Raspon grafa i maksimalna sigurna udaljenost

Šćepanović, Doris

Master's thesis / Diplomski rad

2024

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:378179

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

DORIS ŠĆEPANOVIĆ

RASPON GRAFA I MAKSIMALNA SIGURNA UDALJENOST

DIPLOMSKI RAD

Split, lipanj 2024.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

RASPON GRAFA I MAKSIMALNA SIGURNA UDALJENOST

DIPLOMSKI RAD

Studentica: Doris Šćepanović

Mentor: izv. prof. dr. sc. Goran Erceg

Split, lipanj 2024.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

RASPON GRAFA I MAKSIMALNA SIGURNA UDALJENOST

Doris Šćepanović

Sažetak:

Pojam raspona grafa po prvi puta uvode I. Banič i A. Taranenko u svojem radu [1] kako bi riješili problem određivanja maksimalne sigurne udaljenosti na kojoj se dva igrača mogu nalaziti obilazeći graf. Definiraju vršni i bridni raspon povezanog grafa koji može biti jaki, direktni ili Kartezijev, ovisno o dopuštenim pravilima kretanja na danom grafu. Autori G. Erceg, T. Vojković i A. Šubašić su u svojem radu [2], promatrajući samo vršne raspone grafa, dokazali relacije između njih te izračunali konkretne vrijednosti raspona za neke klase grafova. Cilj ovog rada je usporediti prethodno navedene radove i ustanoviti postoje li, i kakve, razlike u analizama istog problema.

Ključne riječi:

Vršni raspon grafa, bridni raspon grafa, slabi homomorfizam, l-obilazak, aktivna pravila kretanja, lijena pravila kretanja, tradicionalna pravila kretanja, produkt grafova

Podatci o radu:

81 stranica, 11 slika i 3 tablice, 9 literaturnih navoda, hrvatski jezik

Mentor: *izv. prof. dr. sc. Goran Erceg*

Članovi povjerenstva:

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

doc. dr. sc. Tanja Vojković

doc. dr. sc. Aljoša Šubašić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *20. lipnja 2024.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

SPAN OF A GRAPH AND MAXIMAL SAFETY DISTANCE

Doris Šćepanović

Abstract:

The novel notion of the span of graph was first introduced by I. Banič and A. Taranenko in their paper [1] in order to solve the problem of determining the maximal safety distance two players can keep while traversing a graph. They define the vertex and edge span of a connected graph that can be strong, direct or Cartesian, depending on the allowed movement rules on a given graph. Authors G. Erceg, T. Vojković and A. Šubašić in their paper [2], observing only the vertex span of the graph, proved the relations between them and calculated specific span values for some graph classes. The objective of this paper is to compare previously mentioned papers and to determine the differences in the analyses of the same problem, if such differences exist.

Key words:

Vertex span of a graph, edge span of a graph, weak homomorphism, l-track, active movement rules, lazy movement rules, traditional movement rules, graph product

Specifications:

81 pages, 11 pictures and 3 tables, 9 references, croatian language

Mentor: *Associate Professor Goran Erceg*

Committee:

BASIC DOCUMENTATION CARD

Assisstant Professor Tanja Vojković

Assisstant Professor Aljoša Šubašić

This thesis was approved by a Thesis committee on *June 20, 2024*.

Uvod

U vrijeme globalne pandemije koja je počela 2020. godine, dvije osnovne sigurnosne mjere diljem svijeta bile su socijalno distanciranje i držanje sigurne udaljenosti na javnim površinama. Kao posljedica iste, pojavila se potreba za određivanjem maksimalne sigurne udaljenosti koju dvije osobe moraju držati u svakom vremenskom trenutku. Mnoge životne situacije možemo reprezentirati grafom no one kod kojih bi imalo smisla promatrati sigurnu udaljenost bile bi primjerice planiranje putovanja, sigurnost u prometu, organizacija javnih događanja, razmjena tajnih informacija.
I. Banič i A. Taranenko su u svojem radu [1] uveli potpuno novi pojam raspona grafa, temeljenog na ideji raspona kontinuuma predstavljenog u radu [3] A. Leleka. Više o kontinuumu i njegovom rasponu može se pronaći u Poglavlju 1. Koristili su raspon grafa kako bi odredili maksimalnu sigurnu udaljenost koju bi dva igrača trebala držati dok obilaze graf, poštujući određena pravila kretanja i s ciljem obilaska svih vrhova ili svih bridova danog grafa. Definirali su više varijanti raspona povezanog grafa i za svaku pokazali da se rješenje, odnosno tražena udaljenost, može dobiti promatrajući samo povezane podgrafove produkta grafova i projekcija na faktore tog produkta.
Također su karakterizirali grafove u kojima nije moguće ni u jednom trenutku držati pozitivnu sigurnu udaljenost te su predstavili polinomijalni algoritam koji određuje odabranu varijantu raspona danog grafa.

Hoehn je u svojem radu [4] dokazao da postoje kontinuumu raspona jednakog nuli koji nisu lančasto povezani, a I. Banič i A. Taranenko su dokazali da, kada umjesto kontinuuma promatramo graf, to nije slučaj. Posebno, dokazali su da je put jedini graf za rasponom jednakim nuli.

S druge strane, G. Erceg, T. Vojković i A. Šubašić su u svojem radu [2] promatrali isti problem kao i I. Banič i A. Taranenko, ali su mu pristupili na malo drugačiji način. Direktno su definirali maksimalnu sigurnu udaljenost za različita pravila kretanja te su umjesto slabih homomorfizama promatrali tzv. l-obilaske. Koristeći neke rezultate rada [1], uspjeli su dokazati relacije između nekih varijanti raspona i odrediti konkretnu vrijednost raspona za neke klase grafova.

U poglavlju 1 kratko prolazimo kroz pojmove raspona i lančasto povezanih kontinuuma u skladu sa definicijama navedenim u radovima [3] i [4], kako bi bar donekle razumjeli temelje istraživanja i analizu rada [1]. U poglavljima 2 i 3 uvodimo osnovne pojmove iz područja teorije grafova te se upoznajemo sa slabim homomorfizmima, jakim, direktnim i Kartezijevim produktom grafova. Poglavlja 4, 5, 6 opisuju pristup rada [1], a poglavlja 7 i 8 opisuju pristup rada [2]. Na samom kraju, u poglavlju 9, uspoređujemo pristupe navedenih radova.

Sadržaj

Poglavlje 1

Kontinuum

Sljedeća definicija i napomene su preuzete iz [3].

Definicija 1.1 *Zadan je metrički prostor (X,d). Neka su p_1 i p_2 projekcije Kartezijeva produkta $X \times X$ na prvu i drugu koordinatu redom, tj. vrijedi $p_1(x_1, x_2) = x_1$, $p_2(x_1, x_2) = x_2$ za svaki $(x_1, x_2) \in X \times X$.*
Definiramo ***raspon*** *$\sigma(X)$ od X kao supremum skupa svih $\epsilon \geq 0$ za koje postoji povezani podskup Z skupa $X \times X$ sa svojstvima:*

1. *$p_1(Z) = p_2(Z)$*
2. *$d(x_1, x_2) \geq \epsilon$, za svaki $(x_1, x_2) \in Z$.*

Napomena 1.2 *Možemo pretpostaviti da je skup Z zatvoren skup.*

Napomena 1.3 *Raspon je monotona funkcija, tj. vrijedi $\sigma(X) \leq \sigma(Y)$, za svaki $Y \subset X$.*

Napomena 1.4 *Neka je A povezani prostor i $f_1, f_2 : A \to X$ funkcije takve da vrijedi $f_1(A) = f_2(A)$. Tada za $\epsilon = \inf\limits_{a \in A} d(f_1(A), f_2(A))$ vrijedi nejednakost $\sigma(X) \geq \epsilon$. Dovoljno je za Z odabrati skup $Z = \{(f_1(a), f_2(a)) : a \in A\}$.*

Sada raspon možemo definirati na sljedeći način:

$$\sigma(X) = \sup_{A, f_1, f_2} \inf_{a \in A} d(f_1(a), f_2(a),$$

pri čemu A prolazi svim povezanim prostorima, dok f_1 i f_2 prolaze kroz sve funkcije definirane na gore navedeni način.
Sljedeća definicija preuzeta je iz [4].

Definicija 1.5 ***Kontinuum*** *je neprazan, povezan i kompaktan metrički prostor.*

Sljedeća definicija preuzeta je iz [5].

Definicija 1.6 ***Potkontinuum*** *je podskup kontinuuma koji je i sam kontinuum.*

Kada promatramo kontinuum, definicija 1.1 ostaje ista, osim što će X biti kontinuum, a Z potkontinuum. Tada raspon možemo zapisati kao:

$$\sigma(X) = \sup_{A} \inf_{(x_1, x_2) \in Z} d(x_1, x_2).$$

Sljedeće je preuzeto iz [4].

Definicija 1.7 ***Lančasti pokrivač*** *kontinuuma X je konačni otvoreni pokrivač $U = (U_l, 0 \leq l < L)$ takav da vrijedi $U_{l_1} \cap U_{l_2} \neq \emptyset$ ako i samo ako je $|l_1 - l_2| \leq 1$.*

Definicija 1.8 *Kontinuum X je* ***lančasto povezan*** *ako se svaki otvoreni pokrivač može proširiti do lačnastog pokrivača.*

Posljedica Lelekovog rada [3] je da svi lančasto povezani kontinuumi imaju raspon jednak nuli. No, Hoehn je u svojem radu [4] dokazao da obrat ne vrijedi, tj. dokazao je da postoji kontinuum raspona jednakog nuli koji nije lančasto povezan (str. 4 u [4]).

Drugim riječima, Lelek je za lančasto povezani kontinuum X promatrao sljedeće:

Tvrdnja 1 *Ako je A kontinuum i $f_1, f_2 : A \to X$ neprekidne funkcije takve da je $f_1(A) = f_2(A)$, onda postoji točka $a \in A$ takva da je $f_1(a) = f_2(a)$.*

Pojam raspona, Lelek je uveo kako bi izračunao koliko je kontinuum X "daleko" od zadovoljavanja tvrdnje 1.

Napomena 1.9 *Raspon $\sigma(X) = \sup\limits_{A,f_1,f_2} \inf\limits_{a\in A} d(f_1(a), f_2(a)$ je jednak nuli kada kontinuum X zadovoljava tvrdnju 1.*

U slučaju kada bi X bio graf, promatrali bi dvije osobe koje se kreću grafom i raspon bi bila najveća udaljenost α takva da su te dvije osobe uvijek na udaljenosti barem α.

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi

Sljedeći odjeljak preuzet je iz [6].

2.1 Grafovi

Definicija 2.1 ***Graf*** *G je uređena trojka (V, E, φ) gdje je V neprazan skup čije elemente nazivamo* ***vrhovima****, E je skup čije elemente nazivamo* ***bridovima*** *i φ je preslikavanje koje svakom bridu pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova. Preslikavanje φ naziva se* ***incidencijska funkcija*** *grafa G.*

Napomena 2.2 *Uobičajeno je skup vrhova i skup bridova grafa G redom označiti kao V(G) i E(G).*

Napomena 2.3 *Kada je $\varphi(e) = \{u, v\}$, koristimo oznaku $e = uv$ i kažemo da su vrhovi u i v* ***krajevi*** *brida e.*

Definicija 2.4 *Kažemo da je graf H* ***podgraf*** *grafa G i pišemo $H \subseteq G$ ako vrijedi sljedeće:*

1. $V(H) \subseteq V(G)$,

2. $E(G) \subseteq E(G)$,

3. Svaki brid grafa H ima iste krajeve u H kao što ih ima u G.

Definicija 2.5 *Ako je H podgraf grafa G i vrijedi V(G) = V(H), onda kažemo da je H* ***razapinjući podgraf*** *grafa G.*

Definicija 2.6 ***Ciklus*** *je neprazni graf čije je vrhove moguće označiti tako da je* $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ *i* $E = \{v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_{n-1}v_n, v_nv_1\}$ *pri čemu je* $n \geq 1$. *Ciklus sa n vrhova označava se sa* C_n *i naziva se n-ciklus.*

Definicija 2.7 ***Put*** *je graf koji se dobije iz ciklusa uklanjanjem točno jednog brida. Put sa n vrhova označava se sa* P_n *i ima n-1 bridova.*

Definicija 2.8 ***Šetnja*** *W u grafu G je konačan niz vrhova* v_i *i bridova* e_i *oblika* $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_l, v_l$ *pri čemu su krajevi brida* e_i *vrhovi* v_{i-1} *i* v_i. *Vrh* v_0 *nazivamo početni vrh, vrh* v_l *završni vrh, a svi ostali vrhovi se nazivaju unutarnji vrhovi šetnje W.*

Definicija 2.9 *Vrhovi u i v grafa G su* **povezani**, *ako postoji put između njih.*

Definicija 2.10 *Graf G je* **povezan**, *ako su svaka dva njegova vrha povezana putem.*

Definicija 2.11 ***Udaljenost*** *povezanih vrhova u i v grafa G, u oznaci* $d_G(u, v)$, *je duljina najkraćeg puta između njih.*

Definicija 2.12 ***Podgraf*** *grafa G* **induciran skupom vrhova** $U \subseteq V(G)$ *je graf* $\langle U \rangle_G$ *čiji skup bridova sadrži sve bridove iz E(G) kojima su oba kraja u U. Kažemo da je podgraf H grafa G* **inducirani podgraf** *ako vrijedi da su svaka dva vrha u H susjedna*[1] *u H ako i samo ako su susjedna u G.*

[1] Vrhovi su susjedni ako su spojeni bridom.

Definicija 2.13 ***Komponenta povezanosti*** *(ili kraće* ***komponenta)*** ***grafa*** *G je povezani podgraf koji nije pravi podgraf ni jednog drugog povezanog podgrafa grafa G. Drugim riječima, komponenta grafa G je povezani podgraf maksimalan po inkluziji. Broj komponenti povezanosti grafa G označavamo sa $c(G)$.*

Definicija 2.14 *Povezani graf bez ciklusa nazivamo* ***stablo****.*

Definicija 2.15 *Razapinjući podgraf grafa G koji je stablo, naziva se* ***razapinjuće stablo*** *grafa G.*

Teorem 2.16 *Graf je povezan ako i samo ako ima razapinjuće stablo.*

Definicija 2.17 *Za proizvoljan vrh v stabla T sa $P(v)$ označimo označimo jedinstveni put od v do korijena. Vrh puta $P(v)$ susjedan vrhu v je njegov* ***roditelj*** *ili* ***prethodnik****, a ostali vrhovi njemu susjedni su njegova* ***djeca****.*

Definicija 2.18 ***k-stablo*** *je korjensko stablo[2] u kojemu svaki vrh ima k ili manje sljednika (djece), $k \geq 2$.*

Definicija 2.19 ***Uređeno stablo*** *je korjensko stablo u kojemu su sljednici svakog vrha označeni zadanim uređajem.*

Definicija 2.20 ***Binarno stablo*** *je uređeno 2-stablo u kojemu je svaki sljednik vrha označen ili kao lijevi ili kao desni.*

Definicija 2.21 ***Razina*** *ili* ***dubina*** *vrha v je duljina puta $P(v)$, odnosno njegova udaljenost od korjena.*

Definicija 2.22 ***Visina*** *korjenskog stabla T je maksimalna duljina puta $P(v)$ za $v \in V(T)$, odnosno najveća dubina u stablu.*

Definicija 2.23 ***Jednostavni*** *graf je graf bez petlji[3] i višestrukih bridova[4].*

[2] Korjensko stablo je stablo u kojem izabrani vrh označavamo sa r i nazivamo korjen.
[3] Petlja je brid kojemu se krajevi jednaki.
[4] Višestruki brid je skup bridova koji imaju iste krajeve.

Definicija 2.24 *Brid e grafa G nazivamo* ***most*** *ili* ***rezni brid*** *ako je* $c(G - e) > c(G)$[5].

Definicija 2.25 ***Stupanj vrha*** *v grafa G, u oznaci $deg(v)$, je broj bridova grafa G koji su incidentni*[6] *sa v, pri čemu se za petlju broje dvije incidencije.*

Definicija 2.26 ***List*** *v grafa G je vrh za kojeg vrijedi $deg(v) = 1$.*

S obzirom na temu rada, primijetimo da ima smisla promatrati samo jednostavne povezane grafove stoga će se pojam *grafa* u daljnjem odnositi na *povezani jednostavni graf.*

[5] Graf $G - e$ je graf dobiven uklanjanjem brida e iz grafa G.

[6] Brid je incidentan nekom vrhu v ako je v jedan kraj tog brida.

Poglavlje 3

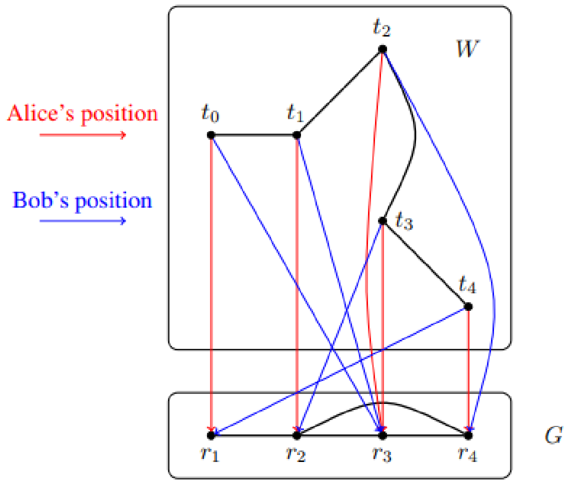
Sigurna udaljenost

Ovo poglavlje je, izuzev slika 3.2, 3.3, 3.4, preuzeto iz [1].

3.1 Uvodni primjer

Neka su Alice i Bob dva igrača koja se kreću grafom. Oboje bi željeli posjetiti ili sve vrhove ili sve bridove danog grafa držeći maksimalnu moguću sigurnu udaljenost jedno od drugoga. Kretanja igrača mogli bi opisati tako da njihove pozicije u fiksnom trenutku t reprezentiramo parom (a_t, b_t) pri čemu su a_t i b_t vrhovi danog grafa. Oba igrača imaju opciju ostati na trenutnom vrhu ili se pomaknuti na susjedni vrh.

