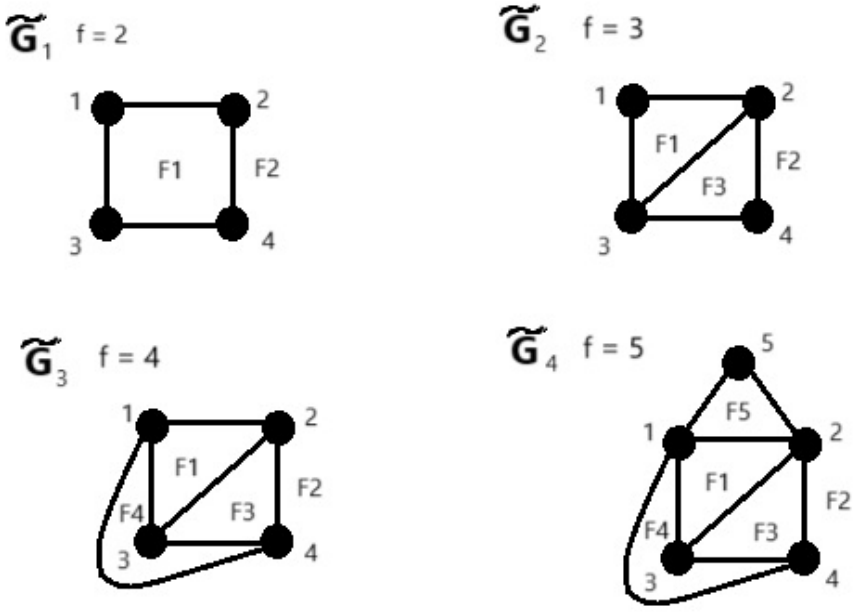
Dokaz. Trebamo pokazati da za svaki graf iz niza $\tilde{G}_1, \ldots, \tilde{G}_{|E|-n+1}$, ako je G planaran, onda je i G-prihvatljiv. Dokaz provodimo indukcijom.

Ako je G planaran, $\tilde{G}_1$ je sigurno G-prihvatljiv. Pretpostavimo da je $\tilde{G}_i$, $1 \leq i \leq k < |E| - n + 1$, G-prihvatljiv. Pokažimo da je i $\tilde{G}_{k+1}$ također G-prihvatljiv. Neka su B i F definirani kao i u algoritmu. Neka $\tilde{G}$ planarno smještenje od G takvo da $\tilde{G}_k \subset \tilde{G}$.

Ako $|F(B, \tilde{G}_k)| = 1$, onda po konstrukciji algoritma vrijedi $\tilde{G}_{k+1} \subseteq \tilde{G}$.

Stoga pretpostavimo $|F(B, \tilde{G}_k)| > 1$ i pretpostavimo da B nije smješten u F od $\tilde{G}$, nego u nekoj drugoj stranici F^*. Sada je G blok i G_k takav da ima bar dva vrha kontakta, pa je smješten samo u dvije strane. Iz ovoga slijedi da svaki most s mjestima kontakta na granici između strana F i F^* može biti sam u F ili u F^*. Iz ovoga slijedi da postoji još jedno planarno smještenje od G u kojem će B biti u F ako se nalazi u F^* u $\tilde{G}$, te je u F^* ako u F u $\tilde{G}$.

$\tilde{G}_{k+1}$ dobiven iz algoritma je G-prihvatljiv jer $\tilde{G}_{k+1} \subseteq \tilde{G}$. ■



Slika 5.2: Primjer provedbe algoritma planarnosti na grafu G sa Slike 5.1 a).

Primjer 5.7 *Promotrimo primjer provedbe algoritma sa Slike 5.2. Odaberemo ciklus* $12 - 24 - 34 - 13$.

Za $\tilde{G}_1$, $f = 2$, *biramo most* $\{2, 3\}$ *u* $F1 \Rightarrow$ *dodajemo put* $2 - 3$.

Za $\tilde{G}_2$, $f = 3$, *biramo most* $\{1, 4\}$ *u* $F2 \Rightarrow$ *dodajemo put* $1 - 4$.

Za $\tilde{G}_3$, $f = 4$, *biramo most* $[\{1, 5\}, \{5, 2\}]$ *u* $F2 \Rightarrow$ *dodajemo put* $1-5-2$.

Za $\tilde{G}_4$, $f = 5$, *dobivamo planarni prikaz grafa sa Slike 5.1.*

Algoritam se može implementirati u polinomijalnom vremenu. *while* petlja se izvršava najviše $|E| - n + 1$ puta.

Literatura

[1] Golumbic Martin Charles, *Annals of Discrete Mathematics:Algorithmic Graph Theory and Perfect Graphs*, Caesarea Rothschild Institute, University of Haifa, Haifa, Israel 2004

[2] Gibbons Alan, *Algorithmic graph theory*, Cambridge University Press, Cambridge ; New York 1985.

[3] Newman M. E. J., *Networks An Introduction*, Oxford UniversityPress Inc., NewYork 2010.

[4] Golemac Anka, *Teorija Grafova*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Split 2022.

[5] *GeeksForGeeks* website (https://www.geeksforgeeks.org/) - zadnje posječena 16.8.2024.

[6] Perić Jurica, *Složenost algoritama*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Split 2023.