Duvalov kognitivni model geometrijskog mišljenja

Granić, Antea

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

Antea Granić

DUVALOV KOGNITIVNI MODEL GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA

DIPLOMSKI RAD

Split, srpanj 2024.

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

DUVALOV KOGNITIVNI MODEL GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA

DIPLOMSKI RAD

Neposredna voditeljica:

Željka Zorić, v. pred.

Studentica: Antea Granić

Mentorica: doc. dr. sc. Tanja Vojković

Split, srpanj 2024.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

DUVALOV KOGNITIVNI MODEL GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA

Antea Granić

Sažetak:

U ovom radu ukratko je opisan rad francuskog psihologa i filozofa Raymonda Duvala, te utjecaj njegovih opažanja na obrazovanje u matematici. Prikazana je i opisana razlika između pojma reprezentacije nekog objekta u matematici i u stvarnosti. Nadalje, objašnjene su vrste kognitivnih razumijevanja koje djeluju kada su učenici suočeni s matematičkim problemom. Na kraju je provedeno kratko istraživanje na učenicima jedne osnovne škole čiji je cilj bio ispitati u kojoj mjeri učenici u dobi od 11 do 14 godina koriste danu geometrijsku figuru kao ilustraciju umjesto kao matematički objekt onda kada je ono što vide kontradiktorno s onim što geometrijska figura reprezentira. Iz tog istraživanja se zaključuje da velik dio učenika u osnovnoj školi teško odvaja informacije o matematičkom zadatku i skicu istog tog zadatka, odnosno vodi se skicom kao vjerodostojnom i to ih navodi na krive zaključke.

Ključne riječi:

Duval, semiotika, figura, slika, reprezentacija,

Podatci o radu:

broj stranica 45, broj slika 18, broj tablica 7, broj literaturnih navoda 7, jezik izvornika: hrvatski

Neposredna voditeljica: Željka Zorić

Mentorica: doc. dr. sc. Tanja Vojković

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Tanja Vojković

dr. sc. Ana Laštre, pred.

Željka Zorić, v. pred.

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad 27. lipnja 2024.

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

DUVAL'S COGNITIVE MODEL OF GEOMETRIC THINKING

Antea Granić

Abstract:
In this paper, the work of the French psychologist and philosopher Raymond Duval is briefly described, as well as the impact of his observations on mathematics education. The difference between the concept of representation of mathematical object and an object in reality is presented and explained. Furthermore, the types of cognitive understandings that come into play when students are faced with a mathematical problem are elucidated. Finally, a short study was conducted on elementary school students aiming to examine to what extent students from ages 11 to 14 use a given geometric figure as an illustration instead of using it as a mathematical object when what they see contradicts with what the geometric figure represents. The study concludes that a large portion of elementary school students find it difficult to separate information about a mathematical problem from the illustration of the same problem, relying on the illustration as credible, which leads them to incorrect conclusions.

Key words:
Duval, semiotics, drawing, figure, representation
Specifications:
45 pages, 18 figures, 7 tables, 7 references, original in: Croatian

Mentor: doc. dr. sc. Tanja Vojković

Immediate mentor: Željka Zorić

Committee:

doc. dr. sc. Tanja Vojković

dr. sc. Ana Laštre, Lecturer

Željka Zorić, Senior lecturer

This thesis was approved by a Thesis committee on June 27th, 2024.

Sadržaj

Sadržaj 7
Uvod 1
Duvalov rad i uvod u teoriju 2
1.1 Rad Raymonda Duvala 2
1.2 Zašto je matematika problematična? 3
1.3 Semiotika 4
1.4 Kako prepoznati isti objekt u različitim reprezentacijama? 5
1.5 Transformacija semiotičkih reprezentacija u središtu matematičkog razmišljanja 10
Reprezentacije i procesuiranje 11
2.1 Figura, slika i reprezentacija 11
2.2 Poteškoće u viđenju geometrijske figure 13
2.3 Kognitivna razumijevanja 16
2.4 Vizualizacija, konstrukcija i rezoniranje 19
2.5 Očekivanja u budućnosti 25
Istraživanje 27
3.1 Cilj istraživanja 27
3.2 Metodologija 27
3.3 Rezultati istraživanja 28
3.4 Zaključak istraživanja 34
Literatura 35
Prilog A 36
Prilog B 38

Uvod

Kada bismo cjelokupnu znanost promatrali kao piramidu, matematika bi definitivno bila njena baza kao temelj za sve ostale znanstvene discipline. To istaknuto mjesto zaslužuje jer je nužna u svim drugim STEM područjima. U isto vrijeme matematici nisu potrebne druge znanosti.

Osim upotrebe u istraživanju i znanosti, učenjem matematike se razvijaju razne kognitivne vještine kao što su logičko razmišljanje, analitičke vještine, sposobnost rješavanja problema te apstraktno i kritičko razmišljanje. Također, matematika potiče preciznost i upornost u rješavanju problema.

Zbog svega navedenog matematika se nalazi na posebnom mjestu u kurikulumu – ona se počinje učiti ranije te je zastupljena više sati u školi od ostalih STEM predmeta.

Međutim, iako je važnost matematike uočena i istaknuta, isto tako je i njena kompleksnost. Matematika kao vrlo specifična znanost učenicima često zadaje probleme; zbog svoje apstrakcije im nije bliska pa se često odbacuje kao preteška, dosadna i nesavladiva. Ni za jedan drugi školski predmet, kao za matematiku, nije toliko normalizirano isticati vlastiti manjak afiniteta ili čak nešto više.

Zbog čega je matematika i njena apstraktnost učenicima tako problematična tema je kojom se bavio francuski psiholog i filozof Raymond Duval. U ovom radu pobliže će se opisati neka njegova zapažanja i doprinosi u poučavanju i razumijevanju matematike.

Poglavlje 1

Duvalov rad i uvod u teoriju

1.1 Rad Raymonda Duvala

Raymond Duval francuski je filozof i psiholog poznat po svojim doprinosima u području matematičkog obrazovanja – razumijevanju kako ljudi uče matematiku i kako se nastavni pristupi mogu prilagoditi kako bi se poboljšalo razumijevanje i usvajanje matematičkih koncepata. Njegovi radovi imaju značajan utjecaj na razvoj metodologija i praksi učenja matematike širom svijeta.

U svom se radu fokusira na kognitivne aspekte učenja matematike; načine na koje učenici konceptualiziraju matematičke pojmove i strategije koje koriste u rješavanju matematičkih problema. Proučava kako učenici percipiraju matematičke simbole, kako ih povezuju s konceptima te kako ta percepcija utječe na njihovo razumijevanje matematike. Također, istražuje procese transformacije matematičkog znanja i razumijevanja, kao i ulogu semiotike u tim procesima. Tako je nastala njegova poznata fraza *“nema noeze bez semioze”*, što bi značilo da su procesi mišljenja, odnosno spoznaje (noeza) i interpretacije simbola (semioza) međusobno povezani, štoviše i nerazdvojni. Naime, naše mentalno funkcioniranje, percepcija, razmišljanje i spoznaja uvijek uključuju procese interpretacije i pridruživanja značenja simbolima. Čak i kada razumijemo nešto, to je uvijek u kontekstu znakova koje smo koristili za tumačenje ili izražavanje tog razumijevanja. Ova spoznaja je posebno važna u učenju i poučavanju matematike zbog same prirode nje kao znanosti.

1.2 Zašto je matematika problematična?

Kod usvajanja matematičkih koncepata javljaju se neki specifični problemi koji se ne viđaju u drugim znanstvenim područjima. Nešto što matematiku čini jedinstvenom, ali i učenicima zahtjevnom, je konstantna nadogradnja gradiva. Primjerice, za rješavanje najjednostavnijih linearnih jednadžbi u šestom razredu učenici, iako je to gradivo već obrađeno još u petom razredu, ne smiju zaboraviti zbrajati i oduzimati decimalne brojeve inače mogu imati problema s novim nastavnim cjelinama. Stoga, možemo razlikovati dvije vrste poteškoća; lokalne i globalne.

Na jednom nastavnom satu ili ipak u periodu od nekoliko tjedana javljaju se takozvane lokalne poteškoće u shvaćanju kod uvođenja novih pojmova i postupaka, dok se u tijeku školske godine pojavljuju globalne, odnosno ponavljajuće poteškoće kod rješavanja problema, razumijevanja, geometrijske i grafičke vizualizacije, nemogućnosti prenošenja i primjene naučenog u novim situacijama i zadacima realnog konteksta. Naravno, mogli bismo promatrati ove globalne i ponavljajuće poteškoće tijekom jednog predavanja ili jednog niza aktivnosti, no time bismo mogli upasti u zamku i zamijeniti ih s lokalnim poteškoćama. Zbog toga se u mnogim radovima i modelima pokušavaju objasniti ove globalne, ponavljajuće poteškoće kao da su one rezultat lokalnih poteškoća vezanih uz nerazumijevanje nekih koncepata. Kako bi se zapravo mogao shvatiti koji je uzrok ovih ponavljajućih poteškoća, nije dovoljno promatrati samo ono što učenici rade i objašnjavaju te u čemu griješe a u čemu uspijevaju kod zadatka koje im zadajemo.

Umjesto toga, trebali bismo se zapitati što je uopće matematičko znanje i po čemu se ono razlikuje od drugih znanja. Ova pitanja nisu nimalo jednostavna pa ni odgovor na njih također nikako ne može biti. Kod analize znanja ne bi se trebala samo promatrati priroda onoga što se proučava, već je potrebno promotriti i način na koji nam se nešto prezentira te na koji način samostalno možemo pristupiti istom znanju.

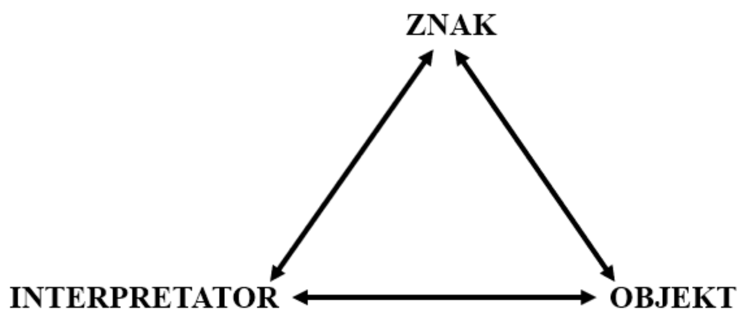
1.3 Semiotika

Semiotika (*grč. sēmeiōtikós*: koji se obazire na znakove) je znanost koja se bavi proučavanjem znakova, tj. simbola i njihove upotrebe.

Naime, prilikom upotrebe različitih simbola upućuje se na nešto drugo što nije neposredno primjetno. U matematici je simbolički zapis očito nužan te tu njegovo korištenje pokriva dva različita problema; pristup nekom matematičkom objektu bez same percepcije o njemu i transformacija te simboličke, odnosno semiotičke reprezentacije u druge zadržavajući isto značenje. Semiotička reprezentacija posebno je važna u geometriji, bilo da se radi o dvodimenzionalnom ili trodimenzionalnom matematičkom objektu. Shodno tome, možemo razlikovati tri vrste semiotičkih reprezentacija:

- materijalna reprezentacija figure (figura izrađena od papira, plastelina…)
- nacrtna reprezentacija (slika, figura nacrtana na papiru ili u računalnom softveru)
- diskurzivna reprezentacija (opisivanje figure pomoću prirodnog i formalnog jezika).