Na slici 3.1 prikazan je primjer grafa G i pozicije, tj. šetnje, oba igrača u 5 uzastopnih vremenskih trenutaka, prikazanih grafom W. Za svaki vremenski trenutak, pozicije od Alice i Boba redom su prikazane crvenom i plavom strelicom.



Slika 3.1: Primjer šetnje grafom dvaju igrača (Slika preuzeta iz [1])

Promotrimo pozicije od Alice i Boba i odredimo na kojoj se sigurnoj udaljenosti nalaze u svakom od vremenskih trenutaka:

- U trenutku t_0 Alice se nalazi u vrhu r_1, a Bob se nalazi u vrhu r_3 pa njihove pozicije možemo reprezentirati parom (r_1, r_3). Igrači se nalaze na sigurnoj udaljenosti koja je jednaka 2.

- U trenutku t_1 Alice se pomiče u vrh r_2, a Bob ostaje u vrhu r_3 pa njihove pozicije možemo reprezentirati parom (r_2, r_3). Igrači se nalaze na sigurnoj udaljenosti koja je jednaka 1.

- U trenutku t_2 Alice se pomiče u vrh r_3, a Bob se pomiče u vrh r_4 pa njihove pozicije možemo reprezentirati parom (r_3, r_4). Igrači se nalaze na sigurnoj udaljenosti koja je jednaka 1.

- U trenutku t_3 Alice ostaje u vrhu r_3, a Bob se pomiče u vrh r_2 pa njihove pozicije možemo reprezentirati parom (r_3, r_2). Igrači se nalaze na sigurnoj udaljenosti koja je jednaka 1.

- U trenutku t_4 Alice se pomiče u vrh r_4, a Bob se pomiče u vrh r_1 pa njihove pozicije možemo reprezentirati parom (r_4, r_1). Igrači se nalaze na sigurnoj udaljenosti koja je jednaka 2.

Dakle, u ovom primjeru, kretanja oba igrača u 5 uzastopnih vremenskih trenutaka možemo reprezentirati petorkom $((r_1, r_3), (r_2, r_3), (r_3, r_4), (r_3, r_2), (r_4, r_1))$. Uočimo da su u prethodnom primjeru oba igrača posjetili sve vrhove te da je maksimalna udaljenost, koju su bili u mogućnosti zadržati u svakom vremenskom trenutku, bila jednaka 1.
Općenito, želimo zadržati najveću moguću sigurnu udaljenost između igrača u svim mogućim šetnjama danog grafa G.
Za dani povezani graf W koji predstavlja šetnju (uzastopni vremenski trenutci predstavljeni su susjednim vrhovima), preslikavanje sa $V(W)$ u $V(G)$ nazivamo **slabi homomorfizam**. Takvo preslikavanje prikazuje poziciju odgovarajućeg igrača - dva susjedna vrha iz W moraju se preslikati ili u isti vrh iz G (igrač se nije pomaknuo) ili u vrhove koji su susjedni u G (igrač se pomaknuo na susjedni vrh).
Nadalje, pretpostavljamo da oba igrača žele posjetiti sve vrhove i/ili sve bridove danog grafa te u skladu s time definiramo tri različita skupa pravila kretanja:

1. **Tradicionalna pravila kretanja**: oba igrača mogu se neovisno jedan o drugome pomaknuti na susjedni vrh ili ostati u istom vrhu.

2. **Aktivna pravila kretanja**: oba igrača moraju se pomaknuti na susjedni vrh.

3. **Lijena pravila kretanja**: točno se jedan igrač može pomaknuti na susjedni vrh.

Naš problem održavanja sigurne udaljenosti između dva igrača podsjeća na igru policajca i pljačkaša, predstavljenu u knjizi *The game of cops and robbers on graphs* autora A. Bonato i R. Nowakowski. U takvoj igri, policajac (ili više njih) i pljačkaš nalaze se na grafu. U svakom vremenskom trenutku, svi igrači mogu se kretati prema određenim pravilima kretanja. Cilj je da policajac uhvati pljačkaša u konačno mnogo koraka. U ovoj igri, i mnogim sličnim, igrači imaju različite ciljeve - policajac hvata pljačkaša, a pljačkaš bježi od policajca. Mi promatramo na neki način dualan problem u kojem dva igrača dijele zajednički cilj: održati maksimalnu moguću sigurnu udaljenost u svakom vremenskom trenutku.

3.2 Terminologija

Definicija 3.1 ***Ekscentricitet*** *vrha v povezanog grafa G u oznaci* $\mathrm{ecc}_G(v)$ *je maksimalna udaljenost vrha v do ostalih vrhova iz G:*

$$\mathrm{ecc}_G(v) = \max\{d_G(v, u) : u \in V(G)\}.$$

Definicija 3.2 ***Radijus*** *grafa G u oznaci* $\mathrm{rad}(G)$ *je najmanji ekscentricitet među svim vrhovima iz G:*

$$\mathrm{rad}(G) = \min\{\mathrm{ecc}_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Definicija 3.3 ***Dijametar*** *grafa G u oznaci* $\mathrm{diam}(G)$ *je najveći ekscentricitet među svim vrhovima iz G:*

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{\mathrm{ecc}_G(v) : v \in V(G)\}.$$

Napomena 3.4 *Sa $H \subseteq_C G$ označavamo da je H povezani podgraf grafa G.*

Napomena 3.5 *Neka je $H \subseteq G$. Za graf $G - H$ vrijedi $V(G - H) = V(G) \setminus V(H)$ i $E(G - H) = E(G) \setminus \{uv \in E(G) : u \in V(H)\}$.*

3.2.1 Homomorfizam grafova

Sljedeća definicija preuzeta je iz [7].

Definicija 3.6 ***Homomorifzam*** *grafova* G *i* H *je preslikavanje* $\varphi : V(G) \to V(H)$ *za koje vrijedi* $(\varphi(u), \varphi(v)) \in E(H)$ *ako je* $(u, v) \in E(G)$.

U sekciji 3.1 na stranici 10 spomenuli smo slabi homomorfizam. Iskažimo formalnu definiciju:

Definicija 3.7 ***Slabi homomorfizam*** *grafova* G *i* H *je preslikavanje* $f : V(G) \to V(H)$ *za koje vrijedi: ako su* $u, v \in V(G)$ *i* $uv \in E(G)$ *onda vrijedi* $f(u)f(v) \in E(H)$ *ili* $f(u) = f(v)$.

Napomena 3.8 *Kada je riječ o slabom homomorfizmu, uobičajeno je umjesto* $f : V(G) \to V(H)$ *pisati* $f : G \to H$.

Za potrebe sljedećih definicija i napomene, neka je $f : G \to H$ slabi homomorfizam.

Definicija 3.9 *Kažemo da je f:*

1. ***surjektivan****, ako je* $f\ (V(G)) = V(H)$,
2. ***bridno surjektivan****, ako je surjektivan te za svaki* $uv \in E(H)$ *postoji brid* $xy \in E(G)$ *takav da je* $u = f(x)$ *i* $v = f(y)$.

Definicija 3.10 ***Slika*** $f(G)$ *grafa* G *je graf za kojeg vrijedi* $V(f(G)) = \{f(u) : u \in V(G)\}$, $E(f(G)) = \{f(u)f(v) : uv \in E(G)$ *i* $f(u) \neq f(v)\}$.

Definicija 3.11 *Neka je* $K \subseteq G$. ***Restrikcija*** $f|_K : K \to H$ *definirana je sa* $f|_K(u) = f(u)$ *za proizvoljni* $u \in V(K)$.

Napomena 3.12 *Vrijedi:* $f(G) \subseteq H$.

Lema 3.13 *Neka je $f : G \to H$ slabi homomorfizam. Ako je G povezan graf, onda je f(G) također povezan graf.*

Dokaz. Kako je f slabi homomorfizam, to vrijedi:

$$d_{f(G)}(f(u), f(v)) \leq d_G(u, v),$$

za proizvoljne $u, v \in V(G)$. Dakle, postoji put u $f(G)$ između vrhova $f(u)$ i $f(v)$, za proizvoljne $u, v \in V(G)$. ■

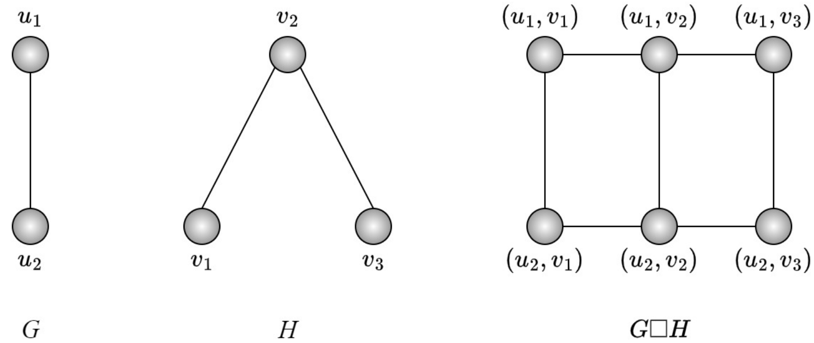
3.2.2 Produkt grafova

Neka su G i H proizvoljni grafovi. Promatrat ćemo Kartezijev, direktni i jaki produkt grafova G i H. Iskazat ćemo njihove definicije i svaku potkrijepiti primjerom.
Sljedeća definicija preuzeta je iz [6].

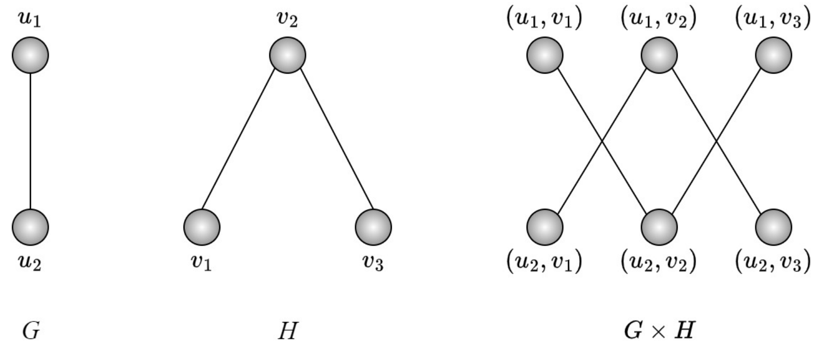
Definicija 3.14 ***Kartezijev produkt*** *grafova G i H, u oznaci $G \Box H$, je jednostavni graf za kojeg vrijedi $V(G \Box H) = V(G) \times V(H)$, pri čemu su dva vrha (u_1, v_1) i (u_2, v_2) iz $V(G \Box H)$ povezana bridom ako i samo vrijedi točno jedno od sljedećeg:*

1. $u_1 u_2 \in E(G)$ *i* $v_1 = v_2$
2. $v_1 v_2 \in E(H)$ *i* $u_1 = u_2$.

Definicija 3.15 ***Direktni produkt*** *grafova G i H, u oznaci $G \times H$, je graf za kojeg vrijedi $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$, pri čemu su dva vrha (u_1, v_1) i (u_2, v_2) iz $V(G \times H)$ povezana bridom ako i samo ako je $u_1 u_2 \in E(G)$ i $v_1 v_2 \in E(H)$.*



Slika 3.2: Primjer Kartezijevog produkta grafova G i H

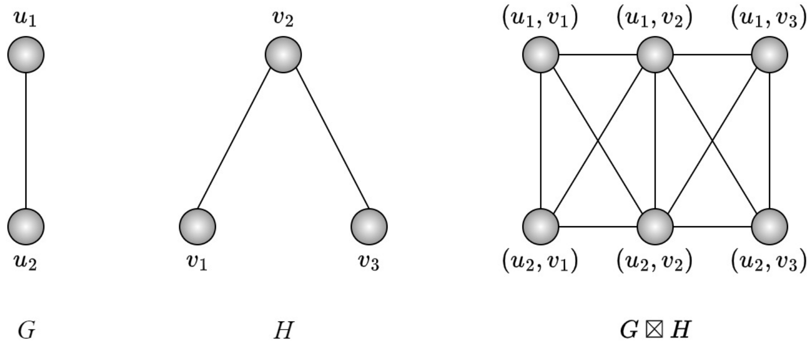


Slika 3.3: Primjer direktnog produkta grafova G i H

Definicija 3.16 ***Jaki produkt*** *grafova G i H, u oznaci $G \boxtimes H$, je graf za kojeg vrijedi $V(G \boxtimes H) = V(G) \times V(H)$ i $E(G \boxtimes H) = E(G \Box H) \cup E(G \times H)$.*

Autori R. Hammack, W. Imrich i S. Klavžar su u svojem radu *Handbook of Product Graphs (second edition)* opazili da su projekcije[1] grafova $G \Box H$, $G \times H$, $G \boxtimes H$ slabi homomorfizmi.

[1]Funkcije $p_1 : V(G) \times V(H) \to V(G)$, $p_2 : V(G) \times V(H) \to V(H)$ definirane sa $p_1(u, v) = u$, $p_2(u, v) = v$, za svaki $(u, v) \in V(G) \times V(H)$ redom nazivamo prva i druga projekcija.



Slika 3.4: Primjer jakog produkta grafova G i H

Definicija 3.17 ***Udaljenost slabih homomorfizama*** *$f, g : G \to H$, u oznaci $m_G(f, g)$, definiramo na sljedeći način:*

$$m_G(f, g) = \min\{d_H(f(u), g(u)) : u \in V(G)\}.$$

Pojam udaljenosti slabih homomorfizama koristit ćemo u poglavlju 4 za uvođenje različitih varijanti raspona grafa.

Napomena 3.18 *Primijetimo da ako je G povezan, onda vrijedi $m_G(f, g) \leq \operatorname{diam}(H)$. Ako G nije povezan, onda je $m_G(f, g) = \infty$.*

Lema 3.19 *Neka je G povezan graf i $f, g : G \to H$ surjektivni slabi homomorfizmi. Tada vrijedi sljedeće:*

$$m_G(f, g) \leq \operatorname{rad}(H).$$

Dokaz. Neka je G povezan graf i $f, g : G \to H$ surjektivni slabi homomorfizmi. Neka je $u \in V(H)$ vrh takav da vrijedi $\operatorname{ecc}(u) = \operatorname{rad}(H)$. Kako je f surjektivno preslikavanje, to postoji vrh $v \in V(G)$ takav da je $f(v) = u$. Slijedi $d_H(f(u), g(u)) \leq \operatorname{rad}(H)$ što implicira $m_G(f, g) \leq \operatorname{rad}(H)$. ∎

Definicija 3.20 *Neka je G proizvoljan graf i H graf takav da vrijedi $V(H) \subseteq V(G) \times V(G)$. Definiramo $\varepsilon_G(H) = \min\{d_G(u, v) : (u, v) \in V(H)\}$.*

Poglavlje 4

Raspon

Ovo poglavlje preuzeto je iz [1].

U ovom poglavlju uvodimo šest različitih varijanti raspona danog grafa: jaki bridni raspon, jaki vršni raspon, direktni bridni raspon, direktni vršni raspon, Kartezijev bridni raspon i Kartezijev vršni raspon. Dokazat ćemo da se svaki raspon može dobiti iz odgovarajućeg produkta grafova. Vrijednost raspona grafa možemo interpretirati kao maksimalnu sigurnu udaljenost koju dva igrača mogu držati obilazeći graf sa danim pravilima kretanja. Važno je naglasiti sljedeće:

1. U vršnoj varijanti raspona, oba igrača moraju posjetiti sve vrhove grafa barem jednom.

2. U bridnoj varijanti raspona, oba igrača moraju proći kroz sve bridove barem jednom (to povlači da moraju posjetiti i sve vrhove).

Prisjetimo se još jednom - pojam *grafa*, osim ako nije drugačije naglašeno, podrazumijeva *jednostavni povezani graf.*

U sljedećoj sekciji uvodimo pojmove jakog, direktnog i Kartezijevog raspona promatrajući pravila kretanja definirana na stranici 10.

4.1 Jaki raspon

Kada promatramo varijante jakog raspona, onda podrazumijevamo da igrači moraju poštivati tradicionalna pravila kretanja.

Definicija 4.1 ***Jaki bridni raspon*** *i* ***jaki vršni raspon*** *grafa H definiramo redom na sljedeći način:*

$$\sigma_E^{\boxtimes}(H) = \max\{m_P(f,g) : f,g : P \to H \text{ su bridno surjektivni slabi homomorfizmi i } P \text{ je put}\}.$$
$$\sigma_V^{\boxtimes}(H) = \max\{m_P(f,g) : f,g : P \to H \text{ su surjektivni slabi homomorfizmi i } P \text{ je put}\}.$$

Prisjetimo se definicije 3.17: $m_P(f,g) = \min\{d_H(f(u),g(u)) : u \in V(P)\}$.

Napomena 4.2 *Primijetimo da su skupovi s desne strane jednakosti u prethodnoj definiciji zapravo neprazni podskupovi skupa $\mathbb{Z}^*$, odozgo omeđeni s* $\text{rad}(H)$. *Dakle, $\sigma_E^{\boxtimes}(H)$ i $\sigma_V^{\boxtimes}(H)$ iz prethodne definicije su dobro definirani.*

Napomena 4.3 *Neka je H proizvoljan graf. Primijetimo da vrijedi sljedeće:*

$$\sigma_E^{\boxtimes}(H) \leq \sigma_V^{\boxtimes}(H) \leq \text{rad}(H).$$

U prethodnoj definiciji put se može zamijeniti povezanim grafom pa možemo zaključiti kako je raspon grafa zapravo primjena raspona kontinuuma definiranog u poglavlju 1, gdje raspon prolazi kroz sve kontinuume, a ne samo kroz lukove (put P).[1]

Upravo nam o tome govori sljedeća propozicija.

[1]Za topološki prostor kažemo da je luk ako je homeomorfna slika jediničnog segmenta [0, 1].

