Simpleks metoda

Cvijanović, Lucija

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

LUCIJA CVIJANOVIĆ

SIMPLEKS METODA

DIPLOMSKI RAD

Split, travanj 2024.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

SIMPLEKS METODA

DIPLOMSKI RAD

Neposredna voditeljica:
dr. sc. Ana Laštre

Studentica: Lucija Cvijanović

Mentor: izv. prof. dr. sc. Jurica Perić

Split, travanj 2024.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

SIMPLEKS METODA

Lucija Cvijanović

Sažetak:

Ovaj diplomski rad obrađuje temu linearnog programiranja, sa posebnim naglaskom na simpleks metodi. Simpleks metoda je jedan od najvažnijih algoritama za pronalazak optimalnog rješenja linearnog problema. Za algoritam simpleks metode bitno je dopustivo područje, čijim se bridovima krećemo u potrazi za optimalnim rješenjem. Zaustavljamo se u vrhovima dopustivog područja, s ciljem maksimizacije vrijednosti funkcije cilja. Objasnit ćemo svaki korak algoritma, i potkrijepiti ga primjerima s rješenjima. Naglasit ćemo i iznimke simpleks metode i načine korištenja algoritma u istima. Simpleks metoda je moćan alat u rješavanju optimizacijskih problema u raznim područjima. Upravo je to dovoljan uvjet da poseban značaj damo primjenama simpleks metode u stvarnom životu. Naime, ovaj algoritam se može primijeniti na širok spektar problema, od optimizacije proizvodnje i distribucije resursa do raspodjele troškova, planiranja investicija i planiranja rasporeda smjena.

Ključne riječi:

linearno programiranje; funkcija cilja; konveksni poliedar; bazično dopustivo rješenje; dopustiva baza; optimalno rješenje; bazične varijable; pivot korak;.

Podatci o radu:

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

broj stranica 59, broj slika 10, broj literaturnih navoda 6, jezik izvornika: hrvatski

Mentor: *izv. prof. dr. sc. Jurica Perić*

Neposredna voditeljica: *dr. sc. Ana Laštre*

Članovi povjerenstva:

izv. prof. dr. sc. Jurica Perić

dr. sc. Ana Laštre

asistent Pavao Radić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *12. travnja.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

THE SIMPLEX METHOD

Lucija Cvijanović

Abstract:

This thesis deals with the topic of linear programming, with a special emphasis on the simplex method. The simplex method is one of the most important algorithms for finding the optimal solution for a linear problem. For the algorithm of the simplex method, the feasible region is essential, along whose edges we move in search of an optimal solution. We stop at the vertices of the feasible region, intending to maximize the value of the objective function. We will explain each step of the algorithm, and support it with examples with solutions. We will emphasize the exceptions of the simplex method and ways of using the algorithm in them. The simplex method is a powerful tool for solving optimization problems in various fields. This is a sufficient condition to give special importance to the applications of the simplex method in real life. Namely, this algorithm can be applied to a wide range of problems, from optimization of production and distribution of resources to distribution of costs, planning of investments, and planning of shift schedules.

Key words:

linear programming; objective function; convex polyhedron; basic feasible solution; feasible base; optimal solution; basic variables; pivot step;

Specifications:

59 pages, 10 figures, 6 reference, original in: Croatian

Mentor: *associate proffesor, Jurica Perić*

Immediate mentor: *dr. sc., Ana Laštre, lecturer*

Committee:

associate proffesor, Jurica Perić

dr. sc., Ana Laštre, lecturer

assisstant, Pavao Radić

This thesis was approved by a Thesis committee on *April 12.*

Uvod

Pojam linearnog programiranja (LP) uveden je 1950-ih godina. Koristi se kao matematički alat za rješavanje optimizacijskih problema u raznim područjima, uključujući matematičku ekonomiju, računarstvo, logistiku, proizvodnju i brojna druga polja.
Pojam linearno označava više važnih karakteristika. Naime, koristimo linearne jednadže i nejednadžbe kako bismo ograničili izvedive planove, osim toga, koristimo i linearnu funkciju za mjerenje kvaliteta planova (npr. trajanje ili troškovi) promatranih količina.
Kroz pregled definicija, matematičkih teorema, algoritama i praktičnih primjera, prikazat ćemo kako se linearno programiranje koristi za rješavanje složenih problema optimizacije. Poseban naglasak bit će stavljen na primjene LP-a u stvarnim scenarijima.

Jedna od najvažnijih metoda za rješavanje linearnih problema je simpleks metoda. Tema ovog diplomskog rada je upravo simpleks metoda.
Glavni cilj simpleks metode je pronalaženje optimalne vrijednosti funkcije cilja, koju obično želimo minimizirati ili maksimizirati, uz poštivanje linearnih ograničenja. Kako optimizacija nailazi na dobru primjenu u stvarnom svijetu, ograničenja se najčešće odnose na raspoložive resurse ili kapacitete, a cilj je pronaći vrijednosti varijabli koje će optimizirati funkciju cilja uz poštivanje tih ograničenja. Osim simpleks metode, postoji još mnogo me-

toda za rješavanje linearnih problema. Neke od njih su: metoda dualnosti, metoda gradijentnog spusta, metoda potencijala i druge. Usprkos velikom broju metoda, simpleks metoda se i dalje vodi kao jedan od najučinkovitijih algoritama za pronalazak optimalnog rješenja.

Sadržaj

Poglavlje 1

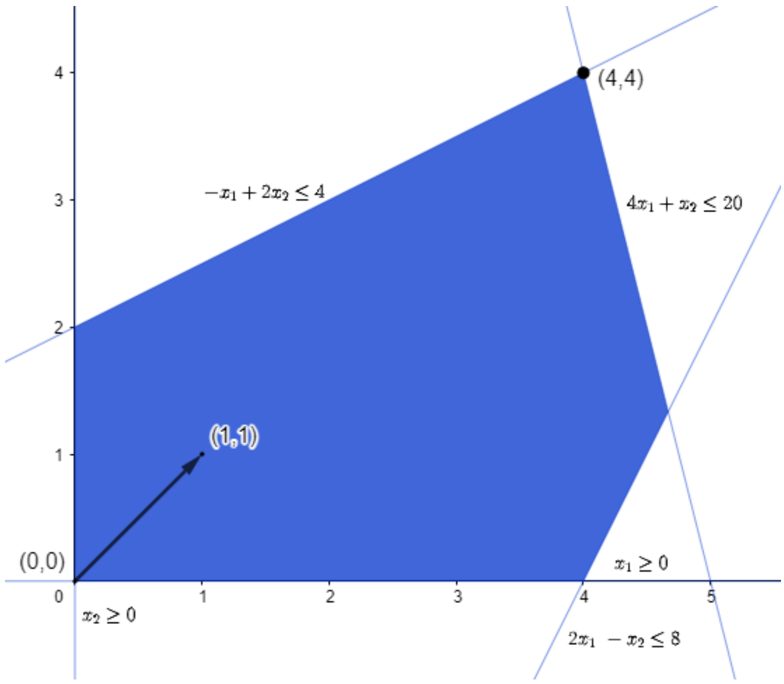
Linearni program

Započnimo sa jednostavnim primjerom.

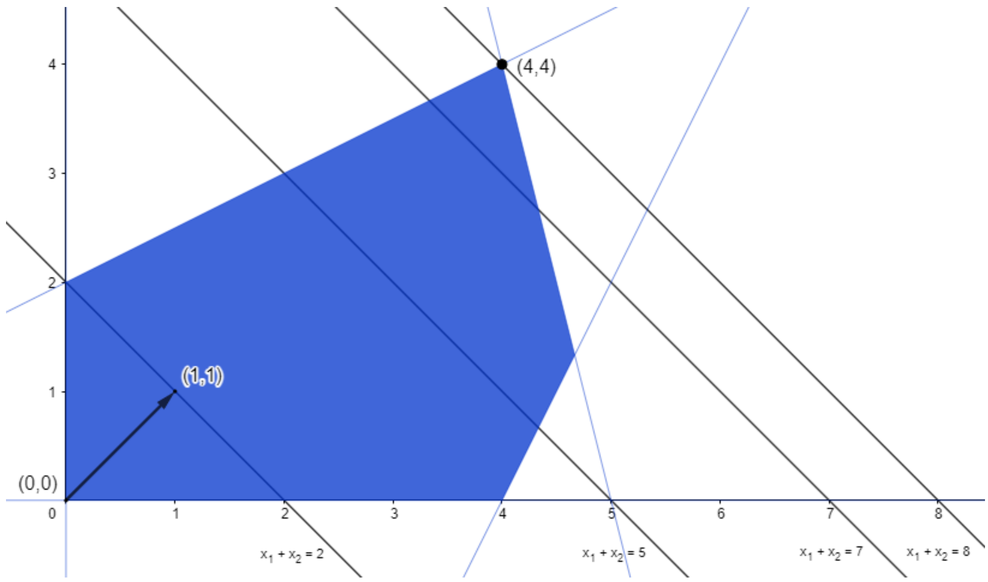
Primjer 1.1

Maksimizirajmo vrijednosti	$x_1 + x_2$
među svim vektorima $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$	
uz ograničenja	$x_1 \geq 0$
	$x_2 \geq 0$
	$-x_1 + 2x_2 \leq 4$
	$4x_1 + x_2 \leq 20$
	$2x_1 - x_2 \leq 8$

U koordinatnom sustavu crtamo presjek svih ograničenja, odnosno: $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \geq 0\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq 0\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -x_1 + 2x_2 \leq 4\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 4x_1 + x_2 \leq 20\} \cap \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 2x_1 - x_2 \leq 8\}$.
Trebali bismo dobiti sljedeći konveksni poligon:



Zadatak je pronaći točku koja maksimizira vrijednost funkcije $x_1 + x_2$. Za to nam je potreban vektor $(1, 1)$. Promatramo pravac okomit na vektor $(1, 1)$, zatim ga translatiramo u smjeru vektora dok ne dosegnemo najudaljeniju točku poligona. Ta točka je rješenje zadatka. U ovome slučaju rješenje je točka $(4, 4)$.