Sljedećim dijagramom prikazan je odnos između danog znaka koji predstavlja neki objekt te osobe (interpretatora) koja interpretira, odnosno daje značenje tom znaku. Naime, susretanjem s nekim znakom odmah ga procesuiramo i razmišljamo o tome koji objekt on reprezentira.



Slika 1

Proučavanje nekog matematičkog zadatka nije samo kognitivni nego i metodički problem. Možemo se zapitati što se treba promatrati i kakvi podaci se trebaju prikupiti za analizu kognitivnih procesa u nekoj matematičkoj aktivnosti.

Kako učenici razumiju, odnosno krivo razumiju koncept koji će se koristiti u rješavanju nekog problema? Ovo pitanje ostaje na razini mentalne reprezentacije jer ne možemo čitati učeničke misli, već samo tumačiti njihove verbalne i grafičke ekspresije, odnosno geste, što nije uvijek jednostavno.

Odvojeno ćemo promotriti ova dva problema koja se u nekoj matematičkoj aktivnosti javljaju. Je li percepcija objekata u matematici jednako jasna kao percepcija stvari u realnosti? Za kognitivni problem vidjet ćemo zašto i kako se rad na matematičkim problemima treba analizirati u smislu transformacija simboličkih reprezentacija. Semioza je u središtu kognitivnih procesa u matematičkom razmišljanju kroz dvije vrste navedenih transformacija. Nema noeze bez semioze i nema matematičkog razmišljanja bez pretvorbe simboličkih (semiotičkih) reprezentacija, koje god one bile.

1.4 Kako prepoznati isti objekt u različitim reprezentacijama?

Jedna od specifičnosti kod učenja matematike je ta što ne možemo objekt staviti uz njegovu reprezentaciju jer oni ne postoje na isti način na koji smo navikli u drugim znanostima.

Dva različita simbolička prikaza matematički istog objekta mogu se shvatiti kao reprezentacije dvaju različitih objekta jer su im sadržaji dovoljno različiti. Naprotiv, dva simbolička prikaza matematički različitih objekata mogu se shvatiti kao reprezentacije istog objekata jer su im sadržaji dovoljno slični. Kako ćemo razlikovati je li neka reprezentacija reprezentira dva različita matematička objekta ili su one prikazi zapravo jednog matematičkog objekta. Ova kognitivna operacija jednostavno nije moguća zbog neiskustvenog pristupa matematičkim objektima. Naime, mi možemo usporediti reprezentacije ali ne i same objekte zapravo zato što nam ti objekti nisu dostupni izvan tog simboličkog prikaza.

Generalno, pristup znanju o nečemu se odvija na isti način; prvo imamo iskustvo s nekim objektom u materijalnom smislu te s njegovom reprezentacijom. Zatim stvaramo svoje mentalne reprezentacije tog objekta koje potom konceptualiziramo. Iz ovog načina razmišljanja se čini kao da je učenje matematike isto kao i učenje bilo koje druge znanosti; kemije, fizike, biologije… Provjerimo to takozvanim jukstapozicijskim testom. Trebamo si postaviti dva pitanja;

1. Možemo li staviti objekt i njegovu reprezentaciju jedno pored drugog radi usporedbe?
2. Kada uspoređujemo različite reprezentacije, možemo li odrediti jesu li one reprezentacije jedno te istog objekta?

Ova pitanja si možemo postaviti i za prave materijalne objekte kao i za one matematičke. Promotrit ćemo dva primjera; jedan za materijalni objekt te jedan za matematički pojam.

Primjer 1. Joseph Kosuth: *Jedan i tri stolca*, 1965.

U prvom primjeru promotrit ćemo umjetničko djelo konceptualnog umjetnika 20. stoljeća Josepha Kosutha *Jedan i tri stolca*. Na fotografiji se nalazi fotografija stolca koja je nalijepljena na zid, pored nje se nalazi stolac a s druge strane tog stolca nalazi se objašnjenje riječi „stolac“ iz rječnika.

Slika 2; Jedan i tri stolca, Joseph Kasuth

Pojasnimo Kosuthovu ideju iza ove umjetničke fotografije. Joseph Kosuth je bio konceptualni umjetnik, a vrijednost konceptualne umjetnosti nije u njenom sadržaju ili fizičkim svojstvima, već u konceptu kojeg ona predstavlja. Tako je cilj *Jednog i tri stolca* ispitivanje pojma i prirode reprezentacije. Mi očito intuitivno znamo što je stolac, ali postavlja se pitanje kako mi sebi stvaramo taj koncept. Kosuth nam predstavlja fotografiju stolca, materijalni stolac i značenje stolca u rječniku. Svo troje može biti reprezentacija istog stolca (ovaj „jedan“ u nazivu), no svejedno nisu iste. Svaka reprezentacija ima različita svojstva. Stoga je promatrač ovog djela suočen s „tri“ stolca; svaki reprezentiran i doživljen (pročitan) na drugi, različiti način. Paradoks ove fotografije je taj da briše razliku između objekta i njegovih reprezentacija, stavljajući objekt i njegove reprezentacije u istu razinu, kao što i sam naziv kaže *„Jedan i tri stolca“*. Ovaj paradoks je u suprotnosti s onim što je grčki filozof Platon govorio; ne miješajmo objekt i reprezentacije tog objekta (kao što se drveće uz rijeku jasno razlikuje od njegove refleksije u toj rijeci). Ipak, na Kosuthovoj fotografiji se pravi stolac ne preklapa skroz sa svojim reprezentacijama jer je pozicioniran u sredini fotografije zbog čega pogledom na ovu fotografiju prvo uočavamo njega.

Ono što je najvažnije za ovaj rad je činjenica da su na fotografiji jedna uz drugu smještene nesemiotička i semiotička reprezentacija stolca, odnosno fotografija i tekst koji objašnjavaju što je stolac. Mogli bismo uključiti i druge semiotičke reprezentacije stolca. Primjerice, shemu za montažu stolca te strelice koje će povezati različite reprezentacije stolca i stolac koji se nalazi uza zid. Tada bismo imali *„Jedan i n stolaca“*.

Sljedećom tablicom je prikazana shema takozvanog jukstapozicijskog testa za materijalni objekt.

<table>
<tr><th>Elementi koji se nalaze jedan uz drugog</th><th colspan="2">Epistemiološka vrijednost elemenata</th></tr>
<tr><td>1) Stolac uza zid.</td><td colspan="2">1) Sami objekt kojem imamo pristup neovisno o njegovim reprezentacijama.</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">i njegove različite reprezentacije</td></tr>
<tr><td></td><td>NESEMIOTIČKE</td><td>SEMIOTIČKE</td></tr>
<tr><td>2) Fotografija stolca.</td><td>2) Slika koju je fizički stvorio fotoaparat.</td><td></td></tr>
<tr><td>3) Tekst iz rječnika koji objašnjava značenje riječi stolac.</td><td></td><td>3) Verbalni opis</td></tr>
<tr><td>4) Crteži koji objašnjavaju kako sastaviti stolac.</td><td></td><td>4) Druga vrsta crteža, napravljena crtanjem obrisa</td></tr>
<tr><td>5) Strelice na zidu koje povezuju reprezentacije i stolac.</td><td></td><td>5) Shema</td></tr>
</table>

Tablica 1

Konačno, ovaj primjer ilustrira sljedeće dvije karakteristike reprezentacija.

1) Postoji uvijek mnogo mogućih reprezentacija za isti objekt.
2) Raznolikost reprezentacija istog objekta proizlazi iz raznolikosti fizičkih ili simboličkih (semiotičkih) sustava koje mogu tvoriti reprezentacije.

Također, očito je da za materijalne objekte imamo direktni i neposredni pristup samom objektu te ga možemo staviti uz njegove razne reprezentacije.

U sljedećem primjeru ćemo promotriti ovaj jukstapozicijski test za nematerijalni objekt; prirodne brojeve.

Primjer 2. Prirodni brojevi

U testu za prirodne brojeve važno je je li nam prvi prirodan broj perceptivno dostupan, za razliku od većih brojeva kojima možemo pristupiti simboličkim zapisima unutar danog brojevnog sustava. Proučimo naredni primjer brojevne reprezentacije.

Slobodni razmještaj jediničnih oznaka u prostornoj konfiguraciji: **MATERIJALNI ILI NACRTANI OBJEKTI (PSEUDO – OBJEKTI)**	Verbalno imenovanje broja na materinjem jeziku: **ORALNA ILI MENTALNA REPRODUKCIJA RIJEČI**	Dvostruka unutarnja organizacija: otkriće „0”: **PISANI OBLIK KORIŠTENJEM ZNAMENKI**
IIII II II ● ● ● ●	**„četiri”** Leksički zapis varira ovisno o jeziku.	Dekadski sustav: **4** Binarni sustav: **100** Zapis u obliku razlomka u dekadskom sustavu: $\frac{\mathbf{64}}{\mathbf{16}}$

Tablica 2

Gledajući ovih šest prikaza istog broja, pitanje je kako možemo znati koji je prikaz zapravo percepcija tog broja a koji prikazi su samo njegove reprezentacije?

Husserl i Wittgenstein *(Husserl, E. (1891). La philosophie de l'arithmétique. Trad. J. English. Paris: PUF, 1972. Wittgenstein, L. (1983). Remarques sur les fondements des mathématiques. Paris: Gallimard, 1983, p. 138–145.)* smatraju da je skup jediničnih oznaka prva percepcija, odnosno intuicija nekog broja, to jest barem njegova prikladna reprezentacija. Unatoč tome, teško je smatrati te skupove jediničnih oznaka brojevima. Naime, oni su reprezentacija brojeva samo onima koji mogu provesti operaciju brojanja prirodnih brojeva. Iako se možda ne čini takvom, to je kompleksna operacija koja iziskuje neke specifične uvjete:

- razlikovanje i izdvajanje svakog elementa iz skupa jednog za drugim,
- spajanje svakog elementa s točno jednom riječi u rečenici koja se sastoji od riječi uvijek izgovorenih istim redoslijedom,
- pridavanje skupini jediničnih oznaka vrijednost zadnjeg numeriranog termina, što znači, ovisno o kontekstu brojanja, ordinalno ili kardinalno.

Jedinične oznake, što mogu biti zapravo i naši prsti ili kamenčići predstavljaju bilo koji materijalni objekt. Drugim riječima, operacija brojanja mobilizira koordinaciju dviju različitih operacija: za svaki skup jediničnih oznaka tu je skup verbalnih imenovanja i/ili pisani zapis koristeći znamenke. Jedinične oznake tako ispunjavaju samo dvije funkcije. Konstituiraju nekakav tip vanjske memorije brojanja te pružaju instantno razumijevanje te kolekcije prebrojanih jedinica. Ukratko, prvih nekoliko prirodnih brojeva su dani kao objekti samo u aktivnosti koja uključuje prebrojavanje jediničnih oznaka, što zahtijeva eksplicitnu ili implicitnu semiotičku produkciju. Nijedna od ovih reprezentacija se samostalno ne može smatrati prirodnim brojevima kao pojmom.