Propozicija 4.4 *Neka je H proizvoljan graf. Tada jaki vršni raspon i jaki bridni raspon grafa H možemo redom definirati na sljedeći način:*

$$\sigma_V^{\boxtimes}(H) = \max\{m_G(f,g) : f,g : G \to H \text{ su surjektivni slabi homomorfizmi i } G \text{ je povezan}\},$$

$$\sigma_E^{\boxtimes}(H) = \max\{m_G(f,g) : f,g : G \to H \text{ su bridno surjektivni slabi homomorfizmi i } G \text{ je povezan}\}.$$

Dokaz. Definiramo skupove A i B na sljedeći način:

$$A = \{m_P(f,g) : f,g : P \to H \text{ su surjektivni slabi homomorfizmi i } P \text{ je put}\},$$

$$B = \{m_G(f,g) : f,g : G \to H \text{ su surjektivni slabi homomorfizmi i } G \text{ je povezan graf}\}.$$

Put je ujedno i povezan graf pa očito vrijedi $A \subseteq B$ što implicira $\max A \leq \max B$. Trebamo još dokazati da vrijedi $\max A \geq \max B$.

Neka je G proizvoljan povezani graf i $f,g : G \to H$ surjektivni slabi homomorfizmi. Želimo pokazati da postoji put P i surjektivni slabi homomorfizmi $f', g' : P \to H$ takvi da je $m_P(f', g') = m_G(f,g)$.

Neka je $W = (w_0, w_1, \ldots, w_k)$ proizvoljna šetnja grafa H koja prolazi svim njegovim vrhovima, pri čemu vrijedi $w_i w_{i+1} \in E(G)$, za svaki $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Neka je P put u grafu H sa skupom vrhova $\{p_0, \ldots, p_k\}$, pri čemu vrijedi $p_i p_{i+1} \in E(P)$, za svaki $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Neka je $h : P \to G$ preslikavanje definirano sa $h(p_i) = w_i$, za svaki $i \in \{0, \ldots, k\}$.

Uočimo da su $f \circ h$ i $g \circ h$ surjektivni slabi homomorfizmi sa P u H za koje vrijedi $m_P(f \circ h, g \circ h) = \min\{d_H(f(h(u)), g(h(u))) : u \in V(P)\}$.

Uočimo, $m_P(f \circ h, g \circ h) = m_G(f,g) = \min\{d_H(f(u), g(u)) : u \in V(G)\}$.

Time smo pokazali da vrijedi prva jednakost. Dokaz druge jednakosti ide analogno, osim što šetnja W neće prolaziti svim vrhovima, već svim bridovima grafa G. ■

Sljedeća dva teorema tvrde da je prilikom određivanja jakog raspona grafa H dovoljno promatrati povezane podgrafove Z produkta $H \boxtimes H$ i projekcije $p_1, p_2 : H \boxtimes H \to H$. Posebno, možemo smatrati da je $Z \subseteq H \boxtimes H$ podgraf induciran skupom svih vrhova (u, v) takvih da se u nekom trenutku igre na grafu H, Alice nalazi na vrhu u, a Bob na vrhu v. $p_1(Z)$ tada predstavlja podgraf of H koji se sastoji od vrhova koje je posjetila Alice, a $p_2(Z)$ predstavlja podgraf of H koji se sastoji od vrhova koje je posjetio Bob. $\varepsilon_H(Z)$ definiran u definiciji 3.20 tada predstavlja **minimalnu udaljenost** Alice i Boba.

Teorem 4.5 *Neka je H proizvoljan graf. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\sigma_V^{\boxtimes}(H) = \max\{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \boxtimes H \text{ } i \text{ } p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)\}.$$

Dokaz. Slično kao u dokazu propozicije 4.4, želimo pokazati da vrijedi jednakost $\max A = \max B$, pri čemu su skupovi A i B definirani na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
A &= \{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \boxtimes H \text{ i } p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)\},\\
B &= \{m_G(f, g) : f, g : G \to H \text{ su surjektivni}\\
&\qquad \text{slabi homomorfizmi i } G \text{ je povezan graf}\}.
\end{aligned}$$

Da bi dokazali jednakost $\max A = \max B$, dokazat ćemo jednakost skupova A i B. Prisjetimo se, projekcije p_1 i p_2 su preslikavanja sa $H \boxtimes H$ u H. Dokažimo najprije inkluziju $A \subseteq B$. Neka je $a \in A$ proizvoljan i $Z \subseteq_C H \boxtimes H$ takav da vrijedi $p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)$. Stavimo $\varepsilon_H(Z) = a$. Neka je $G = Z$, $f = p_1|_G$, $g = p_2|g$. Tada vrijedi sljedeće:

1. G je povezani graf,

2. $f, g : G \to H$ su surjektivni slabi homomorfizmi,

3. $$\begin{aligned} m_G(f,g) &= \min\{d_H(f(u), g(u)) : u \in V(G)\} \\ &= \min\{d_H(p_1(u), p_2(u)) : u \in V(Z)\} \\ &= \min\{d_H(x,y) : (x,y) \in V(Z)\} \\ &= \varepsilon_H(Z) \\ &= a. \end{aligned}$$

Dakle, $a \in B$ pa zaista vrijedi $A \subseteq B$.

Dokažimo sada inkluziju $B \subseteq A$. Neka je $b \in B$ proizvoljan. Neka su $f, g : G \to H$ surjektivni slabi homomorfizmi takvi da je $m_G(f,g) = b$. Definirajmo preslikavanje $\psi : V(G) \to V(H \boxtimes H)$ sa $\psi(u) = (f(u), g(u))$, za svaki $u \in V(G)$. Želimo pokazati da vrijede sljedeće dvije tvrdnje:

a) ψ je dobro definiran slabi homomorfizam.

b) Za $Z = \psi(G)$, vrijedi $p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)$.

Dokažimo najprije tvrdnju a). Prisjetimo se definicije 3.7 slabog homomorfizma - ako je $uv \in E(G)$, onda je $f(u)f(v) \in E(H)$ ili $f(u) = f(v)$, $u, v \in V(G)$. Očito vrijedi $\psi(u) \in V(H \boxtimes H)$, za $u \in V(G)$. Neka je $uv \in E(G)$ proizvoljan. Mogu nastupiti sljedeća četiri slučaja:

1. $f(u) = f(v)$ i $g(u) = g(v)$
   Očito je $\psi(u) = \psi(v)$.

2. $f(u)f(v) \in E(G)$ i $g(u) = g(v)$
   $\psi(u) = (f(u), g(u)) = (f(u), g(v))$, $\psi(v) = (f(v), g(v))$
   Dakle, $\psi(u)\psi(v) \in E(H \boxtimes H)$.

3. $f(u) = f(v)$ i $g(u)g(v) \in E(G)$
   Analogno kao 2. slučaj.

4. $f(u)f(v), g(u)g(v) \in E(G)$.

   Analogno kao 2.slučaj.

Dakle ψ je dobro definiran slabi homomorfizam sa G u $H \boxtimes H$.
Dokažimo sada tvrdnju b). Neka je $Z = \psi(G)$. Iz definicije skupa B slijedi da je G povezani graf što implicira da je Z povezani podgraf produkta $H \boxtimes H$. Neka je $x \in V(H)$ proizvoljan. f i g su surjektivni slabi homomorfizmi pa postoje $u, v \in V(G)$ takvi da vrijedi $f(u) = g(v) = x$. Tada vrijedi $p_1(f(u), g(u)) = x$ i $p_2(f(v), g(v)) = x$. Ako se prisjetimo definicije 3.20, slijedi:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_H(Z) &= \min\{d_H(x, y) : (x, y) \in V(Z)\} \\
&= \min\{d_H(f(u), g(u)) : u \in V(G)\} \\
&= m_G(f, g) \\
&= b.
\end{aligned}$$

Dakle, $b \in A$ pa zaista vrijedi $B \subseteq A$.
Dokazali smo jednakost skupova A i B pa slijedi $\max A = \max B$. Koristeći propoziciju 4.4, tvrdnja teorema je u potpunosti dokazana. ■
Drugim riječima, teorem 4.5 tvrdi da jaki vršni raspon povezanog grafa H možemo definirati kao maksimalnu udaljenost među svim minimalnim udaljenostima dvaju igrača na nekom grafu Z koji je povezani podskup produkta $H \boxtimes H$. Uočimo da uvjet $p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)$ osigurava da igrači moraju posjetiti sve vrhove početnog grafa H.

Teorem 4.6 *Neka je H proizvoljan graf. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\sigma_E^{\boxtimes}(H) = \max\{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \boxtimes H \ i \ p_1(Z) = p_2(Z) = H\}.$$

Dokaz. Slično kao u dokazu prethodnog teorema 4.5, dokazujemo jednakost sljedećih skupova:

$$\begin{aligned} A &= \{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \boxtimes H \text{ i } p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)\}, \\ B &= \{m_G(f, g) : f, g : G \to H \text{ su surjektivni} \\ &\qquad \text{slabi homomorfizmi i } G \text{ je povezan graf}\}. \end{aligned}$$

Dokaz inkluzije $A \subseteq B$ je analogan dokazu iste inkluzije u teoremu 4.5, osim što umjesto uvjeta $p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)$ imamo uvjet $p_1(Z) = p_2(Z) = H$, koji osigurava da su igrači prošli preko svih bridova početnog grafa H.

Dokažimo sada inkluziju $B \subseteq A$. Neka je $b \in B$ proizvoljan. Neka je G povezan graf i neka su $f, g : G \to H$ bridno surjektivni slabi homomorfizmi takvi da je $m_G(f, g) = b$. Neka je Z graf za kojeg vrijedi sljedeće:

a) $V(Z) = \{(f(u), g(u)) : u \in V(G)\}$.

b) Za svaka dva vrha $(u, v), (u', v') \in Z$, vrijedi $(u, v)(u', v') \in E(Z)$ ako i samo ako je zadovoljen jedan od sljedećih uvjeta:

   1. $uu' \in E(H)$ i $v = v'$,
   2. $vv' \in E(H)$ i $u = u'$,
   3. $uu', vv' \in E(H)$.

Definirajmo preslikavanje $\psi : V(G) \to V(Z)$ sa $\psi(u) = (f(u), g(u))$, za sve $u \in V(G)$. Uočimo da je ψ bridno surjektivni slabi homomorfizam sa G u

Z pa je $Z = \psi(G)$. Kako je G povezan, prema lemi 3.13 slijedi da je i Z također povezan graf. Dakle, $Z \subseteq_C H \boxtimes H$. Slijedi:

$$\begin{aligned}\varepsilon_H(Z) &= \min\{d_H(x,y) : (x,y) \in V(Z)\}\\ &= \min\{d_H(f(u), g(u)) : u \in V(G)\}\\ &= m_G(f,g)\\ &= b.\end{aligned}$$

Dakle, $b \in A$ pa zaista vrijedi $B \subseteq A$.
Dokazali smo jednakost skupova A i B pa slijedi $\max A = \max B$. Koristeći propoziciju 4.4, tvrdnja teorema je u potpunosti dokazana. ∎

Napomena 4.7 *Ako je iz konteksta jasno o kojem grafu je riječ, skraćeno ćemo pisati* $\sigma_V^{\boxtimes}, \sigma_E^{\boxtimes}$.

4.2 Direktni raspon

Kada promatramo varijante direktnog raspona, onda podrazumijevamo da igrači moraju poštivati aktivna pravila kretanja. Ova pravila možemo opisati tzv. usklađenim slabim homomorfizmima čija definicija slijedi u nastavku.

Definicija 4.8 *Neka su* $f, g : G \to H$ *slabi homomorfizmi. Kažemo da su* f *i* g ***usklađeni slabi homomorfizmi*** *ako za svaki* $uv \in E(G)$ *vrijedi sljedeće:*

$$f(u)f(v) \in E(H) \text{ ako i samo ako } g(u)g(v) \in E(H).$$

Definicija 4.9 *Neka je H proizvoljan graf.* ***Direktni bridni raspon*** *i* ***direktni vršni raspon*** *grafa H definiramo redom na sljedeći način:*

$$\begin{aligned}\sigma_E^\times(H) = \max\{m_P(f,g) : f,g : P \to H \ &\textit{su bridno surjektivni}\\ &\textit{usklađeni slabi homomorfizmi i } P \textit{ je put}\},\\ \sigma_V^\times(H) = \max\{m_P(f,g) : f,g : P \to H \ &\textit{su surjektivni}\\ &\textit{usklađeni slabi homomorfizmi i } P \textit{ je put}\}.\end{aligned}$$

Napomena 4.10 *Neka je H proizvoljan graf. Primijetimo da vrijedi sljedeće:*

$$\sigma_E^\times(H) \le \sigma_V^\times(H) \le \mathrm{rad}(H).$$

Napomena 4.11 *Primijetimo da direktni bridni raspon i direktni vršni raspon grafa H možemo redom definirati na sljedeći način:*

$$\begin{aligned}\sigma_E^\times(H) = \max\{m_G(f,g) : f,g : G \to H \ &\textit{su bridno surjektivni}\\ &\textit{usklađeni slabi homomorfizmi i } G \textit{ je povezan}\},\\ \sigma_V^\times(H) = \max\{m_G(f,g) : f,g : G \to H \ &\textit{su surjektivni}\\ &\textit{usklađeni slabi homomorfizmi i } G \textit{ je povezan}\}.\end{aligned}$$

Ovo se može dokazati na analogan način kao i propozicija 4.4.

Sljedeći teorem tvrdi da prilikom određivanja direktnog raspona grafa H, nije potrebno promatrati sve odgovarajuće slabe homomorfizme svih mogućih povezanih grafova G, već je dovoljno promatrati samo povezane podgrafove produkta $H \times H$ i projekcije $p_1, p_2 : H \times H \to H$.

Teorem 4.12 *Neka je H proizvoljan graf. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\begin{aligned}\sigma_E^\times(H) &= \max\{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \times H \ \textit{i } p_1(Z) = p_2(Z) = H\},\\ \sigma_V^\times(H) &= \max\{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \times H \ \textit{i } p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)\}.\end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu teorema 4.5 i 4.6, a razlika je jedino u konstrukciji odgovarajućih povezanih podgrafova, u ovom slučaju, produkta $H \times H$. ■

Napomena 4.13 *Ako je iz konteksta jasno o kojem grafu je riječ, skraćeno ćemo pisati* $\sigma_V^\times, \sigma_E^\times$.

4.3 Kartezijev raspon

Kada promatramo varijante Kartezijevog raspona, onda podrazumijevamo da igrači moraju poštivati lijena pravila kretanja. Ova pravila možemo opisati tzv. suprotnim slabim homomorfizmima čija definicija slijedi u nastavku.

Definicija 4.14 *Neka su* $f, g : G \to H$ *slabi homomorfizmi. Kažemo da su* f *i* g ***suprotni slabi homomorfizmi*** *ako za svaki* $uv \in E(G)$ *vrijedi sljedeće:*

$$f(u)f(v) \in E(H) \text{ ako i samo ako } g(u) = g(v).$$

Primijetimo razliku u definiciji usklađenih i suprotnih slabih homomorfizama - kod usklađenih vrijedi $g(u)g(v) \in E(H)$, a kod suprotnih $g(u) = g(v)$.

Definicija 4.15 *Neka je* H *proizvoljan graf.* ***Kartezijev bridni raspon*** *i* ***Kartezijev vršni raspon*** *grafa* H *definiramo redom na sljedeći način:*

$$\begin{aligned}
\sigma_E^\square(H) = \max\{m_P(f,g) : f, g : P \to H \text{ su bridno surjektivni} \\
\text{suprotni slabi homomorfizmi i } P \text{ je put}\}, \\
\sigma_V^\square(H) = \max\{m_P(f,g) : f, g : P \to H \text{ su surjektivni suprotni} \\
\text{slabi homomorfizmi i } P \text{ je put}\}.
\end{aligned}$$

Napomena 4.16 *Neka je H proizvoljan graf. Primijetimo da vrijedi sljedeće:*

$$\sigma_E^{\square}(H) \leq \sigma_V^{\square}(H) \leq \mathrm{rad}(H).$$

Napomena 4.17 *Primijetimo da Kartezijev bridni raspon i Kartezijev vršni raspon možemo redom definirati na sljedeći način:*

$$\begin{aligned} \sigma_E^{\square}(H) = \max\{m_G(f,g) : f,g : G \to H \ &\textit{su bridno surjektivni} \\ &\textit{suprotni slabi homomorfizmi i } G \textit{ je povezan}\}, \\ \sigma_V^{\square}(H) = \max\{m_G(f,g) : f,g : G \to H \ &\textit{su surjektivni suprotni} \\ &\textit{slabi homomorfizmi i } G \textit{ je povezan}\}. \end{aligned}$$

Ovo se može dokazati na analogan način kao i propozicija 4.4.

Sljedeći teorem tvrdi da prilikom određivanja Kartezijevog raspona grafa H, nije potrebno promatrati sve odgovarajuće slabe homomorfizme svih mogućih povezanih grafova G, već je dovoljno promatrati samo povezane podgrafove produkta $H \square H$ i projekcije $p_1, p_2 : H \square H \to H$.

Teorem 4.18 *Neka je H proizvoljan graf. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\begin{aligned} \sigma_E^{\square}(H) &= \max\{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \square H \ \textit{i}\ p_1(Z) = p_2(Z) = H\}, \\ \sigma_V^{\square}(H) &= \max\{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \square H \ \textit{i}\ p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)\}. \end{aligned}$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu teorema 4.5 i 4.6, a razlika je jedino u konstrukciji odgovarajućih povezanih podgrafova, u ovom slučaju, produkta $H \square H$. ■

Napomena 4.19 *Ako je iz konteksta jasno o kojem grafu je riječ, skraćeno ćemo pisati* $\sigma_V^{\square}, \sigma_E^{\square}$.

Poglavlje 5

0-raspon i grafovi sa jednakim vršnim i bridnim rasponom

Ovo poglavlje je, izuzev slike 5.2, preuzeto je iz [1].
U ovom poglavlju ćemo se fokusirati na grafove sa rasponom jednakim nuli, tzv. 0-rasponom. Kod takvih grafova, promatrajući bilo koju varijantu raspona spomenutu u prethodnom poglavlju, nije moguće u svakom vremenskom trenutku održati pozitivnu sigurnu udaljenost. Također ćemo konstruirati beskonačnu familiju grafova čiji su vršni i bridni raspon jednaki. Karakterizirat ćemo svaku varijantu 0-raspona (jaki, direktni, Kartezijev) i nakon dokaza, kojeg provodimo konstrukcijom odgovarajućeg podgrafa sa (bridno) surjektivnim projekcijama, rezultat teorema ćemo također iskazati i u terminima Alice i Boba i njihovih šetnji grafom.