Želimo pronaći vektor $x* \in \mathbb{R}^n$ koji maksimizira (minimizira) vrijednost linearne funkcije među svim vektorima $x \in \mathbb{R}^n$ koji zadovoljavaju zadani sustav linearnih jednadžbi i nejednadžbi. **Funkcija cilja** je funkcija koju maksimiziramo (minimiziramo), a ima sljedeći oblik:

$$c^T x = c_1 x_1 + \ldots + c_n x_n, \quad c \in \mathbb{R}^n.$$

Linearne jednadžbe i nejednadžbe nazivamo **ograničenjima**.

Definicija 1.1 *Neka su* $c \in \mathbb{R}^n$, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, $i \in M \subset \mathbb{N}$, *te* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *definirana sa* $f(x) = c^T x$. *Promatramo optimizacijski problem*

$$f(x) = c^T x \to max \tag{1}$$

uz sljedeće uvjete

$$a_i^T x \geq b_i, \quad i \in M_1 \tag{2}$$

$$a_i^T x \leq b_i, \quad i \in M_2 \tag{3}$$

$$a_i^T x = b_i, \quad i \in M_3 \tag{4}$$

gdje je $M_1 \cup M_2 \cup M_3 = M$, *te* $M_i \cap M_j = \emptyset$, *za* $i \neq j$. *Problem koji zadovoljava svojstva* (1) - (4) *nazivamo* ***problem linearnog programiranja*** *(linearni program). Vektor* $x \in \mathbb{R}^n$ *sa svojstvima* (2) - (4) *zovemo* ***dopustivo rješenje****. Skup svih dopustivih rješenja zovemo* ***dopustivo područje****. Dopustivi vektor* $x^* \in \mathbb{R}^n$ *će biti* ***optimalno rješenje*** *problema ako vrijedi*

$$f(x^*) = c^T x^* \geq c^T x = f(x), \text{ za svaki dopustivi } x.$$

Napomena 1.1 1. *Linearni program može biti i program minimiziranja zadane linearne funkcije, jer je minimizacija funkcije cilja* $c^T x$ *ekvivalent maksimizaciji funkcije* $-c^T x$, *odnosno:*

$$f(x) = c^T x \to max \iff f(x) = -c^T x \to min,$$

jer prema Definicija 1.1, da bismo riješili problem linearnog programiranja moramo pronaći optimalno rješenje:

$$f(x^*) = c^T x^* \geq c^T x = f(x), \text{ za svaki dopustivi } x, \text{ ili ekvivalentno}$$

$$-f(x^*) = -c^T x^* \leq -c^T x = -f(x), \text{ za svaki dopustivi } x.$$

2. *Uvjet* (2) *iz definicije možemo zamijeniti njegovim ekvivalentom:*

$$a_i^T x \geq b_i \iff -a_i^T x \leq -b_i.$$

3. *Uvjet* (4) *iz definicije možemo zamijeniti njegovim ekvivalentom:*

$$a_i^T x = b_i \iff a_i^T x \geq b_i \quad \& \quad a_i^T x \leq b_i.$$

Sada, zahvaljujući prethodnoj napomeni, linearni program možemo interpretirati na sljedeći način:

Maksimizirajmo vrijednosti	$c^T x$
među svim vektorima $x \in \mathbb{R}^n$ koji zadovoljavaju	$Ax \leq b$,

gdje je $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ zadana realna matrica dimenzija m×n, a $c \in \mathbb{R}^n$ i $b \in \mathbb{R}^m$ zadani vektori.

Neka su $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $c \in \mathbb{R}^n$ i $b \in \mathbb{R}^m$, tada sljedeći problem maksimizacije zovemo **standardni oblik problema linearnog programiranja**:

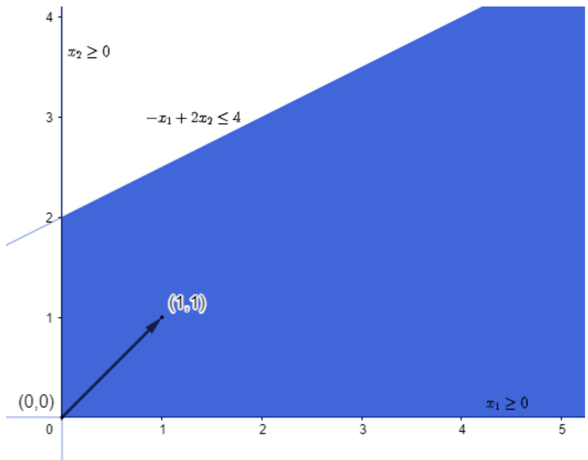
Maksimizirajmo	$c^T x$
uz uvjete	$Ax = b$,
	$x \geq 0$.

Uvjet $x \geq 0$ je **uvjet nenegativnosti**. Za $x \in \mathbb{R}^n$ uvjet nenegativnosti znači sljedeće:

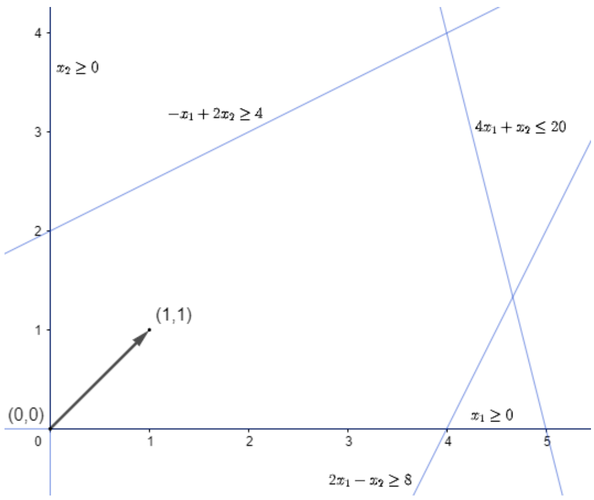
$$x_j \geq 0, \ j \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

Pogledajmo sljedeće primjere:

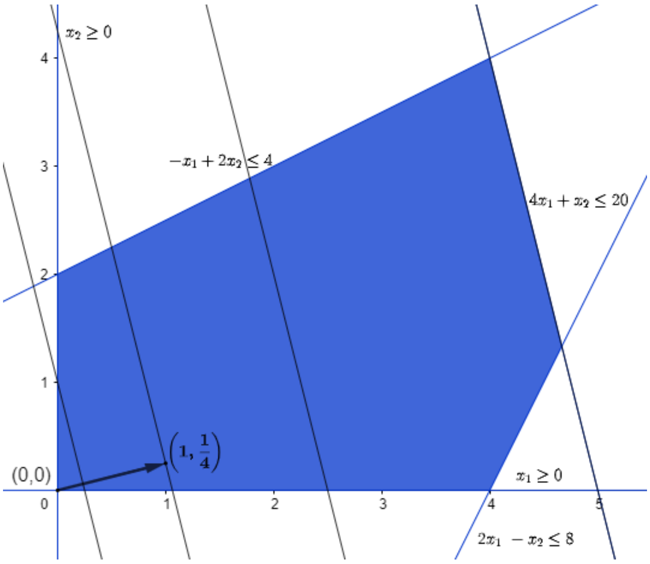
Ukoliko iz primjera ukinemo ograničenja $4x_1 + x_2 \leq 20$ i $2x_1 - x_2 \leq 8$ dobijemo linearni program u kojem dopustivo područje nije ograničeno. Takav linearan program nazivamo **neograničenim**.



Mijenjajući ograničenja prvoga primjera, dobit ćemo linearni program koji nema dopustiva rješenja, jer ne postoji presjek ograničenja, pa ni dopustiv prostor. Takav linearan program nazivamo **nedopustivim/neizvedivim**.



Ukoliko vektor c iz početnog primjera zamijenimo vektorom $\left(1, \frac{1}{4}\right)$, translatiranjem pravca okomitog na vektor ne dobijemo samo jedno optimalno rješenje (točku), već segment. Svaka točka toga segmenta je optimalno riješenje. Dakle možemo imati i više optimalnih rješenja.



Poglavlje 2

Geometrija linearnog programiranja

Ovaj pristup omogućuje vizualizaciju problema optimizacije u obliku mnogokuta čiji su vrhovi ograničeni linearnim nejednakostima, a čiji unutarnji dio predstavlja dopustivo područje, odnosno skup mogućih rješenja. Ideja simpleks metode je kretanje kroz vrhove ovog mnogokuta kako bi se pronašlo optimalno rješenje. Medoda započinje sa početnom točkom unutar dopustivog područja, a prolaskom kroz vrhove mnogokuta se povećava vrijednost funkcije cilja, postupno se približavajući optimalnom rješenju. Algoritam ima konačno mnogo koraka, dok ne dosegnemo optimalno rješenje, ili utvrdimo da rješenje ne postoji.

Da bismo pronašli algoritam za rješavanje linearnog problema, najprije se moramo upoznati sa osnovnim pojmovima. Najvažniji pojam u ovom poglavlju bit će konveksnost.

2.1 Linearna algebra i linearno programiranje

U linearnoj algebri proučavaju se sustavi linearnih jednadžbi. Rješenje takvog sustava je afin potprostor. S druge strane u linearnom programiranju proučavamo sustave linearnih nejednadžbi, čije je rješenje konveksni poliedar koji predstavlja dopustivo područje.

