Beskonačno djeljive distribucije

Gugić, Lucija

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

LUCIJA GUGIĆ

BESKONAČNO DJELJIVE DISTRIBUCIJE

DIPLOMSKI RAD

Split, lipanj 2024.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

BESKONAČNO DJELJIVE DISTRIBUCIJE

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Lucija Gugić

Mentorica:
doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš

Split, lipanj 2024.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

BESKONAČNO DJELJIVE DISTRIBUCIJE

Lucija Gugić

Sažetak:

Cilj rada je fundamentalna teorijska razrada beskonačno djeljivih distribucija. U tu svrhu prvo je definiran pojam beskonačno djeljive distribucije i karakteristične funkcije, uključujući osnovna svojstva i primjere. Prikazani i razmotreni su matematički alati za njihovu konstrukciju koji daju značajne rezultate o samoj njihovoj strukturi. Prikazan je alternativni pristup definiranju beskonačne djeljivosti koristeći se funkcijama izvodnicama. Na primjeru Poissonovog procesa ilustrirana je važnost ove klase za modeliranje stohastičkih procesa sa stacionarnim nezavisnim inkrementima. Proučene su kanonske reprezentacije beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija pri čemu se od posebne važnosti ističe Levy-Hinčinov teorem. Analizirana je veza između konvergencije beskonačno djeljivih distribucija i pridruženih Levy-Hinčinovih parova. U završnom dijelu rada predstavljene su stabilne i geometrijski beskonačno djeljive distribucije.

Ključne riječi:

Poissonov proces, Levy-Hinčinov teorem, geometrijski beskonačno djeljive distribucije, stabilne distribucije

Podatci o radu:

45 stranica, 1 tablica, 4 literaturna navoda, hrvatski jezik

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Mentor(ica): *doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš*

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš

dr. sc. Ana Perišić

dr. sc. Jelena Pleština

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *26. lipnja 2024. godine.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

INFINITELY DIVISIBLE DISTRIBUTIONS

Lucija Gugić

Abstract:

The aim of this paper is to provide a fundamental theoretical elaboration of infinitely divisible distributions. For this purpose, the concept of an infinitely divisible distribution and characteristic function is first defined, including basic properties and examples. Mathematical tools for their construction, which yield significant results about their structure, are presented and discussed. An alternative approach to defining infinite divisibility using generating functions is presented. The importance of this class for modeling stochastic processes with stationary independent increments is illustrated using the example of the Poisson process. The canonical representations of infinitely divisible characteristic functions are studied, with particular emphasis on the Lévy-Khintchine theorem. The relationship between the convergence of infinitely divisible distributions and the associated Lévy-Khintchine pairs is analyzed. In the final part of the paper, stable and geometrically infinitely divisible distributions are presented.

Key words:

Poisson process, Lévy-Khintchine theorem, geometrically infinitely divisible distributions, stable distributions.

Specifications:

45 pages, 1 table, 4 literary references, Croatian

BASIC DOCUMENTATION CARD

Mentor: *assistant professor Vesna Gotovac Đogaš*

Committee:

assistant professor Vesna Gotovac Đogaš

Ana Perišić, PhD

Jelena Pleština, PhD

This thesis was approved by a Thesis commettee on *26th June, 2024.*

Uvod

Beskonačno djeljive distribucije predstavio je talijanski matematičar de Finetti 1929. godine, dok su za fundamentalne rezultate zaslužni Kolmogorov, Levy i Hinčin. Početci proučavanja njihovih svojstava bili su usko vezani za istraživanja slučajnih procesa sa stacionarnim nezavisnim inkrementima. Od tada pa sve do danas u tom području nalazimo vrlo značajne i elegantne rezultate posebice vezane za Levyjeve procese, uniformne aprokismacije, konvolucije i statističke zaključke. Ideja beskonačne djeljivosti je od velikog značaja za teoriju vjerojatnosti, posebice u proučavanju graničnih toerema. Karakteristične funkcije imaju ključnu ulogu u centralnom graničnom teoremu, dok su beskonačno djeljive karakteristične funkcije potrebne za njegov opći oblik. Izuzetna važnost beskonačno djeljivih distribucija u graničnim teoremima odražava se u činjenici da se samo ove distribucije mogu pojaviti kao granične distribucije za zbrojeve nezavisnih slučajnih varijabli. Budući da proučavanje graničnih teorema prelazi okvire ovog rada, nećemo biti u mogućnosti vidjeti potpunu značajnost ove klase karakterističnih funkcija, ali njihova analitička svojstva su i sama po sebi zanimljiva.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi iz teorije vjerojatnosti

Neka je F ograničena funkcija distribucije na $\mathbb{R}$. U daljnjem tekstu smatrat ćemo da su sve funkcije distribucije normirane u smislu da imaju limes 0 u $-\infty$.

Definicija 1.1 ***Karakteristična funkcija*** *od F jest funkcija φ definirana sa*

$$\varphi(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} cos(tx) dF(x) + i \int\limits_{-\infty}^{\infty} sin(tx) dF(x), t \in \mathbb{R}$$

Definicija 1.2 *Neka je X slučajna varijabla s funkcijom distribucije F_X.* ***Karakteristična funkcija*** *φ_X od X je karakteristična funkcija od F_X.*

Propozicija 1.3 (Svojstva karakterističnih funkcija) *(i) Karakteristična funkcija φ je uniformno neprekidna na $\mathbb{R}$ i za sve $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $|\varphi(t)| \leq \varphi(0) = F(\infty)$ i $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$*

(ii) Ako je X slučajna varijabla i $a, b \in \mathbb{R}$, tada vrijedi

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at), t \in \mathbb{R}$$

(iii) Ako su $X_1, X_2, ..., X_n$ nezavisne slučajne varijable, tada vrijedi

$$\varphi_{\sum\limits_{k=1}^{n} X_k}(t) = \prod_{k=1}^{n} \varphi_{X_k}(t), t \in \mathbb{R}$$

Definicija 1.4 *Neka su F_1 i F_2 ograničene funkcije distribucije na $\mathbb{R}$ takve da je $F_1(-\infty) = F_2(-\infty) = 0$. Funkcija $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa*

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} F_1(x-y)dF_2(y), x \in \mathbb{R}$$

*zove se **konvolucija** od F_1 i F_2 i označuje se sa $F = F_1 * F_2$.*

Teorem 1.5 (Teorem neprekidnosti) *Neka je $(F_n, n \in \mathbb{N})$ niz vjerojatnosnih funkcija distribucije i $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ odgovarajući niz karakterističnih funckija.*

(i) Ako $F_n \overset{\omega}{\to} F$, gdje je F vjerojatnosna funckija distribucije, tada $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ za sve $t \in \mathbb{R}$, gdje je φ karakteristična funkcija od F.

(ii) Ako za svaki $t \in \mathbb{R}$ postoji $\varphi(t) = \lim_n \varphi_n(t)$ i ako je funckija φ nprekidna u $t = 0$, tada je φ karakteristična funkcija vjerojatnosne funckije distribucije F i vrijedi $F_n \overset{\omega}{\to} F$

Teorem 1.6 (Centralni granični teorem) *Neka je $(X_n, n \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s očekivanjem m i varijancom σ^2, $0 < \sigma^2 < \infty$ i neka je $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k (n \in \mathbb{N})$. Tada vrijedi*

$$\frac{S_n - ES_n}{\sigma\sqrt{n}} \overset{D}{\to} N(0,1) \text{ za } n \to \infty.$$

Definicija 1.7 *Neka je X slučajna varijabla sa zakonom razdiobe*

$$P\{X = k\} = p_k, \ k \in \mathbb{N}.$$

Funkciju g definiranu sa

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k z^k, \ z \in \mathbb{R}, \ |z| < 1$$

*zovemo **funkcija izvodnica** od X i označavamo sa g_X.*

Poglavlje 2

Beskonačno djeljive distribucije

2.1 Definicija i primjeri

U ovom poglavlju ćemo uvesti pojam beskonačno djeljivih distribucija, odnosno beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija i navesti nekoliko jednostavnih primjera. Općenito, korisnost karakterističnih funkcija posljedica je činjenice da postoji 1-1 korespondencija između skupa karakterističnih funkcija i skupa funkcija distribucija. Budući da je izravan rad sa funkcijama distribucije često vrlo složen, ova ekvivalencija omogućuje nam da se prilikom rješavanja takvih problema koristimo metodom, odnosno svojstvima karakterističnih funkcija.

Definicija 2.1 *Karakteristična funkcija φ je* ***beskonačno djeljiva*** *ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji karakteristična funkcija φ_n takva da je $\varphi = \varphi_n^n$.*

Funkcija φ_n jednoznačno je određena funkcijom φ na intervalu oko nule na kojem je $\varphi(t) \neq 0$, ako zahtjevamo da je $\varphi_n(0)$ fiksan pozitivan realan broj. U tom slučaju je $\varphi_n = \varphi^{\frac{1}{n}}$.

Definicija 2.2 *Funkcija distribucije F je* ***beskonačno djeljiva*** *ako je nje-*

zina karakteristična funkcija beskonačno djeljiva.

Govoreći u terminima konvolucija funkcija distribucija, gornja je definicija ekvivalentna tome da za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji funkcija distribucije F_n (jednoznačno određena sa F) takva da je $F = F_n * F_n * ... * F_n$, n puta.

Definicija 2.3 *Slučajna varijabla X je* ***beskonačno djeljiva*** *ako je njezina karakteristična funkcija φ_X (odnosno funkcija distribucije F_X) beskonačno djeljiva.*

Dakle, slučajna varijabla X beskonačno je djeljiva ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje nezavisne jednako distribuirane slučajne varijable $X_1, X_2, ..., X_n$ takve da je $X \overset{D}{=} X_1 + X_2 + ... + X_n$.
Sada je i sam naziv beskonačne djeljivosti sugestivan, budući da je slučajnu varijablu X moguće "podijeliti" na "male" nezavisne komponente za svaki n.
U ovom radu promatrat ćemo samo beskonačno djeljive distribucije koje su vjerojatnosne funkcije distribucije, odnosno beskonačno djeljive karakteristične funkcije φ za koje je $\varphi(0) = 1$.