5.1 Karakterizacije jakog raspona

Teorem 5.1 *Neka je H proizvoljan graf. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $\sigma_E^{\boxtimes}(H) = 0$

2. $\sigma_V^{\boxtimes}(H) = 0$

3. $|V(H)| = 1$

Dokaz. Implikacije $|V(H)| = 1 \implies \sigma_E^{\boxtimes}(H) = 0$ i $|V(H)| = 1 \implies \sigma_V^{\boxtimes}(H) = 0$ su trivijalne. Dokažimo da iz $\sigma_E^{\boxtimes}(H) = 0$ ($\sigma_V^{\boxtimes}(H) = 0$) slijedi $|V(H)| = 1$.

Neka je $\sigma_E^{\boxtimes}(H) = 0$ ($\sigma_V^{\boxtimes}(H) = 0$). Želimo dokazati da vrijedi $|V(H)| = 1$. Dokaz provodimo kontradikcijom. Pretpostavimo da je $V(H) > 1$. Neka su $u, v \in V(H)$ proizvoljni takvi da je $uv \in E(H)$.

1. $|V(H)| = 2$, tj. $V(H) = \{u, v\}$

   Neka je graf Z definiran sa $V(Z) = \{(u, v), (v, u)\}$, $E(Z) = \{(u, v)(v, u)\}$. Ako se prisjetimo definicije 3.20, slijedi $\varepsilon_H(Z) = 1$. Prema karakterizaciji jakog vršnog raspona i jakog bridnog raspona iz teorema 4.5 i 4.6, slijedi $\sigma_E^{\boxtimes}(H) > 0$, $\sigma_V^{\boxtimes}(H) > 0$. No, to je kontradikcija sa početnom pretpostavkom $\sigma_E^{\boxtimes}(H) = 0$ ($\sigma_V^{\boxtimes}(H) = 0$).

2. $|V(H)| > 2$

   Neka je graf G definiran na sa $V(G) = \{u_0, v_0\}$, $E(G) = \{u_0v_0\}$, pri čemu je $u_ov_0 \in E(H)$. Neka su $H_1, \ldots, H_m$ komponente grafa $H - G$. Kako je $V(H) \neq \{u_0, v_0\}$, slijedi $m > 0$. Za svaki $i \in \{1, \ldots, m\}$, definirajmo skupove U_i i V_i na sljedeći način:

   $$U_i = N(u_0) \cap V(H_i),$$
   $$V_i = N(v_0) \cap V(H_i).$$

   Prisjetimo se, $N(u)$ je oznaka za skup svih susjeda vrha u. Definiramo graf Z kako slijedi.

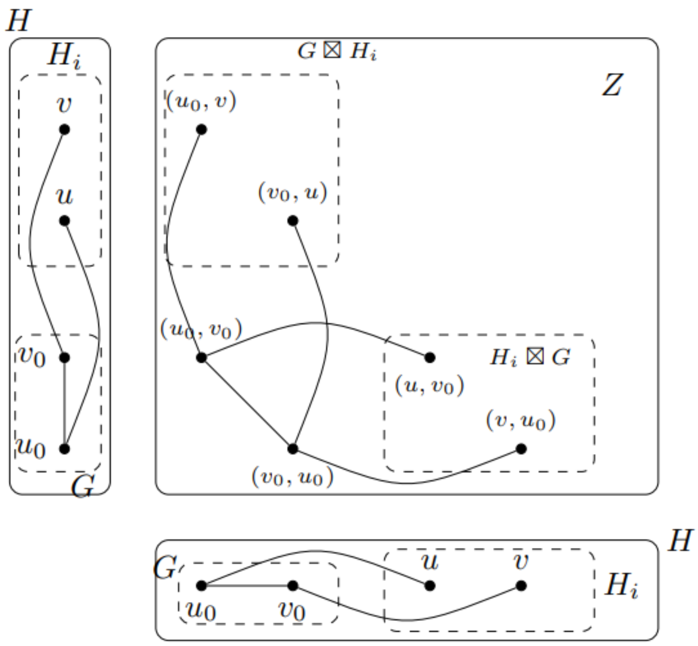
$$V(Z) = \left(\bigcup_{i=1}^{m} V(H_i \boxtimes G)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} V(G \boxtimes H_i)\right) \cup \{(u_0, v_0), (v_0, u_0)\},$$

$$E(Z) = \left(\bigcup_{i=1}^{m} E(H_i \boxtimes G)\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{m} E(G \boxtimes H_i)\right) \cup \{(u_0, v_0)(v_0, u_0)\} \cup$$

$$\bigcup_{i=1}^{m}\left(\left(\bigcup_{u \in U_i}\{(u, v_0)(u_0, v_0)\}\right) \cup \left(\bigcup_{v \in V_i}\{(v, u_0)(v_0, u_0)\}\right)\right) \cup$$

$$\bigcup_{i=1}^{m}\left(\left(\bigcup_{u \in U_i}\{(v_0, u)(v_0, u_0)\}\right) \cup \left(\bigcup_{v \in V_i}\{(u_0, v)(u_0, v_0)\}\right)\right).$$

Na sljedećoj slici 5.1 je prikazan primjer dodavanja vrhova i bridova grafu Z za proizvoljnu komponentu H_i. Z je očito povezani graf i vrijedi $p_1(Z) = p_2(Z) = H$, odnosno $p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)$.



Slika 5.1: Vizualizacija konstrukcije grafa Z

Za svaki $u \in V(H)$ vrijedi $(u, v) \notin V(Z)$ pa slijedi $\varepsilon_H(Z) > 0$. To povlači $\sigma_E^{\boxtimes}(H) > 0$, $\sigma_V^{\boxtimes}(H) > 0$. No, to je kontradikcija sa početnom pretpostavkom $\sigma^{\boxtimes}(H) = 0$ ($\sigma_V^{\boxtimes}(H) = 0$).

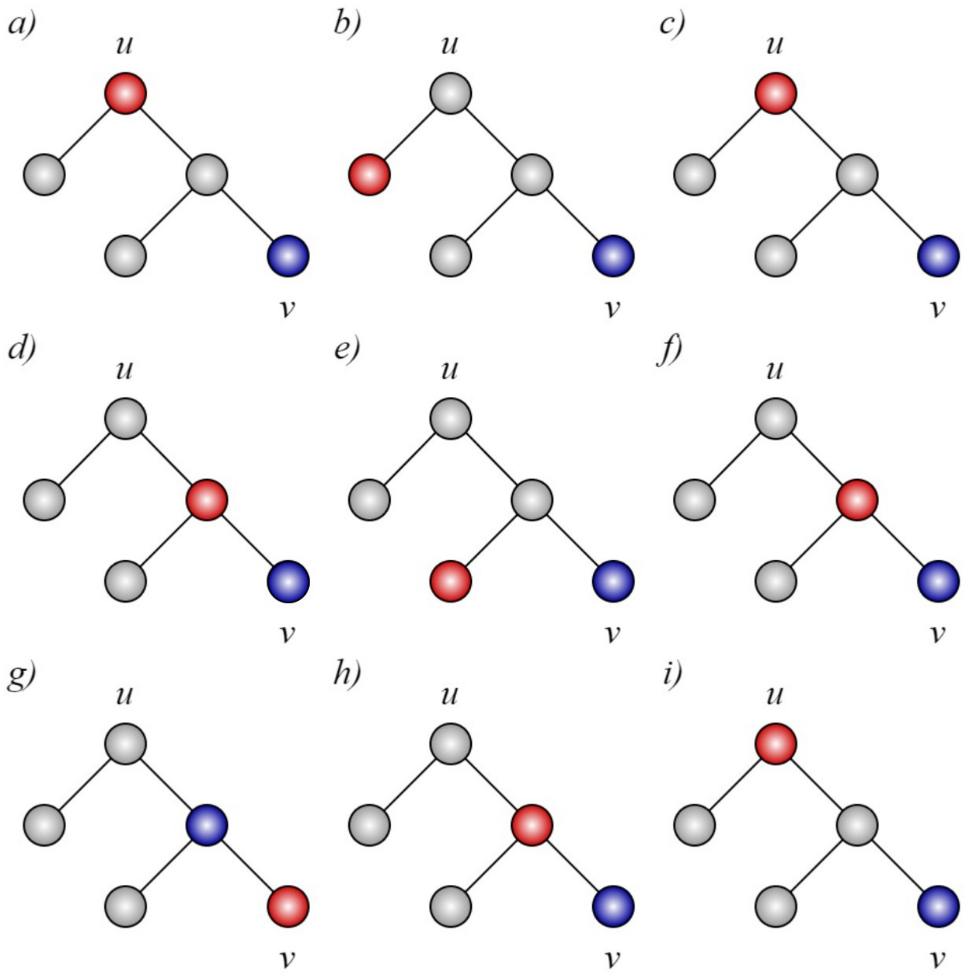
■

Da bi iskazali rezultat teorema, točnije dio dokaza kada promatramo $|V(H)| > 2$, u terminima šetnje Alice i Boba grafom, najprije se prisjetimo da kod jakog raspona promatramo tradicionalna pravila kretanja. Pokazat ćemo da Alice i Bob mogu posjetiti sve vrhove i bridove grafa bez da se istovremeno nađu na istom vrhu. To ćemo napraviti tako što ćemo promatrati njihova kretanja po grafu H tako da vrijedi $\sigma_V^{\boxtimes}(H) \neq 0$ i $\sigma_E^{\boxtimes}(H) \neq 0$. Neka su početne pozicije (vrhovi grafa) Alice i Boba dani sa u i v tako da je $u \neq v$. Alice može posjetiti sve vrhove grafa H redoslijedom određenim BFS[1] algoritmom, s obzirom na početni vrh u. Za svaki vrh w u BFS poretku, Alice se pomiče sa u na w. Zatim se za svaki susjed x vrha w, Alice pomiče na x pa opet na w. Na kraju se vraća u početni vrh u. Alice je sada posjetila sve bridove pa tako i sve vrhove grafa H. Ako se Alice nađe u situaciji da mora prijeći u vrh na kojem se nalazi Bob, odnosno ako se nalaze na susjednim vrhovima, onda će istovremeno zamijeniti vrhove prolazeći preko zajedničkog brida. Ako nema potrebe za zamjenom vrhova, onda Bob ne mijenja vrh dok Alice obilazi graf. Kada Alice završi svoje putovanje grafom, isto napravi i Bob poštujući pravilo zamjene vrhova. Očito su Alice i Bob u svakom vremenskom trenutku na udaljenosti barem 1 pa slijedi $\sigma_V^{\boxtimes}(H) > 0$ i $\sigma_E^{\boxtimes}(H) > 0$.

Na slici 5.2 je primjer grafa na kojem je ilustrirana šetnja od Alice koju smo upravo opisali. Crveni i plavi krug redom predstavljaju trenutnu poziciju od Alice i Boba. Primijetimo da u koraku f), odnosno g) dolazi do istovremene

[1] Više informacija o Breadth First Search algoritmu dostupno je na stranici `https://www.hackerearth.com/practice/algorithms/graphs/breadth-first-search/tutorial/` [Pristup stranici: 23. ožujka 2024.]

zamjene vrhova Alice i Boba.



Slika 5.2: Ilustracija šetnje grafom opisane u dokazu teorema 5.1

Sljedeći teorem daje nam još jednu karakterizaciju jakog vršnog i jakog bridnog raspona.

Teorem 5.2 *Ako graf H ima samo jedan vrh ili je* $\mathrm{rad}(H) = 1$*, onda vrijedi:*

$$\sigma_V^{\boxtimes}(H) = \sigma_E^{\boxtimes}(H).$$

Dokaz. Ako je H graf sa samo jednim vrhom, onda tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema 5.1. Neka vrijedi $\mathrm{rad}(H) = 1$. Tada iz teorema 5.1 slijedi

$\sigma_V^{\boxtimes}(H) \neq 0$ i $\sigma_E^{\boxtimes}(H) \neq 0$ jer graf radijusa 1 mora imati barem dva vrha. Iz činjenice da je $\mathrm{rad}(H) = 1$ i napomene 4.3 slijedi $\sigma_V^{\boxtimes}(H) = \sigma_E^{\boxtimes}(H) = 1$. ■

Napomena 5.3 *Primijetimo da za put P_n, za proizvoljan n, vrijedi $\sigma_E^{\boxtimes}(P_n) = \sigma_V^{\boxtimes}(P_n)$. Štoviše, za $n > 1$ vrijedi $\sigma_E^{\boxtimes}(P_n) = \sigma_V^{\boxtimes}(P_n) = 1$.*

Napomena 5.4 *Za $n > 3$ vrijedi* $\mathrm{rad}(P_n) > 1$.

Prethodne dvije napomene su nam dokaz da postoje grafovi čiji su jaki vršni raspon i jaki bridni raspon jednaki, ali pritom im radijus nije jednak 1. Time smo pokazali da obrat teorema 5.2 ne vrijedi.

Napomena 5.5 *Ako smo u stablu T posjetili sve vrhove, onda smo ujedno posjetili i sve bridove pa vrijedi $\sigma_E^{\boxtimes}(T) = \sigma_V^{\boxtimes}(T)$.*

5.2 Karakterizacije direktnog raspona

Teorem 5.6 *Neka je H proizvoljan graf. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $\sigma_E^{\times}(H) = 0$
2. $\sigma_V^{\times}(H) = 0$
3. $|V(H)| = 1$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu teorema 5.1, osim u slučaju kada je $|V(H)| > 2$. Taj slučaj nećemo formalno dokazati kao u teoremu 5.1, nego ćemo dokaz provesti u terminima Alice i Boba i njihovih šetnji grafom. Pokazat ćemo da oni mogu posjetiti sve vrhove i bridove grafa bez da se istovremeno nađu na istom vrhu i da pritom vrijedi $\sigma_E^{\times}(H) \neq 0$ i $\sigma_V^{\times}(H) \neq 0$. Princip šetnje je sličan onome opisanom na stranici 30, s malom promjenom.

Najprije se prisjetimo da kod direktnog raspona promatramo aktivna pravila kretanja. Sada će početne pozicije (početni vrhovi) Alice i Boba biti susjedni vrhovi, tj. ako je vrh u početna pozicija od Alice, a vrh v početna pozicija od Boba, onda mora vrijediti $e = uv \in E(H)$. Obilazak grafa H Alice radi na isti način kako je opisano ranije. Bob, koji prije nije mijenjao vrh dok se Alice kretala, sada alternira između vrhova u i v jer je riječ o aktivnim pravilima kretanja. Ako se dogodi situacija u kojoj Alice i Bob žele posjetiti isti vrh (u ili v), to rade vraćajući se unatrag do početnih pozicija i tek tada mijenjaju vrhove. Nakon što Alice posjeti sve vrhove i bridove grafa H, oboje se vraćaju unatrag do početnih pozicija i njihove uloge su opet zamijenjene. Bob na isti način može posjetiti sve vrhove i briodve grafa H bez da susretne Alice na istom vrhu. To implicira $\sigma_E^\times(H) \neq 0$ i $\sigma_V^\times(H) \neq 0$. ■

Teorem 5.7 *Ako graf H ima samo jedan vrh ili je* $\mathrm{rad}(H) = 1$*, onda vrijedi:*

$$\sigma_V^\times(H) = \sigma_E^\times(H).$$

Dokaz. Ako je H graf sa samo jednim vrhom, onda tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema 5.6. Neka vrijedi $\mathrm{rad}(H) = 1$. Iz prethodnog teorema slijedi $\sigma_V^\times(H) \neq 0$ i $\sigma_E^\times(H) \neq 0$. Iz činjenice da je $\mathrm{rad}(H) = 1$ i napomene 4.10 slijedi $\sigma_V^\times(H) = \sigma_E^\times(H) = 1$. ■

Napomena 5.8 *Analogno kao u napomeni 5.5, zaključujemo da za stablo T vrijedi* $\sigma_V^\times(T) = \sigma_E^\times(T)$.

5.3 Karakterizacije Kartezijevog raspona

Dokaz sljedećeg teorema izostavljamo no isti se može pronaći u radu [1] na stranici 14 (*Theorem 4.7*).

Teorem 5.9 *Neka je H proizvoljan graf. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $\sigma_E^{\square}(H) = 0$

2. $\sigma_V^{\square}(H) = 0$

3. *Postoji $n \in \mathbb{Z}^+$ takav da je $H = P_n$*

Teorem 5.10 *Ako je graf H put ili je $\mathrm{rad}(H) = 1$, onda vrijedi:*

$$\sigma_E^{\square}(H) = \sigma_V^{\square}(H).$$

Dokaz. Ako je H put, tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema 5.9. Neka je H graf koji nije put i neka vrijedi $\mathrm{rad}(H) = 1$. Iz teorema 5.9 tada slijedi $\sigma_V^{\square}(H) \neq 0$ i $\sigma_E^{\square}(H) \neq 0$. Iz činjenice da je $\mathrm{rad}(H) = 1$ i napomene 4.16 slijedi $\sigma_E^{\square}(H) = \sigma_V^{\square}(H) = 1$. ■

Napomena 5.11 *Analogno kao u napomeni 5.5, zaključujemo da za stablo T vrijedi $\sigma_E^{\square}(T) = \sigma_V^{\square}(T)$.*

Beskonačne familije grafova čiji su vršni i bridni raspon jednaki, a koje smo spominjali na samom početku ovog poglavlja, upravo su dane teoremima 5.2, 5.7, 5.10.

Poglavlje 6

Algoritam za izračun maksimalne sigurne udaljenosti

Ovo poglavlje preuzeto je iz [1].