Definicija 2.1 *Za skup $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ćemo reći da je* ***afin*** *ako za svake dvije točke $x, y \in K$ vrijedi*

$$\{\lambda x + (1 - \lambda)\, y : \ \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq K.$$

Definicija 2.2 *Za točke x, $y \in \mathbb{R}^n$ skup*

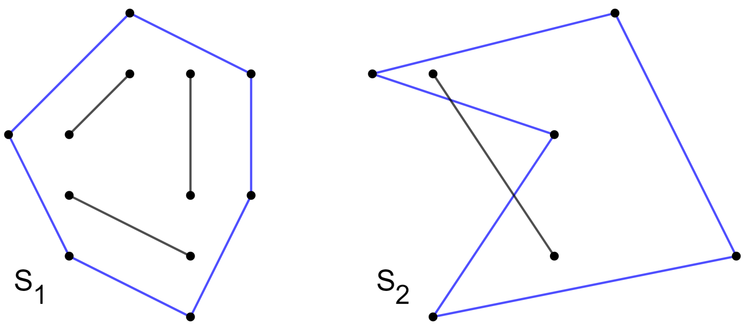
$$[x, y] := \{\lambda x + (1 - \lambda)\, y : \lambda \in [0, 1]\}$$

nazivamo ***segment****(spojnica) s krajevima x i y, oznaka $\overline{\mathrm{xy}}$.*

Definicija 2.3 *Za skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ ćemo reći da je* ***konveksan*** *ako za svake dvije točke $x, y \in S$ skup S sadržava i segment $\overline{\mathrm{xy}}$. Odnosno, ako vrijedi $\forall x$, $\forall y \in S$, $\forall t \in [0, 1]$ vrijedi $tx + (1 - t)\, y \in S$.*

Primjer 2.1

- *S_1 sa Slike 2.1 je konveksan skup, jer $\forall x, y \in S_1$ vrijedi $\overline{\mathrm{xy}} \in S_1$.*
- *S_2 sa Slike 2.1 nije konveksan skup, jer $\exists x_1, y_1 \in S_2$ za koje $\overline{\mathrm{x_1 y_1}} \notin S_2$.*



Slika 2.1: konveksni i nekonveksni skupovi

Definicija 2.4 *Neka je skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan. Za funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***konveksna*** *na skupu S ako za svaki $x, y \in S$ i svaki $t \in [0,1]$ vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Neka je skup $S \subseteq \mathbb{R}^n$ konveksan. Za funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ kažemo da je ***konkavna*** *na skupu S ako za svaki $x, y \in S$ i svaki $t \in [0,1]$ vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \geq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Napomena 2.1 *Iz Definicije 2.4 slijedi da je funkcija f konveksna ako i samo ako je funkcija $-f$ konkavna.*

Definicija 2.5 *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, te neka su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, te $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$. Tada svaku točku oblika $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m$ zovemo* ***afinom kombinacijom*** *točaka $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Skup svih afinih kombinacija skupa $S \subset \mathbb{R}^n$ zovemo* ***afinom ljuskom*** *skupa S. Označavamo je s affS.*

Definicija 2.6 *Neka su $x_1, x_2, \ldots, x_m \in \mathbb{R}^n$, te neka su $t_1, t_2, \ldots, t_m \geq 0$, te $\sum_{i=1}^{m} t_i = 1$. Tada svaku točku oblika $t_1 x_1 + t_2 x_2 + \ldots + t_m x_m$ zovemo* ***konvek-***

snom kombinacijom *točaka* $x_1, x_2, \ldots, x_m$. *Skup svih konveksnih kombinacija skupa* $S \subset \mathbb{R}^n$ *zovemo* ***konveksnom ljuskom*** *skupa S. Označavamo je s convS.*

Znamo da je rješenje sustava linearnih jednadžbi afin potprostor. Upoznajmo se sa definicijom.

Definicija 2.7 *Vektorski (linearni) prostor nad poljem* $\mathbb{F}$ *je skup* X *na kojem su definirane dvije operacije:*

$$+ : X \times X \to X \text{ (zbrajanje vektora)}$$
$$\cdot : \mathbb{R} \times X \to X \text{ (množenje vektora skalarom),}$$

za koje vrijede sljedeća svojstva:

VP1) $(\forall x, y \in X)\, x + y = y + x$ *(komutativnost zbrajanja)*

VP2) $(\forall x, y, z \in X)\, x + (y + z) = (x + y) + z$ *(asocijativnost zbrajanja)*

VP3) $(\exists 0 \in X)\, (\forall x \in X)\, x + 0 = 0 + x = x$ *(postojanje neutralnog vektora)*

VP4) $(\forall x \in X)\, (\exists x' \in X)\, x + x' = x' + x = 0$ *(postojanje suprotnog vektora)*

VP5) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\, (\forall x \in X)\, \alpha\, (\beta x) = (\alpha\beta)\, x$ *(usklađenost množenja skalara vektorom)*

VP6) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})\, (\forall x, y \in X)\, \alpha\, (x + y) = \alpha x + \alpha y$ *(distributivnost množenja prema zbrajanju u X)*

VP7) $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})\, (\forall x \in X)\, (\alpha + \beta)\, x = \alpha x + \alpha y$ *(distributivnost množenja prema zbrajanju u* $\mathbb{R}$*)*

VP8) $1 \cdot x = x$ *(netrivijalnost množenja).*

Definicija 2.8 *Neka je X vektorski prostor. Podskup* $W \subset V$ *je* ***vektorski potprostor*** *prostora V ako je i on sam vektorski prostor uz iste operacije koje su definirane na prostoru V.*

Napomena 2.2 *Skup* $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots, n\}$ *je vektorski prostor uz sljedeće operacije:*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (x'_1, x'_2, \ldots, x'_n) = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \ldots, x_n + x'_n)$$
$$\lambda (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n).$$

Definicija 2.9 *Neka je* $V \subseteq \mathbb{R}^n$ *vektorski potprostor od* $\mathbb{R}^n$ *i* $u \in V$ *proizvoljan vektor.* ***Afin potprostor*** *je skup oblika*

$$u + V = \{u + v : \ v \in V\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

2.2 Hiperravnine i poliedri u $\mathbb{R}^n$

Kao što smo već naglasili, jedan od najvažnijih pojmova linearnog programiranja je dopustivo područje (rješenje sustava linearnih nejednadžbi), odnosno konveksni poliedar, unutar kojega se nalazi rješenje problema. Sada ćemo navesti definicije potrebne za razumijevanje pojma konveksnog poliedra.

Definicija 2.10 *Neka je* $a \in \mathbb{R}^n$*, takav da nisu svi* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *jednaki nula, te* $b \in \mathbb{R}$*. Skup svih rješenja linearne jednadžbe* $a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b$*, odnosno*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x = b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

zovemo ***hiperravnina****. Svaka hiperravnina dijeli prostor na dva* ***poluprostora****:*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x \leq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

i

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ a^T x \geq b\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n \geq b\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

Definicija 2.11 ***Poliedar u*** $\mathbb{R}^n$ *je presjek konačno mnogo poluprostora u* $\mathbb{R}^n$*, definiramo ga kao skup*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ Ax \leq b\} \subseteq \mathbb{R}^n, \text{ gdje su } A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m$$

.

Napomena 2.3 *Poluprostori iz Definicije 2.10 su zatvoreni poluprostori, a presjek konačno mnogo zatvorenih poluprostora zovemo **konveksni poliedar**.*

2.3 Bazično dopustivo rješenje

Među svim dopustivim rješenjima linearnog problema poseban status ima bazično dopustivo rješenje. Takvo rješenje će uvijek biti vrh skupa svih dopustivih rješenja. Dopustivo bazično rješenje je ključan pojam za simpleks metodu jer se algoritam kreće od jednog dopustivog bazičnog rješenja do drugog, postupno povećavajući vrijednost funkcije cilja.

U ovom dijelu su nam bitne matrice. Matrice omogućavaju prikaz sustava linearnih jednadžbi u preglednijem obliku, olakšavajući analizu i rješavanje problema linearnog programiranja. Prisjetimo se osnovnih pojmova vezanih za matrice.

2.3.1 Matrice

Definicija 2.12 ***Matrica*** *je preslikavanje* $A : D_{nm} \to \mathbb{F}$*, gdje je* $D_{nm} = \{1, 2, \dots, n\} \times \{1, 2, \dots, m\}$*, a* $\mathbb{F}$ *polje. Koristimo oznaku* $A(i, j) := \alpha_{ij}$*.*

Matrice prikazujemo kao tablice pravokutnog oblika koje se sastoje od realnih ili kompleksnih brojeva. Za matricu sa m redaka i n stupaca ćemo reći da je tipa $m \times n$, a zapisujemo je u sljedećem obliku

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

ili kraće $A = (a_{ij})$. Element (a_{ij}) nazivamo općim elementom matrice. **Podmatrica** matrice A je bilo koja matrica koja se može dobiti iz matrice A brisanjem njenih redaka ili stupaca.

Definicija 2.13 ***Množenje matrica*** *definiramo za ulančane matrice(matrice kod kojih je broj stupaca prve matrice jednak broju redaka druge matrice). Neka je A matrica tipa $m \times n$, te B matrica tipa $n \times p$. Tada je umnožak $C = AB$ definiran, i rezultat je matrica tipa $m \times p$,*

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.$$

Napomena 2.4 *Neka je A matrica tipa $m \times n$, $x \in \mathbb{R}^n$ i $b \in \mathbb{R}^m$. Vektor x je zapravo matrica tipa $n \times 1$, pa možemo množiti matricu A i vektor x rezultat je vektor iz $\mathbb{R}^m$. Zahvaljujući tome, sustav od m linearnih jednadžbi možemo zapisati matrično $Ax = b$.*

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{gathered}$$

Neka je A matrica tipa $m \times n$, tada je A^T **transponirana matrica**. Kod takve matrice zamijenimo retke i stupce, $\left(A^T\right)_{ij} = a_{ji}$.

Kvadratna matrica je matrica sa istim brojem redaka i stupaca, tj. matrica tipa $n \times n$.

Dijagonalna matrica je kvadratna matrica D, za koju vrijedi $d_{ij} = 0$, za svaki $i \neq j$. **Jedinična matrica** je dijagonalna matrica I sa jedinicama na dijagonali.

Definicija 2.14 *Kvadratna matrica A je invertibilna, regularna ili nesingularna ako postoji matrica B istog reda, takva da vrijedi*

$$AB = BA = I.$$

Inverznu matricu označavamo sa $B = A^{-1}$.

Napomena 2.5 *Ako ne postoji matrica B iz Definicije 2.14, matricu A nazivamo singularnom.*

2.3.2 Bazično dopustivo rješenje standardnog oblika problema linearnog programiranja

Od sada definiramo matricu A kao matricu tipa $m \times n$ $(n \geq m)$. Za podskup $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ definiramo matricu A_B kao matricu koja se sastoji od stupaca matrice A, čiji indeksi pripadaju skupu B. Nastanak matrice A_B prikazan je u sljedećem primjeru.

Primjer 2.2 *Za matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{bmatrix}$ i skup $B = \{1, 3\}$, matrica A_B je sljedeća matrica:*

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}.$$

Definicija 2.15 ***Bazično dopustivo rješenje*** *standardnog linearnog problema*

$$\begin{aligned} &\textit{Maksimizirajmo} && c^T x \\ &\textit{uz uvjete} && Ax = b, \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

je dopustivo rješenje $x \in \mathbb{R}^n$ *za koje postoji skup* $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ *od* m *elemenata takav da:*

1. *kvadratna matrica* A_B *je nesingularna, odnosno stupci indeksirani skupom* B *su linearno nezavisni*

2. $x_j = 0$ *za sve* $j \notin B$.