1.5 Transformacija semiotičkih reprezentacija u središtu matematičkog razmišljanja

Kada bismo nekoga pitali što znači raditi matematiku, vjerojatno bi nam odgovorio da raditi matematiku znači rješavati probleme. Stoga se rješavanje problema stavlja uvijek u središte nastavnih aktivnosti. Međutim, ovo je jako neprecizan odgovor jer nam ne govori ništa o matematičkom načinu rada i razmišljanja koje će nas osposobiti za rješavanje problema. Shodno tome je didaktička analiza rješavanja problema najčešće retrospektivna te se odnosi samo na specifične probleme u rješavanju. Počinje od kraja, odnosno od matematičkog rješenja problema kojim se objašnjavaju sva svojstva koja se moraju otkriti i koristiti tijekom faze istraživanja. No, koraci koji se tijekom ove faze zapravo provode mnogim su učenicima i dalje velika nejasnoća. Za razumijevanje kako riješiti problem nije dovoljno objašnjenje dobivenog rješenja nastavnika ili kolege u razredu. To učenicima ne pruža potrebno shvaćanje kako su se oni trebali samostalno snaći u tom problemu. Stoga nije uopće iznenađujuće to što se mnogi učenici opet nađu u istoj situaciji nerazumijevanja i mentalne blokade kada se taj već objašnjeni primjer, u malo drugačijem kontekstu ili uz minimalno promijenjene uvjete, opet nađe pred njima.

Ključno u matematičkom radu je *transformacija semiotičkih reprezentacija*, danih ili izvedenih u kontekstu dobivenog zadatka, u *druge semiotičke reprezentacije*. Ovdje se matematika razlikuje od drugih znanosti, kao što su fizika, astronomija, biologija ili geologija… To objašnjava zašto je u matematici semiotička reprezentacija interesantna samo dok se može transformirati u drugu reprezentaciju, a ne prvenstveno zbog objekta kojeg ona predstavlja.

Ova ključna stvar u matematičkom radu zahtijeva kompletnu promjenu tipičnog gledišta glede reprezentacija i posebno semiotičkih reprezentacija. Semiotičke reprezentacije nisu korisne samo za rad s objektom ili s radom o nekom objektu. Želimo li opisati, s kognitivnog gledišta, matematički način rada u matematici, trebamo se fokusirati na transformaciju semiotičkih reprezentacija i analizu različitih tipova transformacija.

Poglavlje 2

Reprezentacije i procesuiranje

2.1 Figura, slika i reprezentacija

Treba naglasiti da ćemo u ovom radu, baš kao i Duval, razlikovati pojmove *figura, slika i reprezentacija.* Objasnimo pobliže.

Figura je organizacija označena u kontrastu svjetlosti, nastaje zbog prisutnosti pozadinskih linija i točaka reguliranim Gestalt zakonima percepcije. Gestalt zakoni percepcije su pravila koja objašnjavaju podrijetlo naše percepcije od nekog podražaja. Glavna ideja ove psihološke teorije je da je organizirana cjelina više od samog zbroja njenih pojedinačnih dijelova. Četiri su Gestalt zakona koja ćemo sada nabrojati i pobliže objasniti.

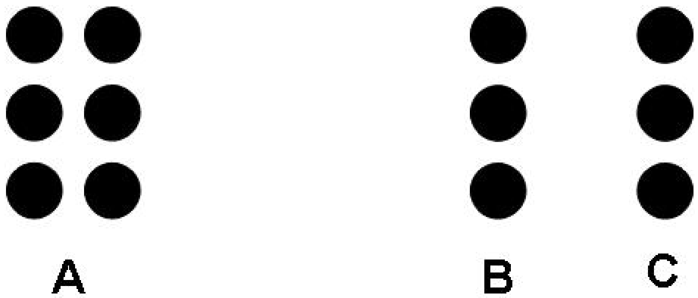
1) **Zakon zatvaranja**

Ljudi su skloni ignorirati diskontinuitete i koncentrirati se na opći oblik. Iz sljedećeg prikaza svi vjerojatno uočavamo o kojim se geometrijskim likovima radi iako su nacrtani isprekidanim linijama. Ignoriramo prekide i vidimo kvadrat, krug i trokut.

Slika 3

2) Zakon blizine

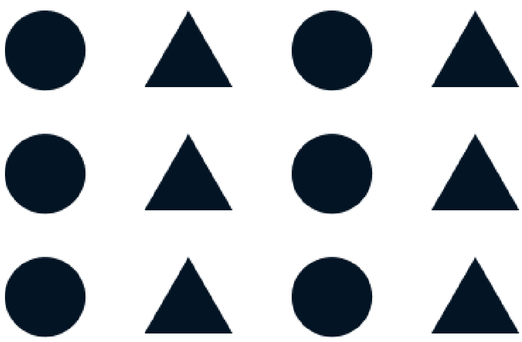
Uvijek pokušavamo grupirati elemente najbliže jedni drugima u jednu cjelinu. U sljedećem primjeru isključivo na temelju međusobne blizine crnih krugova grupirali bismo ih u tri grupe; A, B i C. Naime, prikazanih 6 krugova s lijeve i 6 krugova s desne strane su jednaki po svemu (površinom i bojom), osim po tome što je razmak između dva stupca krugova manji s lijeve strane fotografije. Zbog toga smo skloni grupirati te krugove u jednu cjelinu (A), dok ove s desne strane ne grupiramo, već promatramo kao dvije odvojene grupe krugova (B i C).



Slika 4

3) Zakon sličnosti

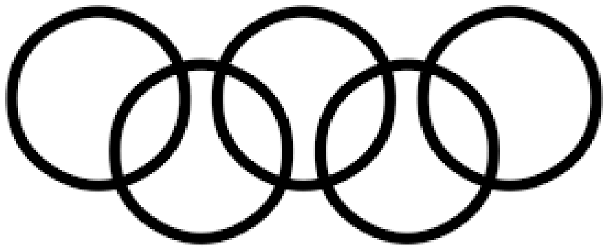
One elemente za koje zaključimo da su po nečemu slični grupiramo s onima koji su slični po istome kriteriju. U prikazanom bismo odmah uočili postojanje dva geometrijska lika; trokut. Kriterij za sličnost nam je očito „biti isti geometrijski lik“ te bismo po tome ih grupirali i promatrali zajedno kao cjelinu.



Slika 5

4) Zakon jednostavnosti (dobra figura)

Kada promatramo neki uzorak, opažamo ga na najizravniji ii najjednostavniji mogući način. Generalno, ovo je Gestalt zakon koji prevladava. Na sljedećem primjeru (prepoznajmo da ovako izgleda logo Olimpijskih igara) vidimo pet kružnica koje se međusobno sijeku a ne kružne lukove koji imaju zajedničke točke.



Slika 6

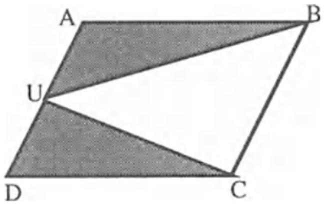
Sada kada smo pobliže objasnili Gestalt zakone percepcije, lakše možemo shvatiti razlike u korištenju termina figura, slika i reprezentacija u ovom radu

Slika je rezultat vizualnog stimulansa kojeg primamo kroz zjenicu.

Termin reprezentacija širi je pojam. Najjednostavnije rečeno, to je nešto što predstavlja nešto drugo. Nadalje, neka figura može biti reprezentacija ali nije svaka reprezentacija figura (npr. brojevi, simboli, dijagrami…).

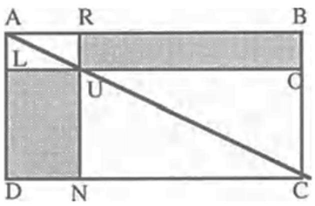
2.2 Poteškoće u viđenju geometrijske figure

Crtanje skica u geometrijskim problemima vrlo često je nužno za uspješno rješavanje danog problema. Skice nam nude uvid i intuitivnu prezentaciju problema i odnosa u toj geometrijskoj situaciji. Ipak, učenici često crtaju skicu samo zato što im nastavnici inzistiraju na tome dok njima ona ne pomaže, kao što bi trebala, za zorniji prikaz i rješavanje problema. Stoga se nameće pitanje, zašto geometrijska figura tu ne djeluje heuristički, odnosno zašto im ta skica ne donosi potrebne nove spoznaje? Važnost ovog pitanja najbolje se vidi u razlikama u rezultatima sljedećeg istraživanja među 123 četrnaestogodišnjaka *(Mesquita, A. (1989b). L'influence des aspects figuratifs dans l'argumentation des eleves en geometrie, Strasbourg: These U.L.P, pp. 39-46,92 –).*

I	Specifični slučaj	Općeniti slučaj
	U paralelogramu $ABCD$ točka U je polovište stranice $\overline{AD}$. Usporedi površine osjenčanih i neosjenčanog dijela paralelograma.	Ako pomičemo točku U po stranici $\overline{AD}$, dobivamo li isti odgovor?
Točni odgovori:	**56%**	**34%**

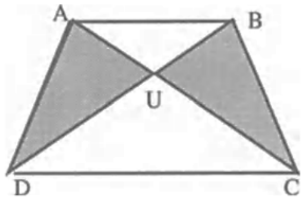
Tablica 3

Uočavamo da je više od pola učenika prepoznalo da su površine osjenčanog i neosjenčanog dijela paralelograma jednake u specifičnom slučaju, dok je u općenitom slučaju to uspjelo tek malo više od trećine njih (Tablica 3).

II	Specifični slučaj	Općeniti slučaj
	U pravokutniku $ABCD$ dužina $\overline{AC}$ je dijagonala. Usporedi površine osjenčanih pravokutnika.	Ako pomičemo točku U po dužini $\overline{AC}$, dobivamo li isti odgovor na prethodno pitanje?
Točni odgovori:	**60%**	**24%**

Tablica 4

U drugom primjeru dolazimo do još većeg nesrazmjera. Naime, čak 60% učenika je u specifičnom slučaju prepoznalo da će površine pravokutnika biti jednake, dok u općem slučaju nije niti četvrtina ispitanih (Tablica 4).

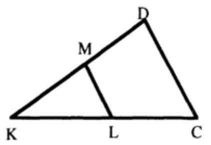
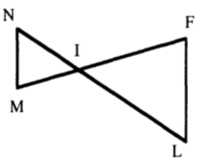
III	Specifični slučaj	Općeniti slučaj
	U trapezu $ABCD$ točka U je sjecište dijagonala $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$. Usporedi površine osjenčanih trokuta.	Hoćemo li u proizvoljnom trapezu, s nepoznatim duljinama stranica dobiti isti odgovor na prethodno pitanje?
Točni odgovori:	**11%**	**0%**

Tablica 5

Treći primjer polučio je najslabije rezultate među učenicima. Tek 11% njih je točno zaključilo da su površine osjenčanih trokuta jednake, a nitko nije uspio dati točan odgovor na općenitu tvrdnju (Tablica 5).

Rekonfiguracija nužna za dolazak do točnog rješenja zadatka nije jednako vidljiva u sva tri primjera. Onim učenicima koji ne mogu prepoznati potrebnu rekonfiguraciju početna figura ne daje nikakve odgovore.

Slična razlika uspješnosti uz promjenu figure se može vidjeti u raznim matematičkim situacijama. Još jedan primjer koji ćemo sada dati je istraživanje provedeno na 112 učenika u dobi od 15 i 16 godina. Radilo se o jednostavnoj primjeni Talesovog teorema o proporcionalnosti.