U ovom poglavlju pokazat ćemo da se izračun maksimalne sigurne udaljenosti koju dva igrača mogu držati u svakom vremenskom trenutku može izvršiti u polinomijalnom vremenu[1], bez obzira koja pravila kretanja promatramo. Algoritmi su napisani pod pretpostavkom da je cilj unaprijed poznat - igrači moraju posjetiti ili sve vrhove ili sve bridove danog grafa.

Sljedeći algoritam za dani ulaz (H, D, R), provjerava postoji li na grafu H sigurna udaljenost jednaka barem D koju igrači mogu zadržati obilazeći sve vrhove ili sve bridove grafa H, poštujući pravila kretanja R.

[1] Algoritam je rješiv u polinomijalnom vremenu ako je broj koraka, potrebnih za izvršavanje algoritma za dani ulaz, jednak $O(n^k)$, pri čemu je n složenost ulaza, a $k \in \mathbb{Z}^*$. (Preuzeto sa `https://mathworld.wolfram.com/PolynomialTime.html`).

Algoritam 6.1

Ulaz: graf H, sigurna udaljenost D, pravila kretanja R

Izlaz: *true* ako igrači mogu držati maksimalnu udaljenost barem D obilazeći vrhove ili bridove grafa H poštujući pravila kretanja R, inače *false*

Naziv algoritma: SigurnaUdaljenost (H, D, R)

`// Stvaranje odgovarajućeg produkta ovisno o skupu pravila kretanja`

if $R =$ *tradicionalna pravila kretanja* **then**
    $G = H \boxtimes H$
else if $R =$ *aktivna pravila kretanja* **then**
    $G = H \times H$
else
    $G = H \Box H$

`// Stvaranje odgovarajućeg podgrafa induciranog skupom vrhova` I

$I = \emptyset$
foreach $(u, v) \in V(G)$ **do**
    if $d_H(u, v) \geq D$ **then**
        $I = I \cup \{(u, v)\}$
$G_I =< I >_G$

`// Provjera postoji li komponenta grafa` G_I `koja se projicira na` $V(H)$ `ili` H

foreach *komponenta* C *grafa* G_I **do**
    if C *se projicira na* $V(H)$ *ili* H **then**
        return *true*
    return *false*

Sljedeći algoritam, koristeći prethodni algoritam 6.1, za dani ulaz (H, R) vraća vrijednost raspona grafa H u skladu sa pravilima kretanja R.

Algoritam 6.2

Ulaz: graf H, pravila kretanja R

Izlaz: maksimalna sigurna udaljenost koju dva igrača mogu zadržati obilazeći sve vrhove ili sve bridove grafa H u skladu sa pravilima kretanja R

Naziv algoritma: Raspon (H, R)

```
for i = rad(H) to 1 do
    if SigurnaUdaljenost (H, i, R) == true then
        return i
return 0
```

I. Banič i A. Taranenko su u svojem radu [1] (stranice 16,17) dokazali da se prethodni algoritmi mogu izvršiti u polinomijalnom vremenu. Svoj rad zaključili su sa nekoliko otvorenih problema koje zainteresirani čitatelj može pronaći u [1] (stranica 18).

Kroz sljedeća dva poglavlja, 7 i 8, upoznajemo se sa pristupom rada [2].

Poglavlje 7

Maksimalna sigurna udaljenost i vršni rasponi

Ovo poglavlje je, izuzev primjera 7.5, preuzeto iz [2].

7.1 Terminologija

Kretanja igrača na nekom grafu G, opisat ćemo funkcijama sa skupa $\mathbb{N}_l = \{1, \dots, l\}$, koji predstavlja pozicije igrača, u skup $V(G)$. Iz prijašnjih poglavlja jasno je da igrači mogu prelaziti iz vrha u vrh jedino ako su ta dva vrha susjedna. U narednim poglavljima koristimo pravila kretanja definirana na stranici 10. Definicije vršnih raspona, drugačije od onih navedenih u radu [1], mogu se pronaći u sljedećoj sekciji 7.2.
Prisjetimo se još jednom - pojam *grafa*, osim ako nije drugačije naglašeno, podrazumijeva *jednostavni povezani graf.*

Definicija 7.1 *Neka je G graf i $l \in \mathbb{N}$. Kažemo da je surjektivna funkcija $f_l : \mathbb{N}_l \to V(G)$* ***l-obilazak*** *na G, ako vrijedi $f(i)f(i+1) \in E(G)$ za svaki $i \in \{1, \dots, l-1\}$.*

Definicija 7.2 *Neka je G graf i $l \in \mathbb{N}$. Kažemo da je surjektivna funkcija $f_l : \mathbb{N}_l \to V(G)$* ***lijeni l-obilazak*** *na G, ako vrijedi $f(i)f(i+1) \in E(G)$ ili $f(i) = f(i+1)$ za svaki $i \in \{1, \ldots, l-1\}$.*

Primijetimo da definicija lijenog l-obilaska podsjeća na definiciju 3.7 slabog homomorfizma.

Napomena 7.3 *Svaki l-obilazak na G ujedno je i lijeni l-obilazak na G.*

Napomena 7.4 *Za lijeni l-obilazak f_l mora vrijediti $l \geq |V(G)|$ jer u suprotnom f_l ne bi bila surjekcija.*

Primjer 7.5 *Neka je graf G zadan sa $V(G) = \{u_1, u_2, u_3, u_4\}$ te $E(G) = \{u_1u_2, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_1\}$. Neka je l=5 i definirajmo f_l na G na sljedeći način: $f_l(1) = u_1, f_l(2) = u_2, f_l(3) = u_3, f_l(4) = u_4, f_l(5) = u_4$. Očito vrijedi $f_l(1)f_l(2), f_l(2)f_l(3), f_l(3)f_l(4) \in E(G)$ i $f_l(4) = f_l(5)$. Dakle, f_l je lijeni l-obilazak na G.*

Propozicija 7.6 *Neka je G graf. Tada postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da postoji funkcija $f_l : \mathbb{N}_l \to V(G)$ koja je lijeni l-obilazak na G i za svaki $l' > l$ postoji lijeni l'-obilazak na G.*

Dokaz. G je povezani graf pa očito postoji šetnja kroz sve vrhove što povlači da postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da postoji funkcija $f_l : \mathbb{N}_l \to V(G)$ koja je lijeni l-obilazak na G. Neka je $l' > l$. Funkcija $f'_l : \mathbb{N}'_l \to V(G)$ za koju je $f'_l(i) = f_l(i)$ za svaki $i \in \{1, \ldots, l\}$ i $f'_l(i) = f_l(l)$ za $l < i \leq l'$ je lijeni l'-obilazak na G. ∎

Slično kao u definiciji 3.17 udaljenosti slabih homomorfizama definiramo udaljenost lijenih l-obilazaka.

Definicija 7.7 *Neka je G graf.* ***Udaljenost lijenih l-obilazaka*** *f i g definiramo na sljedeći način:*

$$m_G(f,g) = \min\{d_G(f(i), g(i)) : i \in \mathbb{N}_l\}.$$

Za lijene l-obilaske vrijedi sličan rezultat kao kod slabih homomorfizama koji je dokazan u lemi 3.19.

Lema 7.8 *Neka je G graf i neka su f i g lijeni l-obilasci na G. Tada vrijedi sljedeće:*

$$m_G(f,g) \leq \operatorname{rad}(G)$$

Dokaz. Neka je G graf i neka su f i g lijeni l-obilasci na G. Neka je $v \in V(G)$ vrh za koji vrijedi $\operatorname{ecc}(v) = \operatorname{rad}(G)$. Kako je f surjektivna funkcija, to postoji $i \in \mathbb{N}_l$ takav da je $f(i) = v$. No, tada vrijedi $d_G(f(i), g(i)) \leq \operatorname{rad}(G)$ pa tvrdnja slijedi. ∎

7.2 Definicije maksimalne sigurne udaljenosti

Promatrat ćemo samo vršne raspone i definirati maksimalnu sigurnu udaljenost koju dva igrača mogu držati prilikom posjećivanja svih vrhova grafa u skladu sa danim pravilima kretanja. Prisjetimo se da su oznake za jaki vršni, direktni vršni i Kartezijev vršni raspon redom jednake $\sigma_V^{\boxtimes}(H)$, $\sigma_V^{\times}(H)$, $\sigma_V^{\square}(H)$. U poglavlju 4 naglasili smo da kretanja igrača prilikom promatranja jakog, direktnog, odnosno Kartezijevog raspona redom poštuju tradicionalna, aktivna, odnosno lijena pravila kretanja. To naravno i dalje vrijedi pa neće biti posebno naglašeno kod sljedećih definicija.

7.2.1 Jaki vršni raspon

Neka je G graf i $l \in \mathbb{N}$ takav da postoji barem jedan l-obilazak na G. Prema propoziciji 7.6, jedan takav sigurno postoji. Definiramo sljedeće:

$$M_l^{\boxtimes} = \max\{m_G(f,g) : f \text{ i } g \text{ su lijeni } l\text{-obilasci na } G\}.$$

Postojanje $M_l^{\boxtimes}$ slijedi iz leme 7.8.

Primijetimo da smo u definiciji 4.1 jakog vršnog raspona koristili surjektivne slabe homomorfizme, a sada koristimo lijene l-obilaske.

Definicija 7.9 *Neka je G graf i $S \subseteq \mathbb{N}$ takav da sadrži sve $l \in \mathbb{N}$ za koje postoji barem jedan lijeni l-obilazak na G. Definiramo* ***maksimalnu sigurnu udaljenost*** *na sljedeći način:*

$$M^{\boxtimes}(G) = \max\{M_l^{\boxtimes} : l \in S\}.$$

Napomena 7.10 *Uočimo da je skup S iz prethodne definicije neprazan zbog propozicije 7.6.*

Sljedeći korak je dokazati da je definicija 7.9 maksimalne sigurne udaljenosti jednaka definiciji jakog vršnog raspona definiranog u teoremu 4.5.

Teorem 7.11 *Neka je G graf. Tada vrijedi sljedeća jednakost:*

$$M^{\boxtimes}(G) = \sigma_V^{\boxtimes}(G).$$

Dokaz. Neka je G graf i S skup iz definicije 7.9. Neka su skupovi A i B definirani na sljedeći način:

$A = \{M_l^{\boxtimes} : l \in S\}$,

$B = \{\varepsilon_G(H) : H \subseteq_C G \boxtimes G \text{ tako da vrijedi } p_1(V(H)) = p_2(V(H)) = V(G)\}$.

Prisjetimo se, $\varepsilon_G(H)$ smo definirali na stranici 15 u definiciji 3.20. Za dokazati jednakost $\max A = \max B$, dokazat ćemo jednakost skupova A i B.

Dokažimo najprije inkluziju $A \subseteq B$. Neka je $r \in A$ proizvoljan. Neka su f i g lijeni l-obilasci takvi da je $m_G(f,g) = r$. Neka je graf H definiran sa:

$$V(H) = \{(f(i), g(i)) : i \in \mathbb{N}_l\},$$
$$E(H) = \{f(i)g(i) : i \in \mathbb{N}_l\}.$$

Zbog definicije funkcija f i g slijedi da je H zaista povezani podgraf jakog produkta $G \boxtimes G$ te da vrijedi $p_1(V(H)) = p_2(V(H)) = V(G)$. Slijedi $\varepsilon_G(H) = r$, tj. $r \in B$. Dakle, $A \subseteq B$.

Dokažimo sada inkluziju $B \subseteq A$. Neka je $r \in B$ proizvoljan. Konstruirat ćemo šetnju kroz vrhove grafa H koja će nam omogućiti da definiramo lijene l-obilaske na G i zaključimo da je $r \in A$. Neka je $(u_1, v_1) \in V(H)$ proizvoljan. H je povezani graf pa prema teoremu 2.16 on ima razapinjuće stablo sa korijenom (u_1, v_1). Konstruiramo šetnju kroz sve vrhove grafa H počevši od korijena (u_1, v_1) i korake šetnje redom označavamo brojevima $1, \ldots, l$. Dakle, u koraku i nalazimo se u vrhu (u_i, v_i). Primijetimo da za i i j takve da je $i \neq j$ vrhovi (u_i, v_i) i (u_j, v_j) mogu biti jednaki. l ne mora nužno biti najmanji mogući broj koraka potreban za obilazak svih vrhova grafa H, ali vrijedi $V(H) = \{(u_i, v_i) : i \in \mathbb{N}_l\}$. Definirajmo funkcije $f, g : \mathbb{N}_l \to V(G)$ sa $f(i) = u_i$, $g(i) = v_i$. Iz definicije jakog produkta i pretpostavke $p_1(V(H)) = p_2(V(H) = V(G)$, slijedi da su f i g lijeni l-obilasci na G. Nadalje, vrijedi sljedeće:

$$\begin{aligned} m_G(f,g) &= \min\{d_G(f(i), g(i)) : i \in \mathbb{N}_l\} \\ &= \min\{d_G(u_i, v_i) : (u_i, v_i) \in V(H)\} \\ &= \varepsilon_G(H) \end{aligned}$$

Dakle, $m_G(f,g) = r$, tj. $r \in A$.

Dokazali smo jednakost skupova A i B pa slijedi $\max A = \max B$. ■

7.2.2 Direktni vršni raspon

Neka je G graf i $l \in \mathbb{N}$ takav da postoji barem jedan l-obilazak na G. Prema propoziciji 7.6, jedan takav sigurno postoji. Definiramo sljedeće:

$$M_l^{\times} = \max\{m_G(f,g) : f \text{ i } g \text{ su } l\text{-obilasci na } G\}$$

Postojanje $M_l^{\times}$ slijedi iz leme 7.8.
Primijetimo da smo u definiciji 4.9 direktnog vršnog raspona koristili usklađene surjektivne slabe homomorfizme, a sada koristimo l-obilaske.

Definicija 7.12 *Neka je G graf i $D \subseteq \mathbb{N}$ takav da sadrži sve $l \in \mathbb{N}$ za koje postoji barem jedan l-obilazak na G. Definiramo **maksimalnu sigurnu udaljenost** na sljedeći način:*

$$M^{\times}(G) = \max\{M_l^{\times} : l \in D\}.$$

Teorem 7.13 *Neka je G graf. Tada vrijedi sljedeća jednakost:*

$$M^{\times}(G) = \sigma_V^{\times}(G).$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu teorema 7.11. ■

7.2.3 Kartezijev vršni raspon

Definicija 7.14 *Neka je G graf te $f, g : \mathbb{N}_l \to V(G)$ lijeni l-obilasci na G. Kažemo da su f i g **suprotni lijeni l-obilasci** na G ako vrijedi sljedeće:*

$$f(i)f(i+1) \in E(G) \text{ ako i samo ako } g(i) = g(i+1), \text{ za svaki } i \in \mathbb{N}_{l-1}.$$

Uočimo analogiju prethodne definicije sa definicijom 4.14 suprotnih slabih homomorfizama.
Neka je G graf i $l \in \mathbb{N}$ takav da postoji barem jedan par suprotnih lijenih l-obilazaka na G. Prema propoziciji 7.6, jedan takav par sigurno postoji. Definiramo sljedeće:

$$M_l^{\square} = \max\{m_G(f,g) : f \text{ i } g \text{ su suprotni lijeni } l\text{-obilasci na } G\}.$$

Postojanje $M_l^{\square}$ slijedi iz leme 7.8.

Primijetimo da smo u definiciji 4.15 Kartezijevog vršnog raspona koristili suprotne slabe homomorfizme, a sada koristimo suprotne lijene l-obilaske.

Definicija 7.15 *Neka je G graf i $C \subseteq \mathbb{N}$ takav da sadrži sve $l \in \mathbb{N}$ za koje postoji par suprotnih lijenih l-obilazaka na G. Definiramo* ***maksimalnu sigurnu udaljenost*** *na sljedeći način:*

$$M^{\square}(G) = \max\{M_l^{\square} : l \in C\}.$$

Teorem 7.16 *Neka je G graf. Tada vrijedi sljedeća jednakost:*

$$M^{\square}(G) = \sigma_V^{\square}(G).$$

Dokaz. Dokaz je analogan dokazu teorema 7.11. ■

Definicije maksimalnih sigurnih udaljenost $M^{\boxtimes}(G)$, $M^{\times}(G)$, $M^{\square}(G)$ koje smo naveli u ovom poglavlju su, prema teoremima 7.11, 7.13, 7.16, redom ekvivalentne definicijama vršnih raspona $\sigma_V^{\boxtimes}(G)$, $\sigma_V^{\times}(G)$, $\sigma_V^{\square}(G)$, definiranim u poglavlju 4. Sukladno tome, u sljedećim poglavljima koristimo ozanke $\sigma_V^{\boxtimes}(G)$, $\sigma_V^{\times}(G)$, $\sigma_V^{\square}(G)$, ali pritom misleći na definicije navedene u ovom poglavlju u kojima se umjesto slabih homomorfizama spominju l-obilasci.

7.3 Relacije između vršnih raspona

Propozicija 7.17 *Neka je G graf. Vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$\sigma_V^{\boxtimes}(G) \geq \max\{\sigma_V^{\times}(G), \sigma_V^{\square}(G)\}.$$

Dokaz. Iz definicije 7.12 i teorema 7.13, slijedi da postoje l-obilasci f i g na G takvi da je $m_G(f,g) = \sigma_V^{\times}(G)$. Prema napomeni 7.3 slijedi da su f i g

lijeni l-obilasci na G pa iz definicije 7.9 i teorema 7.11 slijedi $\sigma_V^{\boxtimes}(G) \geq \sigma_V^{\times}(G)$. Analogno za $\sigma_V^{\boxtimes}(G) \geq \sigma_V^{\square}(G)$. $\blacksquare$

Tvrdnja sljedećeg teorema jedan je od glavnih rezultata autora rada [2].

Teorem 7.18 *Neka je G graf. Vrijedi sljedeća nejednakost:*

$$|\sigma_V^{\times}(G) - \sigma_V^{\square}(G)| \leq 1.$$

Dokaz. Ako je graf G trivijalan [1], onda je $\sigma_V^{\times}(G) = \sigma_V^{\square}(G) = 0$ pa nejednakost očito vrijedi.