Primjer 2.3 *Neka je* $A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $b = (14, 7)$ *i skup* $B = \{2, 4\}$. *Pronađimo bazično dopustivo rješenje.*

Prema Definiciji 2.15 matrica A_B *mora biti nesingularna, tj. njeni stupci moraju biti linearno nezavisni.*

$$A_B = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

$$\alpha \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 5\alpha + 4\beta = 0 \\ \alpha + 5\beta = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha = -5\beta \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} 5(-5\beta) + 4\beta = 0 \\ -21\beta = 0 \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{matrix} \beta = 0 \\ \alpha = 0 \end{matrix}$$

Prvi uvjet definicije je zadovoljen. Sada iz drugog uvjeta slijedi: $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ *i* $x_5 = 0$.

Još moramo iz $Ax = b$ *dobiti* x_2 *i* x_4.

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5x_2 + 4x_4 = 14 \\ x_2 + 5x_4 = 7 \end{matrix} \Rightarrow x_2 = 7 - 5x_4$$

$$\begin{matrix} 5(7 - 5x_4) + 4x_4 = 14 \\ 35 - 25x_4 + 4x_4 = 14 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} -21x_4 = -21 \\ x_4 = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_2 = 7 - 5 * 1 \\ x_2 = 2 \end{matrix}$$

Dakle bazično dopustivo rješenje je : $x = (0, 2, 0, 1, 0)$.

Varijable x_j, $j \in B$ zovemo **bazičnim varijablama**, dok ostale varijable zovemo **nebazičnim**.

Lema 2.1 *Dopustivo rješenje x linearnog problema u standardnom obliku je bazično ako i samo ako su stupci matrice A_K linearno nezavisni, $K = \{j \in \{1, 2, \ldots, n\} : x_j > 0\}$.*

Dokaz. Jedan smjer je očit. Neka je x bazično dopustivo rješenje linearnog problema, te neka je B skup koji se sastoji od m elemenata, zadan kao u definiciji. Odnosno stupci matrice A_B su linearno nezavisni. Tada je očito $K \subseteq B$ i stupci matrice A_K su također linearno nezavisni.
S druge strane, neka je x dopustiv i stupci matrice A_K linearno nezavisni. Mogu nastupiti dva slučaja:

1. $|K| = m \Rightarrow$ tada jednostavno stavimo $B = K$.

2. $|K| < m \Rightarrow$ proširujemo K do m-članog skupa B dodavajući $m - |K|$ indeksa takvih da su stupci matrice A_B linearno nezavisni.

Algoritam drugog slučaja:
Najprije stavimo $B = K$, te ponavljamo sljedeći korak: ako matrica A ima stupac koji nije u linearnom rasponu stupaca matrice A_B, indeks takvog stupca dodamo u skup B. Čim ovaj koraj više nije moguće provesti, tada stupci matrice A_B čine bazu prostora stupaca matrice A. Dodatno, kako je matrica A matrica ranga m, to je $|B| = m$, kao što po definiciji i treba biti.
■

Propozicija 2.1 *Bazično dopustivo rješenje na jedinstven je način određeno bazom B. Odnosno, za svaki skup $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ koji ima m elemenata, takav da je A_B nesingularna, postoji najviše jedno dopustivo rješenje $x \in \mathbb{R}^n$, $x_j = 0$ za svaki $j \notin B$.*

Dokaz. Da bi x bio dopustiv, mora vrijediti $Ax = b$. Stavimo $N = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash B$. Tada je $Ax = A_B x_B + A_N x_N$. Da bi x bio bazično dopustivo rješenje vektor x_N nebazičnih varijabli mora biti nula. Zbog toga vektor bazičnih varijabli x_B zadovoljava $A_B x_B = b$. Kako je A_B nesingularna matrica, to sustava jednadžbi $A_B x_B = b$ ima točno jedno rješenje $\tilde{x}_B$. Ako su sve komponente vektora $\tilde{x}_B$ nenegativne, onda imamo točno jedno bazično dopustivo rješenje za promatrani skup B, u suprotnom nemamo nijedno rješenje. ■

Skup $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ koji ima m elemenata i za koji je A_B nesingularna, nazivamo **baza**.
Dodatno, ako B određuje bazično dopustivo rješenje, tj. jedinstveno rješenje sustava $A_B x_B = b$ je nenegativno, tada B zovemo **dopustiva baza**.

2.3.3 Vrhovi i bazična dopustiva rješenja

Najprije definirajmo *ekstremnu točku*, kao točku koja se ne može prikazati kao konveksna kombinacija nikoja dva vektora koja pripadaju poliedru. Te njoj alternativnu definiciju vrha poliedra.

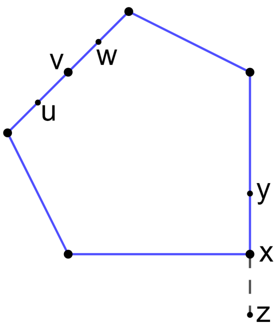
Definicija 2.16 *Neka je P konveksan skup. Za točku $x \in P$ kažemo da je **ekstremna točka** poliedra P ako ne možemo pronaći vektore $u, v \in P$, $u, v \neq x$ i skalar $\lambda \in [0,1]$, takve da je $x = \lambda u + (1-\lambda)\, v$.*

Definicija 2.17 *Neka je P poliedar. Za točku $x \in P$ kažemo da je **vrh** poliedra P ako postoji neki $c \in \mathbb{R}^n$, $c \neq 0$ takav da $c^T x > c^T y$, za svaki $y \in P$ i $y \neq x$.*

Primjer 2.4 *1. **Ekstremne točke:***

Na Slici 2.2 imamo primjer točke koja je ekstremna i jedne koja nije. Naime točka v nije ekstremna točka poliedra, jer se može zapisati kao konveksna kombinacija točaka u i w.

S druge strane točka x je ekstremna točka poliedra, jer da x možemo zapisati kao konveksnu kombinaciju neke dvije točke, npr. y i z. $x = \lambda y + (1-\lambda)\, z$, $\lambda \in [0,1]$, tada bi nastupio jedan od sljedećih slučajeva: $y \notin P$, $z \notin P$, $y = x$ ili $z = x$, a to je kontradikcija sa definicijom.



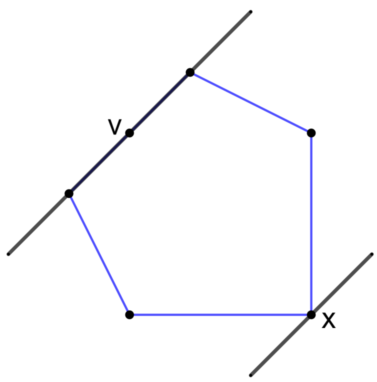
Slika 2.2: ekstremne točke

2. ***Vrhovi poliedra:***

   Na Slici 2.3 imamo primjer točke koja je vrh poliedra i jedne koja nije. Iz Definicije 2.17 zaključujemo da je točka vrh poliedra ako postoji hiperravnina koja dira zadani poliedar u samo toj točki.

   Dakle zaključujemo da točka v sa slike nije vrh poliedra, jer ne postoji hiperravnina koja dira poliedar samo u točki v.

   S druge strane točka x je vrh poliedra.



Slika 2.3: vrhovi poliedra

Neka su M_1, M_2, $M_3 \subseteq \mathbb{R}$ konačni skupovi, $a_i \in \mathbb{R}^n$, $b_i \in \mathbb{R}$, te $P \in \mathbb{R}^n$ poliedar definiran sljedećim sustavima linearnih jednadžbi i nejednadžbi:

$$\begin{aligned} a_i^T x &\geq b_i, \quad i \in M_1 \\ a_i^T x &\leq b_i, \quad i \in M_2 \\ a_i^T x &= b_i, \quad i \in M_3. \end{aligned}$$

Definicija 2.18 *Ako za vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ i za neki $i_0 \in M_1, M_2$ ili M_3 vrijedi $a_{i_0}^T x^* = b_{i_0}$, kažemo da je odgovrajući uvjet **aktivan uvjet u vektoru** x^*.*

Definicija 2.19 *Neka je $P \in \mathbb{R}^n$ poliedar definiran sljedećim sustavima linearnih jednadžbi i nejednadžbi:*

$$\begin{aligned} a_i^T x &\geq b_i, \quad i \in M_1 \\ a_i^T x &\leq b_i, \quad i \in M_2 \\ a_i^T x &= b_i, \quad i \in M_3, \end{aligned}$$

te neka je $x^* \in \mathbb{R}^n$.

1. *Za vektor $x^* \in \mathbb{R}^n$ ćemo reći da je **bazično rješenje** ako vrijedi:*
   (a) *svi uvjeti koji sadrže jednakosti su aktivni u x^*,*
   (b) *od svih ograničenja koji su aktivni u x^*, n njih je linearno nezavisno.*
2. *Ako je x^* bazično rješenje koje zadovoljava sva ograničenja, tada ga nazivamo **bazično dopustivo rješenje**.*

Sljedeći teorem govori o vezi između ekstremnih točaka, vrhova poliedra i bazičnog dopustivog rješenja.

Teorem 2.1 *Neka je $P \in \mathbb{R}^n$ neprazni poliedar, te $x^* \in P$. Tada su sljedeći uvjeti ekvivalentni:*

1. *x^* je vrh,*

2. *x^* je ekstremna točka,*

3. *x^* je bazično dopustivo rješenje.*

Dokaz. Dokaz provodimo u tri koraka:

1. x^* je vrh $\Rightarrow$ x^* je ekstremna točka:

   Neka je $x^* \in P$ vrh. Tada po Definiciji 2.17 postoji neki $c \in \mathbb{R}^n$ takav da je

   $$c^T x > c^T y, \text{ za svaki } y \in P \text{ i } y \neq x. \tag{1}$$

   Pretpostavimo suprotno, tj. neka x^* nije ekstremna točka. Tada je možemo zapisati kao konveksnu kombinaciju dviju točaka. Neka su $y, z \in P$, $y, z \neq x$ i neka je $\lambda \in [0, 1]$. Tada je $x^* = \lambda y + (1 - \lambda) z$. Zbog uvjeta (1) slijedi $c^T x > c^T y$ i $c^T x > c^T z$. Sada je

   $$\begin{aligned} c^T x^* &> \lambda c^T y + (1-\lambda) c^T z \\ c^T x^* &> c^T (\lambda y + (1-\lambda) z), \end{aligned}$$

   odnosno $x^* \neq \lambda y + (1 - \lambda) z$. Što je kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle ako je x^* vrh, onda je x^* i ekstremna točka.