Primjer 2.4 ***(a)*** *Neka je $X \sim P(\lambda)$.*
Poznato je da je Poissonova distribucija dana sa $P(X{=}k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ pri čemu je $k \geq 0$. Stoga je karakteristična funkcija Poissonove distribucije s parametrom λ definirana sa:

$$\varphi(t) = E[e^{itX}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot P(X = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} =$$

$$e^{-\lambda} \cdot \left(1 + e^{it} \cdot \lambda + e^{2it} \cdot \frac{\lambda^2}{2!} + e^{3it} \cdot \frac{\lambda^3}{3!} + e^{4it} \cdot \frac{\lambda^4}{4!} + \cdots\right) =$$

$$e^{-\lambda} \cdot \left(1 + e^{it} \cdot \lambda + \frac{(\lambda e^{it})^2}{2!} + \frac{(\lambda e^{it})^3}{3!} + \frac{(\lambda e^{it})^4}{4!} + \cdots\right) = e^{-\lambda} e^{\lambda e^{it}} = e^{\lambda(e^{it}-1)}$$

Sada je karakteristična funkcija Poissonove distribucije s parametrom $\frac{\lambda}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ *dana sa*

$$\varphi_n(t) = e^{\frac{\lambda}{n}(e^{it}-1)}.$$

Uočimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi(t) = (\varphi_n(t))^n,$$

iz čega slijedi da je Poissonova distribucija beskonačno djeljiva.

(b) *Neka je* $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Kako bi odredili karakterističnu funkciju varijable X, prvo definirajmo karakterističnu funkciju standardne normalne razdiobe, tj. kada je $X \sim N(0,1)$. *U tom slučaju, X je neprekidna slučajna varijabla s gustoćom*

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}}$$

Sada je

$$\varphi_X(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} f_X(x) dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{\frac{-x^2}{2}} dx.$$

Za proizvoljne $x, t \in \mathbb{R}$ *je* $e^{itx} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!}$ *pa uvrštavanjem u gornji izraz dobivamo da je*

$$\varphi_X(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} e^{\frac{-x^2}{2}} \right] dx.$$

Kako za $x, t \in \mathbb{R}$ *vrijedi*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{(itx)^k}{k!} \right| e^{\frac{-x^2}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|tx|^k}{k!} e^{\frac{-x^2}{2}} = e^{|tx| - \frac{-x^2}{2}},$$

a funkcija koja $x \mapsto e^{|tx| - \frac{-x^2}{2}}$ *je integrabilna na* $\mathbb{R}$, *pa po teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da možemo zamijeniti redoslijed sumiranja i integriranja. Stoga je*

$$\varphi_X(t) = \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(itx)^k}{k!} e^{\frac{-x^2}{2}} \right] dx = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{k!} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{\frac{-x^2}{2}} dx =$$
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(it)^k}{(2k)!} \frac{(2k)!}{2^k k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{t^2}{2} \right)^k \frac{1}{k!} = e^{-\frac{t^2}{2}}, t \in \mathbb{R}.$$

Neka je sada $X \sim N(\mu, \sigma^2)$. *Tada je* $\dfrac{X-\mu}{\sigma} = Y \sim N(0,1)$, *iz čega slijedi da je* $X = \sigma Y + \mu$. *Iz svojstava karakterističnih funkcija slijedi*

$$\varphi_X(t) = \varphi_{\sigma Y + \mu}(t) = e^{i\mu t} \varphi_Y(\sigma t) = e^{i\mu t} e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}} = e^{i\mu t - \frac{(\sigma t)^2}{2}}.$$

Sada je karakteristična funkcija slučajne varijable $X \sim N(\frac{\mu}{n}, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}})$ *dana sa*

$$\varphi_n(t) = e^{\frac{i\mu t}{n} - \frac{\sigma^2 t^2}{2n}}.$$

Uočimo da je za svaki $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_X(t) = (\varphi_n(t))^n.$$

Dakle, $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ *je beskonačno djeljiva distribucija.*

(c) *Cauchyjeva razdioba sa parametrima* $a > 0$ *i* b.

Ako X *ima Cauchyjevu razdiobu s parametrima* $a > 0$ *i* b, *onda je njezina funkcija gustoće*

$$f_X(x) = \frac{a}{\pi[a^2 + (x-b)^2]}, x \in \mathbb{R}.$$

Tada je $\dfrac{X-b}{a} = Y$ *jedinična Cauchyjeva razdioba. Karakteristična funkcija jedinične Cauchyjeve razdiobe* Y *je dana sa*

$$\varphi_Y(t) = e^{-|t|},$$

pa iz $X = aY + b$ *i svojstava karakterističnih funkcija slijedi*

$$\varphi_X(t) = e^{ibt-a|t|},\ t \in \mathbb{R}.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *je* $\varphi_n(t) = e^{i\frac{bt}{n}-\frac{a|t|}{n}}$ *karakteristična funkcija i*

$$\varphi_X(t) = (\varphi_n(t))^n.$$

Dakle, Cauchyjeva razdioba sa parametrima $a > 0$ *i* b *je beskonačno djeljiva.*

(d) *Gama razdioba s parametrima* α *i* β*.*

Neka X *ima gama razdiobu s parametrima* α *i* β*. Tada je*

$$\varphi_X(t) = (1 - i\beta t)^{-\alpha}$$

njezina karakteristična funkcija. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *je* $\varphi_n(t) = (1 - i\beta t)^{-\frac{\alpha}{n}}$ *ponovno karakteristična funkcija i*

$$\varphi_X(t) = (\varphi_n(t))^n.$$

Dakle, gama razdioba s parametrima α *i* β *je beskonačno djeljiva.*

Primjetimo da Cauchyjeva razdioba nema očekivanje, a beskonačno je djeljiva. Dakle, distribucija može biti beskonačno djeljiva, iako nema očekivanje ili varijancu.

2.2 Osnovna svojstva beskonačno djeljivih distribucija

Prvo ćemo se upoznati sa jednostavnim, ali prilično važnim svojstvima beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija.

Propozicija 2.5 *Beskonačno djeljiva karakteristična funkcija nigdje ne iščezava.*

Dokaz. Neka je φ beskonačno djeljiva, tj. neka je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\varphi = \varphi_n^n$, pri čemu je φ_n karakteristična funkcija. Definirajmo funkciju g sa
$g(t) = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n(t)|^2 = \lim_{n\to\infty} |\varphi(t)|^{\frac{2}{n}}$. Uočimo da je

$$g(t) = \begin{cases} 0, & \varphi(t) = 0 \\ 1, & \varphi(t) \neq 0. \end{cases}$$

Dakle, funkcija g poprima samo dvije vrijednosti, 0 ili 1. Kako je φ karakteristična funkcija, to je φ neprekidna funkcija i $\varphi(0) = 1$, pa je $\varphi(t) \neq 0$ u nekoj okolini nule. Odavde slijedi da je u toj okolini nule $g(t) = 1$ pa je i funkcija g neprekidna u nuli. Budući da je g limes niza $(|\varphi_n|^2)$ karakterističnih funkcija, iz teorema o neprekidnosti zaključujemo da je g također karakteristična funkcija. No, tada je i g neprekidna svuda, pa je $g(t) \equiv 1$, tj. $\varphi(t) \neq 0$ za sve $t \in \mathbb{R}$. ∎

Sljedeće propozicije govore o tome da je familija beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija zatvorena na određene operacije.

Propozicija 2.6 *(i) Produkt konačno mnogo beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija jest beskonačno djeljiva karakteristična funkcija.*
(ii) Ako je φ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija, tada je i $|\varphi|$ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija.

Dokaz. (i) Dovoljno je dokazati tvrdnju za produkt dva faktora. Neka su φ i ψ beskonačno djeljive karakteristične funkcije. Tada za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoje karakteristične funkcije φ_n i ψ_n takve da je $\varphi = \varphi_n^n$ i $\psi = \psi_n^n$. Odavde je $\varphi\psi = (\varphi_n\psi_n)^n$ i $\varphi_n\psi_n$ je karakteristična funkcija, dakle $\varphi\psi$ je beskonačno djeljiva.
(ii) Iz pretpostavke slijedi da je $\varphi(-t) = \overline{\varphi(t)}$ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija. Prema (i) možemo zaključiti da je $|\varphi|^2$ beskonačno djeljiva, pa je za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija
$(|\varphi|^2)^{\frac{1}{2n}} = |\varphi|^{\frac{1}{n}}$,
karakteristična funkcija. Odavde slijedi da je $|\varphi|$ beskonačno djeljiva. ∎

Propozicija 2.7 *Karakteristična funkcija koja je limes niza beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija, također je beskonačno djeljiva.*

Dokaz. Neka je $(\varphi_n, n \in \mathbb{N})$ niz beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija koji konvergira prema karakterističnoj funkciji φ. Tvrdimo da je φ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija. Prema prethodnoj propoziciji su $|\varphi_n|^2$ beskonačno djeljive, pa je $|\varphi_n|^{\frac{2}{m}}$ karakteristična funkcija za svaki $m \in \mathbb{N}$. Budući da je $|\varphi|^{\frac{2}{m}} = \lim_{n\to\infty} |\varphi_n|^{\frac{2}{m}}$, iz teorema o neprekidnosti slijedi da je $|\varphi|^{\frac{2}{m}}$ karakteristična funkcija. To znači da je $|\varphi|^2$ beskonačno djeljiva, pa prema prethodnoj propoziciji φ nigdje ne iščezava. Stoga, $\ln \varphi(t)$ postoji za svaki $t \in \mathbb{R}$ i vrijedi $\lim \ln \varphi_n(t) = \ln \varphi(t)$. Sada iz

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n^{\frac{1}{m}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{m}\ln\varphi_n} = e^{\frac{1}{m}\ln\varphi} = \varphi^{\frac{1}{m}}$$

i teorema neprekidnosti slijedi da je $\varphi^{\frac{1}{m}}$ karakteristična funkcija. Prema tome, φ je beskonačno djeljiva. ∎

Korolar 2.8 *Neka je $\varphi(t)$ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija. Tada je $[\varphi(t)]^\alpha$ također karakteristična funkcija za svaki pozitivan i realan α. Obrat je također istinit.*

Dokaz. Ako je $\varphi(t)$ beskonačno djeljiva, onda tvrdnja korolara slijedi iz svojstava realnih brojeva i teorema neprekidnosti, dok je obrat trivijalan. ∎

Propozicija 2.9 *Neka su $Y, X_1, X_2, ...$ nezavisne slučajne varijable, pri čemu je $Y \sim P(\lambda)$, a $(X_n, n \in \mathbb{N})$ su jednako distribuirane sa zajedničkom karakterističnom funkcijom φ. Tada je $Z = X_1 + X_2 + ... + X_Y$ beskonačno djeljiva slučajna varijabla s karakterističnom funkcijom $e^{\lambda(\varphi-1)}$.*

Dokaz. Vrijedi

$$\varphi_Z(t) = E[e^{itZ}] = \sum_{n=0}^{\infty} E[e^{itZ}]K_{\{Y=n\}} = \sum_{n=0}^{\infty} E[K_{\{Y=n\}} e^{it(X_1+X_2+...+X_n)}].$$

Budući da su $K_{\{Y=n\}}$ i $e^{it(X_1+X_2+\ldots+X_n)}$ nezavisne, odavde slijedi

$$\varphi_Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n) \cdot E[e^{it(X_1+X_2+\ldots+X_n)}] = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y=n) \cdot [\varphi(t)]^n =$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} [\varphi(t)]^n = e^{\lambda(\varphi(t)-1)}.$$

■

Ilustrirajmo sada primjenu ovih propozicija na primjerima.