Neka je G netrivijalni graf. Nejednakost $|\sigma_V^{\times}(G) - \sigma_V^{\square}(G)| \leq 1$ dokazujemo tako što ćemo pokazati da vrijede sljedeće dvije nejednakosti:

1. $\sigma_V^{\times}(G) - \sigma_V^{\square}(G) \leq 1$
2. $\sigma_V^{\square}(G) - \sigma_V^{\times}(G) \leq 1$

Dokažimo najprije da vrijedi 1. nejednakost, tj. da vrijedi $\sigma_V^{\square}(G) \geq \sigma_V^{\times}(G) - 1$. Neka je $\sigma_V^{\times}(G) = r$. Prema definiciji 7.12, postoje l-obilasci f i g na G takvi da za svaki $i \in \mathbb{N}_l$ vrijedi $d_G(f(i), g(i)) \geq r$. Definirajmo funkcije $f', g' : \mathbb{N}_{2l-1} \to V(G)$ na sljedeći način:

$$f'(i) = f\left(\left\lceil \frac{i+1}{2} \right\rceil\right),$$
$$g'(i) = g\left(\left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil\right).$$

(*) Tvrdimo da su f' i g' suprotni lijeni l-obilasci na G te da za svaki $i \in \mathbb{N}_{2l-1}$ vrijedi $d_G(f'(i), g'(i)) \geq r - 1$.

[1] Graf je trivijalan ako ima samo jedan vrh i nema niti jedan brid.

Za svaki neparni i, tj. za $i = 2k-1$, $k \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$f'(i)f'(i+1) = f\left(\left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil\right) f\left(\left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil\right) = f(k)f(k+1) \in E(G), \tag{1}$$

$$g'(i) = g\left(\left\lceil \frac{2k-1}{2} \right\rceil\right) = g(k) = g\left(\left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil\right) = g'(i+1), \tag{2}$$

$$d(f'(i), g'(i)) = d\left(f\left(\left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil\right), g\left(\left\lceil \frac{2k-1}{2} \right\rceil\right)\right) = d(f(k), g(k)) \geq r. \tag{3}$$

Analogno, za svaki parni i, tj. za $i = 2k$, $k \in \mathbb{N}$ vrijedi sljedeće:

$$f'(i) = f\left(\left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil\right) = f(k+1) = f\left(\left\lceil \frac{2k+2}{2} \right\rceil\right) = f'(i+1), \tag{4}$$

$$g'(i)g'(i+1) = g\left(\left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil\right) g\left(\left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil\right) = g(k)g(k+1) \in E(G), \tag{5}$$

$$d(f'(i), g'(i)) = d\left(f\left(\left\lceil \frac{2k+1}{2} \right\rceil\right), g\left(\left\lceil \frac{2k}{2} \right\rceil\right)\right) = d(f(k+1), g(k)). \tag{6}$$

Iz jednakosti (1), (2), (4), (5) i definicije 7.2, slijedi da su f' i g' lijeni $(2l-1)$-obilasci na G. Uočimo da za svaki $i \in \mathbb{N}_{2l-1}$ vrijede sljedeće logičke implikacije:

$$f'(i)f'(i+1) \in E(G) \implies g'(i) = g'(i+1),$$
$$g'(i)g'(i+1) \in E(G) \implies f'(i) = f'(i+1).$$

Dakle, f' i g' su zaista suprotni lijeni l-obilasci na G.

Uočimo da za svaki $k \in \mathbb{N}_{l-1}$ vrijedi $f(k)f(k+1) \in E(G)$ pa vrijedi sljedeća nejednakost:

$$d(f(k+1), g(k)) \geq d(f(k), g(k)) - 1 \geq r - 1. \tag{7}$$

Sada iz (3), (6) i (7) slijedi tražena nejednakost: $d(f'(i), g'(i)) \geq r - 1$.

Ovime smo dokazali tvrdnju (*), odnosno 1. nejednakost.

Dokažimo sada da vrijedi 2. nejednakost, tj. da vrijedi $\sigma_V^{\times}(G) \geq \sigma_V^{\square}(G) - 1$. Neka je $\sigma_V^{\square}(G) = r$. Prema definiciji 7.15, slijedi da postoje suprotni lijeni l-obilasci f i g na G takve da za svaki $i \in \mathbb{N}_l$ vrijedi $d(f(i), g(i)) \geq r$. Kako su f i g suprotni lijeni l-obilasci, to možemo definirati preslikavanje $X : \mathbb{N}_{l-1} \to \{1, 2\}$ na sljedeći način:

$$X(i) := \begin{cases} 1, & \text{ako je } f(i)f(i+1) \in E(G) \\ 2, & \text{ako je } g(i)g(i+1) \in E(G) \end{cases}$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor}$, promatrat ćemo parove $(X(2k-1), X(2k))$. Ako je $l-1$ neparan, vrijednost $X(l-1)$ ne sparujemo. Očito će vrijednosti promatranih parova biti elementi skupa $Z = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\}$. Neka je a broj pojavljivanja parova $(1, 2)$ i $(2, 1)$. Definiramo funkcije $f', g' : \mathbb{N}_{l-a} \to V(G)$, za koje ćemo pokazati da su $(l-a)$-obilasci na G, sljedećim algoritmom:

Algoritam 7.19

$f'(1) = f(1)$
$g'(1) = g(1)$
$b = 0$
$i = 1$
for $k \in \mathbb{N}_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor}$ **do**
    if $(X(2k-1), X(2k)) = (1, 1)$ **then**
        $i = i + 2$
        $f'(i-1) = f(i-1+b)$
        $f'(i) = f(i+b)$
        $g'(i-1) = x$ `// ` x ` je proizvoljan susjed od ` $g(i+b)$
        $g'(i) = g(i+b)$
        `// Uočimo da vrijedi sljedeće: ` $f'(i-1)f'(i), g'(i-1)g'(i) \in E(G)$

// Nastavak algoritma

for $k \in \mathbb{N}_{\lfloor \frac{l-1}{2} \rfloor}$ **do**

  $\vdots$

  if $(X(2k-1), X(2k)) = (2,2)$ **then**

    $i = i + 2$

    $f'(i-1) = x$ // x je proizvoljan susjed od $f(i+b)$

    $f'(i) = f(i+b)$

    $g'(i-1) = g(i-1+b)$

    $g'(i) = g(i+b)$

    // Uočimo da vrijedi sljedeće: $f'(i-1)f'(i), g'(i-1)g'(i) \in E(G)$

  if $(X(2k-1), X(2k)) \in \{(1,2),(2,1)\}$ **then**

    $i = i + 1$

    $b = b + 1$

    $f'(i) = f(i+b)$

    $g'(i) = g(i+b)$

  if $l-1$ *neparan* **then**

    $i = i + 1$

    if $X(l-1) = 1$ **then**

      $f'(i) = f(i+b)$

      $g'(i) = x$ // x je proizvoljan susjed od $g(i+b)$

    if $X(l-1) = 2$ **then**

      $f'(i) = y$ // y je proizvoljan susjed od $f(i+b)$

      $g'(i) = g(i+b)$

Uočimo da je na kraju algoritma $b = a$, pri čemu je $0 \leq a \leq \left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor$ te da je u zadnjem koraku $i = l - a$. Dakle, domena funkcija f' i g' je skup $\mathbb{N}_{l-a}$.
(**) Tvrdimo da su f' i g' $(l-a)$-obilasci na G te da za svaki $i \in \mathbb{N}_{l-a}$ vrijedi $d_G(f'(i), g'(i)) \geq r - 1$.
Dokažimo da je f' $(l-a)$-obilazak na G, tj. da vrijedi $f'(i)f'(i+1) \in E(G)$ za svaki $i \in \mathbb{N}_{l-a-1}$. Neka je $j \in \mathbb{N}_{l-a-1}$ proizvoljan i neka je b_0 vrijednost parametra b u koraku u kojem je $f'(j)$ definiran. Očito je $b_0 \in \{0, \dots, a\}$.
Ako je riječ o paru $(1, 1)$ ili $(2, 2)$, tj. ako je $f'(j+1)$ definiran u istom paru kao $f'(j)$, tada je očito $f'(j)f'(j+1) \in E(G)$.
Promatrajmo slučaj kada je $f'(j)$ definiran u jednom paru, a $f'(j+1)$ u drugom ili u zadnjem nesparenom $X(l-1)$. Neka je $f'(j) \in Z$. Tada je $f'(j+1) = f(j+b_0)$. Promotrimo sljedeća četiri slučaja:

1. $f'(j+1)$ je definiran u paru $(1, 1)$
   Tada je $f'(j+1) = f(j+1+b_0)$. Vrijedi $f(j+b_0)f(j+1+b_0) \in E(G)$ pa slijedi $f'(j)f'(j+1) \in E(G)$.

2. $f'(j+1)$ je definiran u paru $(1, 2)$
   Tada je $f'(j+1) = f(j+1+b_0+1) = f(j+1+b_0)$ pa slijedi $f'(j)f'(j+1) \in E(G)$.

3. $f'(j+1)$ je definiran u paru $(2, 1)$
   Tada je $f'(j+1) = f(j+1+b_0+1)$. Također vrijedi $f(j+1+b_0) = f(j+b_0)$ i $f(j+1+b_0)f(j+1+b_0+1) \in E(G)$ pa slijedi $f'(j)f'(j+1) \in E(G)$.

4. $f'(j+1)$ je definiran u paru $(2, 2)$
   Tada je $f'(j+1)$ definiran kao susjed od $f'(j+2) = f(j+1+b_0+1)$. Vrijedi $f(j+1+b_0+1) = f(j+1+b_0) = f(j+b_0) = f'(j)$ pa slijedi $f'(j)f'(j+1) \in E(G)$.

Dakle, f' je zaista $(l-a)$-obilazak na G. Analogno se može dokazati za g'. Ovime smo dokazali tvrdnju (**), odnosno 2. nejednakost.
Iz dokaza 1. i 2. nejednakosti, slijedi tvrdnja teorema. ■
Kao što smo komentirali rezultat teorema 5.1, tako ćemo i sada promotriti drugi dio dokaza prethodnog teorema 7.18 u terminima Alice i Boba i njihovih šetnji grafom. U tom slučaju, kada nam nije od tolike važnosti formalno definirati odgovarajuće l-obilaske, koristit ćemo izraze: *lijena šetnja, šetnja, suprotna lijena šetnja.*

Napomena 7.20 *Izrazi lijena šetnja, šetnja i suprotna lijena šetnja redom odgovaraju tradicionalnim, aktivnim i lijenim pravilima kretanja.*

Prisjetimo se da kretanja igrača reprezentiramo funkcijama (l-obilascima) koje predstavljaju lokacije igrača u određenom koraku - domena $\mathbb{N}_l$ predstavlja redni broj koraka, a kodomena $V(G)$ predstavlja vrh na kojem se igrač nalazi u trenutnom koraku.
Kada su Alice i Bob u suprotnim lijenim šetnjama, odnosno kada poštuju lijena pravila kretanja, točno jedan od njih obilazi graf dok drugi stoji na istom vrhu i obratno. Dakle, ako imamo njihove lijene šetnje koje omogućuju držanje sigurne udaljenosti r, onda možemo dobiti njihov redoslijed obilaženja grafa. Kada konstruiramo njihove šetnja poštujući aktivna pravila kretanja, počinjemo od one pozicije koju bi imali da promatramo lijena pravila kretanja, i zatim obilazimo graf redoslijedom kojim su se kretali. Mogu nastupiti dva slučaja:

1. Prvo se pomaknuo jedan igrač, a zatim drugi.
   Ove dvije kretnje dogoditi će se istovremeno, ako je riječ o aktivnim pravilima kretanja. Igrači će završiti u onoj poziciji u kojoj bi bili da smo promatrali lijena pravila kretanja, još uvijek na sigurnoj udaljenosti r.

2. Jedan igrač se pomaknuo dvaput zaredom, dok je drugi dva koraka zaredom ostao na istom vrhu.

   Ovakvu kretnju možemo izraziti u terminima aktivnih pravila kretanja - onaj igrač koji je ostao na istom vrhu će se pomaknuti na susjedni vrh i vratiti natrag. Moguće je da se sigurna udaljenost smanji za 1, ali svakako neće biti manja od $r - 1$.

Poglavlje 8

Rasponi nekih klasa grafova

Ovo poglavlje preuzeto je iz [2].

Koristit ćemo pojam reznog brida, spomenutog u definiciji 2.24, kako bi problem određivanja vrijednosti raspona grafa sveli na određivanje vrijednosti raspona njegovih podgrafova određenim reznim bridovima. Rezultat koji ćemo predložiti, mogao bi voditi ka algoritmu za izračun gornje granice vrijednosti raspona, koji bi za neke grafove imao više smisla nego radijus.

Propozicija 8.1 *Neka je G graf sa barem tri vrha, tj. $|V(G)| \geq 3$. Neka je xy rezni brid u G te G_1 i G_2 podgrafovi grafa G inducirani komponentama $G - xy$[1]. tako da je $x \in V(G_1)$ te $y \in V(G_2)$. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\sigma_V^{\boxtimes}(G) \leq \max\{\mathrm{ecc}_{G_1}(x), \mathrm{ecc}_{G_2}(y)\}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo u terminima Alice i Boba i njihovih šetnji grafom. Ovisno o poziciji sa koje počinje šetnju, razlikujemo tri slučaja:

1. Oba igrača započinju šetnju iz nekog vrha u G_1.

   U nekom trenutku oboje će morati posjetiti vrhove grafa G_2, a to mogu

[1] Graf $G - xy$ je graf dobiven uklanjanjem brida xy iz grafa G.

jedino ako prođu reznim bridom xy. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da Alice prva prelazi u G_2. Kada Alice dođe do vrha x, Bob se i dalje nalazi u G_1 pa je u tom slučaju njihova udaljenost manja ili jednaka $\mathrm{ecc}_{G_1}(x)$ pa tvrdnja vrijedi.

2. Oba igrača započinju šetnju iz nekog vrha iz G_2.

   Analogno kao u prethodnom slučaju, kada se jedan od igrača nalazi u vrhu y, drugi se i dalje nalazi u G_2 pa je u tom slučaju njihova udaljenost manja ili jednaka $\mathrm{ecc}_{G_2}(y)$ pa tvrdnja vrijedi.

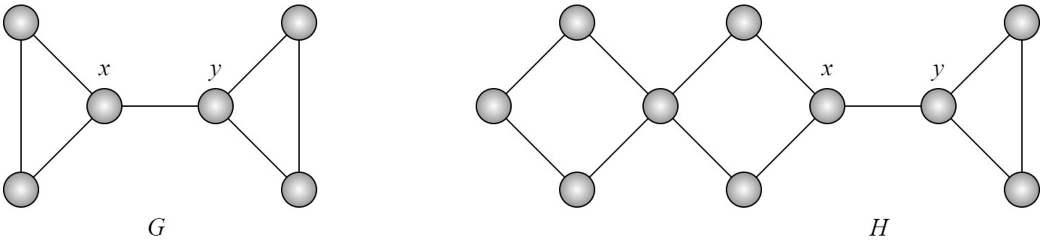
3. Igrači započinju šetnju u vrhovima različitih podgrafova G_1 i G_2.

   Bez smanjena općenitosti pretpostavimo da Alice započinje svoju šetnju u G_1, a Bob u G_2. Oboje će morati proći reznim bridom xy kako bi došli do drugog podgrafa. Može se dogoditi sljedeće:

   - Možemo završiti u situaciji opisanoj u slučaju 1
   - Možemo završiti u situaciji opisanoj u slučaju 2
   - Oba igrača će istovremeno preći u drugi podgraf (Alice u G_2, a Bob u G_1), a to znači da će se u istom koraku Alice i Bob nalaziti u vrhu x i y redom. U tom trenutku, njihova udaljenost je jednaka 1 te vrijedi $1 \leq \max\{\mathrm{ecc}_{G_1}(x), \mathrm{ecc}_{G_2}(y)\}$. To vrijedi jer iz pretpostavke da je $|V(G)| \geq 3$ slijedi da je barem jedan od grafova G_1 i G_2 netrivijalan.

Time je propozicija u potpunosti dokazana. ■

Prisjetimo se napomene 4.3 koja kaže da vrijedi $\sigma_V^{\boxtimes}(G) \leq \mathrm{rad}(G)$. Prirodno je usporediti vrijednost $\max\{\mathrm{ecc}_{G_1}(x), \mathrm{ecc}_{G_2}(y)\}$ iz prethodnog teorema sa vrijednošću $\mathrm{rad}(G)$ i zapitati se jesmo li prethodnim teoremom dobili poboljšanje u odnosu na napomenu 4.3. Na sljedećoj slici možemo vidjeti primjer grafova za koje su ove dvije vrijednosti različite, odnosno neusporedive.



Slika 8.1: Primjer grafova koji ilustriraju razliku radijusa grafa i maksimuma ekscentriteta krajeva reznog brida

Uočimo da za graf G vrijedi $\mathrm{rad}(G) = 2$, $\max\{\mathrm{ecc}_{G_1}(x), \mathrm{ecc}_{G_2}(y)\} = 1$, dok za graf H vrijedi $\mathrm{rad}(H) = 3$, $\max\{\mathrm{ecc}_{G_1}(x), \mathrm{ecc}_{G_2}(y)\} = 4$.
Autori rada [2] su se prilikom proučavanja raspona različitih familija grafova uglavnom susretali sa grafovima čiji je direktni vršni raspon veći ili jednak Kartezijevom vršnom rasponu. To ih je potaknulo da pokušaju pronaći familiju grafova za koje se može postići veća sigurna udaljenost promatrajući lijena pravila kretanja, kojih se inače pridržavamo prilikom proučavanja Kartezijevog raspona. Jedna takva familija grafova su tzv. *sunčevi grafovi* čiju definiciju navodimo u nastavku.