2. x^* je ekstremna točka $\Rightarrow$ x^* je bazično dopustivo rješenje:

   Pretpostavimo da x^* nije bazično dopustivo rješenje, te dokažimo da tada x^* nije ni ekstremna točka poliedra. Tada tvrdnja slijedi kontrapozicijom.

   Neka je $I = i : a_i^T x^* = b_i$. Kako x^* nije bazično dopustivo rješenje, to ne postoji n linearno nezavisnih vektora a_i koji su aktivni u x^*. Dakle vektori $a_i, i \in I$ leže u pravom potprostoru od $\mathbb{R}^n$. Pa postoji $d \in \mathbb{R}^n$,

$d \neq 0$, takav da je $a_i^T d = 0$, za sve $i \in I$.

Neka je $\epsilon > 0$, te definirajmo $y = x^* + \epsilon d$ i $z = x^* - \epsilon d$.

Neka je $i \in I$, tada je

$$a_i^T y = a_i^T x^* + a_i^T \epsilon d = a_i^T x^* + 0 = a_i^T x^* = b_i$$

$$i$$

$$a_i^T z = a_i^T x^* - a_i^T \epsilon d = a_i^T x^* - 0 = a_i^T x^* = b_i.$$

S druge strane ako $i \notin I$, tada je $a_i^T x^* > b_i$, pa je

$$a_i^T y = a_i^T x^* + a_i^T \epsilon d > b_i + \epsilon a_i^T d \tag{2}$$

$$i$$

$$a_i^T z = a_i^T x^* - a_i^T \epsilon d > b_i - \epsilon a_i^T d. \tag{3}$$

Pretpostavimo da je $a_i^T d \geq 0$. Tada je iz (2) slijedi $a_i^T y > b_i$. A iz (3) dovoljno je uzeti

$$\epsilon < \frac{b_i + a_i^T x^*}{a_i^T d},$$

i slijedi $a_i^T z > b_i$.

Pretpostavimo da je $a_i^T d \leq 0$. Tada je iz (3) slijedi $a_i^T z > b_i$. A iz (2) dovoljno je uzeti

$$\epsilon < \frac{b_i - a_i^T x^*}{a_i^T d},$$

i slijedi $a_i^T y > b_i$.

U svim slučajevima dobijemo $y \neq x^*$, $y \in P$, ie $z \neq x^*$, $z \in P$, a kako je i

$$x^* = \frac{1}{2}\left(y + z\right),$$

x^* nije ekstremna točka poliedra P, jer se može prikazati kao konveksna kombinacija točaka $y, z \in P$.

3. x^* je bazično dopustivo rješenje $\Rightarrow$ x^* je vrh:

   Neka je x^* je bazično dopustivo rješenje. Sa I ćemo označiti skup svih indeksa aktivnih u x^*. $I = i : a_i^T x^* = b_i$. Definirajmo $c = \sum\limits_{i \in I} a_i$. Sada je

$$c^T x^* = \sum_{i \in I} a_i^T x^* = \sum_{i \in I} b_i.$$

   Također vrijedi za svaki $x \in P$ i za svaki i

$$c^T x = \sum_{i \in I} a_i^T x \leq \sum_{i \in I} a_i^T x^* = \sum_{i \in I} b_i = c^T x^*. \tag{4}$$

   Tada je x^* optimalno rješenje linearnog problema. Primijetimo da jednakost u (4) vrijedi ako i samo ako je $a_i^T x = b_i$ za svaki $i \in I$. Kako je prema pretpostavci x^* bazično dopustivo rješenje, to postoji n linerno nezavisnih vektora a_i aktivnih u x^*. Dakle sustav $a_i^T x = b_i$ ima jedinstveno rješenje, a to rješenje je x^*, pa vrijedi

$$c^T x^* > c^T x, \forall x \in P, \, x \neq x^*,$$

   pa je x^* vrh poliedra.

■

Poglavlje 3

Simpleks metoda

Simpleks metoda je jedna od metoda rješavanja problema linearnog programiranja. Rješenje pronalazimo prolazeći bridovima poliedra (dopustivog područja), zaustavljajući se u vrhovima, u smjeru smanjenja troška funkcije cilja. U konačno mnogo iteracija pronalazimo bazično dopustivo rješenje koje će ujedno biti i optimalno rješenje problema.

Uvodni koraci metode uključuju formuliranje linearnog problema u standardnom obliku, identifikaciju dopustivog početnog bazičnog rješenja i pripremu početne tablice simpleks metode. Nakon toga, algoritam iterativno primjenjuje pivot korake kako bi se kretao kroz vrhove dopustivog područja prema optimalnom rješenju.

Kroz ovo poglavlje promatrati ćemo linearni problem u standardnom obliku:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimizirajmo} & c^T x \\ \text{uz uvjete} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Neka je P dopustiv skup, a A matrica tipa $m \times n$.

3.1 Uvodni primjer

Primjer 3.1

$$\begin{aligned}
&\text{Maksimizirajmo vrijednosti} && x_1 + x_2 \\
&\text{među svim vektorima } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 && \\
&\text{uz ograničenja} && -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
& && x_1 \leq 3 \\
& && x_2 \leq 4 \\
& && x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

Primjer nije zadan u standardnom obliku. Iako su varijable nenegativne, moramo zamijeniti nejednadžbe jednadžbama, uvodeći slabe varijable. Želimo zadatak zapisati u standardnom obliku, u tome nam pomažu slabe varijable. U svakoj nejednakosti sa lijeve strane, gdje se nalaze varijable, dodamo jednu slabu varijablu. Zadatak u standardnom obliku:

$$\begin{aligned}
&\text{Maksimizirajmo vrijednosti} && x_1 + x_2 \\
&\text{među svim vektorima } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 && \\
&\text{uz ograničenja} && -2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\
& && x_1 + x_4 = 3 \\
& && x_2 + x_5 = 4 \\
& && x_1, x_2, \ldots, x_5 \geq 0
\end{aligned}$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sljedeći korak je napraviti *simpleks tablicu.* Prvo svaku slabu varijablu izrazimo iz zadanih jednadžbi, a na kraju sa z označimo funkciju cilja. U nastavku ćemo više reći o simpleks tablicama.

Simpleks tablica našeg primjera izgleda ovako:

$$\begin{array}{c} x_3 = 2 + 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 3 - x_1 \\ x_5 = 4 - x_2 \\ \hline z = x_1 + x_2 \end{array}$$

Svaka simpleks tablica je povezana sa jednim bazičnim dopustivim rješenjem. U našem slučaju ako zamijenimo x_1 i x_2 sa 0, dobijemo sljedeće: $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ i $x_5 = 4$. Za $B = \{3, 4, 5\}$ imamo doista da je $(0, 0, 2, 3, 4)$ bazično dopustivo rješenje.
Algoritam se sastoji od konačno mnogo koraka, u svakome simpleks tablicu dobivamo iz istih početnih podataka, ali drugačije zapisanih.

Varijable x_3, x_4 i x_5 su bazične, dok su x_1 i x_2 nebazične. U prvome koraku povećavamo jednu od varijabli funkcije cilja. Kako povećavanjem jedne i druge varijable dolazi do povećanja funkcije cilja z, svejedno je koju ćemo izabrati. Izaberimo x_2. Varijablu x_2 povećavamo, ali moramo paziti da varijable x_3, x_4 i x_5 ne budu manje od 0, jer je to uvjet zadatka. To nam govori da će jednadžbe koje određuju te varijable, ograničiti povećanje x_2.

Iz prve jednadžbe, uvjeta $x_3 \geq 0$ te činjenice da varijablu x_1 ne povećavamo, već je ona i dalje jednaka 0. Slijedi:

$$x_3 = 2 + 2x_1 - x_2$$

$$2 + 2x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 2$$

Zaključujemo da varijablu x_2 maksimalno možemo povećati na 2. Ako pogledamo drugu jednadžbu, zaključujemo da ona ne utječe na ograničenje povećanja x_2. A iz treće jednadžbe:

$$x_5 = 4 - x_2$$

$$4 - x_2 \geq 0$$

$$x_2 \leq 4$$

Iz čega slijedi, zbog toga što gledamo najstrože ograničenje, da je maksimalno povećanje $x_2 = 2$. Sada imamo $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, pa je

$$x_3 = 2 + 2x_1 - x_2 = 0$$

$$x_4 = 3 - x_1 = 3$$

$$x_5 = 4 - x_2 = 2.$$

Dakle x_3 postaje nula, a x_2 razlicit od nula. Prebacujemo x_3 na desnu stranu jednadžbe, jer je sada x_3 nebazična varijabla, a x_2 na lijevu stranu, jer je x_2 bazična varijabla.

$$x_3 = 2 + 2x_1 - x_2$$

$$x_2 = 2 + 2x_1 - x_3$$

Supstitucijom x_2 dobijemo sljedeću simpleks tablicu:

$$\begin{array}{c} x_2 = 2 + 2x_1 - x_3 \\ x_4 = 3 - x_1 \\ x_5 = 2 - 2x_1 + x_3 \\ \hline z = 2 + 3x_1 - x_3 \end{array}$$

Kako su $x_1 = 0$ i $x_3 = 0$, zaista imamo da je za $B = \{2, 4, 5\}$, $(0, 2, 0, 3, 2)$ bazično dopustivo rješenje. Vrijednost funkcije cilja je $z = 2$.

Proces pretvaranja jedne simpleks tablice u drugu zove se **pivot korak**. U svakom pivot koraku jedna nebazična varijabla postane bazična i obratno.