Slični trokuti	Neparalelne stranice	Paralelne stranice
 KM=3 cm, KD=7 cm, KC=5.5 cm, ML=2 cm, (ML) // (DC)	Odredi duljinu stranice $\overline{KL}$. **70.5%**	Odredi duljinu stranice $\overline{DC}$. **49%**
 IM=3 cm, IF=5 cm, IL=4 cm, NM=2 cm, (NM) // (FL)	Odredi duljinu stranice $\overline{IN}$. **60.5%**	Odredi duljinu stranice $\overline{FL}$. **35%**

Tablica 6

Uočavamo da su u prvom primjeru, gdje su vrhovi stranica trokuta ΔKLM na stranicama trokuta ΔKCD, rezultati bolji nego u drugom primjeru gdje su trokutima ΔILF i ΔINM stranice $\overline{FL}$ i $\overline{NM}$ na paralelnim pravcima te su im kutovi $\sphericalangle FIL$ i $\sphericalangle MIN$ vršni kutovi. Primjećujemo da iako se koristi isti teorem, učenici ga nisu prepoznali s istom lakoćom; prvi slučaj im je intuitivniji. U oba primjera učenicima je teže bilo izračunati duljinu stranica koje su paralelne od onih koje su na istom pravcu.

Da bismo mogli uopće odgovoriti na postavljeno pitanje o heurističkoj funkciji skice, u sljedećem potpoglavlju ćemo objasniti kako bi geometrijska figura trebala heuristički funkcionirati.

2.3 Kognitivna razumijevanja

Kako bismo analizirali heurističku funkciju geometrijske figure, moramo je promatrati kao kognitivno razumijevanje. Postoji nekoliko načina za viđenje skice, odnosno nekog vizualnog stimulansa. Razlikovat ćemo četiri kognitivna razumijevanja; perceptivno, sekvencijalno, diskurzivno i operativno. Da bi neka skica bila shvaćena kao geometrijska figura, ona mora pobuditi perceptivno razumijevanje te barem još jedno od preostala tri razumijevanja. Svako od ovih razumijevanja donosi nešto svoje u potpunom viđenju i procesiranju vizualnog stimulansa. Korištenje geometrijskih figura dovodi do fuzije različitih vrsta razumijevanja pa se oni tretiraju kao jedna te ista a za rješavanje konkretnog problema najčešće je potrebna njihova međusobna interakcija. Objasnimo pobliže četiri nabrojane vrste razumijevanja i njihove uloge.

1. **Perceptivno razumijevanje**

Perceptivnim razumijevanjem, to jest poimanjem, smatramo ono što vidimo, prepoznajemo na prvi pogled (oblik, reprezentacija nekog objekta…) u ravnini ili u prostoru. Ono što ćemo percipirati je rezultat nesvjesne integracije viđenih informacija i može se razlikovati od slike u našem oku, odnosno mrežnici. Slika u našem oku može se mijenjati dok percipirana svojstva dane figure (oblik, veličina, svjetlina…) ostaju nepromijenjeni (perceptivne konstante). Također, možemo i imenovati ono što vidimo, rekli bismo „ovo je točka ili trokut, krug…“ Nadalje, možemo razlikovati i prepoznati razne podfigure u ravnini ili prostoru. Geometrijska figura se često sastoji od više podfigura od onih koje su korištene za njenu konstrukciju.

2. **Sekvencijalno razumijevanje**

Sekvencijalno razumijevanje nužno je kad god trebamo konstruirati ili opisati konstrukciju neke geometrijske figure. Postoji određeni redoslijed u kojem se različiti dijelovi figure spajaju u tu konačnu figuru. Ovdje organizacija crteža ne ovisi o zakonima percepcije, već o matematičkim svojstvima figure i tehničkim zaprekama. Te tehničke zapreke se mijenjaju ovisno o alatima koji se koriste (npr. ravnalo i šestar ili neki računalni softver). Međutim, prostoručne skice ne prave takve instrumentalne zapreke. Ipak, ove tehničke zapreke nam daju povratnu informaciju; zadana figura ne može biti shvaćena dok god odnos između matematičkih svojstava i tehničkih zapreka nije uzet u obzir. U ovim uvjetima dobivena 'geometrijska figura' može poslužiti kao model u kojem su radnje na reprezentaciji objekta i promatrani rezultati povezani s operacijama na matematičkom objektu koji se reprezentira. Ponekad postoje drugi načini za dobivanje traženog, kroz neke druge figure koje ne pripadaju planiranoj figuri. U tom slučaju se stvara razdor između sekvencijalnog i perceptivnog razumijevanja.

3. **Diskurzivno razumijevanje**

Matematička svojstva reprezentirana na nekoj skici, tj. crtežu ne mogu se odrediti samo perceptivnim shvaćanjem. Neka svojstva se prvo moraju izreći govorom (imenovanje i hipoteza) dok ostala proizlaze iz danih svojstava. Ta skica je bez imenovanja ili hipoteze samo nejednoznačna reprezentacija. Naime, neće svatko vidjeti iste stvari, ista svojstva iz te skice. Kada bi se matematička svojstva promatrala samo kroz skicu bez govornog, odnosno razgovornog (diskurzivnog) razumijevanja, u učionici bi se mogla dogoditi situacija u kojoj bi učenici, vidjevši dvije linije na ploči, mogli reći „ova dva pravca su *skoro* paralelna“. Tada bi se ovo činilo kao dobar opis skice pa bi se argumenti za i protiv paralelnosti tih pravaca mogli smatrati jednako validnima i prihvatljivima. Nadalje, u svakoj geometrijskoj reprezentaciji perceptivno prepoznavanje geometrijskih svojstava mora ostati pod kontrolom našeg govora. Ovisno o iskazima deduktivno se donose zaključci o tome što geometrijska figura reprezentira. Tu dolazimo do potencijalne rupe između onoga što figura prikazuje i onog što ona zapravo treba reprezentirati. Ono što perceptivna figura prikazuje je ono što vidimo bez svjesnog analiziranja promatranog. Prepoznajemo oblike i objekte a pomoću percepcije dolazimo do njihovog značenja. S druge strane, ono što percipirana figura reprezentira se određuje kroz govor, npr. imenovanjem tog objekta ili definiranjem istog. Naše diskurzivno razumijevanje može se promijeniti a da nam se ne promijeni perceptivno jer za istu skicu možemo samo korigirati našu prvotnu izjavu.

4. Operativno razumijevanje

Ova vrsta razumijevanja možda je manje poznata od prethodnih, što ne znači da je manje važna. Pomoću nje dolazimo do rješenja problema promatrajući danu geometrijsku figuru. Ono ovisi o raznim načinima modifikacije neke geometrijske figure. Nabrojimo i ukratko opišimo te potencijalne modifikacije.

Mereološka modifikacija

Možemo podijeliti cijelu figuru na jednostavnije dijelove različitih oblika (trokuti, kvadrati, pravokutnici…) te zatim te dijelove kombinirati i složiti na drugačiji način kako bismo dobili novu figuru pogodniju za dolazak do rješenja ili možemo dobiti neke skroz nove podfigure.

Optička modifikacija

Dobivenu figuru možemo učiniti užom ili širom kao da koristimo zrcalo ili leće.

Mjesna modifikacija

Figuri također možemo promijeniti poziciju ili orijentaciju na papiru, odnosno ekranu.

Svaku od ovih modifikacija možemo provesti u glavi ili fizički kroz razne operacije. Uz ove opisane distinkcije sada možemo bolje analizirati početno pitanje; zašto drugačije geometrijske figure za istu matematičku situaciju kod učenika prave tolike poteškoće i donose različite razine uspješnosti u rješavanju problema? Tu trebamo istaknuti i izdvojiti operativno razumijevanje od ostala tri. Postoji jedna specifična poteškoća vezana uz njega; uz mnogobrojne modifikacije za danu figuru i razne operacije kojima ih možemo izvesti, javlja se problem kako odabrati što koristiti i u kojem redoslijedu za rješavanje zadanog matematičkog problema?

2.4 Vizualizacija, konstrukcija i rezoniranje

Duval ističe i kako postoji potencijalni sukob između perceptivnog razumijevanja figure i matematičke percepcije. Nadalje, operativno razumijevanje ne može funkcionirati samostalno i nezavisno od ostalih, no diskurzivno i perceptivno razumijevanje ga često prikriju.

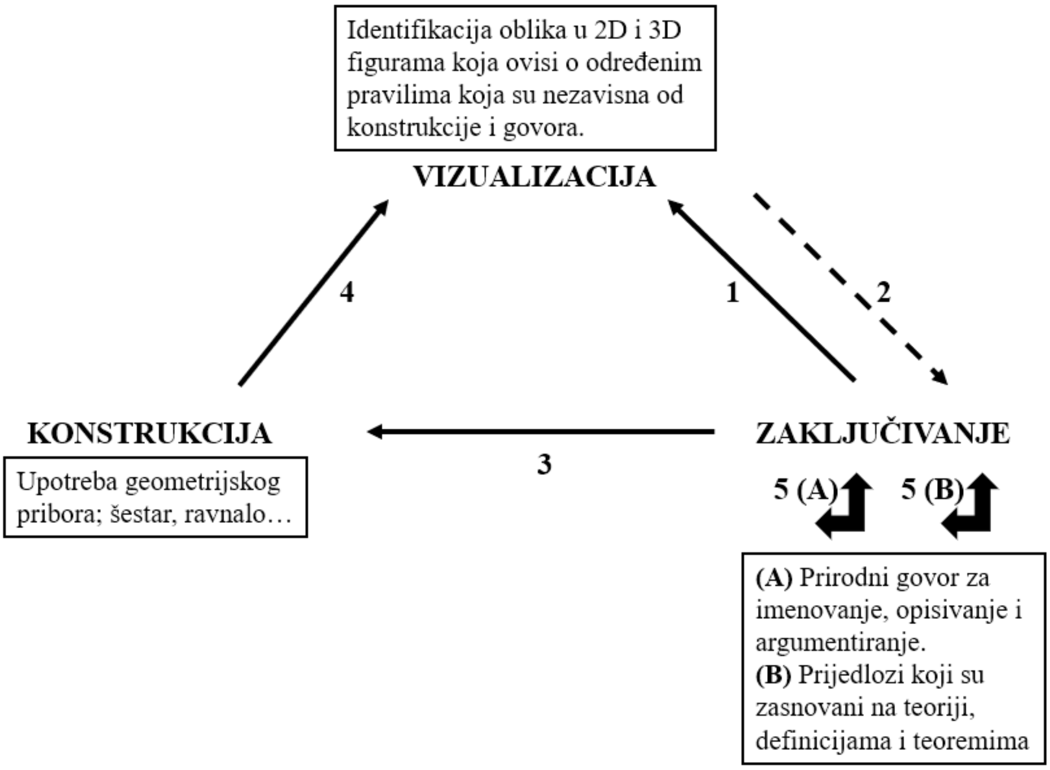
Kognitivni procesi koje Duval analizira u geometrijskom rezoniranju su:

- Vizualizacija (vizualna reprezentacija geometrijskih iskaza ili heurističko iskazivanje složenijih geometrijskih situacija)
- Konstrukcija (korištenje geometrijskog pribora)
- Zaključivanje (posebno diskurzivni proces za proširivanje znanja; za objašnjavanje, dokazivanje…)

Ovi procesi mogu biti odvojeni. Primjerice, vizualizacija nije uvijek neophodna za konstrukciju. Naime, iako često konstrukcija vodi prema vizualizaciji, proces konstrukcije nekog geometrijskog objekta ovisi zapravo o vezi između matematičkih svojstava i tehničkih ograničenja (ovisno o geometrijskim alatima koji su nam dostupni).

Stoga, iako vizualizacija često pomaže u dokazivanju, ponekad ona ipak može dovesti do zabune. Unatoč tome, Duval smatra da su ove tri vrste kognitivnih procesa blisko povezane te je njihova međusobna suradnja nužna za snalaženje i znanje u geometriji. Sljedećom slikom (Slika 7) ćemo prikazati i pojasniti kako Duval povezuje ova tri kognitivna procesa.