Primjer 2.10 ***(a)*** *Neka je X uniformna razdioba na $[-c, c]$. Tada je*

$$\varphi_X(t) = \frac{sinct}{ct},\ t \in \mathbb{R}.$$

Prema propoziciji 2.1., X nije beskonačno djeljiva jer φ_X iščezava za neke t.
(b) *Neka je X dvostrana eksponencijalna razdioba s parametrom $\lambda > 0$. Tada je*

$$\varphi_X(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2},\ t \in \mathbb{R}.$$

φ_X možemo zapisati u obliku produkta

$$\varphi_X(t) = \left(1 + \frac{it}{\lambda}\right)^{-1} \cdot \left(1 - \frac{it}{\lambda}\right)^{-1},\ t \in \mathbb{R}$$

karakterističnih funkcija od dviju gama-razdioba s parametrima $\alpha = 1, \beta = -\frac{1}{\lambda}$, odnosno $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{\lambda}$. Iz propozicije 2.2. sada slijedi da je X beskonačno djeljiva.

Primjetimo da je u propoziciji 2.2. (ii) pretpostavka o beskonačnoj djeljivosti bitna, tj. ako je φ karakteristična funkcija, $|\varphi|$ općenito ne mora biti karakteristična funkcija.

2.3 Konstrukcija beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija

U ovom ćemo odjeljku promotriti dvije metode konstruiranja beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija. Upravo ove metode su dale zanimljive informacije o njihovoj strukturi.

Prvo dokazujemo lemu koja nam je od velikog značaja za daljnja razmatranja.

Lema 2.11 *Neka je $g(t)$ proizvoljna karakteristična funkcija i pretpostavimo da je p pozitivan realan broj. Tada je $\varphi(t) = e^{p[g(t)-1]}$ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija.*

Dokaz. Neka je $n \in \mathbb{N}$ takav da je $n > p$. Tada je

$$\varphi_n(t) = \left[1 - \frac{p}{n} + \frac{p}{n} \cdot g(t)\right]^n = \left(1 + \frac{p[g(t)-1]}{n}\right)^n$$

također karakteristična funkcija. Iz teorema neprekidnosti slijedi da je

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = e^{p[g(t)-1]}$$

karakteristična funkcija. Funkcija $[\varphi(t)]^\alpha$ $(\alpha > 0)$ zadovoljava sve uvjete leme i također je karakteristična funkcija pa iz korolara 2.8 zaključujemo da je $\varphi(t)$ beskonačno djeljiva. ■

Ova lema će nam poslužiti kako bi dokazali sljedeći teorem.

Teorem 2.12 (De Finettijev teorem) *Karakteristična funkcija φ beskonačno je djeljiva ako i samo ako je oblika*

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} e^{p_m[g_m(t)-1]},$$

gdje su p_m pozitivni realni brojevi, a $g_m(t)$ karakteristične funkcije.

Dokaz. Dovoljnost slijedi neposredno iz prethodne leme i teorema neprekidnosti.

Dokažimo nužnost. Iz korolara 2.8 i prethodne leme slijedi da je

$$\varphi_\alpha(t) = e^{\frac{1}{\alpha}[(\varphi(t))^\alpha - 1]}$$

karakteristična funkcija za svaki pozitivan i realan α. Kako je

$$\varphi(t) = \lim_{\alpha \to 0} \varphi_\alpha(t),$$

to se $\varphi(t)$ može reprezentirati u gornjoj formi uzimajući da je $p_m = m$ i $g_m(t) = [\varphi(t)]^{\frac{1}{m}}$ ■

Sljedeći teorem može poslužiti u dokazivanju da je dana karakteristična funkcija beskonačno djeljiva.

Teorem 2.13 *Svaka beskonačno djeljiva karakteristična funkcija se može zapisati kao limes niza karakterističnih funkcija koje su konačan produkt karakterističnih funkcija s Poissonovom distribucijom.*

Dokaz. Pretpostavimo da je $\varphi(t)$ beskonačno djeljiva. Prema De Finettijevom teoremu možemo je prikazati kao

$$\varphi(t) = \lim_{n \to \infty} e^{p_n[g_n(t) - 1]}, \tag{2.1}$$

gdje su $g_n(t)$ karakteristične funkcije neke distribucije $G_n(x)$, pa je

$$g_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dG_n(x).$$

Sada je

$$p_n[g_n(t) - 1] = \lim_{A \to \infty} p_n \int_{-A}^{A} (e^{itx} - 1) dG_n(x). \tag{2.2}$$

Kako bi gornji integral aproksimirali Darbouxovom sumom uvedimo sljedeće oznake

$$-A = a_0 < a_1 < a_2 < ... < a_{N-1} < a_N = A$$
$$c_k = p_n[G_n(a_k) - G_n(a_{k-1})].$$

Dakle,

$$p_n \int_{-A}^{A} (e^{itx} - 1) dG_n(x) = \lim_{N \to \infty} \sum_{k=1}^{N} c_k (e^{ita_k} - 1).$$

Sada imamo

$$e^{p_n \int_{-A}^{A} n(e^{itx}-1) dG_n(x)} = \lim_{N \to \infty} \prod_{k=1}^{N} e^{c_k (e^{ita_k} - 1)}.$$

Gornja funkcija je limes niza funkcija koje su konačan produkt karakterističnih funkcija s Poissonovom distribucijom, pa iz (1.1) i (1.2) slijedi da i $\varphi(t)$ ima to svojstvo. ■

Poglavlje 3

Alternativni pristup definiranju beskonačne djeljivosti

Zanimljivo je promotriti i drugačiji pristup definiranju beskonačne djeljivosti. Propozicija 2.9 je pokazala kako su Poissonove razdiobe u tijesnoj vezi s pojmom beskonačnosti, što će u ovom poglavlju postati još jasnije. Daljnju analizu tog problema započinjemo promatranjem suma slučajnog broja varijabli.

Neka je $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz nezavisnih slučajnih varijabli sa zajedničkom distribucijom $P(X_k = j) = f_j$ i funkcijom izvodnicom $f(s) = \sum f_i s^i$. Zanimaju nas sume oblika

$$S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N,$$

gdje je N slučajna varijabla koja je nezavisna od niza $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Neka je $P(N = n) = g_n$ distribucija varijable N i $g(s) = \sum g_n s^n$ njena funkcija izvodnica. Kako bi odredili distribuciju slučajne varijable S_N koristimo se formulom uvjetne vjerojatnosti, tj. imamo da je

$$h_j := P(S_N = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = j).$$

Ako pretpostavimo da N može poprimiti samo konačno mnogo vrijednosti, onda je slučajna varijabla S_N definirana na prostoru od konačno mnogo varijabli X_k, a u protivnom je S_N definirana na prostoru od beskonačno mnogo varijabli X_k. Naša daljnja razmatranja u ovom poglavlju baviti će se pitanjem određivanja funkcije distribucije od S_N i za naše potrebe uzimamo distribuciju h_j kao definiciju distribucije od S_N na prostoru 0,1,2,...
Za fiksirani $n \in \mathbb{N}$ je distribucija od $X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ dana kao n-ta konvolucijska potencija od $\{f_i\}$ sa samom sobom pa h_j možemo zapisati kao

$$h_j = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \{f_j\}^{n*}.$$

Ovu formulu možemo pojednostavniti prelaskom na funkcije izvodnice. Funkcija izvodnica od $\{f_j\}^{n*}$ je $f^n(s)$ pa iz gornje formule slijedi da je funkcija izvodnica od S_N dana sa

$$h(s) = \sum_{j=0}^{\infty} h_j s^j = \sum_{n=0}^{\infty} g_n f^n(s).$$

Uočimo da je desna strana red $g(s)$ pri čemu je s zamijenjen sa $f(s)$, tj. desna strana je $g(f(s))$. Ovime je dokazan sljedeći teorem.

Teorem 3.1 *Funkcija izvodnica od $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ je $g(f(s))$, tj. kompozicija funkcija g i f.*

Posebno su zanimljiva dva slučaja:
(a) Ako su X_i Bernoullijeve varijable takve da je $P(X_i = 1) = p$ i $P(X_i = 0) = q = 1 - p$. Onda je

$$f(s) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X_i = n) s^n = q + ps,$$

iz čega slijedi da je

$$h(s) = g(f(s)) = g(q + ps).$$

(b) Ako N ima Poissonovu distribuciju s parametrom t, onda je

$$g(s) = e^{t(s-1)}.$$

Iz dosadašnjih razmatranja slijedi da je

$$h(s) = g(f(s)) = e^{t(f(s)-1)} = e^{-t+tf(s)}.$$

Distribuciju koja ima upravo ovakav oblik funkcije izvodnice nazivamo **složena Poissonova distribucija**.

Dakle, ako su X_i Bernoullijeve slučajne varijable i ako N ima Poissonovu distribuciju sa parametrom t, onda je

$$h(s) = e^{-t+tf(s)} = e^{-t+t(q+ps)} = e^{-t+t(1-p)+tps} = e^{-tp+tps},$$

tj. S_N ima Poissonovu distribuciju s parametrom tp.

Prethodni posebni slučaj poslužio je kao motivacija za daljnje proučavanje suma $S_N = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$, gdje N ima Poissonovu distribuciju te se pokazalo da su upravo takve slučajne sume najznačajnije.

Vratimo se sada distribuciji od S_N uz pretpostavku da N ima Poissonovu distribuciju. Označimo sa λt očekivanje od N i uočimo da ako X_j imaju zajedničku distribuciju $\{f_i\}$ onda S_N ima složenu Poissonovu distribuciju

$$\{h_i\}_t = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \{f_i\}^{n*}.$$

Zaista,

$$\{h_i\}_t = \sum_{n=0}^{\infty} g_n \{f_j\}^{n*} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} \{f_i\}^{n*} = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \{f_i\}^{n*}.$$

Budući da je

$$h(s) = g(f(s)) = e^{\lambda t(f(s)-1)} = e^{-\lambda t + \lambda t f(s)},$$

slijedi da S_N ima složenu Poissonovu funkciju izvodnicu

$$h_t(s) = e^{-\lambda t + \lambda t f(s)}. \tag{3.1}$$

Uočimo sada da svaka složena Poissonova funkcija izvodnica zadovoljava relaciju

$$h_{t+k}(s) = h_t(s) h_k(s). \tag{3.2}$$

Sljedeći nam je cilj pokazati da vrijedi i obrat, tj. da familija vjerojatnosnih funkcija izvodnica h_t koja zadovoljava gornju relaciju nužno mora biti oblika (3.1).