Nastavimo sa drugim korakom. Kako je funkcija cilja $z = 2 + 3x_1 - x_3$, vidimo da povećanjem x_3 funkcija cilja se smanjuje, što nam nije u cilju. S druge strane povećanjem x_1 funkcija cilja se povećava. Dakle u drugome koraku povećavamo varijablu x_1. Iz prve jednadžbe imamo:

$$x_2 = 2 + 2x_1 - x_3$$

$$2 + 2x_1 - x_3 \geq 0$$

$$2x_1 \geq -2$$

$$x_1 \geq -1,$$

no ovaj rezultat nam ne govori ništa o ograničenju povećanja varijable x_1. Pogledajmo drugu jednadžbu:

$$x_4 = 3 - x_1$$

$$3 - x_1 \geq 0$$

$$x_1 \leq 3$$

Zaključujemo da je maksimalno povećanje x_1 na 3. I na kraju iz treće jednadžbe slijedi:

$$x_5 = 2 - 2x_1 + x_3$$

$$2 - 2x_1 + x_3 \geq 0$$

$$2x_1 \leq 2 + x_3$$

$$x_1 \leq 1$$

Dakle novo maksimalno povećanje je $x_1 = 1$. Kako je $x_3 = 0$ imamo:

$$x_2 = 2 + 2x_1 - x_3 = 4$$

$$x_4 = 3 - x_1 = 2$$

$$x_5 = 2 - 2x_1 + x_3 = 0$$

U ovome koraku x_5 postaje nula, a x_1 različit od nula. Zbog toga, x_5 prebacujemo u nebazične varijable, a x_1 u bazične.

$$x_5 = 2 - 2x_1 + x_3$$
$$2x_1 = 2 + x_3 - x_5$$
$$x_1 = 1 + \frac{x_3}{2} - \frac{x_5}{2}$$

Supstitucijom x_1 dobijemo novu simpleks tablicu:

$$\begin{array}{c}
x_1 = 1 + \dfrac{x_3}{2} - \dfrac{x_5}{2} \\
x_2 = 4 - x_5 \\
x_4 = 2 - \dfrac{x_3}{2} + \dfrac{x_5}{2} \\
\hline
z = 5 + \dfrac{x_3}{2} - \dfrac{3x_5}{2}
\end{array}$$

Sada je za $B = \{1, 2, 4\}$, $(1, 4, 0, 2, 0)$ bazično rješenje. Također vrijednost funkcije cilja je $z = 5$.

Nastavimo sa trećim korakom. Kako povećanjem x_5 vrijednost funkcije cilja z se smanjuje, a povećanjem x_3 z se povećava, u ovom koraku povećavamo varijablu x_3. Iz prve jednadžbe dobijemo:

$$x_1 = 1 + \frac{x_3}{2} - \frac{x_5}{2}$$
$$1 + \frac{x_3}{2} - \frac{x_5}{2} \geq 0$$
$$2 + x_3 - x_5 \geq 0$$
$$x_3 \geq -2,$$

što nam ne daje ograničenje povećanja varijable. Druga jednadžba također ne daje ograničenja za varijablu x_3, pa pogledajmo treću jednadžbu:

$$x_4 = 2 - \frac{x_3}{2} + \frac{x_5}{2}$$
$$2 - \frac{x_3}{2} + \frac{x_5}{2} \geq 0$$
$$4 - x_3 + x_5 \geq 0$$
$$x_3 \leq 4$$

Dakle maksimalno povećanje varijable x_3 je $x_3 = 4$. Kako je i $x_5 = 0$ imamo $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_4 = 0$. Dakle prebacujemo x_4 u nebazične, a x_3 u bazične varijable.

$$x_4 = 2 - \frac{x_3}{2} + \frac{x_5}{2}$$
$$2x_4 = 4 - x_3 + x_5$$
$$x_3 = 4 + x_5 - 2x_4$$

Supstitucijom x_3 dobijemo novu simpleks tablicu:

$$\begin{array}{c} x_3 = 4 + x_5 - 2x_4 \\ x_1 = 3 - x_4 \\ x_2 = 4 - x_5 \\ \hline z = 7 - x_4 - x_5 \end{array}$$

Imamo da je za $B = \{1, 2, 3\}$, $(3, 4, 4, 0, 0)$ bazično dopustivo rješenje. Vrijednost funkcije cilja je $z = 7$.

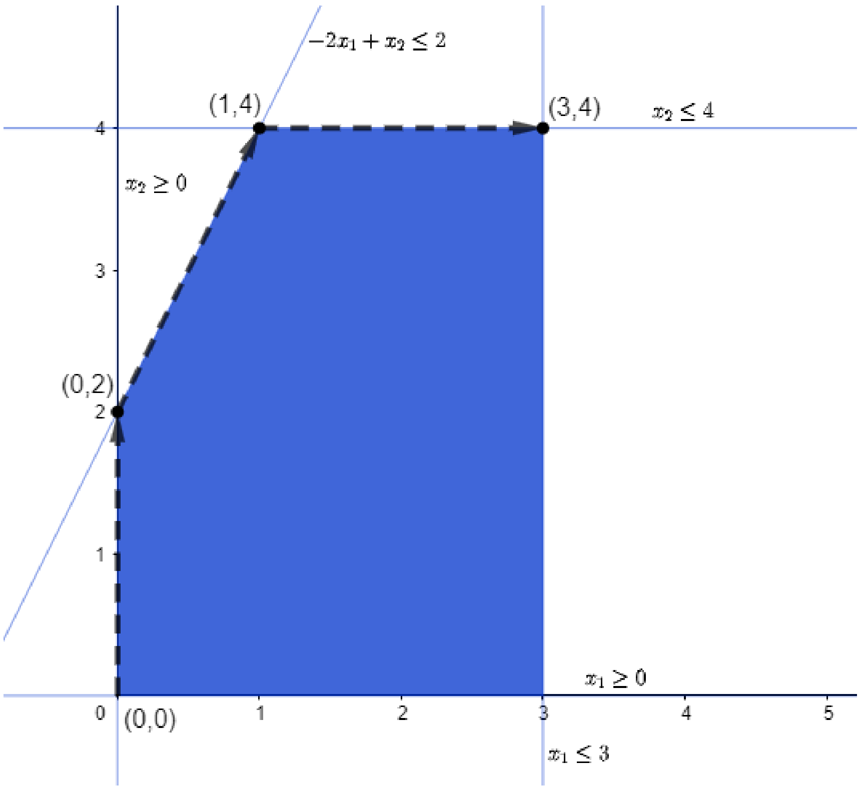
Kada bismo krenuli sa sljedećim korakom, nastao bi problem jer sada povećanjem varijable x_4 i varijable x_5 dolazi do smanjenja funkcije cilja z. To znači da smo pronašli rješenje. Pogledajmo zašto.

Neka je $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, \tilde{x}_4, \tilde{x}_5)$ proizvoljno dopustivo rješenje primjera, te neka funkcija cilja postiže vrijednost $\tilde{z}$. Također neka $\tilde{x}$ i $\tilde{z}$ zadovoljavaju jednadžbe dobivene u posljednjoj simpleks tablici. Iz te činjenice slijedi da $\tilde{z}$ mora biti:

$$\tilde{z} = 7 - \tilde{x}_4 - \tilde{x}_5.$$

Zajedno sa uvjetima $\tilde{x}_4 \geq 0$ i $\tilde{x}_5 \geq 0$ dobijemo $\tilde{z} \leq 7$. Ako je $\tilde{z} = 7$, tada je $\tilde{x}_4 = 0$ i $\tilde{x}_5 = 0$, a iz jednadžbi iz simpleks tablice dobijemo $\tilde{x}_1 = 3$, $\tilde{x}_2 = 4$ i $\tilde{x}_3 = 4$. Dakle $(3, 4, 4, 0, 0)$ je optimalno rješenje našeg linearnog problema.

Rekli smo da simpleks metoda hoda bridovima dopustivog prostora i u konačno mnogo koraka se zaustavlja u baz̆ičnom dopustivom rješenju. Pogledajmo kako simpleks metoda geometrijski izgleda.

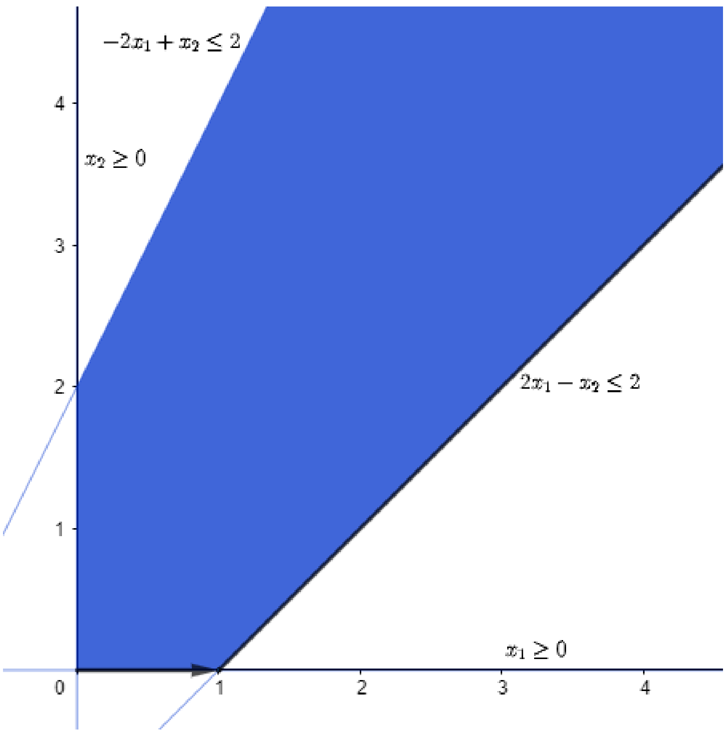


3.1.1 Iznimke simpleks metode

Kroz sljedeća tri primjera prikazat ćemo posebne slučajeve koji se mogu dogoditi, te način na koji simpleks metoda funkcionira na takvim slučajevima.