Svaka strelica prikazuje kako jedna vrsta kognitivnog procesa podržava drugu u nekoj geometrijskoj situaciji. Primijetimo dvije uzajamne strelice između procesa vizualizacije i zaključivanja. Jedna strelica (2) je isprekidana jer vizualizacija ne pomaže uvijek u pravilnom zaključivanju. Strelice 5(A) i 5(B) predstavljaju činjenicu da se zaključivanje može razviti i nezavisno od procesa konstrukcije ili vizualizacije. Ova slika prikazuje tu već spomenutu sinergiju između ova tri kognitivna procesa.



Slika 7

2.4 Heuristička uloga geometrijske figure

Jedna važna stvar koja se treba uzeti u obzir kada govorimo o operativnom razumijevanju je to što su za danu figuru (konstruiranu ovisno o iskazu zadatka) različite potencijalne operacije su manje – više vidljive i manje – više perceptivno prirodne učenicima. Promotrimo sada primjer na kojem ćemo objasniti što to znači.

Primjer. Vidljivost operacije rekonfiguracije

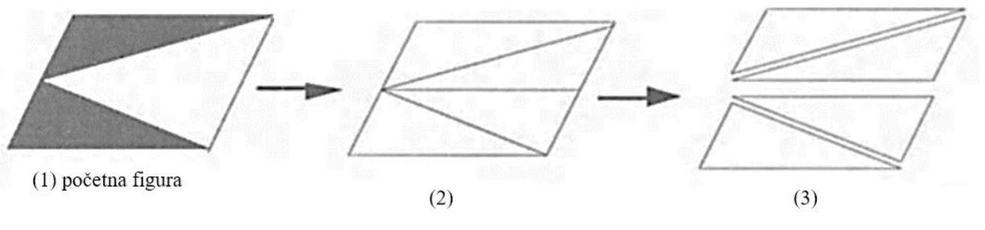
Geometrijska figura se ili već sastoji od više geometrijskih podfigura ili se može rastaviti na više geometrijskih podfigura. Operacija rekonfiguracije je rastavljanje geometrijske figure na podfigure i ponovno grupiranje tih podfigura u neku novu geometrijsku figuru. Za zadanu geometrijsku figuru često ima više mogućih načina kako to učiniti, no najčešće samo jedan pomaže i dovodi do rješenja problema. Uočljivost potrebne rekonfiguracije ovisi o nekoliko faktora. Nabrojimo sada neke moguće situacije.

1. Podjela na potrebne podfigure je već dana u početnoj geometrijskoj figuri ili se ona mora samostalno pronaći.
2. Rekonfigurirana geometrijska figura se može i ne mora nalaziti izvan kontura početne geometrijske figure.
3. Rekonfigurirana figura može i ne mora biti konveksna.
4. Podfigure koje se trebaju kombinirati za dobivanje nove geometrijske figure mogu i ne moraju biti perceptivno komplementarne, odnosno mogu i ne moraju spajanjem davati neki već poznati geometrijski lik.
5. Višestruka upotreba neke podfigure može i ne mora biti nužna za rješavanje problema.

Sada možemo analizirati primjere iz prethodnog poglavlja vezane za površine geometrijskih likova. Prikazat ćemo za svaki rekonfiguraciju koja dovodi do rješenja problema. Relevantna rekonfiguracija može očito biti vidljiva direktno, odnosno bez ovako eksplicitnog dijeljenja figure, no skiciranjem svake faze koja dovodi do rješenja lakše ćemo objasniti i usporediti procesuiranje koje stoji iza tog procesa. Prisjetimo se, u sva tri primjera zadatak je bio usporedba površina.

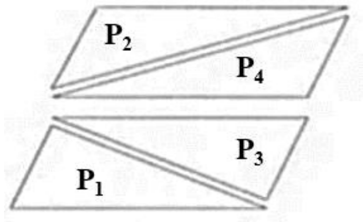
Promotrimo prvo primjer **I**.

I



Slika 8

Kako je u ovome primjeru zadatak usporediti površine osjenčanog i neosjenčanog dijela danog paralelograma, te ćemo to postići podjelom tog paralelograma na nove paralelograme, odnosno trokute. Točka *U* je bila polovište stranice pravokutnika te ćemo povlačeći paralelu sa stranicom *AB* tog paralelograma točkom *U,* dobiti dva nova paralelograma unutar početnog (2). Lako se pokaže da ta nova dva paralelograma imaju jednake površine. Proučimo sada zasebno svaki taj paralelogram. Oni su uz pomoć početne skice već podijeljeni dijagonalama, čime dobivamo trokute unutar paralelograma (3). Po (S – K – S) poučku o sukladnosti trokuta zaključujemo da su svaka dva trokuta unutar tih paralelograma međusobno sukladna. Dakle, imaju jednake površine. Time smo na (3) došli do 4 trokuta. Zbog jednostavnosti uvedimo oznake za površine tih trokuta $P_1, \ldots, P_4$ kao na sljedećoj slici (Slika 9).



Slika 9

Iz svega što smo dosad zaključili vrijedi da je

$$P_1 = P_3,$$

$$P_2 = P_4,$$

$$P_1 + P_3 = P_2 + P_4.$$

Želimo pokazati da je

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4.$$

Koristeći poznate jednakosti koje su gore navedene dobivamo sljedeće:

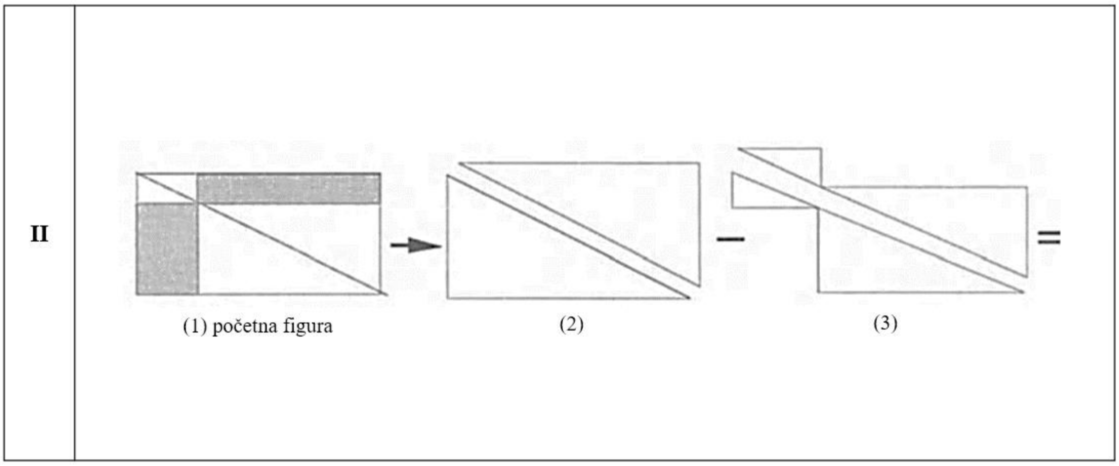
$$P_1 + P_2 = P_3 + P_2 = P_3 + P_4,$$

odnosno,

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4. \blacksquare$$

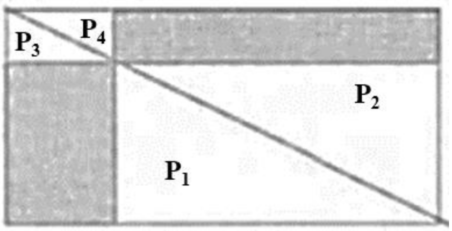
U ovim opisanim koracima kojima se dolazi do rješenja trebali smo početnu figuru samostalno podijeliti na nove podfigure (paralelogrami, odnosno trokuti) koje su nam poslužile za rješenje. One su se nalazile unutar kontura početne figure te se konveksnost figura očuvala. Nismo morali nijednu podfiguru višestruko koristiti a dobivene podfigure su perceptivno komplementarne.

Sada proučimo primjer **II**.



Slika 10

U ovom primjeru je zadatak bio usporediti osjenčane površine u pravokutniku. Do rješenja se dolazi slično kao u prvom primjeru. U danom zadatku početna figura (pravokutnik) je podijeljena dijagonalom na četiri trokuta i dva pravokutnika. Za početak ćemo iskoristiti činjenicu da dijagonala pravokutnika raspolavlja pravokutnik na dva sukladna pravokutna trokuta (2). Nadalje, uočavajući da smo na početnoj figuri imali trokute čije ćemo površine, zbog jednostavnosti, označiti s $P_1, \ldots, P_4$.



Slika 11

Kako su trokuti čije smo površine označili s P_1 i P_2 nastali isto raspolavljanjem pravokutnika uz pomoć dijagonale, možemo zaključiti da je

$$P_1 = P_2.$$

Analognim zaključivanjem se dobije da je

$$P_3 = P_4.$$

Stoga zbrajanjem tih jednakosti dobivamo da je

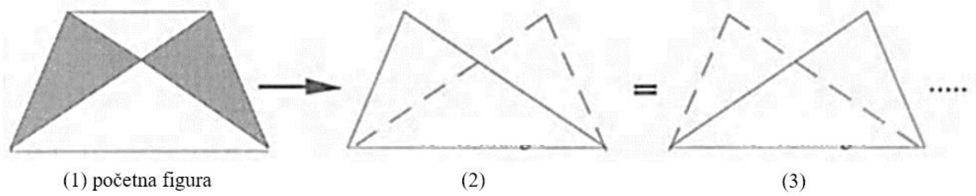
$$P_1 + P_3 = P_2 + P_4.$$

Sada možemo oduzeti površine ovih pravokutnih trokuta kako je na slici zapisano;

(2) – (3). Time dolazimo do zaključka da su površine osjenčanih dijelova pravokutnika jednake. Za razliku od prvog primjera, u ovom primjeru nam je podjela figure na potrebne podfigure već bila dana na početku zadatka. Međutim, nisu sve podfigure konveksne (podfigura (3)), iako početna figura je. Rekonfigurirana podfigura se tehnički nalazi unutar kontura početne figure. Još jedna razlika koju možemo uočiti u odnosu na prvi primjer je ta što smo sada morali površine oduzimati da dođemo do rješenja dok smo u ih prvom primjeru zbrajali. Ni u ovom primjeru se nijedna podfigura nije višestruko koristila ali dobivene podfigure nisu perceptivno komplementarne.

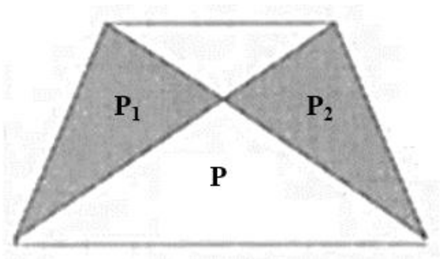
Konačno, proučimo i primjer **III**.

III



Slika 12

Zadatak je bio usporediti osjenčane dijelove danog trapeza (početna figura). Iz dane slike se da naslutiti da su one jednake. Način na koji je to najjednostavnije dokazati je podjelom trapeza na sukladne trokute ((2) i (3)). Naime, nužno je uočiti da su ti trokuti sukladni (jer se radi o jednakokračnom trapezu). Sada je presjek tih dvaju trokuta jednakokračni trokut označen slovom **P** na sljedećoj slici.



Slika 13

Sada kako su trokuti bili sukladni možemo zaključiti da vrijedi

$$P_1 = P_2$$

gdje su s $\mathbf{P_1}$ i $\mathbf{P_2}$ označene površine traženih dijelova trapeza.