Definicija 3.2 *Vjerojatnosna funkcija izvodnica h se naziva* ***beskonačno djeljiva*** *ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{h}$ ponovno vjerojatnosna funkcija izvodnica.*

Ako familija vjerojatnosnih funkcija izvodnica zadovoljava realciju (3.2), onda je

$$(h_{\frac{t}{n}}(s))^n = h_{\frac{t}{n}}(s) \cdot h_{\frac{t}{n}}(s) \cdots h_{\frac{t}{n}}(s) = h_{n \cdot \frac{t}{n}}(s) = h_t(s)$$

pa je

$$\sqrt[n]{h_t} = h_{\frac{t}{n}}.$$

Kako je $h_{\frac{t}{n}}$ vjerojatnosna funkcija izvodnica slijedi da je h_t beskonačno djeljiva. Obrat ovoga je sadržan u sljedećem teoremu koji je specijalni slučaj općenitijeg teorema od Levyja.

Teorem 3.3 *Jedina beskonačno djeljiva vjerojatnosna funkcija izvodnica je ona koja je oblika* (3.1)*, pri čemu je $\{f_i\}$ vjerojatnosna distribucija na 0,1,2,...*

Dokaz. Neka je $h(s) = \sum_k h_k s^k$ i pretpostavimo da je $\sqrt[n]{h}$ vjerojatnosna funkcija izvodnica za svaki $n \geq 1$, tj. h je beskonačno djeljiva. Moramo dokazati da je h oblika (3.1).

Uočimo da je $h_0 > 0$. Naime, označimo sa $p_{n,k}$ koeficijent uz s^k u $\sqrt[n]{h(s)}$, tj. neka je $\sqrt[n]{h(s)} = \sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} s^k$. Pretpostavimo da je $h_0 = 0$. Onda je

$$0 = h_0 = \left(\sqrt[n]{h(0)}\right)^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} p_{n,k} 0^k\right)^n = p_{n,0}^n.$$

Dakle, slijedi da je $p_{n,0} = 0$. Tada je

$$\sqrt[n]{h(s)} = p_{n,1} s + \sum_{k=2}^{\infty} p_{n,k} s^k$$

pa je

$$h(s) = \left(p_{n,1} s + \sum_{k=2}^{\infty} p_{n,k} s^k\right)^n = p_{n,1}^n s^n + ...$$

iz čega slijedi da je

$$h_0 = h_1 = h_2 = ... = h_{n-1} = 0.$$

Budući da je n bio proizvoljan, možemo zaključiti da je $h_k = 0$, $\forall k \geq 0$ što je u kontradikciji s činjenicom da je h vjerojatnosna funkcija izvodnica. Dakle, zaista je $h_0 > 0$.

Kako je $\sqrt[n]{h}$ neopadajući, možemo zaključiti da je $\forall s \in [0, 1]$

$$\sqrt[n]{h_0} \leq \sqrt[n]{h(s)} \leq \sqrt[n]{h(1)} = \sqrt[n]{\sum_{k=0}^{\infty} h_k} = 1.$$

Puštajući $n \to \infty$ slijedi da $\sqrt[n]{h(s)} \to 1$ kada $n \to \infty$. Sada je

$$\log \sqrt[n]{\frac{h(s)}{h_0}} = \log \left[1 + \sqrt[n]{\frac{h(s)}{h_0}} - 1\right] \sim \sqrt[n]{\frac{h(s)}{h_0}} - 1.$$

Kako je $h(1) = 1$, uzimajući u gornjoj relaciji $s = 1$ imamo da je

$$\frac{\log h(s) - \log h_0}{-\log h_0} = \frac{\log \sqrt[n]{\dfrac{h(s)}{h_0}}}{0 - \log h_0} = \frac{\log \sqrt[n]{\dfrac{h(s)}{h_0}}}{\log h(1) - \log h_0} = \frac{\log \sqrt[n]{\dfrac{h(s)}{h_0}}}{\log \sqrt[n]{\dfrac{h(1)}{h_0}}} =$$

$$\frac{\log \sqrt[n]{\dfrac{h(s)}{h_0}}}{\log \sqrt[n]{\dfrac{1}{h_0}}} \sim \frac{\sqrt[n]{h(s)} - \sqrt[n]{h_0}}{1 - \sqrt[n]{h_0}}.$$

Desna strana je red s pozitivnim koeficijentima pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ desna strana predstavlja vjerojatnosnu funkciju izvodnicu, a lijeva strana je limes niza vjerojatnosnih funkcija izvodnica. Sada iz teorema neprekidnosti slijedi da je lijeva strana funkcija izvodnica nenegativnog niza $\{f_i\}$. Uzimajući da je $s = 1$ imamo $\sum f_j = 1$. To znači da je h oblika (3.1) uzimajući da je $\lambda t = -\log h_0$. ■

Sljedeći teorem daje karakterizaciju beskonačno djeljivih vjerojatnosnih funkcija izvodnica.

Teorem 3.4 *Funkcija h je beskonačno djeljiva vjerojatnosna funkcija izvodnica ako i samo ako je $h(1) = 1$ i*

$$\log \frac{h(s)}{h(0)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k s^k,$$

gdje je $a_k \geq 0$ i $\sum a_k = \lambda < \infty$.

Dokaz. Kako je očito $\lambda \neq 0$, možemo staviti $f_k = \frac{a_k}{\lambda}$ pa zatim svodimo h na kanonski oblik (3.1) (uz to da je $t = 1$) i tako dobivamo funkciju izvodnicu od složene Poissonove distribucije. ■

Poglavlje 4

Kanonska reprezentacija beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija

U primjeru 2.4 u svim slučajevima $\varphi_n(t)$ ima isti funkcionalni oblik kao i $\varphi_X(t)$, samo su različiti parametri. To nam sugerira, a zatim nam propozicija 2.5 to i potvrđuje da je beskonačno djeljiva karakteristična funkcija oblika e^{ψ}, gdje je ψ neka pogodna funkcija. U ovom ćemo poglavlju u potpunosti opisati funkciju ψ.

Središnji teorem ovog poglavlja je Levy-Hinčinov teorem, tj. Levy-Hinčinova kanonska reprezentacija beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija, a za njegov dokaz potrebne su nam sljedeće tri leme.

Lema 4.1 *Ako je φ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija i ako je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\varphi = \varphi_n^n$, gdje je φ_n karakteristična funkcija, tada je*
a) $\lim\limits_n n[\varphi_n(t) - 1] = \ln \varphi(t)$
b) $\lim\limits_n \varphi_n(t) = 1$,
pri čemu je za oba limesa konvergencija uniformna na svakom ograničenom

intervalu.

Dokaz. a) Prema propoziciji 2.5 funkcija φ nigdje ne iščezava pa vrijedi

$$\varphi_n(t) = [\varphi(t)]^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\ln\varphi(t)}. \tag{4.1}$$

Neka je sada I proizvoljan ograničen interval. Funkcija $\ln\varphi(t)$ je neprekidna pa postoji konstanta c takva da je $|\ln\varphi(t)| \leq c$ za neki $t \in I$. Iz relacije (4.1), razvojem u red, dobivamo sljedeće

$$|n[\varphi_n(t) - 1] - \ln\varphi(t)| = \left| n\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{\ln\varphi(t)}{n}\right]^k \right| \leq \sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{|\ln\varphi(t)|^k}{n^{k-1}} \leq$$

$$c\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{(k-1)!}\left(\frac{c}{n}\right)^{k-1} = c[e^{\frac{c}{n}} - 1].$$

Time je dokazano da vrijedi a).

b) Uočimo da zbog tvrdnje a) slijedi da je

$$\lim_n |\varphi_n(t) - 1| = \lim_n \frac{1}{n}|n[\varphi_n(t) - 1]| = 0.$$

Time je dokazano da vrijedi b). ■

Lema 4.2 *Ako je $L(x,t)$ definirana za $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ i $t \in \mathbb{R}$ sa*

$$L(x,t) = \left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right) \cdot \frac{1+x^2}{x^2},$$

tada za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lim\limits_{x\to 0} L(x,t) = -\dfrac{t^2}{2}$.

Dokaz. Tvrdnja slijedi dvostrukom primjenom L'Hospitalova pravila. Zaista,

$$\lim_{x\to 0} L(x,t) = \lim_{x\to 0}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\cdot\frac{1+x^2}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0}\frac{e^{itx}(1+x^2) - 1 - x^2 - itx}{1+x^2}$$
$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{ite^{itx}(1+x^2) + 2xe^{itx} - 2x - it}{2x}$$
$$\stackrel{L'H}{=} \lim_{x\to 0}\frac{(it)^2e^{itx}(1+x^2) + 4itxe^{itx} + 2e^{itx} - 2}{2} = -\frac{t^2}{2}$$

■

Napomena 4.3 *Iz leme 4.2 slijedi da, ako stavimo*

$$L(x,t) = \begin{cases} \left(e^{itx} - 1 - \dfrac{itx}{1+x^2}\right)\cdot\dfrac{1+x^2}{x^2}, & x \neq 0 \\ -\dfrac{t^2}{2}, & x = 0, \end{cases} \tag{4.2}$$

tada je $L(x,t)$ neprekidna i ograničena po x za svaki t i neprekidna po t za svaki x.

Lema 4.4 *Neka je $(F_n, n \in \mathbb{N})$ niz ograničenih funkcija distribucije, neka je F ograničena funkcija distribucije i pretpostavimo da $F_n(x) \to F(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ u kojima je F neprekidna. Ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $r > 0$ takav da je $F_n(\infty) - F_n(r) < \epsilon$ za sve n, onda $F_n \xrightarrow{\omega} F$.*

Dokaz. Neka je $x \in \mathbb{R}$ takav da je F neprekidna u točki x. Iz $F_n(x) \leq F_n(\infty)$ slijedi $F(x) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(\infty)$. Puštanjem $x \to \infty$ po točkama neprekidnosti od F, dobijemo $F(\infty) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(\infty)$. Ako je sada $x \in \mathbb{R}$ takav da je F neprekidna u točki x i $x > r$, tada iz uvjeta leme slijedi $F_n(\infty) < F_n(r) + \epsilon \leq F_n(x) + \epsilon$. Odavde slijedi $\limsup_{n\to\infty} F_n(\infty) \leq F(x) + \epsilon \leq F(\infty) + \epsilon$. Budući da je ϵ proizvoljan, zaključujemo da vrijedi $F(\infty) = \lim_n F_n(\infty)$. ■

Teorem 4.5 (Levy-Hinčin) *Funkcija φ je beskonačno djeljiva karakteristična funkcija ako i samo ako postoje $\gamma \in \mathbb{R}$ i ograničena funkcija distribucije G na $\mathbb{R}$ takvi da je*

$$\varphi(t) = exp\left\{ i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) \right\}, t \in \mathbb{R}. \tag{4.3}$$

Osim toga, ova reprezentacija je jedinstvena.