Primjer 3.2 *Neograničenost*

$$
\begin{array}{ll}
\text{Maksimizirajmo vrijednosti} & x_1 \\
\text{među svim vektorima } (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 & \\
\text{uz ograničenja} & -2x_1 + x_2 \leq 2 \\
 & 2x_1 - x_2 \leq 2 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
\end{array}
$$



Nakon što uvedemo slabe varijable dobijemo sljedeću simpleks tablicu:

$$
\begin{array}{c}
x_3 = 2 + 2x_1 - x_2 \\
x_4 = 2 - 2x_1 + x_2 \\
\hline
z = x_1
\end{array}
$$

Varijabla funkcije cilja je x_1 pogledajmo koliko je možemo povećati:

$$x_3 = 2 + 2x_1 - x_2$$

$$2 + 2x_1 - x_2 \geq 0$$

$$x_1 \geq -1$$

$$x_4 = 2 - x_1 + 2x_2$$

$$2 - 2x_1 + x_2 \geq 0$$

$$x_1 \leq 1$$

Dakle maksimalno povećanje za x_1 je 1. Iz $x_1 = 1$ dobijemo $x_3 = 4$ i $x_4 = 0$. Dakle x_4 postaje nebazična, a x_1 bazična varijabla. Vrijedi i $x_1 = 1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_4}{2}$, pa dobijemo sljedeću simpleks tablicu:

$$\begin{array}{c} x_1 = 1 + \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{x_4}{2} \\ x_3 = 4 + x_4 \\ \hline z = 1 + \dfrac{x_2}{2} - \dfrac{x_4}{2} \end{array}$$

Kako povećanjem x_4 smanjuje se vrijednost funkcije cilja, a povećanjem x_2 se povećava, pogledajmo ograničenja za x_2, ako postoje.

$$x_1 = 1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_4}{2}$$

$$1 + \frac{x_2}{2} - \frac{x_4}{2} \geq 0$$

$$2 + x_2 - x_4 \geq 0$$

$$x_2 \geq -2$$

Nijedna jednadžba nam ne daje ograničenja za maksimalno povećanje varijable x_2, pa je možemo uzeti proizvoljno veliku. Kako povećanjem x_2 dolazi i do povećanja funkcije cilja z, to za proizvoljno velik x_2 funkcija cilja postiže proizvoljno velike vrijednosti.

Dakle ako uzmemo proizvoljno velik $t \geq 0$, i neka je $x_2 = t$, te $x_1 = \frac{t}{2} + 1$. Iz prve tablice, uvrštavanjem x_1 i x_2, imamo $x_3 = 4$ i $x_4 = 0$, te $z = t + 1$. Provjerimo da je to dopustivo rješenje.

$$Ax = b$$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{t}{2} + 1 \\ t \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dakle polubeskonačna zraka

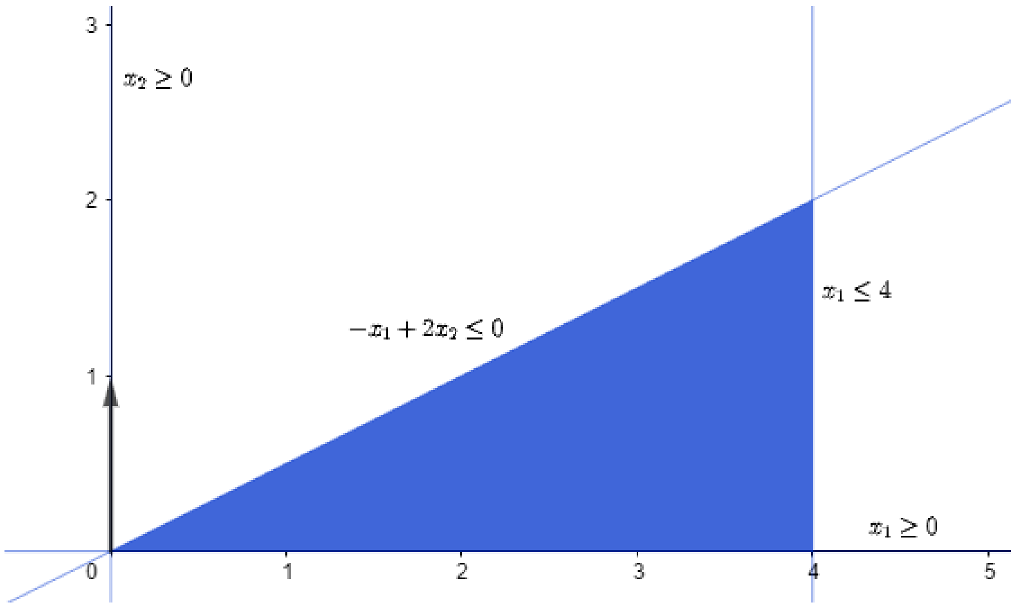
$$\{(1,0,4,0) + t\left(\frac{1}{2}, 1, 0, 0\right), \, t \geq 0\}$$

sadržana je u skupu svih dopustivih rješenja. Budući da funkcija cilja na zraci postiže proizvoljno velike vrijednosti, polubeskonačna zraka svjedoči neograničenosti linearnog problema.

Za razliku od prethodnog specifičnog slučaja, gdje je nebazična varijabla mogla biti proizvoljno velika, u slučaju degeneracije, nejednakosti u jednadžbama ne dopuštaju povećanje nebazične varijable. Naime, čak je moguće da nećemo uopće moći povećati vrijednost funkcije cilja.
Pogledajmo primjer.

Primjer 3.3 ***Degeneracija***

Maksimizirajmo vrijednosti	x_2
među svim vektorima $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$	
uz ograničenja	$-x_1 + 2x_2 \leq 0$
	$x_1 \leq 4$
	$x_1, x_2 \geq 0$



Pretvarajući zadatak u standardni oblik dobijemo prvu simpleks tablicu:

$$\begin{array}{c} x_3 = x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 4 - x_1 \\ \hline z = x_2 \end{array}$$

Jedini kandidat za ulazak u bazu je varijabla x_2, ali je iz prve jednadžbe očito da povećanjem x_2 dolazi do smanjenja x_3, odnosno varijabla postaje negativna, što je kontradiktorno uvjetu $x_3 \geq 0$.

U ovome slučaju morat ćemo izvesti degenerirani pivot korak, tj. korak koji ne daje napredak funkciji cilja. U ovome slučaju x_3 postaje nebazična varijabla, a x_2 bazična. Dobijemo sljedeću tablicu:

$$\begin{array}{c} x_2 = \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{x_3}{2} \\ x_4 = 4 - x_1 \\ \hline z = \dfrac{x_1}{2} - \dfrac{x_3}{2} \end{array}$$

Sada povećanjem x_1 dolazi i do povećanja funkcije cilja, pa x_1 uvodimo u bazu.

$$\begin{array}{c} x_1 = 4 - x_4 \\ x_2 = 2 - \frac{x_4}{2} - \frac{x_3}{2} \\ \hline z = 2 - \frac{x_4}{2} - \frac{x_3}{2} \end{array}$$

Imamo $x_4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_2 = 2$ i $x_1 = 4$. Te je $(4, 2, 0, 0)$ ujedno i optimalno rješenje.

Linearne programe kod kojih više dopustivih baza određuje jedno bazično dopustivo rješenje, a zbog zadanih uvjeta na silu radimo degeneriran pivot korak, nazivamo **degenerirani linearni problemi**.

Općenito može se dogoditi da se jedna simpleks tablica pojavi više puta u nizu simpleks tablica, pa algoritam može proći neograničen broj koraka, a ne napraviti nikakav napredak. Takav slučaj nazivamo **ciklus**. U slučaju da zadani linearni program nije cikličan, nužno je da u konačno mnogo koraka algoritam dođe do kraja, zbog toga što postoji ograničeno mnogo različitih simpleks tablica za određeni linearni program. U nastavku ćemo reći kako spriječiti ciklus.

Da bismo uopće mogli krenuti sa simpleks metodom potrebna nam je dopustiva baza koju čine bazične varijable. Inače uvođenjem slabih varijabli možemo ih koristiti i kao dopustivu bazu.
Pogledajmo sljedeći linearni problem zadan u standardnom obliku:

Primjer 3.4 ***Neizvedivost***

Maksimizirajmo vrijednosti	$2x_1 + x_2$
među svim vektorima $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$	
uz ograničenja	$3x_1 + x_2 + x_3 = 3$
	$2x_1 + x_3 = 2$
	$x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Pokušat ćemo formirati dopustivo rješenje stavljajući najprije $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ i $x_3 = 0$. Uvedimo slabe varijable kao *"ispravke"* neizvedivosti problema na sljedeći način: $x_4 = 3 - 3x_1 - x_2 - x_3$ i $x_5 = 2 - 2x_1 - x_3$. Pronalazak nenegativnih varijabli x_1, x_2 i x_3 bez ispravka možemo prikazati sljedećim linearnim problemom:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimizirajmo vrijednosti} & -x_4 - x_5 \\ \text{uz ograničenja} & 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3 \\ & 2x_1 + x_3 + x_5 = 2 \\ & x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{array}$$

Vrijednost funkcije cilja $-x_4 - x_5$ je 0 točno tamo gdje postoji dopustivo rješenje, odnosno gdje postoje vrijednosti x_1, x_2 i x_3 bez ispravka. Sa simpleks metodom možemo započeti kada iskažemo funkciju cilja preko nebazičnih varijabli, odnosno: $z = -5 + 5x_1 + x_2 + 2x_3$.

Pokušajmo uvesti x_2 u bazu. Ako gledamo ograničenja, maksimalno povećanje je $x_2 = 3$, time je $x_5 = 0$, odnosno x_5 postaje nebazična varijabla. Pa imamo:

$$\begin{array}{c} x_2 = 3 - 3x_1 - x_3 - x_4 \\ x_5 = 2 - 2x_1 - x_3 \\ \hline z = -2 + 2x_1 + x_3 - x_4 \end{array}$$

Sada uvodimo x_3 u bazu. Maksimalno povećanje je $x_3 = 2$, čime x_5 postaje nebazična varijabla. Pa je $x_3 = 2 - 2x_1 - x_5$. Odnosno:

$$\begin{array}{c} x_2 = 1 - x_1 + x_5 - x_4 \\ x_3 = 2 - 2x_1 - x_5 \\ \hline z = -x_4 - x_5 \end{array}$$

Dobiveno rješenje $(0, 1, 2, 0, 0)$ daje bazično dopustivo rješenje problema $(x_1, x_2, x_3) = (0, 1, 2)$.

Iz posljednje simpleks tablice, ostavljajući bazične, a izbacivajući slabe varijable, možemo dobiti simpleks tablicu iz koje pomoću jednog koraka možemo doći do rješenja. Funkciju cilja dobijemo iz početnih uvjeta.

$$\begin{array}{c} x_2 = 1 - x_1 \\ x_3 = 2 - 2x_1 \\ \hline z = 1 + x_1 \end{array}$$

Sada je dovoljan jedan korak, povećavajući x_1, da dođemo do optimalnog rješenja, a to je $(1, 0, 0)$.