Definicija 8.2 *Neka je C_n ciklus sa skupom vrhova $\{v_1, \ldots, v_n\}$. Graf koji se dobije dodavanjem n listova $\{u_1, \ldots, u_n\}$ ciklusu C_n na način da je $u_i v_i$ brid za svaki $i \in \mathbb{N}_n$, nazivamo* ***n-sunčev graf*** *i označavamo sa SC_n.*

Napomena 8.3 *Lako se vidi da vrijedi sljedeće:*

$$|V(SC_n)| = 2n,\ \mathrm{rad}(SC_n) = \mathrm{rad}(C_n) + 1 = \left\lfloor \tfrac{n}{2} \right\rfloor + 1$$

Teorem 8.4 $\sigma_V^{\times}(SC_n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor, \sigma_V^{\boxtimes}(SC_n) = \sigma_V^{\square}(SC_n) = \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$

Dokaz. Neka je SC_n n-sunčev graf iz defincije 8.2. Uočimo da vrijednosti raspona ovise o parnosti broja n pa vrijedi sljedeće:

$$\sigma_v^{\times}(SC_{2k+1}) = k, \sigma_V^{\boxtimes}(SC_{2k+1}) = \sigma_V^{\Box}(SC_{2k+1}) = k+1 \text{ za } k \geq 1,$$
$$\sigma_v^{\times}(SC_{2k}) = \sigma_V^{\boxtimes}(SC_{2k}) = \sigma_V^{\Box}(SC_{2k}) = k \text{ za } k \geq 2.$$

Tvrdnju teorema dokazujemo naprije za SC_{2k+1}.

1. $\sigma_V^{\Box}(SC_{2k+1}) = k+1$

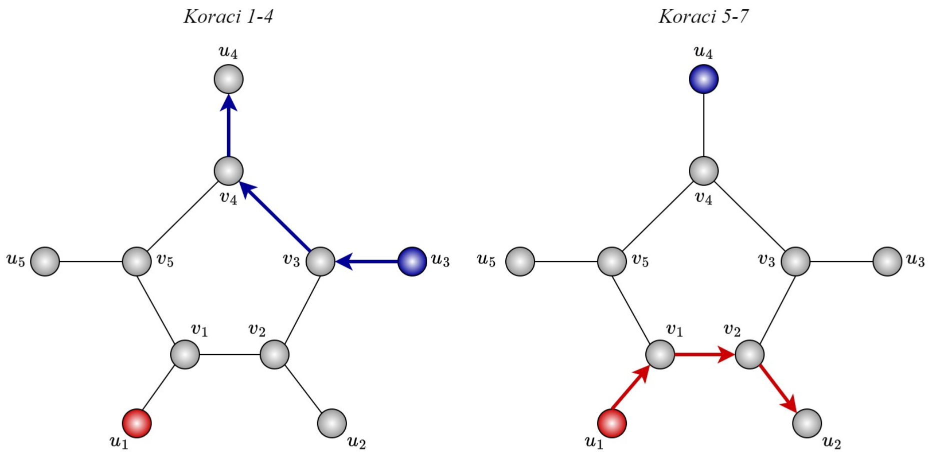
   Dokazujemo u terminima Alice i Boba i njihove šetnje grafom SC_{2k+1} poštujući lijena pravila kretanja držeći udaljenost barem $k+1$.
   Znamo da vrijedi $\sigma_V^{\Box}(SC_{2k+1}) \leq$ [2]$\text{rad}(SC_{2k+1}) = \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor + 1 = k+1$.
   Treba još pokazati da vrijedi $\sigma_V^{\Box}(SC_{2k+1}) \geq k+1$.
   Primijetimo da za svaki list u_i postoje točno dva vrha ciklusa C_{2k+1} koji su od njega udaljeni za $k+1$. Lako se može uočiti da su za $i \neq k+1$ to vrhovi v_m i v_{m+1} pri čemu je $m = (i+k) mod (2k+1)$. Ako je $i = k+1$, onda je riječ o vrhovima v_1 i v_{2k+1}. Sljedećom tablicom ćemo opisati prvih nekoliko koraka od Alice i Boba.

	1	2	3	4	5	6	7
Pozicija od Alice	u_1	u_1	u_1	u_1	v_1	v_2	u_2
Pozicija od Boba	u_{k+1}	v_{k+1}	v_{k+2}	u_{k+2}	u_{k+2}	u_{k+2}	u_{k+2}

Tablica 8.1: Tablica prvih sedam koraka Alice i Boba u grafu SC_{2k+1} držeći udaljenost barem $k+1$ te poštujući lijena pravila kretanja

[2]Slijedi iz napomene 4.16.

Na grafu SC_5 koji slijedi, ilustrirani su ovi koraci pri čemu je $k = 2$. Uočimo da će u koracima koji slijede, u konačnici i Alice i Bob posjetiti sve vrhove grafa SC_5 držeći udaljenost veću ili jednaku $k+1$. Ovime smo dokazali da vrijedi $\sigma_V^{\square}(SC_{2k+1}) \geq k+1$, odnosno da vrijedi $\sigma_V^{\square}(SC_{2k+1}) = k+1$.



Slika 8.2: Prvih sedam koraka Alice (crveno) i Boba (plavo) u grafu SC_5 držeći udaljenost barem 3 te poštujući lijena pravila kretanja

2. $\sigma_V^{\boxtimes}(SC_{2k+1}) = k+1$

   Iz napomena 4.3, 4.10, 4.16 slijedi da su rasponi $\sigma_V^{\boxtimes}(SC_{2k+1}), \sigma_V^{\times}(SC_{2k+1})$ i $\sigma_V^{\square}(SC_{2k+1})$ manji ili jednaki radijusu grafa SC_{2k+1} za koji znamo da je jednak $k+1$ pa koristeći rezultat propozicije 7.17 slijedi $\sigma_V^{\boxtimes}(SC_{2k+1}) = k+1$.

3. $\sigma_V^{\times}(SC_{2k+1}) = k$

   Najprije ćemo dokazati da je $\sigma_V^{\times}(SC_{2k+1}) < k+1$.

   Ako se Alice i Bob u isto vrijeme nalaze na vrhovima ciklusa, njihova maksimalna udaljenost može biti najviše k, zbog $\mathrm{rad}(C_{2k+1}) = k$, tj. udaljenost im je manja od $k+1$. Pretpostavimo sada da igrači mogu cijelo vrijeme držati udaljenost barem $k+1$. Ako Alice i Bob započinju svoju šetnju iz listova, onda će se u sljedećem koraku oboje nalaziti na vrhovima ciklusa. Zaključujemo da jedan od njih mora započeti u nekom od listova u_i, a drugi u nekom od vrhova ciklusa v_i. S obzirom da želimo postići maksimalnu udaljenost, igrači se moraju nalaziti na suprotnim stranama ciklusa. Bez smanjena općenitosti, možemo pretpostaviti da Alice započinje šetnju u listu u_1. Tada Bob započinje svoju šetnju u vrhu v_{k+1} zbog već spomenute maksimalnosti ($d(u_1, v_{k+1}) = k+1$). U sljedećem koraku, Alice ima samo jednu opciju (prijeći u vrh v_1), a Bob ima tri opcije.

a. Ako Bob prijeđe u vrh v_k ili v_{k+2}, tada se oboje nalaze na vrhovima ciklusa.

b. Ako Bob prijeđe na vrh u_{k+1}, tada imamo opet početnu situaciju.

Dakle, $\sigma_V^{\times}(SC_{2k+1}) < k+1$. Pokazali smo da je $\sigma_V^{\square}(SC_{2k+1}) = k+1$ pa iz teorema 7.18 slijedi $\sigma_V^{\times}(SC_{2k+1}) = k$.

Dokažimo sada tvrdnju teorema za SC_{2k}.
Analognim zaključivanjem kao kod dokazivanja tvrdnje za SC_{2k+1}, možemo zaključiti da je $\mathrm{rad}(SC_{2k}) = k+1$ te da je to maksimalna moguća vrijednost za sve raspone, tj. $\sigma_V^{\boxtimes}, \sigma_V^{\times}, \sigma_V^{\square} \leq k+1$.
Ako se Alice i Bob u isto vrijeme nalaze na vrhovima ciklusa, njihova maksimalna udaljenost može biti najviše k, zbog $\mathrm{rad}(C_{2k}) = k$, tj. udaljenost im je manja od $k+1$. Navedeno vrijedi za sva tri skupa pravila kretanja.

1. $\sigma_v^{\times}(SC_{2k}) = k$

   Promatrajući aktivna pravila kretanja, dokaz nejednakosti $\sigma_v^{\times}(SC_{2k}) < k+1$ proveli bi na analogan način kao u slučaju SC_{2k-1}. Da bi dokazali da je $\sigma_v^{\times}(SC_{2k}) = k$, opisat ćemo šetnju Alice i Boba grafom SC_{2k}, držeći udaljenost k te poštujući aktivna pravila kretanja. Sljedećom tablicom ćemo opisati prvih nekoliko koraka od Alice i Boba.

	1	2	3	4	5	6
Pozicija od Alice	u_1	v_1	v_2	u_2	v_2	v_3
Pozicija od Boba	u_{k+1}	v_{k+1}	v_{k+2}	u_{k+2}	v_{k+2}	v_{k+3}

Tablica 8.2: Tablica prvih šest koraka Alice i Boba u grafu SC_{2k} držeći udaljenost k te poštujući aktivna pravila kretanja

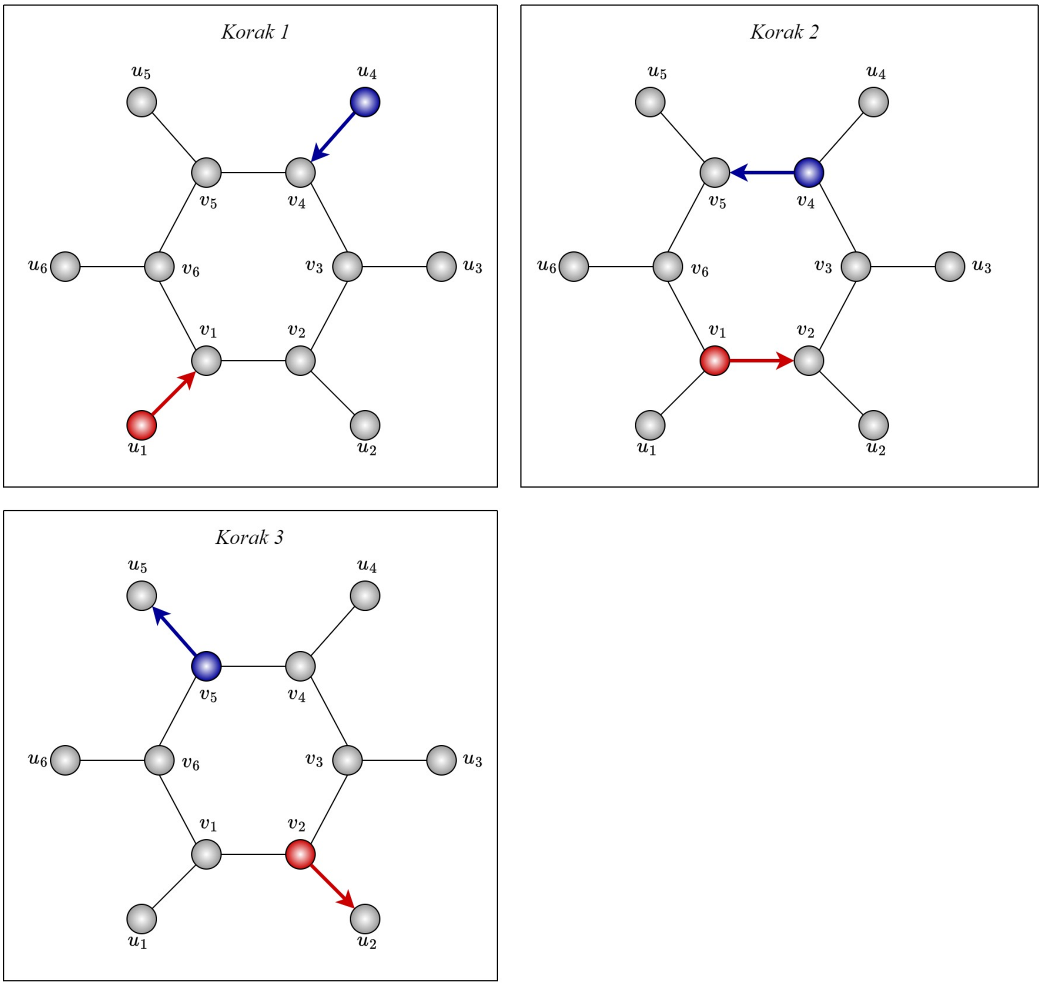
Nastavljajući korake na nalogan način kao u prethodnoj tablici, vidimo da će u konačnici Alice i Bob posjetiti sve vrhove grafa SC_{2k}, držeći udaljenost k pa smo time dokazali $\sigma_V^{\times}(SC_{2k}) = k$.
Na grafu SC_6, koji je prikazan na sljedećoj stranici, ilustrirani su prva tri koraka koja smo opisali u prethodnoj tablici, pri čemu je $k = 3$.

2. $\sigma_v^{\square}(SC_{2k}) = k$

   Promatrajmo tradicionalna pravila kretanja. Alice i Bob ne moraju se nužno istovremeno nalaziti na vrhovima ciklusa. Pokazat ćemo da vrijedi nejednakost $\sigma_V^{\boxtimes}(SC_{2k}) < k + 1$. Dokaz provodimo kontradikcijom, tj. pretpostavljamo suprotno - da postoje lijene šetnje Alice i Boba koje ih drže na udaljenosti $k + 1$. Bez smanjena općenitosti možemo pretpostaviti da Alice započinje svoju šetnju u listu u_1. Tada Bob svoju šetnju može sapočeti u vrhu ciklusa v_{k+1} ili listu u_{k+1}. Lako se vidi da jedini vrhovi ciklusa na koje se igrači mogu pomaknuti su v_1 ili v_{k+1} (zbog udaljenosti koja mora biti barem $k+1$). Slijedi $\sigma_V^{\square}(SC_{2k}) < k+1$. Da bi dokazali da je $\sigma_V^{\square}(SC_{2k}) = k$, konstruiramo šetnje Alice i Boba na sličan način kao kod aktivnih pravila kretanja, osim što se igrači pomiču na sljedeći vrh u svakom drugom koraku. Slijedi $\sigma_V^{\square}(SC_{2k}) = k$ pa iz teorema 7.18 zaključujemo $\sigma_V^{\boxtimes}(SC_{2k}) = k$.

3. $\sigma_v^{\boxtimes}(SC_{2k}) = k$

   Upravo dokazano.



Slika 8.3: Prva tri koraka Alice (crveno) i Boba (plavo) u grafu SC_6 držeći udaljenost barem 3 te poštujući aktivna pravila kretanja

■

Propozicija 8.5 *Graf* SC_3 *je graf sa najmanjim brojem vrhova za kojeg vrijedi* $\sigma_V^{\square}(SC_3) > \sigma_V^{\times}(SC_3)$.

Dokaz. Neka je G graf za kojeg vrijedi $\sigma_V^{\square}(G) > \sigma_V^{\times}(G)$. Prema teoremu 5.6 znamo da za svaki graf H čiji je direktni vršni raspon jednak nuli, vrijedi $|V(H)| = 1$ pa je onda očito i Kartezijev vršni raspon jednak nuli. Drugim riječima, $\sigma_V^{\times}(H) = 0 \implies \sigma_V^{\square}(H) = 0$. Stoga, $\sigma_V^{\times}(G)$ mora biti barem 1, odnosno $\sigma_V^{\square}(G)$ mora biti barem 2.

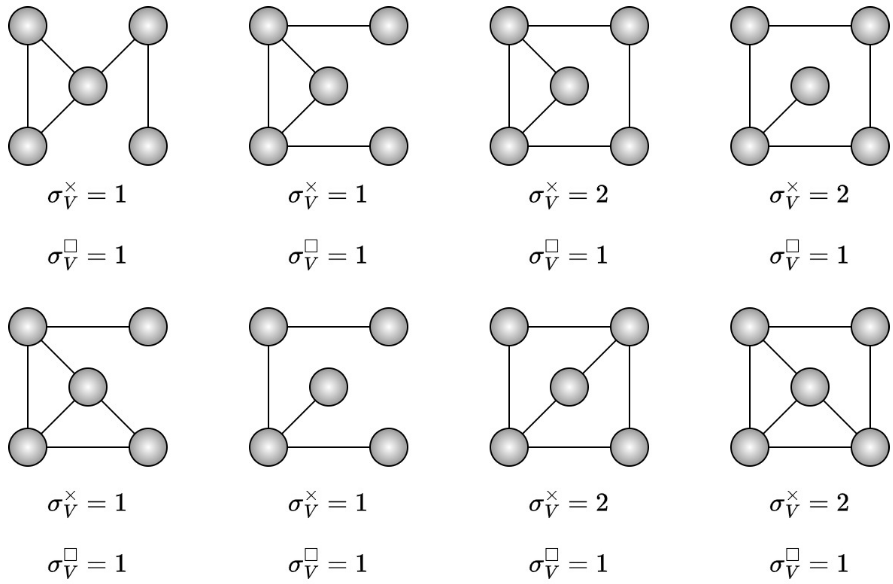
Povezani grafovi koji imaju najviše 3 vrha imaju radijus jednak najviše 1. Jedini povezani grafovi sa 4 vrha čiji je radijus jednak 2 su put P_4 i ciklus C_4. Za njih vrijedi sljedeće:

$$\sigma_V^{\times}(P_4) = 1,\ \sigma_V^{\square}(P_4) = 0,$$
$$\sigma_V^{\times}(C_4) = 2,\ \sigma_V^{\square}(C_4) = 1.$$

Postoji 10, do na izomorfizam, povezanih grafova s 5 vrhova čiji je radijus jednak 2. To su P_5, C_5 za koje vrijedi:

$$\sigma_V^{\times}(P_5) = 1,\ \sigma_V^{\square}(P_5) = 0,$$
$$\sigma_V^{\times}(C_5) = 2,\ \sigma_V^{\square}(C_5) = 2$$

i 8 grafova prikazanih na sljedećoj slici, zajedno sa svojim Kartezijevim i direktnim vršnim rasponom. Očito naš polazni graf G mora imati barem 6 vrhova pa je time tvrdnja dokazana.