Dokaz. Neka je φ beskonačno djeljiva i neka je za svaki $n \in \mathbb{N}$, φ_n karakteristična funkcija takva da je $\varphi = \varphi_n^n$. Neka je F_n funkcija distribucije od φ_n. Tada iz leme 4.1 (i) slijedi

$$\lim_{n\to\infty} n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) dF_n(x) = \ln \varphi(t), \tag{4.4}$$

pri čemu je konvergencija uniformna na svakom ograničenom intervalu. Definirajmo G_n na $\mathbb{R}$ sa

$$G_n(x) = n \int_{-\infty}^{x} \frac{y^2}{1+y^2} dF_n(y), x \in \mathbb{R}.$$

G_n je ograničena funkcija distribucije (ne nužno vjerojatnosna) i $G_n(-\infty) = 0$. Dokazat ćemo prvo da je niz $(G_n, n \in \mathbb{N})$ uniformno ograničen ili, što je ekvivalentno, da je niz $(G_n(\infty), n \in \mathbb{N})$ ograničen. Stavimo

$$I_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dG_n(x), t \in \mathbb{R}.$$

Tada imamo

$$I_n(t) = n \int_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) dF_n(x),$$

pa iz (4.4) slijedi $\lim I_n(t) = \ln \varphi(t)$ uniformno na svakome ograničenom intervalu. Odavde dobijemo

$$ReI_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (costx - 1)\,\frac{1+x^2}{x^2} dG_n(x) \to Re\ln\varphi(t) = \ln|\varphi(t)|, n \to \infty,$$

uniformno na svakome ograničenom intervalu. Prema tome, ako je t iz ograničenog intervala I, tada za svaki $\epsilon > 0$ vrijedi

$$-ln|\varphi(t)| + \epsilon \geq \int_{-\infty}^{\infty} (1 - costx)\frac{1+x^2}{x^2} dG_n(x), \tag{4.5}$$

za dovoljno velike n. Budući da je integrand u gornjoj nejednakosti nenegativan, to znači da ista nejednakost vrijedi ako je područje integracije proizvoljan Borelov podskup od $\mathbb{R}$. Imamo

$$G_n(\infty) = \int_{-\infty}^{\infty} dG_n(x) = \int_{|x|\leq 1} dG_n(x) + \int_{|x|>1} dG_n(x). \tag{4.6}$$

Budući da je $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1-cosx}{x^2} = \frac{1}{2}$, lagano dobijemo da postoji konstanta $K > 0$ takva da je $\frac{1-cosx}{x^2} \geq K$ za $x \in [-1, 1]$. Sada iz (4.5), za $t = 1$, slijedi

$$-ln|\varphi(1)| + \epsilon \geq \int_{|x|\leq 1} K(1+x^2) dG_n(x) \geq K \int_{|x|\leq 1} dG_n(x). \tag{4.7}$$

Neka je $T \geq 1$ proizvoljan. Integrirajmo (4.5) po intervalu $[0, \frac{2}{T}]$, pomnožimo rezultat sa $\frac{T}{2}$ i primijenimo Fubinijev teorem, pa dobijemo

$$-\frac{T}{2}\int_0^{\frac{2}{T}} \ln|\varphi(t)|dt + \epsilon \geq \int_{|x|\geq T} \left[\frac{T}{2}\int_0^{\frac{2}{T}} (1 - coxtx)dt\right] \frac{1+x2}{x^2} dG_n(x) \geq$$
$$\int_{|x|\geq T} \left[1 - \frac{sin\frac{2x}{T}}{\frac{2x}{T}}\right] dG_n(x).$$

Budući da vrijedi

$$1 - \frac{sin\frac{2x}{T}}{\frac{2x}{T}} \geq \tfrac{1}{2}\; za\; |x| \;\geq\; T,$$

iz gornje nejednakosti slijedi

$$-\frac{T}{2}\int_0^{\frac{2}{T}} \ln|\varphi(t)|dt + \epsilon \geq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq T} dG_n(x), \tag{4.8}$$

a za $T = 1$ dobijemo

$$-\frac{1}{2}\int_0^{2} \ln|\varphi(t)|dt + \epsilon \geq \frac{1}{2}\int_{|x|\geq 1} dG_n(x). \tag{4.9}$$

Budući da su $\ln|\varphi(1)|$ i $\int_0^2 \ln|\varphi(t)|dt$ konačni, iz (4.6), (4.7) i (4.9) slijedi da je niz $(G_n(\infty), n \in \mathbb{N})$ ograničen. Iz Hellyjeva teorema (vidi [4], teorem 13.14) slijedi da postoji ograničena funkcija distribucije G (koja nije nužno vjerojatnosna) i podniz $(G_{nk}, k \in \mathbb{N})$ takvi da $G_{nk}(x) \to G(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ u kojima je G neprekidna. Iz (4.8) slijedi da za $T \geq 1$ imamo

$$\frac{1}{2}\int_{|x|\geq T} dG_{nk}(x) \leq max_{0\leq t\geq \frac{2}{T}} \ln|\varphi(t)| + \epsilon.$$

Budući da je $|\varphi(0)| = 1$ i $\ln|\varphi(t)|$ je neprekidna funkcija, odavde zaključujemo da vrijedi $|\int_{|x|\geq T} dG_{nk}(x)| < 4\epsilon$ za dovoljno velike vrijednosti od T, neovisno o k. Na osnovi leme 4.4 slijedi $G_{nk} \xrightarrow{\omega} G$ za $k \to \infty$. Prema tome, imamo (vidi [4],teorem 13.16)

$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} L(x,t)dG_{nk}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x,t)dG(x). \tag{4.10}$$

Stavimo

$$\gamma_{nk} = n_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}dF_{nk}(x) = \int_A \frac{1}{x}dG_{nk}(x),$$

gdje je $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Tada imamo

$$I_{nk}(t) = i\gamma_{nk}t + \int_{-\infty}^{\infty} L(x,t)dG_{nk}(x).$$

Iz (4.10) i $\lim_k I_{nk}(t) = \ln\varphi(t)$ zaključujemo da niz $(\gamma_{nk}, k \in \mathbb{N})$ konvergira prema nekoj konstanti γ, a odatle slijedi

$$\varphi(t) = exp\left[i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} L(x,t)dG(x)\right], t \in \mathbb{R}.$$

Obratno, pretpostavimo da je φ funkcija definirana sa (4.3). Dokazat ćemo da je φ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija.

Neka je $\sigma^2 = G(0) - G(0-)$. Tada imamo

$$\varphi(t) = exp\left[i\gamma t - \sigma^2\tfrac{t^2}{2} + \int_A L(x,t)dG(x)\right],$$

gdje je $A = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.
Slučaj a): Pretpostavimo da je $0 < \lambda = \int_A \frac{1+y^2}{y^2}dG(y) < \infty$. Definirajmo funkciju H na $\mathbb{R}$ sa

$$H(x) = \frac{1}{\lambda}\int_{(-\infty,x]\cap A} \frac{1+y^2}{y^2}dG(y).$$

Tada je H vjerojatnosna funkcija distribucije i ako je ψ njezina karakteristična funkcija, imamo da je

$$\varphi(t) = exp\left[i\gamma t - \sigma^2\tfrac{t^2}{2} + \lambda(\psi(t)-1) - it\int_A \frac{1}{x}dG(x)\right] = \\ exp\left[i\gamma' t - \sigma^2\tfrac{t^2}{2}\right] exp\left[\lambda(\psi(t)-1)\right],$$

gdje je $\gamma' = \gamma - \int_A \frac{1}{x}dG(x)$. Iz primjera 2.4 pod b) i propozicije 2.9 slijedi da je φ produkt dviju beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija, pa na

osnovi propozicije 2.6 (i) zaključujemo da je i φ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija. Ako je $\lambda = 0, \sigma^2 > 0$, tada je φ karakteristična funkcija od $N(\gamma', \sigma^2)$, pa je beskonačno djeljiva.
Slučaj b): Pretpostavimo da je $\int\limits_A \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) = \infty$. Neka je $(x_n, n \in \mathbb{N})$ niz pozitivnih realnih brojeva, takav da je $x_n > x_{n+1}$, za sve n i $\lim\limits_n x_n = 0$. Stavimo

$$B_0 = \emptyset$$
$$B_n = \{x; |x| \geq x_n\}, n \in \mathbb{N}$$
$$C_n = B_n \backslash B_{n-1} = (-x_{n-1}, -x_n] \cup [x_n, x_{n-1}), n \in \mathbb{N}.$$

Skupovi $C_1, C_2, ...$ su međusobno disjunktni i vrijedi $\bigcup\limits_{k=1}^{n} C_k = B_n$, $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = A$. Možemo uzeti da su x_n izabrani tako da vrijedi

$$\lambda_n = \int\limits_{C_n} \tfrac{1+x^2}{x^2} dG(x) > 0 \; za \; sve \; n.$$

Definirajmo F_n na $\mathbb{R}$ sa

$$F_n(x) = \frac{1}{\lambda_n} \int\limits_{(-\infty,x]\cap C_n} \frac{1+y^2}{y^2} dG(y).$$

Tada je F_n vjerojatnosna funkcija distribucije. Neka je $Z, X_{nm}, Y_n; n, m \in \mathbb{N}$ familija nezavisnih slučajnih varijabli takva da je $Z \sim N(\gamma, \sigma^2), Y_n \sim P(\lambda_n)$ za sve n i X_{nm} ima funkciju distribucije F_n za sve n, m (vidi [4], teorem 11.7). Iz propozicije 2.9 slijedi da je za svaki $n \in \mathbb{N}$ slučajna varijabla $U_n = X_n 1 + ... + X_{nY_n}$ beskonačno djeljiva s karakterističnom funkcijom

$$exp\left[\lambda_n \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1) dF_n(x)\right] = exp\left[\int\limits_{C_n} (e^{itx} - 1) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x)\right].$$

Prema tome, slučajna varijabla

$$W_n = Z + \sum_{k=1}^{n} \left[U_k - \int\limits_{C_k} \frac{1}{x} dG(x) \right]$$

beskonačno je djeljiva s karakterističnom funkcijom

$$\varphi_n(t) = exp \left[i\gamma t - \sigma^2 \tfrac{t^2}{2} + \int\limits_{B_n} L(x,t) dG(x) \right].$$

Zbog $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n = A$ imamo $\varphi(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ *za sve* t (ovdje je konvergencija uniformna na $[-T, T]$, dakle φ je neprekidna u $t = 0$, tj. φ je karakteristična funkcija), pa je φ beskonačno djeljiva prema propoziciji 2.7.