I u ovom primjeru je bilo potrebno figuru podijeliti na neke podfigure koji nisu možda odmah uočljive. Rekonfigurirane podfigure se nalaze unutar okvira naše početne figure. Baš kao u primjeru II, ni ovdje dobivena rekonfiguracija nije konveksna. Primijetimo i da dobivene podfigure nisu perceptivno komplementarne. Najveća razlika između ovog i prethodnih primjera je što se ovdje ista podfigura mora dva puta koristiti (sukladni trokuti).

Znatna je razlika u uspješnosti između primjera II i III. Razlog za to možemo naći u činjenici da se ista podfigura u primjeru III mora dva puta iskoristiti, što nije slučaj u primjeru II. To nas navodi na zaključak da učenicima taj postupak nije intuitivan te im stvara poteškoće. Adekvatna podjela figure na ključne podfigure također učenicima zna stvarati problem, posebno kada je to potrebno uzastopno više puta provesti. Također je velika razlika u uspješnosti u posebnim i generaliziranim situacijama u sva tri primjera. Na razinu uspješnosti u primjerima I i II znatno utječu zadane mjere danih figura ili iskaz u zadatku. Međutim, dobro operativno razumijevanje u posebnom slučaju dolazi do izražaja onda i u generaliziranom. U primjeru I većina učeničkih uspješnih dolazaka do rješenja se bazira na operativnom razumijevanju i u posebnom i u generalnom slučaju.

2.5 Očekivanja u budućnosti

Očekivano je da će uvijek biti potencijalnog konflikta između percepcijskog razumijevanja figure i matematičke percepcije. Zbog toga što im je teško u glavi se odmaknuti od onog što percipiraju na prvi pogled na figuri, učenike njihovo razmišljanje navodi na krive matematičke zaključke.

Perceptivno razumijevanje nije sinonim za intuiciju niti uvid u rješenje problema. Matematička percepcija nije jednostavna; u njoj se preklapaju različite vrste razumijevanja. Kako bi se ovo razumjelo s psihološkog i didaktičkog gledišta, nužno je razlikovati različite oblike razumijevanja. Kako je već rečeno, operativno razumijevanje ne djeluje zasebno, već s drugima a pogotovo s diskurzivnim. Ipak, obično je heurističko procesuiranje figure podređeno diskurzivnom razumijevanju i može biti zaboravljeno i zanemareno tijekom rješavanja problema. Također, može biti zamijenjeno sa slikovnom podrškom diskurzivnog razumijevanja. Nadalje, diskurzivno i perceptivno razumijevanje figure vrlo često zamrači operativno. Zbog toga je potrebno odvojeno učenje operativnog kao i diskurzivnog i sekvencijalnog razumijevanja; matematički način razmišljanja i promatranja figura je rezultat koordinacije između ovih različitih procesa razumijevanja kroz dulji period učenja.

Poglavlje 3

Istraživanje

Za potrebe ovog rada provedeno je istraživanje među učenicima jedne osnovne škole. Uz dozvolu znanstvenika iskorišteno je već provedeno istraživanje *„The Double Nature of the Geometrical Figure: Insights from Empirical Data“.* Istraživanje su originalno osmislili i proveli grčki, odnosno ciparski sveučilišni profesori Vasiliki Gogou, Athanasiosis Gagatsis, Panagiotis Gridos, Iliada Elia i Eleni Deliyianni.

3.1 Cilj istraživanja

Cilj istraživanja bio je ispitati u kojoj mjeri učenici od 5. do 8. razreda osnovne škole (dob od 11 do 14 godina) koriste danu geometrijsku figuru kao ilustraciju umjesto kao matematički objekt onda kada je ono što vide kontradiktorno s onim što geometrijska figura reprezentira. Također, proučit ćemo utječe li učenička dob na rezultate.

3.2 Metodologija

U istraživanju je sudjelovalo 27 učenika u dobi od 11 do 14 godina (5. do 8. razred) i to 2 učenika od 11 godina, 7 učenika od 12 godina, 11 učenika od 13 godina te 7 učenika od 14 godina. Prosječna dob sudionika je 12.85 godina.

Istraživanje se sastojalo od dva testa; Test A i Test B. Prvi test se pisao 20 minuta, a drugi 10 minuta te su se pisali jedan za drugim, tijekom istog nastavnog sata.

Test A se sastoji od 5 zadataka koji provjeravaju redom učeničko poznavanje sljedećih jednostavnih geometrijskih koncepata: simetrala kuta, vrste kutova, paralelni pravci, simetrala dužine i suma kutova u trokutu. Ovi koncepti su izabrani jer se već u osnovnoj školi uče i često koriste te se smatralo da će učenicima biti dobro poznati.

Test B ima također 5 zadataka koji uključuju iste geometrijske koncepte. Međutim, u ovim zadacima, za razliku od onih u prvom testu, verbalno dana informacija ili sama figura ne izgleda onako „kako bi trebala" u tom slučaju.

I Test A i Test B se nalaze u prilogu ovog rada.

3.3 Rezultati istraživanja

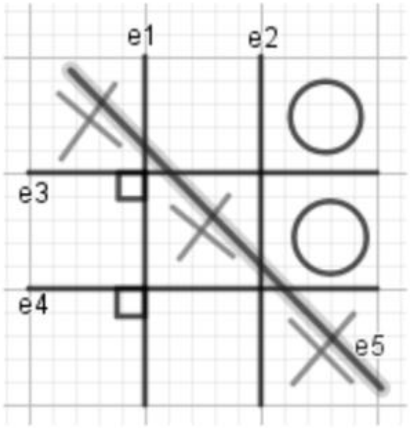
Sljedećom tablicom prikazan je postotak potpuno točne riješenosti zadataka Testa A i Testa B ovisno o geometrijskom konceptu koji se ispituje.

Dob → Geometrijski koncept ↓	Test A		Test B	
	11 – 12	13 – 14	11 – 12	13 – 14
Simetrala kuta	33 %	44 %	44 %	72 %
Vrste kutova	78 %	83 %	67 %	61 %
Paralelni pravci	22 %	67 %	0 %	6 %
Simetrala dužine	33 %	61 %	44 %	28 %
Suma unutarnjih kutova trokuta	44 %	56 %	11 %	39 %

Tablica 7

Proučimo rezultate Testa A. U prva dva zadatka nije bilo znatne razlike u postotku riješenosti; prvi zadatak (simetrala kuta) u obje dobne skupine ima nizak, dok drugi zadatak (vrste kutova) ima visok postotak riješenosti. Značajne razlike u postotku riješenosti možemo uočiti u trećem (paralelni pravci) i četvrtom zadatku (simetrala dužine). Na sljedećoj slici se nalazi treći zadatak iz Testa A.

3. Na sljedećoj slici odaberi par paralelnih pravaca i par pravaca koji se sijeku. Objasni zašto su ti odabrani pravci paralelni.



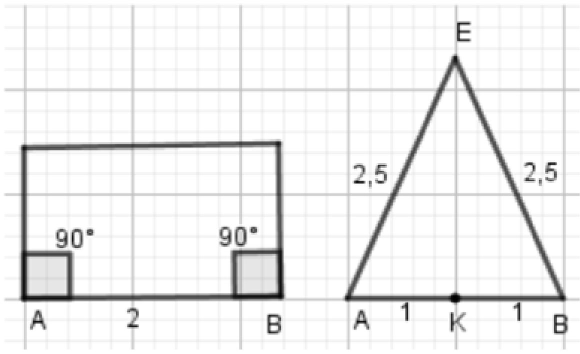
Slika 14

Razlog za nisku riješenost trećeg zadatka u mlađoj dobnoj skupini je taj što neki učenici nisu znali što znači da su pravci paralelni, neki su miješali pojam okomitosti i paralelnosti, a ostali nisu ponudili objašnjenje za svoj odgovor koji je bio točan. U starijoj dobnoj skupini se vidi poboljšanje. Većina učenika razumije te nudi i objašnjenje zašto su odabrani pravci paralelni. Zanimljivo je i razlika u objašnjenjima između mlađih i starijih učenika. Tako je jedna učenica od 12 godina odabrala par pravaca e_3 i e_4 te za objašnjenje rekla: *„Jer su točno isto zakrivljeni.“* S matematičkog gledišta je to jako neprecizan odgovor, no s obzirom da je to učenica petog razreda, vidi se njeno razumijevanje svojstva paralelnosti. S druge strane, stariji učenici su dali zrelije i matematički preciznije odgovore. Istaknimo ih nekoliko. Objašnjenje jedne trinaestogodišnje učenice bilo je: *„Pravci e_3 i e_4 su paralelni jer su jednako udaljeni pod istim kutom.“* Interesantan je baš ovaj odgovor zbog njegove sličnosti s Euklidovim petim postulatom u formi kakvoj je izrekao Posidonije (1. st. p. Kr.): *„Paralelni pravci su pravci koji između sebe imaju stalan razmak.“* Još jedan odgovor trinaestogodišnjeg učenika je bio: *„Pravci e_1 i e_2 jer nemaju nijednu zajedničku točku.“* Matematički zanimljive odgovore su još dali jedna učenica od 14 godina: *„Pravci e_3 i e_4 su paralelni jer su oba koji se sijeku s e_1 pravi kut*“. Ova učenica je primijenila Obrat teorema o kutovima uz transverzalu. Konačno, jedan četrnaestogodišnji učenik daje odgovor: *„Pravci e_3 i e_4 zato što kad se ti pravci raširе u oba smjera nikada se neće sjeći, tj. beskonačno će se protezati u obje strane, ali se nikada neće sjeći.“* Odgovor ovog učenika nalikuje na definiciju koju je upravo Euklid dao u svojim Elementima;

„Paralelni pravci su pravci koji se nalaze u istoj ravnini i koji se produženi u beskonačnost na obje strane ne sijeku jedan s drugim."

Komentirajmo sada rješenja četvrtog zadatka u Testu A. Na sljedećoj je slici prikazan tekst tog zadatka.