Slika 8.4: Povezani grafovi za 5 vrhova radijusa 2 (Izuzev P_5 i C_5)

∎

Sljedeća klasa grafova koji su autori promatrali u radu [2] su binarna stabla. Ona su korisna za promatranje hijerarhijskih struktura pa tako primjerice imaju primjenu u podatkovnoj znanosti i rješavanju mrežnih problema. Konkretnu vrijednost raspona dobili su za savršena binarna stabla čiju definiciju navodimo u nastavku.

Definicija 8.6 ***Savršeno binarno stablo*** *je korjensko stablo u kojem unutarnji vrhovi imaju točno dvoje djece i svi listovi se nalaze na jednakoj udaljenosti od korijena. Označavamo ga sa BT_h, pri čemu je h njegova visina.*

Napomena 8.7 *Uočimo da je* $\mathrm{rad}(T) = h$.

Teorem 8.8 *Neka je $h > 1$. Tada vrijedi sljedeće:*

$$\sigma_V^{\boxtimes}(BT_h) = \sigma_V^{\times}(BT_h) = \sigma_V^{\square}(BT_h) = h - 1.$$

Dokaz. Dokazat ćemo da vrijedi $\sigma_V^{\boxtimes}(BT_h) < h$ pa će zbog rezultata kojeg smo dokazali u propoziciji 7.17, slijediti da su $\sigma_V^{\times}(BT_h)$ i $\sigma_V^{\square}(BT_h)$ manji od

h. Zatim ćemo konstruirati šetnju od Alice i Boba kroz takve grafove na način da drže udaljenost $h-1$ uz različita pravila kretanja.
Označimo korjen stabla BT_h sa x. Graf $BT_h - x$ ima dvije komponente na koje ćemo se referencirati sa "lijeva grana" i "desna grana". Može se dogoditi neka od sljedećih situacija:

1. Alice i Bob započinju svoju šetnju u istoj grani
   U nekom trenutku će jedan od njih morati prijeći u drugu granu, odnosno morat će proći kroz korjen grane u kojoj se nalazi. Tada će udaljenost igrača biti najviše $h-1$.

2. Alice i Bob započinju svoju šetnju u različitim granama
   U nekom trenutku će jedan od njih morati prijeći u drugu granu, dok drugi ili ostaje u grani kojoj je bio na početku ili prelazi na korjen x. Razlog tomu je što pravila kretanja ne dopuštaju istovremenu zamijenu grana jer prvo moraju proći kroz korjen x. Prilikom prelaska u drugu granu kroz korjen, njihova udaljenost može biti najviše $h-1$.

3. Jedan od igrača započinje svoju šetnju u korjenu x
   Udaljenost igrača može biti h jedino ako se jedan igrač nalazi u korjenu, a drugi u listu stabla BT_h. Kako bi osigurali udaljenost od barem h, onaj igrač koji se nalazio u x mora prijeći u granu suprotnu od one u kojoj se nalazi drugi igrač. No sada opet imamo situaciju opisanu pod 2.

Dakle, nemoguće je da Alice i Bob obiđu sve vrhove grafa BT_h visine h, a da cijelo vrijeme drže sigurnu udaljenost jednaku h pa vrijedi $\sigma_V^{\boxtimes}(BT_h) < h$. Stoga ćemo opisati njihove šetnje koje će ih držati na udaljenosti $h-1$.
Želimo pokazati da vrijedi $\sigma_V^{\square}(BT_h) = h-1$. Kako je riječ o Kartezijevom

vršnom rasponu, to promatramo lijena pravila kretanja, odnosno suprotne lijene šetnje. Opišimo ih:

- Neka Alice započinje svoju šetnju u proizvoljnom listu lijeve grane, a Bob u proizvoljnom listu desne grane.
- Alice obilazi vrhove lijeve grane, dok Bob ostaje u mjestu.
- Primijetimo da je Alice od Boba udaljena barem $h + 1$.
- Alice se vraća u proizvoljan list lijeve grane, dok Bob obilazi vrhove desne grane.
- Sada treba zamijeniti grane - Alice se nalazi u listu lijeve grane pa Bob može preko korjena x preći u lijevu granu i spuštati se do listova, uvijek birajući vrh koji je najudaljeniji od Alice. Na ovaj način, Bob će biti najbliži Alice kada se bude nalazio u korjenu lijeve grane i tada će njihova udaljenost biti jednaka $h - 1$.
- Sada se Alice može popeti do korjena lijeve grane, prijeći u desnu i na isti način kao i Bob, spustiti se do proizvoljnog lista desne grane.
- Primijetimo da smo sada u početnoj situaciji. Alice i Bob mogu naizmjenično posjetiti sve vrhove odgovarajućih grana držeći se uvijek na udaljenosti barem $h - 1$.

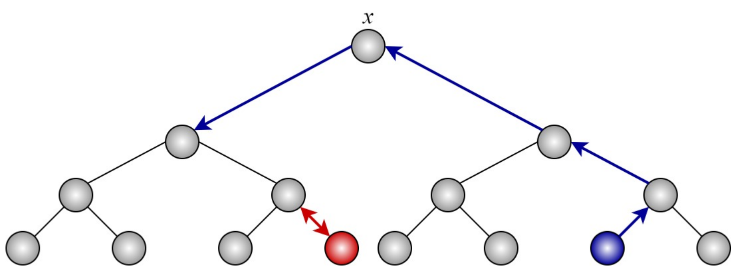
Dakle, $\sigma_V^{\Box}(BT_h) = h - 1$. Zbog $h - 1 = \sigma_V^{\Box}(BT_h) \leq \sigma_V^{\boxtimes}(BT_h) <$ [3]h slijedi $\sigma_V^{\boxtimes}(BT_h) = h - 1$.

Sada želimo pokazati da vrijedi $\sigma_V^{\times}(BT_h) = h - 1$. Kako je riječ o direktnom vršnom rasponu to promatramo aktivna pravila kretanja. Opišimo ih:

[3] Slijedi iz propozicije 7.17.

- Šetnju konstuiramo na sličan način kao u prethodnom kad smo promatrali lijena pravila kretanja, osim što sada nije dopušteno da jedan igrač miruje dok se drugi kreće.
- Dok Alice obilazi vrhove lijeve grane u kojoj se nalazi, Bob alternira između lista desne grane u kojem se nalazi i njegovog susjeda. Isto vrijedi i za Alice dok Bob obilazi vrhove desne grane.
- Prilikom prelaska iz jedne grane u drugu, kada se Bob nalazi u korjenu lijeve grane, Alice se mora nalazi u listu jer bi inače njihova udaljenost bila manja od $h-1$. Da bi to bilo moguće, moramo osigurati sljedeće:
  1. Ako je h neparan, Alice se mora nalaziti u listu iz kojeg je započela svoju šetnju.
  2. Ako je h paran, Alice se mora mora prijeći u susjed lista u kojem je započela svoju šetnju.
- Na ovaj način moguće je zamijeniti grane pa se daljnji obilazak odvija na analogan način kao kod lijenih pravila kretanja.

Na sljedećoj slici je primjer za $h = 3$.



Slika 8.5: Bobu (plavo) trebaju 4 koraka da iz lista desne grane dođe do korjena lijeve grane. Istovremeno, Alice (crveno) alternira između lista i njegovog susjeda.

Dakle, $\sigma_V^{\times}(BT_h) = h - 1$.

Time je teorem u potpunosti dokazan. ■

Iz teorema 5.2, 5.7, 5.10 slijedi da su vršna i bridna varijanta svakog od raspona jednake, ako je radijus promatranog grafa jednak 1.

Neka je G graf sa n vrhova. Uočimo da ako postoji vrh v grafa G stupnja $d(v) = n - 1$, onda vrijedi: $\text{rad}(G) = 1, \sigma_V^{\boxtimes}(G) \leq 1$.

Vrijedi sljedeće: potpuni graf $K_n, n \geq 3$, kotač $W_n, n \geq 4$ i zvijezda $S_n, n \geq 4$ imaju vrijednost svih raspona jednaku 1. Definicije navedenih grafova ne navodimo, ali iste se mogu pronaći u [6].

Sljedeća tablica je rezultat promatranja radijusa i raspona nekih drugih klasa grafova. Definicije grafova Q_n i $K_{r,s}$ se također mogu pronaći u [6].

Klasa	Radijus	$\sigma_V^{\boxtimes}$	$\sigma_V^{\times}$	$\sigma_V^{\square}$	Slijedi iz
$P_n, n \geq 2$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	1	1	0	[1]
$C_n, n \geq 3$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\begin{cases} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \text{ n neparan} \\ \frac{n}{2} - 1, \text{ n paran} \end{cases}$	[1], Teorem 7.18
$Q_n, n \geq 2$	n	n	n	$n - 1$	[1], Teorem 7.18
$K_{r,s}, r, s \geq 2$	2	2	2	1	[1], Teorem 7.18
SC_n	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	$\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	$\lceil \frac{n}{2} \rceil$	Teorem 8.4
BT_h	h	$h - 1$	$h - 1$	$h - 1$	Teorem 8.8

Tablica 8.3: Raspon nekih drugih klasa grafova

Poglavlje 9

Komparativna analiza

Radovi [1] i [2] proučavaju isti problem - određivanje maksimalne sigurne udaljenosti koju dva igrača mogu držati obilazeći dani graf u skladu s određenim pravilima kretanja. Kroz prethodna poglavlja detaljno smo se upoznali sa pristupom rada [1] (poglavlja 3, 4, 5, 6) i sa pristupom rada [2] (poglavlja 7, 8). Sada nam je cilj usporediti navedene radove - ustanoviti postoje li razlike, uočiti potencijalnu analogiju u definicijama, proučiti rezultate i/ili karakterizacije dobivene određenim pristupom.

Na samom početku rada naglasili smo da ima smisla promatrati samo jednostavne povezane grafove. U poglavlju 3 opisali smo tri vrste pravila kretanja - tradicionalna, aktivna i lijena. Ista se koriste u analizama promatranih radova. S obzirom da [2] promatra samo vršne raspon, bridni raspon, s kojim se upoznali kroz analizu rada [1], neće nam poslužiti u svrhu usporedbe promatranih radova. Ipak, treba naglasiti njegovu važnost u širem kontekstu promatranja raspona grafa i rezultate koje smo dokazali u ovom radu kao i rezultate koji se mogu pronaći u [8] i [9].

Za razliku od [1] koji koristi slabe homomorfizme prilikom definiranja raspona, [2] direktno definira maksimalnu sigurnu udaljenost pomoću l-obilazaka, tj. istu direktno povezuje sa rasponom. Prisjetimo se spomenutih definicija. Definicije iz [1]:

$$\begin{aligned}
\sigma_V^{\boxtimes}(H) &= \max\{m_P(f,g) : f,g : P \to H \text{ su surjektivni} \\
&\qquad\qquad \text{slabi homomorfizmi i P je put}\}, \\
&= \max\{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \boxtimes H \text{ i } p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)\}, \\
\sigma_V^{\times}(H) &= \max\{m_P(f,g) : f,g : P \to H \text{ su surjektivni} \\
&\qquad\qquad \text{usklađeni slabi homomorfizmi i } P \text{ je put}\}, \\
&= \max\{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \times H \text{ i } p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)\}, \\
\sigma_V^{\square}(H) &= \max\{m_P(f,g) : f,g : P \to H \text{ su surjektivni suprotni} \\
&\qquad\qquad \text{slabi homomorfizmi i } P \text{ je put}\} \\
&= \max\{\varepsilon_H(Z) : Z \subseteq_C H \square H \text{ i } p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)\}.
\end{aligned}$$

Definicije iz [2]:

$$\begin{aligned}
M^{\boxtimes}(G) &= \max\{M_l^{\boxtimes} : l \in S\}, \\
M_l^{\boxtimes} &= \max\{m_G(f,g) : f \text{ i } g \text{ su lijeni } l\text{-obilasci na } G\}, \\
M^{\times}(G) &= \max\{M_l^{\times} : l \in D\}, \\
M_l^{\times} &= \max\{m_G(f,g) : f \text{ i } g \text{ su } l\text{-obilasci na } G\}, \\
M^{\square}(G) &= \max\{M_l^{\square} : l \in C\}, \\
M_l^{\square} &= \max\{m_G(f,g) : f \text{ i } g \text{ su suprotni lijeni } l\text{-obilasci na } G\}.
\end{aligned}$$

Dokazali smo da su navedene definicije zaista ekvivalente, tj. da vrijedi $\sigma_V^{\boxtimes} = M^{\boxtimes}$ (Teorem 7.11), $\sigma_V^{\times} = M^{\times}$ (Teorem 7.13), $\sigma_V^{\square} = M^{\square}$ (Teorem 7.16). Vidjeli smo da definicije lijenog l-obilaska i suprotnih lijenih l-obilazaka redom podsjećaju na definicije slabog homomorfizma i suprotnih slabih homomorfizama. Udaljenost l-obilazaka također definiramo na analogan način kao i udaljenost slabih homomorfizama te smo dokazali da obe udaljenosti

maksimalno mogu biti jednake radijusu promatranog grafa. Dakle, iako se definicije raspona doimaju jako različite, sličnosti ipak postoje.
Neki od rezultata iz [1], a koji su se koristili u [2] su sljedeći:

1. $\sigma_V^{\boxtimes}(H) \leq \text{rad}(H)$ (Napomena 4.3)

2. $\sigma_V^{\times}(H) \leq \text{rad}(H)$ (Napomena 4.10)

3. $\sigma_V^{\square}(H) \leq \text{rad}(H)$ (Napomena 4.16)

4. $|V(H)| = 1 \iff \sigma_V^{\boxtimes}(H) = 0$ (Teorem 5.1)

5. $|V(H)| = 1 \iff \sigma_V^{\times}(H) = 0$ (Teorem 5.6)

6. $|V(H)| = 1 \iff \sigma_V^{\square}(H) = 0$ (Teorem 5.9)

Vidjeli smo kod teorema 4.5, 4.12, 4.18 da su autori rada [1] vršne raspone definirali kao maksimalnu udaljenost među svim minimalnim udaljenostima $\varepsilon_H(Z)$ (Definicija 3.20) dvaju igrača na nekom grafu Z koji je povezani podskup odgovarajućeg produkta - $H \boxtimes H$ (jaki vršni raspon), $H \times H$ (direktni vršni raspon) ili $H \square H$ (Kartezijev vršni raspon). U svakoj od definicija javlja nam se uvjet $p_1(V(Z)) = p_2(V(Z)) = V(H)$ koji osigurava da igrači moraju posjetiti sve vrhove početnog grafa H. Primijetimo da je taj uvjet, u definicijama iz [2], osiguran time što smo l-obilaske definirali kao surjektivne funkcije čija je kodomena skup vrhova promatranog grafa.
Navedimo neke od rezultata dokazanih u [1]:

1. Za grafove radijusa 1 i grafove sa samo jednim vrhom vrijedi $\sigma_V^{\boxtimes} = \sigma_E^{\boxtimes}, \sigma_V^{\times} = \sigma_E^{\times}$ (Teoremi 5.2, 5.7).

2. Za put i grafove radijusa 1 vrijedi $\sigma_V^{\square} = \sigma_E^{\square}$ (Teorem 5.10).

3. Za put koji ima barem dva vrha vrijedi $\sigma_V^{\boxtimes} = \sigma_E^{\boxtimes} = 1$.

4. Za stablo vrijedi $\sigma_V^{\boxtimes} = \sigma_E^{\boxtimes}, \sigma_V^{\times} = \sigma_E^{\times}, \sigma_V^{\square} = \sigma_E^{\square}$.

5. Put je jedini graf za koji vrijedi $\sigma_V^{\square} = \sigma_E^{\square} = 0$ (Teorem 5.9).

Iz 1. i 2. slijedi da postoje beskonačne familije grafova čiji su vršni i bridni raspon jednaki.

Navedimo sada dva važna rezultata dokazana u [2]:

1. $\sigma_V^{\boxtimes} \geq \max\{\sigma_V^{\times}, \sigma_V^{\square}\}$ (Propozicija 7.17),

2. $|\sigma_V^{\times} - \sigma_V^{\square}| \leq 1$ (Teorem 7.18)

U tablici 8.3 su detaljno raspisane vrijednosti odgovarajućih raspona za neke klase grafova. Rezultate dobivene iz [1] i [2] ne bi imalo smisla poredati po nekoj važnosti no ipak treba istaknuti da su se koristeći pristup sa l-obilascima uspjele izračunati konkretne vrijednosti raspona na neke klase grafova, dok je u [1] naglasak bio na 0-rasponu i beskonačnim familijama grafova sa jednakim vršnim i bridnim rasponom.

Matematička definicija raspona iz [1] ipak je malo složenija nego li ona iz [2] no jedna ne isključuje drugu. Kako smo već vidjeli, neki rezultati iz [1] neophodni su u dokazivanju tvrdnji iz [2] stoga nije potrebno postavljati strogu granicu između ova dva pristupa. U daljnoj analizi, možda će se više rezultata o rasponu grafa uspjeti dokazati koristeći pristup sa l-obilascima umjesto slabih homomorfizama no takva tema prelazi okvire ovog rada.

Literatura

[1] I. Banič, A. Taranenko, *Span of a graph: keeping the safety distance*, Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science vol. 25:1 (2023)

[2] G. Erceg, A. Šubašić, T. Vojković, *Some results on the maximal safety distance in a graph*, FILOMAT 37(15), 5123–5136 (2023)

[3] A. Lelek *Disjoint mappings and the span of spaces*, Fundamenta Mathematicae 55 (1964): 199–214

[4] L. C. Hoehn, *A non-chainable plane continuum with span zero*, Fundamenta Mathematicae 211.2 (2011): 149-174

[5] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York (1992)

[6] A. Golemac, *Teorija grafova*, Prirodoslovno-matematički fakultet, Split (2022)

[7] P. Hell and J. Nešetřil, *Graphs and homomorphisms*, Oxford University Press vol 28, Oxford (2004)

[8] A. Šubašić, T. Vojković, *Edge spans and the minimal number of steps for keeping the safety distance*, arXiv (2023)

Literatura

[9] A. Šubašić, T. Vojković *Vertex Spans of Multilayered Cycle and Path Graphs*, Axioms, 13, 236 (2024)