Prije nego što dokažemo jedinstvenost reprezentacije (4.3), primijetimo da, ako je φ dana sa (4.3), tada vrijedi

$$\ln \varphi(t) = i\gamma t + \int\limits_{-\infty}^{\infty} L(x,t) dG(x), t \in \mathbb{R}. \tag{4.11}$$

To slijedi iz činjenice da je $\ln |\varphi(t)|$ neprekidna, zatim iz činjenice da je $\ln |\varphi(t)| - i\gamma t - \int\limits_{-\infty}^{\infty} L(x,t) dG(x)$ neprekidna i ima vrijednost 0 za $t = 0$ i činjenice da logaritam karakteristične funkcije nigdje ne iščezava.

Definirajmo funkciju α na $\mathbb{R}$ sa

$$\alpha(t) = \ln \varphi(t) - \frac{1}{2} \int\limits_{0}^{1} [\ln \varphi(t+y) + \ln \varphi(t-y)] dy. \tag{4.12}$$

Koristeći se Fubinijevim teoremom iz (4.11) i (4.12) dobijemo

$$\alpha(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \left(1 - \frac{sinx}{x}\right) \frac{1+x^2}{x^2} dG(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dH(x), \tag{4.13}$$

gdje je

$$H(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} \left(1 - \frac{siny}{y}\right) \frac{1+y^2}{y^2} dG(y).$$

Lagano je provjeriti da postoje konstante c_1 i c_2 takve da je

$$0 < c_1 \leq \left(1 - \frac{siny}{y}\right) \frac{1+y^2}{y^2} \leq c_2 < \infty \; za \; sve \; y \in \mathbb{R}. \tag{4.14}$$

Odatle slijedi da je H ograničena funkcija distribucije. Osim toga, H jednoznačno određuje G i vrijedi

$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} \left(1 - \frac{siny}{y}\right)^{-1} \frac{y^2}{1+y^2} dH(y), \; x \in \mathbb{R}. \tag{4.15}$$

Iz (4.12) slijedi da je α jednoznačno određena sa φ, a iz (4.13) zaključujemo da je α karakteristična funkcija, pa je na osnovi teorema jedinstvenosti H jednoznačno određena sa α. Koristeći se (4.15) , zaključujemo da je funkcija G iz (4.3) jednoznačno određena sa φ. No, ako je G jedinstvena, tada je i γ jedinstven. ■

Relaciju (4.3) zovemo **Levy-Hinčinova reprezentacija** od φ, a (γ, G) zovemo **Levy-Hinčinov par** pridružen φ, odnosno njezinoj funkciji distribucije.

Kanonska reprezentacija koja je dana u prethodnom teoremu može se na određeni način modificirati. O tome govori sljedeći teorem kojeg navodimo bez dokaza.

Teorem 4.6 (Levy) *Funkcija $\varphi(t)$ je beskonačno djeljiva karakteristična funkcija ako i samo ako se može zapisati u obliku*

$$\varphi(t) = exp\left\{ i\gamma t - \sigma^2 \frac{t^2}{2} + \int_{-\infty}^{-0} (e^{itx} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}) dM(u) + \int_{+0}^{\infty} (e^{itx} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}) dN(u) \right\}, \tag{4.16}$$

pri čemu $M(u), N(u)$ i σ^2 zadovoljavaju sljedeće uvjete:

a) $M(u)$ i $N(u)$ su neopadajuće na $(-\infty, 0)$ i na $(0, \infty)$

b) $M(-\infty) = N(\infty) = 0$

c) Integrali $\int\limits_{-\epsilon}^{0} u^2 dM(u)$ *i* $\int\limits_{0}^{\epsilon} u^2 dN(u)$ *su konačni za svaki* $\epsilon > 0$

d) Konstanta $\sigma^2 \geq 0$.

Osim toga, ova reprezentacija je jedinstvena.

Relaciju (4.16) zovemo **Levyjeva reprezentacija** od φ.

Kanonski prikazi (4.3) i (4.16) su generalizacija tzv. **Kolmogorovljeve reprezentacije** koja vrijedi u slučaju karakterističnih funkcija čije beskonačno djeljive distribucije imaju konačnu varijancu. Sada navodimo i tu reprezentaciju bez dokaza.

Teorem 4.7 (Kolmogorov) *Funkcija* $\varphi(t)$ *je karakteristična funkcija beskonačno djeljive distribucije sa konačnim drugim momentom ako i samo ako se može zapisati u obliku*

$$\varphi(t) = exp\left\{ ict + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx)\frac{dK(x)}{x^2} \right\}, \tag{4.17}$$

gdje je c realna konstanta,a $K(u)$ *je neopadajuća i ograničena funkcija takva da je* $K(-\infty) = 0$. *Ova reprezentacija je jedinstvena.*

Sljedeća tablica daje prikaz različitih kanonskih reprezentacija za neke od učestalih beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija.

Kanonska reprezentacija beskonačno djeljivih karakteritičnih funkcija									
Naziv distribucije	Karakteristična funkcija	Levy-Hinčinova reprezentacija		Levyjeva reprezentacija				Kolmogorovljeva reprezentacija	
		a	$\theta(x)$	a	σ	$M(u)$, $u<0$	$N(u)$, $u>0$	c	$K(x)$
Normalna	$exp[it\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2]$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 > 0$	μ	$\sigma^2\epsilon(x)$	μ	σ	0	0	μ	$\sigma^2\epsilon(x)$
Gama	$(1-it/\theta)^{-\lambda}$, $\theta > 0$, $\lambda > 0$	$\lambda \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\theta y}}{1+y^2} dy$	0, $za\ x<0$, $\lambda \int\limits_0^\infty \frac{ye^{-\theta y}}{1+y^2} dy$, $za\ x>0$	$\lambda \int\limits_0^\infty \frac{e^{-\theta y}}{1+y^2} dy$	0	0	$-\lambda \int\limits_u^\infty \frac{e^{-\theta x}}{x} dx$	$\frac{\lambda}{\theta}$	0, $za\ x<0$ $\lambda \int\limits_0^x ye^{-\theta y} dy$, $za\ x>0$
Cauchyjeva	$e^{-\theta\|t\|}$, $\theta > 0$	0	$(\frac{\theta}{\pi} arctanx + \frac{\theta}{2}$	0	0	$-\frac{\theta}{\pi u}$	$-\frac{\theta}{\pi u}$	/	/
Poissonova	$exp[\lambda(e^{it}-1)]$, $\lambda > 0$	$\frac{\lambda}{2}$	$\frac{\lambda}{2}\epsilon(x-1)$	$\frac{\lambda}{2}$	0	0	$\lambda\epsilon(u-1)$	λ	$\lambda\epsilon(u-1)$

Poglavlje 5

Konvergencija beskonačno djeljivih distribucija

Levy-Hinčinovim teoremom u prethodnom poglavlju pokazano je da su beskonačno djeljive distribucije na specijalan način u 1-1 korespodenciji sa skupom parova (γ, G), gdje je γ realan broj, a G ograničena funkcija distribucije. Ako je $(F_n, n \in \mathbb{N})$ niz beskonačno djeljivih distribucija s pridruženim Levy-Hinčinovima parovima (γ_n, G_n) i ako $F_n \xrightarrow{\omega} F$, onda je prema propoziciji 2.7 i F beskonačno djeljiva distribucija s priduženim parom (γ, G). Prirodno se sada postavlja pitanje je li $\gamma_n \to \gamma$ i $G_n \xrightarrow{\omega} G$.
Sljedeći teorem daje odgovor upravo na to pitanje.

Teorem 5.1 *Neka je $(F_n, n \in \mathbb{N})$ niz beskonačno djeljivih funkcija distribucije s pridruženim Levy-Hinčinovima parovima (γ_n, G_n). Ako $F_n \xrightarrow{\omega} F$, pri čemu je (γ, G) par pridružen F, tada $\gamma_n \to \gamma$ i $G_n \xrightarrow{\omega} G$ za $n \to \infty$. Obratno, ako postoje $\gamma \in \mathbb{R}$ i ograničena funkcija distribucije G takvi da $\gamma_n \to \gamma$ i $G_n \xrightarrow{\omega} G$ za $n \to \infty$, tada $F_n \xrightarrow{\omega} F$, pri čemu je F beskonačno djeljiva s pridruženim parom (γ, G).*

Dokaz. Neka $F_n \stackrel{\omega}{\to} F$ i neka su φ_n, φ karakteristične funkcije od F_n i F redom. Iz $F_n \stackrel{\omega}{\to} F$ i teorema neprekidnosti slijedi $\varphi_n(t) \to \varphi(t)$ za svako t. Budući da φ_n i φ nigdje ne iščezavaju, zaključujemo da $\ln \varphi_n(t) \to \ln \varphi(t)$ (vidi [4] teorem 13.21), odnosno prema relaciji (4.11) u dokazu Levy-Hinčinovog teorema dobijemo

$$\lim_{n\to\infty}[i\gamma_n t + \int_{-\infty}^{\infty} L(x,t)dG_n(x)] = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} L(x,t)dG(x), \tag{5.1}$$

gdje je $L(x,t)$ definirana relacijom (4.2) u prethodnom poglavlju. Osim toga, konvergencija u (5.1) uniformna je na svakome ograničenom intervalu. Odavde slijedi da $Re \ln \varphi_n(t) \to Re \ln \varphi(t)$ za $n \to \infty$, odnosno

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (costx - 1)\tfrac{1+x^2}{x^2} dG_n(x) = \ln |\varphi(t)|$$

uniformno na svakome ograničenom intervalu. Odavde, slično kao u dokazu Levy-Hinčinovog teorema, slijedi da je niz $(G_n, n \in \mathbb{N})$ uniformno ograničen, te da za proizvoljan podniz $(G_{nk}, k \in \mathbb{N})$ takav da $G_{nk}(x) \to G'(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}$ u kojima je G' neprekidna (takav podniz i ograničena funkcija distribucije G' postoje prema Hellyjevu teoremu) vrijedi $G_{nk} \stackrel{\omega}{\to} G'$ za $k \to \infty$. Budući da je $L(x,t)$ ograničena i neprekidna po x (za svako t), odavde dobijemo (vidi [4] teorem 13.16)

$$\lim_{k\to\infty} \int_{\infty}^{\infty} L(x,t)dG_{nk}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} L(x,t)dG'(x). \tag{5.2}$$

Iz (5.1) i (5.2) slijedi da niz $(\gamma_{nk}, k \in \mathbb{N})$ konvergira prema nekom $\gamma' \in \mathbb{R}$, dakle vrijedi

$$i\gamma' t + \int_{-\infty}^{\infty} L(x,t)dG'(x) = i\gamma t + \int_{-\infty}^{\infty} L(x,t)dG(x).$$

Budući da je prema teoremu 4.5 Levy-Hinčinova reprezentacija jedinstvena, odavde slijedi $\gamma' = \gamma$ i $G' = G$. Iz dokaza teorema 4.5 možemo vidjeti da je niz $(G_n, n \in \mathbb{N})$ napet, pa na osnovi korolara 13.2 iz [4] zaključujemo $G_n \xrightarrow{\omega} G$ za $n \to \infty$, a odavde slijedi $\gamma_n \to \gamma$ za $n \to \infty$. Obrat slijedi iz činjenice da je $L(x,t)$ neprekidna i ograničena funkcija, svojstva slabe konvergencije (vidi [4] teorem 13.6), Levy-Hinčinova teorema i teorema neprekidnosti. ■

Sada ćemo navesti analogan teorem za Levyjevu reprezentaciju.