4. Konstruiraj simetralu dužine AB u oba dana lika. Opiši svoju konstrukciju.

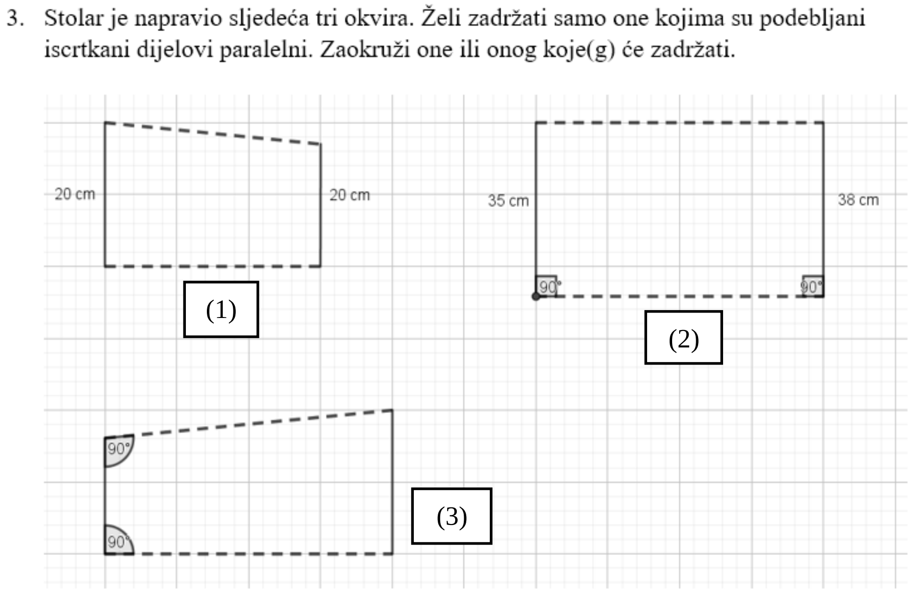


Slika 15

Razlog za ovako slabu riješenost u mlađoj dobnoj skupini nalazimo u općem nerazumijevanju što je simetrala dužine a potom još i nemogućnost njihovog opisa svoje konstrukcije. Ipak, bilo je točnih odgovora pa istaknimo sada opis konstrukcije jedne dvanaestogodišnje učenice: *„U šestar sam uzela otprilike pola dužine $\overline{AB}$ i označila X, mijenjajući točke iz kojih označavam. Kroz sjecišta X – ova provukla sam simetralu."* Kako smo već rekli, stariji učenici su pokazali bolje poznavanje pojma simetrale dužine te iz toga proizlazi bolji postotak riješenosti. Većina učenika koji su dali odgovore iz te dobne skupine su opisivali postupak kako se određuje simetrala neke dužine. Tako je jedna trinaestogodišnja učenica napisala: *„Uzela sam u šestar više od pola te stranice i napravila polukružnicu iz točaka A i B te povukla pravac kroz sjecišta tih polukružnica."* Navedena učenica je poprilično precizno, korektno i jasno objasnila kako se konstruira simetrala neke dužine. Neki drugi učenici su to malo nespretnije i nepreciznije objašnjavali, kao sljedeća učenica od 13 godina: *„U šestar sam uzela duljinu veću od pola dužine $\overline{AB}$. Zatim sam označila sjecišta te povukla crtu."* Ova učenica zna da se nešto mora presjeći i točno je to napravila, ali joj je matematički vokabular nije dovoljno bogat da to i objasni precizno. Dva odgovora su bila malo drugačija od ostalih, pa ćemo sada njih prikazati. Jedan trinaestogodišnjak objašnjava: *„Kod pravokutnika sam trebao crtati simetralu tako da sam mogao samo izbrojiti kvadratiće, dok kod trokuta koji je jednakokračan samo povučem crtu od točke E do* *točke K.“* Učenik se ovdje domišljato poslužio kvadratnom mrežom u kojoj su geometrijski likovi bili ucrtani te je iskoristio činjenicu da mu je dan jednakokračni trokut. Sličnom metodom se poslužila i jedna trinaestogodišnja učenica: *„Našla sam sredinu lika koji kad se preklopi isti je na obje strane.“* Matematički gledano je njeno objašnjenje jako neprecizno, no možemo primijetiti da učenica intuitivno prepoznaje osnu simetriju u ovim likovima te to u ovom slučaju koristi. Isto tako koristi i kvadratnu mrežu koja je bila dana u zadatku.

Zadnji, peti zadatak u Testu A bio je vezan za običnu sumu unutarnjih kutova u trokutu. Tu nema neke značajne razlike u riješenosti mlađe i starije dobne skupine, iako su opet stariji učenici pokazali bolje znanje. Većina učenika je znala da je zbroj unutarnjih kutova u trokutu 180˚, no za jednakostranični trokut su neki zaokruživali i druge solucije. To su većinom bili odgovori 60˚ i 360˚. Možemo pretpostaviti da ih je na odgovor 60˚ navukla činjenica da su svi unutarnji kutovi u jednakostraničnom trokutu 60˚. Na odgovor 360˚ ih je vjerojatno navukla činjenica da je to zbroj vanjskih kutova u trokutu. Primijetimo da su sve zadatke u Testu A bolje riješili učenici od 13 i 14 godina.

Proučimo sada rezultate Testa B. U tom ispitivanju možemo uočiti puno veći nesrazmjer između mlađih i starijih učenika; veće su razlike u postotku riješenosti u svim zadacima osim u drugom. U prvom zadatku u kojem se ispitivao koncept simetrale kuta su znatno bolje riješili stariji učenici prihvativši danu sliku kao skicu a ne stvarni prikaz. Drugi zadatak, koji je bio vezan za vrstu kutova, je baš kao i u Testu A bio podjednako dobro riješen i u mlađoj i u starijoj skupini. No, zanimljivo kod tog zadatka je što su mlađi učenici riješili bolje. Razlog za to možemo pronaći u činjenici da mlađi učenici ipak manje razmišljaju kako koji kut treba izgledati, za razliku od onih starijih koji dobro prepoznaju kada bi neki kut, ovisno o danoj njegovoj veličini, trebao biti pravi, šiljasti ili tupi. Analizirajmo sada treći zadatak u kojem se ispitivala paralelnost pravaca. Taj zadatak ima najgori postotak točne riješenosti u oba testa.

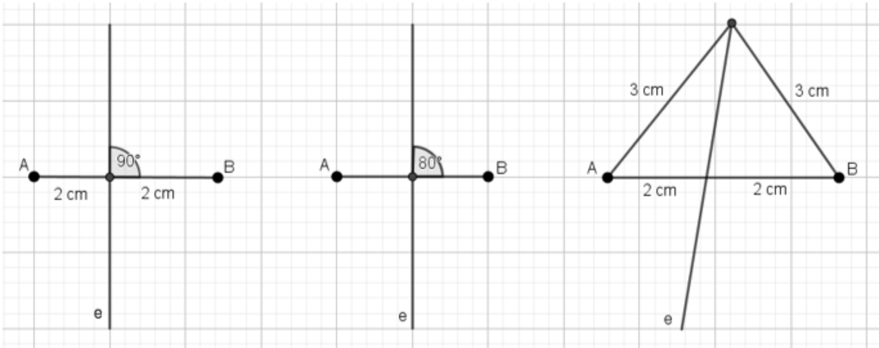


Slika 16

Ovaj zadatak nijedan učenik u dobi od 11 do 12 godina nije točno riješio, dok je samo jedan četrnaestogodišnji učenik točno riješio zadatak. U obje dobne skupine su učenici najčešće zaokružili (barem) sliku (2), s tim da je u mlađoj to učinilo 67 %, dok u starijoj skupini njih čak 78 %. Napomenimo još da su u starijoj skupini svi osim jedne učenice zaokružili isključivo tu sliku, dok to nije bio slučaj u mlađoj skupini. Dakle, učenici generalno nisu uspjeli uočiti, pa ni primijeniti, Obrat teorema o kutovima uz transverzalu. Ono što je zanimljivo u ovom zadatku je to što su tri trinaestogodišnje učenice odgovorile da stolar neće odabrati nijedan okvir, što znači da su, za razliku od većine kolega, prepoznale da prva dva okvira nemaju paralelne iscrtkane dijelove, no svejedno nisu uočile da u trećem jesu.

Četvrti zadatak u Testu B ima također ishod u kojem su mlađi učenici bolje riješili od starijih.

4. Zaokruži objekt kojem je pravac e simetrala dužine AB?

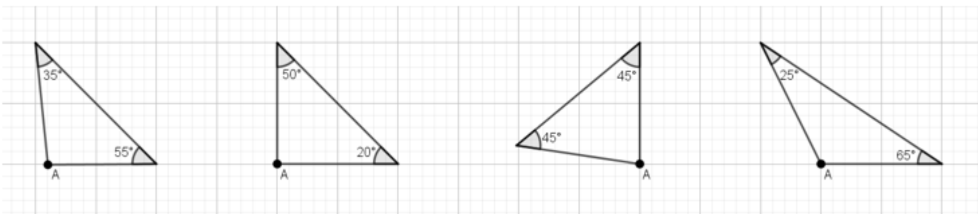


Slika 17

U ovom zadatku su stariji učenici više proučavali nepodudarnost skice s oznakama na skici. I u ovom zadatku su troje učenika od 13 godina odlučili ne zaokružiti nijednu sliku te su za to u ovom zadatku dali objašnjenja. Argumentacija za to jednog učenika je bila: *„(Prva skica) Nije s obje strane 2 cm. (Druga skica) Treba biti pravi kut (90˚). (Treća skica) Nije na sredini.“* Jedna učenica je dala slično objašnjenje kao i ovaj učenik, samo je za treću skicu rekla da je ona *„skroz ukoso“*.

Za kraj, peti zadatak u Testu B je mlađe učenike većinom naveo na krive odgovore, dok su oni stariji bili točniji.

5. Zaokruži trokut(e) u kojem je kut u vrhu A pravi kut.



Slika 18

Učenici u dobi od 13 i 14 godina su češće uzimali u obzir i veličine ostalih kutova i sumirali ih a danu sliku su promatrali kao skicu. Ipak, ovdje trebamo napomenuti da se gradivo vezano za trokut i njegova svojstva, pa time i zbroj veličina kutova, detaljnije uči u 6. razredu. Stoga su učenici petog razreda u ovom istraživanju i zbog toga zanemarili neka rješenja, ne vodeći računa o sumi unutarnjih kutova u trokutu.

3.4 Zaključak istraživanja

Kao što je već rečeno, cilj istraživanja bio je ispitati u kojoj mjeri učenici od 5. do 8. razreda osnovne škole koriste danu geometrijsku figuru kao skicu umjesto kao matematički objekt onda kada je ono što vide kontradiktorno s onim što geometrijska figura reprezentira. Nadalje, učenici su bili podijeljeni u dvije dobne skupine; 11 – 12 godina i 13 – 14 godina. U prvoj fazi ispitivanja, tj. u Testu A se ispitivalo učeničko poznavanje matematičkih koncepata; simetrala kuta, vrste kutova, paralelni pravci, simetrala dužine te suma unutarnjih kutova u trokutu. U toj su fazi stariji učenici pokazali bolje znanje o svim ispitivanim matematičkim konceptima. U drugoj fazi, Testu B, ispitivali su se isti koncepti, uz promjenu u tome što dana skica nije prikazivala ono što je rečeno u zadatku. Učenici su tu trebali prepoznati da je riječ o skici te u obzir uzeti verbalno dane informacije. U tom testu s dogodio interesantan i možda neočekivani preokret te su neke zadatke znatno bolje riješili mlađi učenici. Razlog za to možemo možda pronaći u činjenici da su stariji učenici upravo zbog svog šireg znanja zadatke previše analizirali sam izgled dane skice istovremeno zaboravljajući bitna matematička svojstva koja proizlaze iz zadanih verbalnih informacija.

Nadalje, iz ovog malog istraživanja se može izvesti zaključak da dobar dio učenika u osnovnoj školi teško odvaja informacije o matematičkom zadatku i skicu istog tog zadatka, odnosno vodi se skicom kao vjerodostojnom i to ih navodi na krive zaključke. Učenicima bi se trebala skica uvijek isticati kao reprezentacija matematičkog koncepta a ne kao koncept. Korisno bi bilo u nastavi uvoditi i primjere u kojima su skice namjerno kontradiktorne s informacijama u zadatku kako bi učenici naučili razlikovati matematički koncept i njegovu reprezentaciju, odnosno skicu, pogotovo u geometriji.

Literatura

[1] Raymond Duval, Understanding the Mathematical Way of Thinking – The Registers of Semiotic Representations, Springer, 2017.

[2] Rosamund Sutherland John Mason, Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematics Education, Springer, 1995.

[3] https://www.moma.org/collection/works/81435 (pristupljeno: 27. 5. 2024.)

[4] https://www.khanacademy.org/humanities/art-1010/conceptual-and-performance-art/conceptual-performance/a/joseph-kosuth-one-and-three-chairs (pristupljeno: 27. 5. 2024.)

[5] http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/elements/bookI/defI23.html (pristupljeno: 19. 6. 2024.)