Teorem 5.2 *Neka je $(F_n, n \in \mathbb{N})$ niz beskonačno djeljivih funkcija distribucije s pridruženim Levyjevim trojkama $(\gamma_n, {\sigma_n}^2, M_n)(n \in \mathbb{N})$. Ako $F_n \xrightarrow{\omega} F$, pri čemu je (γ, σ^2, M) trojka prdružena F, tada*

(a) $\gamma_n \to \gamma$ za $n \to \infty$

(b) $M_n(x) \to M(x)$ za $n \to \infty$, i to za sve $x \in \mathbb{R}$ koji su točke neprekidnosti od M.

(c) $\lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} \limsup\limits_{n \to \infty} [\sigma_n^2 + \int\limits_{C_\epsilon} x^2 dM_n(x)] = \lim\limits_{\epsilon \downarrow 0} \liminf\limits_{n \to \infty} [\sigma_n^2 + \int\limits_{C_\epsilon} x^2 dM_n(x) = \sigma^2$, pri čemu je $C_\epsilon = (-\epsilon, 0) \cup (0, \epsilon)$.

Obratno, ako postoje konstante γ i $\sigma^2 \geq 0$ i Levyjeva spektralna funkcija (vidi [4] teorem 14.5) M takvi da vrijede (a), (b) i (c), tada $F_n \xrightarrow{\omega} F$, pri čemu je F beskonačno djeljiva s pridruženom Levyjevom trojkom (γ, σ^2, M).

Poglavlje 6

Geometrijski beskonačno djeljive distribucije

Ruski matematičar Zolotarev je postavio sljedeći problem:
Opisati sve slučajne varijable Y sa svojstvom da za svaki $p \in (0,1)$ postoji slučajna varijabla X_p takva da je

$$Y \stackrel{D}{=} X_p + \epsilon_p Y, \tag{6.1}$$

gdje su varijable Y, X_p i ϵ_p nezavisne i $P\{\epsilon_p = 0\} = p, P\{\epsilon_p = 1\} = 1 - p$.

Neka su $f(t)$ i $g_p(t)$ karakteristične funkcije varijabli Y i X_p redom. Iz svojstava karakterističnih funkcija slijedi da je relacija (6.1) ekvivalentna sa $f(t) = g_p(t)(p + (1-p))f(t)$. Koristeći se formulom za sumu geometrijskog reda, možemo pisati

$$f(t) = \sum_{j=1}^{\infty} g_p^j(t) p (1-p)^{j-1}. \tag{6.2}$$

Relacija (6.2) pokazuje da je postavljeni problem ekvivalentan opisivanju svih slučajnih varijabli Y za koje za svaki $p \in (0,1)$ postoji niz jednako distribuiranih slučajnih varijabli $X_p^{(1)}, X_p^{(2)}, ...$ tako da je

$$Y \stackrel{D}{=} \sum_{j=1}^{\nu_p} X_p^{(j)}, \tag{6.3}$$

gdje je

$$P\{\nu_p = k\} = p(1-p)^{k-1}, k = 1, 2, ... \tag{6.4}$$

i Y, ν_p i $X_p^{(j)}(j = 1, 2, ...)$ su nezavisne.

Drugim riječima, za proizvoljan $p \in (0, 1)$ slučajna varijabla Y je reprezetirana kao suma slučajnog broja (koji ima geometrijsku distribuciju (6.4)) nezavisnih slučajnih varijabli $X_p^{(j)}$, gdje je srednja vrijednost broja članova $1/p$.

Sada je jasno da se navedeni problem svodi na opisivanje svih distribucija koje imaju istu "ulogu u geometrijskoj sumaciji" kao i beskonačno djeljive distribucije u sumaciji nezavisnih slučajnih varijabli.

Definicija 6.1 *Slučajna varijabla Y je* ***geometrijski beskonačno djeljiva*** *ako se za svaki $p \in (0, 1)$ može reprezentirati u formi* (6.3)*, gdje je slučajna varijabla ν_p definirana relacijom* (6.4)*, $X_p^{(j)}(j = 1, 2, ...)$ su jednako distribuirane slučajne varijable i Y, ν_p i $X_p^{(j)}(j = 1, 2, ...)$ su nezavisne.*

Uočimo da je Zolotarevljev problem sada ekvivalentan opisivanju svih geometrijski beskonačno djeljivih slučajnih varijabli. Dakako, prirodno je opisati njihova svojstva u formama koje su analogne onima za beskonačno djeljive slučajne varijable.

Sljedeći rezultat je analogan De Finettijevom teoremu 2.12.

Teorem 6.2 *Slučajna varijabla Y geometrijski je beskonačno djeljiva ako i samo ako se njezina karakteristična funkcija $\varphi(t)$ može reprezentirati u obliku $\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} 1/[1 + \alpha_m(1 - \varphi_m(t))]$, gdje su $\alpha_m \geq 0$ i φ_m karakteristične funkcije.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je za proizvoljnu karakterističnu funkciju $f(t)$ funkcija $\psi_\alpha(t) = 1/[1+\alpha(1-f(t))]$ geometrijski beskonačno djeljiva karakteristična funkcija za svaki $\alpha > 0$. Zaista,

$$\psi_\alpha(t) = \frac{1}{1+\alpha} \cdot \frac{1}{1-(\alpha/(1+\alpha))f(t)} = \frac{1}{1+\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{1+\alpha} \right)^k f^k(t),$$

tj, $\psi_\alpha(t)$ je dobivena supstitucijom $f(t)$ na mjesto od z u redu sa nenegativnim koeficijentima $1/(1+\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha/(1+\alpha))^k z^k$, a to je karakteristična funkcija za svaki $\alpha > 0$. Stoga je $g_p(t) = 1/[1+p\alpha(1-f(t))]$ također karakteristična funkcija za svaki $p \in (0,1)$. Sada je lako provjeriti da je $\psi_\alpha(t) = g_p(t)(p+(1-p)\psi_\alpha(t))$ čime je pokazano da je $\psi_\alpha(t)$ geometrijski beskonačno djeljiva. Ako niz geometrijski beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija konvergira prema karakterističnoj funkciji, očito je onda ona također geometrijski beskonačno djeljiva. Dakle, ako je

$$\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} 1/[1+\alpha_m(1-\varphi_m(t))], \tag{6.5}$$

gdje su $\alpha_m > 0$ i $\varphi_m(t)$ karakteristične funkcije, onda je $\varphi(t)$ geometrijski beskonačno djeljiva karakteristična funkcija. Kako bi dokazali nužnost reprezentacije (6.5), moramo $\varphi(t)$ zapisati u obliku $\varphi(t) = \lim_{\alpha\to 0} 1/[1+(1/\alpha)(1-\varphi_\alpha(t))]$, gdje je $\varphi_\alpha(t) = \varphi(t)/(\alpha+(1-\alpha)\varphi(t))$ karakteristična funkcija za svaki $\alpha \in (0,1)$ i za svaku geometrijski beskonačno djeljivu karakterističnu funkciju $\varphi(t)$. ■

Za detaljniji opis geometrijski beskonačno djeljivih slučajnih varijabli od koristi će nam biti sljedeći teorem.

Teorem 6.3 *Slučajna varijabla Y, tj. njezina karakteristična funkcija $\varphi(t)$ geometrijski je beskonačno djeljiva ako i ako samo je funkcija*

$$f(t) = exp\{1 - 1/\varphi(t)\} \tag{6.6}$$

beskonačno djeljiva karakteristična funkcija.

Dokaz. Neka je $\varphi(t)$ geometrijski beskonačno djeljiva karakteristična funkcija. Prema teoremu 6.2, $\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} g_m(t)$, gdje su $g_m(t) = 1/1 + \alpha_m(1 - \varphi_m(t)))$ karakteristične funkcije. Tada je $\alpha_m(\varphi_m(t) - 1) = 1 - 1/g_m(t)$ pa iz teorema 2.12 slijedi da je $f(t) = exp\{1 - 1/\varphi(t)\} = \lim_{m\to\infty} exp\{1 - 1/g_m(t)\} = \lim_{m\to\infty} exp\{\alpha_m(\varphi_m(t) - 1)\}$ beskonačno djeljiva karakteristična funkcija.
Obratno, ako je $exp\{1 - 1/\varphi(t)\}$ beskoančno djeljiva karakteristična funkcija, onda je $exp\{1 - 1/\varphi(t)\} = \lim_{m\to\infty} exp\{\alpha_m(\varphi_m(t) - 1)\}$, gdje su φ_m karakteristične funkcije. Sada je $\varphi(t) = \lim_{m\to\infty} 1/(1 + \alpha_m(1 - \varphi_m(t)))$, pa iz 6.2 slijedi tvrdnja teorema. ■
Sada ćemo navesti tri korolara ovog teorema koji su analogni kanonskim reprezentacijama beskonačno djeljivih karakteristična funkcija koje su navedene u poglavlju 4.

Korolar 6.4 (analogon Levy-Hinčinove reprezentacije) *Slučajna varijabla Y geometrijski je beskonačno djeljiva ako i samo ako se njezina karakteristična funkcija $\varphi(t)$ može prikazati u obliku*

$$\varphi(t) = 1/\left[1 + ita - \int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{itx} - 1 - \frac{itx}{1+x^2}\right)\frac{1+x^2}{x^2}dG(x)\right], \tag{6.7}$$

gdje je $a \in \mathbb{R}$ i $G(x)$ je neopadajuća ograničena funkcija takva da je $G(-\infty) = 0$. Integrand je definiran i za $x = 0$ radi neprekidnosti i iznosi $-t^2/2$. Ova reprezentacija je jedinstvena.

Korolar 6.5 (analogon Levyjeve reprezentacije) *Slučajna varijabla Y geometrijski je beskonačno djeljiva ako i samo ako se njezina karakteristična* *funkcija $\varphi(t)$ može prikazati u obliku*

$$\varphi(t) = 1/\left[1 + ita + \sigma^2 t^2 - \int\limits_{-\infty}^{-0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dM(u) - \int\limits_{+0}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN(u)\right] \tag{6.8}$$

gdje su $a \in \mathbb{R}$ i $\sigma^2 \geq 0$, a $M(u)$ i $N(u)$ zadovoljavaju sljedeće uvjete:

(a) $M(u)$ i $N(u)$ su neopadajuće na intervalima $(-\infty, 0)$ i $(0, \infty)$ redom

(b) $M(-\infty) = N(\infty) = 0$

(c) integrali $\int\limits_{-\epsilon}^{-0} u^2 dM(u)$ i $\int\limits_{0}^{\epsilon} u^2 dN(u)$ su konačni za svaki $\epsilon > 0$.

Ova reprezentacija je jedinstvena.

Korolar 6.6 (analogon Kolmogorovljeve reprezentacije) *Slučajna varijabla Y geometrijski je beskonačno djeljiva i ima konačan drugi moment ako i samo ako se njezina karakteristična funkcija može prikazati u obliku*

$$\varphi(t) = 1/\left[1 + ict + \int\limits_{-\infty}^{\infty} (e^{itx} - 1 - itx) \frac{dK(x)}{x^2}\right], \tag{6.9}$$

gdje je $c \in \mathbb{R}$ i $K(x)$ je neopadajuća ograničena funkcija takva da je $K(-\infty) = 0$. Ova reprezentacija je jedinstvena.

Poglavlje 7

Stabilne distribucije

U ovom odjeljku upoznat ćemo se sa klasom beskonačno djeljivih funkcija distribucije, takozvanim stabilnim distribucijama. Iako su stabilne distribucije i njihove karakteristične funkcije važne u graničnim teoremima, naše proučavanje ovih distribucija motivirano je i činjenicom da je ova klasa funkcija od neovisnog interesa, tj. pojavljuje se također u nekim problemima koji nisu povezani sa graničnim teoremima. Za početak, promotrimo sljedeći primjer.

Neka je $(X_k, k \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli s konačnim očekivanjem m i konačnom varijancom σ^2 i neka je $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k (n \in \mathbb{N})$. Prema Levyjevom teoremu vrijedi

$$\frac{Sn - nm}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow{D} N(0,1) \text{ za } n \to \infty.$$

Odavde slijedi da svaki nedegenerirani limes niza $\frac{1}{a_n}(S_n - b_n)$ mora biti normalan. Međutim, promotrimo sljedeće. Neka X_k za sve k ima Cauchyjevu razdiobu s gustoćom $f(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}(x \in \mathbb{R})$, gdje je $a > 0$ fiksan parametar. U tom slučaju je odgovarajuća karakteristična funkcija $\varphi(t) = e^{-a|t|}$, pa je karakteristična funkcija od $\frac{S_n}{n}$ dana sa $[\varphi(\frac{t}{n})]^n = e^{-a|t|}$. Iz teorema neprekidnosti zaključujemo da $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{D} X$, gdje je X Cauchyjev razdioba sa parametrima a i $b = 0$. Uočimo da ovo nije u kontradikciji s Levyjevim teoremom, jer je $E(|X|) = \infty$. Također, primjetimo da ako izostavimo zahtjev o konačnosti očekivanja ili varijance možemo dobiti limes koji nije normalan.

Ovaj primjer nam je poslužio kao motivacija za postavljanje sljedećeg problema:

Neka je $(X_k, k \in \mathbb{N})$ niz nezavisnih, jednako distribuiranih slučajnih varijabli. Ako $\frac{1}{a_n}(S_n - b_n) \xrightarrow{D} X$, što su moguće razdiobe od X?

U ovom poglavlju ćemo pokazati da se granične razdiobe mogu u potpunosti okarakterizirati.

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da su $a_n > 0$. Naime, ako ima i negativnih a_n, tada promatramo dva niza koji odgovaraju $a_n > 0$ i $a_n > 0$. Uvedimo sada definiciju.

Definicija 7.1 *Slučajna varijabla X* ***stabilna*** *je ako vrijedi sljedeće: kad god su $X_1, ..., X_n$ nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable, tada postoje $a_n > 0$ i $b_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $X \stackrel{D}{=} \frac{1}{a_n}(S_n - b_n)$.*

Karakteristična funkcija stabilne distribucije naziva se stabilnom karakterističnom funkcijom,a govoreći u terminima karakterističnih funkcija, slučajna varijabla X je stabilna ako za $X_1, ..., X_n$ nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable, postoje $a_n > 0$ i $b_n \in \mathbb{R}$ takvi da je $[\varphi_{(X)}]^n = e^{ib}n^t\varphi_X(a_n t)(t \in \mathbb{R})$. Upravo ova formula implicira sljedeći rezultat.

Teorem 7.2 *Stabilna karakteristična funkcija uvijek je beskonačno djeljiva.*

Može se dokazati da je X stabilna ako i samo ako je $\varphi_X = e^g$, pri čemu g ima jedan od sljedećih dvaju oblika:

$$g(t) = it\beta - d|t|^\alpha \left[1 - i\theta\frac{t}{|t|}tg\frac{\pi}{2}\alpha\right], \tag{7.1}$$

ili

$$g(t) = it\beta - d|t| \left[1 - i\theta \frac{t}{|t|} \frac{2}{\pi} ln|t|\right], \tag{7.2}$$

gdje je $0 < \alpha < 1$ ili $0 < \alpha \leq 2$, $\beta \in \mathbb{R}$, $d \geq 0$, $|\theta| \leq 1$(uzimamo $\frac{t}{|t|} = 0$ za $t = 0$). Pokažimo da je slučajna varijabla s takvom karakterističnom funkcijom stabilna. Neka su $X_1, ..., X_n$ nezavisne, jednako distribuirane i neka svaka od X_k ima karakterističnu funkciju $\varphi = e^g$, gdje je g dana sa 7.1 ili 7.2. Neka je $\lambda = \frac{1}{\alpha}$ u slučaju 7.1 i $\lambda = 1$ u slučaju 7.2. Tada u slučaju 7.1 imamo

$$g(n^\lambda t) = itn^\lambda\beta - dn|t|^\alpha \left[1 + i\theta\tfrac{t}{|t|}tg\tfrac{\pi}{2}\alpha\right] = ng(t) - it\beta(n - n^\lambda),$$

a u slučaju 7.2 imamo

$$g(n^\lambda t) = itn^\lambda\beta - dn|t| \left[1 + i\theta\tfrac{t}{|t|}\tfrac{2}{\pi}(lnn + ln|t|)\right] = ng(t) - intd\theta\tfrac{2}{\pi}lnn.$$

Prema tome, vrijedi

$$[\varphi(t)]^n = e^{ng(t)} = e^{g(n^\lambda t)}e^{ib}n^t = \varphi(n^\lambda t)e^{ib}n^t,$$

gdje je $b_n = \beta(n - n^\lambda)$ u slučaju 7.1 i $b_n = nd\theta\frac{2}{\pi}lnn$ u slučaju 7.2. Odavde slijedi $X \stackrel{D}{=} \frac{1}{a_n}(S_n - b_n)$, gdje je $a_n = n^\lambda = n^{\frac{1}{\alpha}}$. Dakle, X je stabilna.

U nastavku navodimo kanonsku reprezentaciju stabilnih karakterističnih funkcija bez dokaza.

Teorem 7.3 *Karakteristična funkcija stabilne distribucije ima kanonsku reprezentaciju*

$$log\varphi(t) = ita - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \int_{-\infty}^{0} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dM(u) + \int_{0}^{\infty} \left(e^{itu} - 1 - \frac{itu}{1+u^2}\right) dN(u) \tag{7.3}$$

pri čemu je

$$\sigma^2 = 0 i M(u) = 0, N(u) = 0$$

ili

$$\sigma^2 = 0, M(u) = C_1|u|^{-\alpha}(u < 0), N(u) = -C_2 u^{-\alpha}(u > 0),$$

uz sljedeća ograničenja na parametre

$$0 < \alpha < 2, C_1 \geq 0, C_2 \geq 0, C_1 + C_2 > 0.$$

Obratno, karakteristična funkcija oblika 7.3 je stabilna.

Zaključak

Karakteristične funkcije i funkcije izvodnice neizostavan su alat u mnogim aspektima teorije vjerojatnosti i njezinim primjenama. Zahvaljući svojim osnovnim svojstva često pojednostavljuju manipulaciju složenih izraza, olakšavaju proučavanje konvergencije i nalaze primjenu u analizi stohastičkih procesa i statistici.

U radu je istražena klasa beskonačno djeljivih distribucija, oslanjajući se na njihove fundamentalne osobine. Metode za konstruiranje beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija dale su značajne rezultate o samoj strukturi ovih funkcija. Detaljno razmatranje Levy-Hinčinove kanonske reprezentacije pružilo je eksplicitnu formu beskonačno djeljivih karakterističnih funkcija, što olakšava njihovu analizu i primjenu. Definiranje beskonačne djeljivosti koristeći se funkcijama izvodnicama ilustriralo je važnost ove klase za razumijevanje i modeliranje stohastičkih procesa sa stacionarnim nezavisnim inkrementima. Stoga su beskonačno djeljive distribucije koristan alat za simuliranje realnih fenomena.

Beskonačno djeljive distribucije predstavljaju bogato područje istraživanja sa širokim spektrom primjene. Njihova sposobnost modeliranja omogućava njihovu primjenju u analizama koje zahjevaju visoku preciznost. Buduća istraživanja usmjerena na njihovo razumjevanje i generalizaciju mogu značajno doprinijeti napretku u različitim znanstvenim disciplinama.

Literatura

[1] Feller W. (1967), An introduction to probability theory and its applications

[2] Klebanov L. B., Maniya G. M. i Melamed I. A. (1983), A problem of Zolotarev and analogs of infinitely divisible and stable distributions in a scheme for summing a random number of random variables

[3] Lukacs E. (1970), Characteristic functions

[4] Sarapa N. (2002), Teorija vjerojatnosti