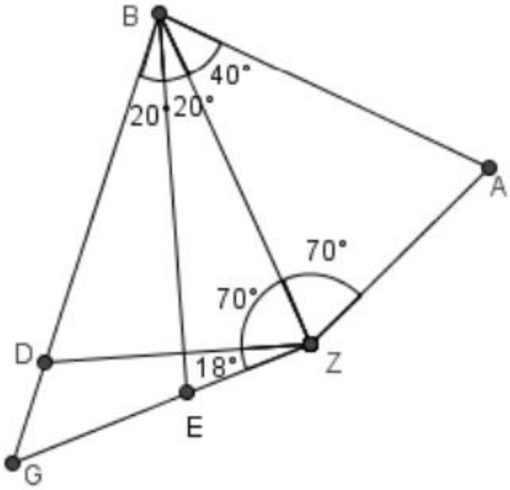
[6] Snježana Jovičić, Duvalov kognitivni model geometrijskog mišljenja, Sveučilište u Istočnom Sarajevu, Pedagoški fakultet Bijeljina, 2015.

[7] V. Gogou, A. Gagatsis, P. Gridos, I. Elia, E. Deliyianni, The Double Nature of the Geometrical Figure: Insights from Empirical Dana, Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education Vol. 17, 7-23, 2020.

Prilog A

Test A

1. Odaberi točan odgovor.



Simetrala kuta $\measuredangle ABE$ je:

a) EB b) ZB c) nijedno

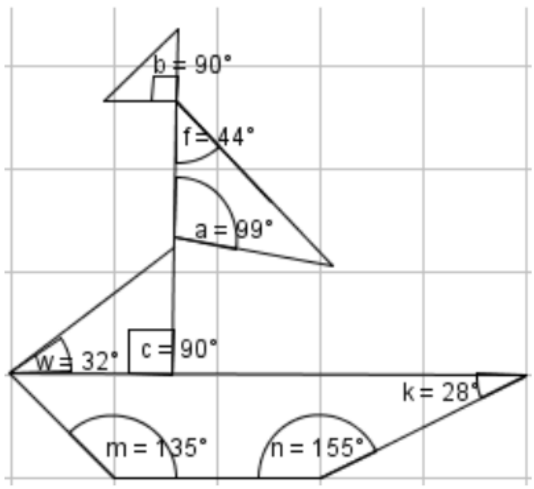
Simetrala kuta $\measuredangle DZA$ je:

a) ZD b) ZB c) nijedno

Simetrala kuta $\measuredangle GBZ$ je:

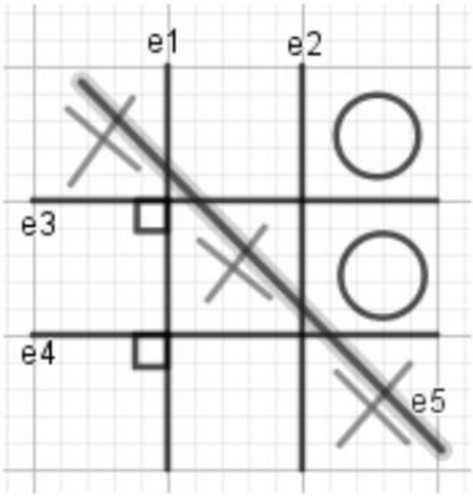
a) BE b) BZ c) nijedno

2. Kutove smjesti u tablicu ovisno o tome kojoj vrsti kuta pripadaju (napiši samo imena kutova).

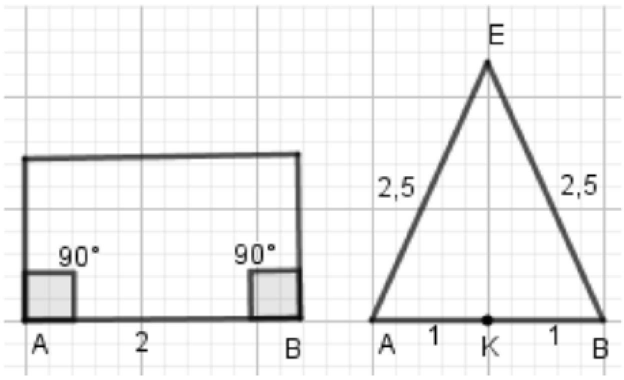


ŠILJASTI	PRAVI	TUPI

3. Na sljedećoj slici odaberi par paralelnih pravaca i par pravaca koji se sijeku. Objasni zašto su ti odabrani pravci paralelni.



4. Konstruiraj simetralu dužine AB u oba dana lika. Opiši svoju konstrukciju.



5. Odaberi točan odgovor.

i. Suma unutarnjih kutova u trokutu je:

a) 150° b) 200° c) 180° d) 360°

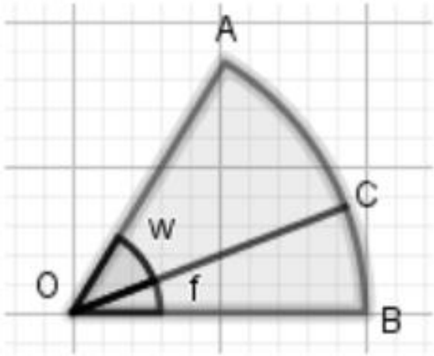
ii. Suma unutarnjih kutova u jednakostraničnom trokutu je:

a) 60° b) 180° c) 360° d) 90°

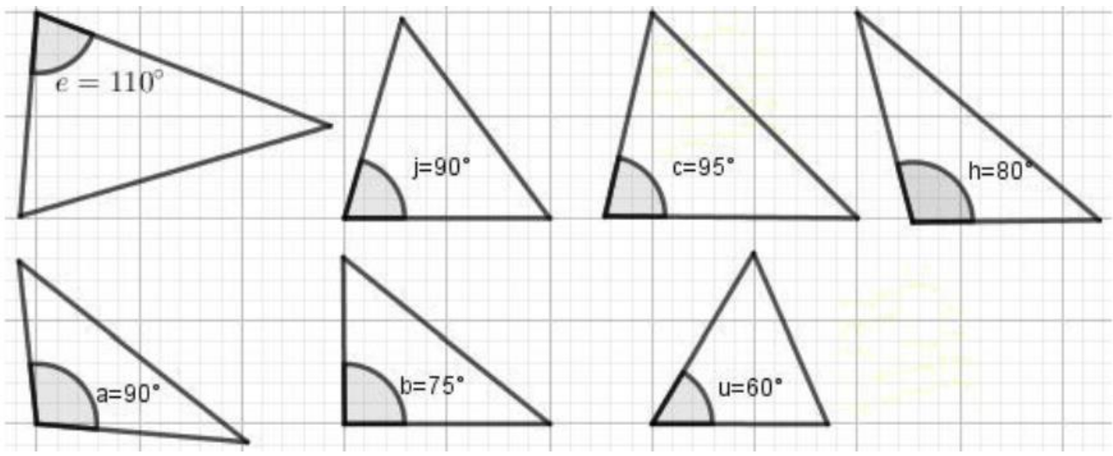
Prilog B

Test B

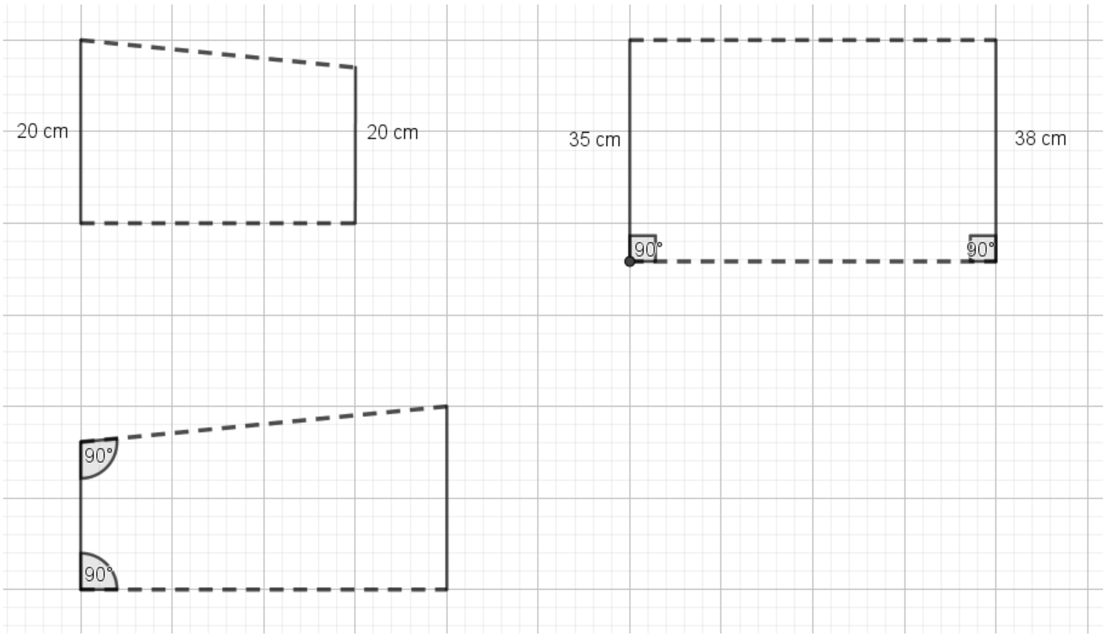
1. Komad pizze smo izrezali po dužini $\overline{OC}$. Ako je $w = 40^\circ$ i $f = 40^\circ$, je li OC simetrala kuta ovog komada pizze?



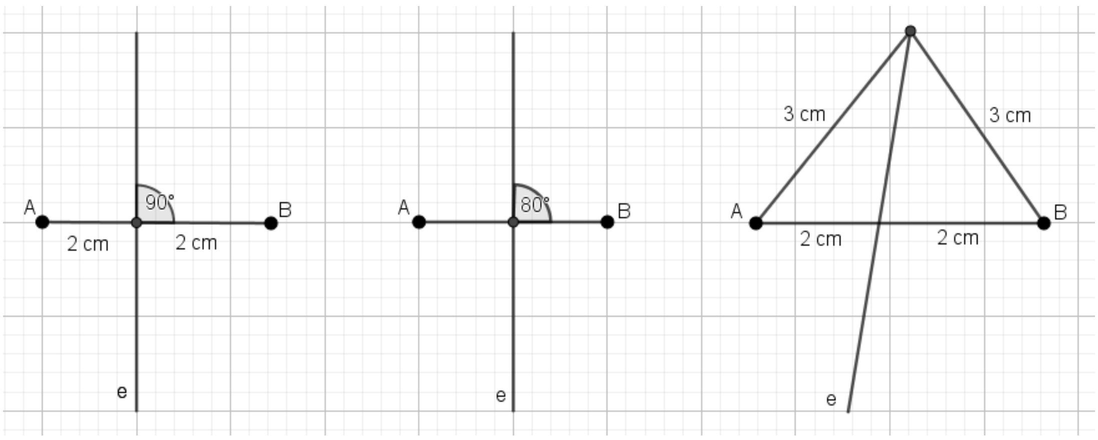
2. Sljedeće trokute poredaj počevši od šiljastih, pravih pa tupih (poredaj po imenima kutova).



3. Stolar je napravio sljedeća tri okvira. Želi zadržati samo one kojima su podebljani iscrtkani dijelovi paralelni. Zaokruži one ili onog koje(g) će zadržati.



4. Zaokruži objekt kojem je pravac e simetrala dužine AB?



5. Zaokruži trokut(e) u kojem je kut u vrhu A pravi kut.