3.2 Simpleks tablice

U ovome poglavlju uvodimo definicije, teoreme i dokaze kako bismo opravdali sve što smo napravili u uvodnom primjeru.
Promotrimo linearni problem u standardnom obliku:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimizirajmo} & c^T x \\ \text{uz uvjete} & Ax = b, \\ & x \geq 0. \end{array}$$

Primjenjujući simpleks metodu na linearni problem, dobijemo niz simpleks tablica. Svaka simpleks tablica odgovara dopustivoj bazi B i određuje bazično dopustivo rješenje.
Definirajmo simpleks tablicu na način da bazične varijable i funkciju cilja z izrazimo preko nebazičnih varijabli.

Definicija 3.1 ***Simpleks tablica*** $\mathcal{T}(B)$ *određena dopustivom bazom B je sistem $m+1$ linearnih jednadžbi sa varijablama $x_1, x_2, \ldots, x_n$ i z koja ima isti skup rješenja kao i sustav $Ax = b$, a matrični zapis izgleda ovako:*

$$\begin{array}{c} x_B = \boldsymbol{p} + Q x_N \\ \hline z = z_0 + \boldsymbol{r}^T x_N \end{array}$$

gdje je x_B *vektor baznih varijabli,* $N = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash B$*,* x_N *vektor nebazičnih varijabli,* $\boldsymbol{p} \in \mathbb{R}^m$*,* $\boldsymbol{r} \in \mathbb{R}^{n-m}$*,* Q *je matrica tipa* $m \times (n-m)$*, te* $z_0 \in \mathbb{R}$.

Bazično dopustivo rješenje koje odgovara simpleks tablici dobijemo na sljedeći način: izvršimo supstituciju $x_N = 0$, pa imamo $x_B = p$. Zbog dopustivosti baze B imamo $p \geq 0$, a funkcija cilja ima vrijednost $z = z_0 + r^T 0 = z_0$. Sljedeća lema nam govori o tome kako možemo izraziti vrijednosti r, p, Q, z_0.

Lema 3.1 *Za svaku dopustivu bazu* B *postoji točno jedna simpleks tablica, zadana sa:*

$$
\begin{gathered}
Q = -A_B^{-1} A_N, \\
p = A_B^{-1} b, \\
z_0 = c_B^T A_B^{-1} b \\
i \\
r = c_N - \left(c_B^T A_B^{-1} A_N\right)^T .
\end{gathered}
$$

Dokaz. (*Egzistencija*): Najprije izrazimo x_B.

$$
\begin{gathered}
Ax = b \\
A_B x_B + A_N x_N = b \\
\left(A_B^{-1}\right) * \backslash A_B x_B = b - A_N x_N \\
x_B = A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N .
\end{gathered}
$$

Uvrstimo u z:

$$
\begin{gathered}
z = c^T x \\
z = c_B^T x_B + c_N^T x_N \\
z = c_B^T \left(A_B^{-1} b - A_B^{-1} A_N x_N\right) + c_N^T x_N \\
z = c_B^T A_B^{-1} b + \left(c_N^T - c_B^T A_B^{-1} A_N\right) x_N .
\end{gathered}
$$

Iz čega slijedi: $Q = -A_B^{-1}A_N$, $p = A_B^{-1}b$, $z_0 = c_B^T A_B^{-1} b$ i $r = c_N - \left(c_B^T A_B^{-1} A_N\right)^T$.
(*Jedinstvenost*): Neka p, r, Q, z_0 i p', r', Q', z_0' određuju neku simpleks tablicu za dopustivu bazu B. Kako izbor x_N jedinstveno određuje i x_B, to je $p + Qx_N = p' + Q'x_N$, za svaki $x_N \in \mathbb{R}^{n-m}$. Stavimo $x_N = 0$ i slijedi $p = p'$. Ostale jednakosti se dokažu slično, pa imamo i $z_0 = z_0'$, $r = r'$ i $Q = Q'$. ■

3.3 Simpleks metoda općenito

Definicija 3.2 *Ako je $\mathcal{T}(B)$ simpleks tablica takva da koeficijenti nebazičnih varijabli u posljednjem redu nisu pozitivni, tj.*

$$r \leq 0,$$

onda je odgovarajuće bazično dopustivo rješenje ***optimalno****.*

Kao što je i očekivano, bazično dopustivo rješenje koje odgovara simpleks tablici iz Definicije 3.2 ima vrijednost funkcije cilja jednaku z_0. S druge strane, za svako dopustivo rješenje $\tilde{x}$ vrijedi $\tilde{x}_N \geq 0$ i $c^T\tilde{x} = z_0 + r^T\tilde{x}_N \leq z_0$.

U svakom koraku simpleks metode, iz *"stare"* baze B dobijemo *"novu"* bazu B', te iz simpleks tablice $\mathcal{T}(B)$ dobijemo odgovarajuću $\mathcal{T}(B')$. Uvijek prvo biramo nebazičnu varijablu koja ulazi u bazu x_v, zatim dobijemo bazičnu varijablu koja izlazi iz baze x_u. Zbog toga je $B' = (B \backslash \{u\}) \cup \{v\}$.

Tvrdnja 3.1 *Nebazična varijabla može ući u bazu ako i samo ako su koeficijenti uz varijablu u posljednjem redu simpleks tablice* ***pozitivni****.*

Napomena 3.1

- *Pozitivnost koeficijenta u zadnjem redu simpleks tablice dovodi do povećanja funkcije cilja.*

- *Naravno, postoje slučajevi kada je više koeficijenata uz različite varijable pozitivno, o izboru varijable koja u tom slučaju ulazi u bazu ćemo više reći u nastavku.*

Tvrdnja 3.2 *Varijabla koja izlazi iz baze (x_u) mora biti takva da njena nenegativnost, zajedno sa odgovarajućom jednadžbom simpleks tablice (x_u na lijevoj strani), najstrože ograničava povećanje varijable koja ulazi u bazu (x_v).*

Napomena 3.2 *Neka je $B = \{k_1, k_2, \dots, k_m\}$, $N = \{l_1, l_2, \dots l_{n-m}\}$, te $k_1 < k_2 < \dots < k_m$ i $l_1 < l_2, < \dots < l_{n-m}$. Tada je i-ta jednadžba simpleks tablice oblika*

$$x_{k_i} = p_i + \sum_{j=1}^{n-m} q_{ij} x_{l_j}.$$

Neka je $\beta \in \{1, 2, \dots, n-m\}$ indeks za koji je $v = l_\beta$. Slično, $u = k_\alpha$. Imajmo na umu da indeks varijable koja izlazi iz baze još nije izabran.
Zbog činjenice da nebazične varijable x_{l_j}, $j \neq \beta$ moraju ostati nula, uvjet nenegativnosti $x_{k_i} \geq 0$ ograničava povećanje varijable koja ulazi u bazu nejednakosti $-q_{i\beta} x_{l_\beta} \leq p_i$. Slijede dva slučaja:

1. *$q_{i\beta} \geq 0 \Rightarrow$ ova nejednakost ne ograničava povećanje varijable x_{l_j},*

2. *$q_{i\beta} < 0 \Rightarrow$ ova nejednakost daje sljedeće ograničenje: $x_{l_j} \leq \frac{-p_i}{q_{i\beta}}$.*

Zbog toga, varijabla koja izlazi iz baze (x_{k_α}) mora zadovoljavati dva uvjeta:

$$q_{\alpha\beta} < 0 \tag{3.1}$$

$$i$$

$$-\frac{p_\alpha}{q_{\alpha\beta}} = \min\left\{-\frac{p_i}{q_{i\beta}} : q_{i\beta} < 0, i = 1, 2, \dots, m\right\} \tag{3.2}$$

Dakle, u simpleks tablici promatramo retke kod kojih je koeficijent uz varijablu x_v negativan. Ukoliko ne postoji redak gdje je x_v negativan, odnosno minimum iz drugog uvjeta je prazan skup, tada je linearni program neograničen, samim time računanje staje.

Sljedeća lema služi kao dokaz da simpleks metoda zaista prolazi kroz skup svih dopustivih rješenja. Dokaz leme nije ključan za razumijevanje simpleks metode, pa navodimo lemu bez dokaza.

Lema 3.2
1. *Neka je B dopustiva baza, $\mathcal{T}(B)$ odgovarajuća simpleks tablica. Neka su x_v, koja ulazi u bazu, i x_u, varijabla koja izlazi iz baze, odabrane po kriterijima Tvrdnje 3.1 i Tvrdnje 3.2. Tada je $B' = (B \backslash \{u\}) \cup \{v\}$ također dopustiva baza.*
2. *Ako nijedna varijabla x_u ne zadovoljava uvjete Tvrdnje 3.2, tada je linearni program neograničen. Za svaki $t \geq 0$ dobijemo dopustivo rješenje supsitucijom $x_v = t$, i 0 za svaku preostalu nebazičnu varijablu. Kako $t \to \infty$, to vrijednost funkcije cilja za sva dopustiva rješenja također teži u beskonačnost.*

3.3.1 Računanje početne dopustive baze

Za linearni problem u standardnom obliku:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimizirajmo} & c^T x \\ \text{uz uvjete} & Ax = b, \\ & x \geq 0 \end{array}$$

najprije sredimo jednadžbe da vrijedi $b \geq 0$. Odnosno za svaku jednadžbu gdje je $b_i < 0$ množimo tu jednadžbu sa -1. Zatim uvodimo m novih varijabli $x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}$ i riješimo sljedeći linearni problem:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimizirajmo} & -(x_{n+1}+x_{n+2}+\ldots+x_{n+m}) \\ \text{uz uvjete} & \bar{A}\bar{x}=b, \\ & \bar{x}\geq 0 \end{array}$$

gdje je $\bar{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_{n+m})$ vektor svih varijabli, a $\bar{A}=(A|I_m)$ matrica koju dobijemo dodavajući jediničnu matricu tipa $m\times m$ matrici A s desna. Originalni linearni problem je dopustiv ako i samo ako svako optimalno rješenje pomoćnog problema zadovoljava sljedeći uvjet:

$$x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_{n+m}=0.$$

Pomoćni problem se može direktno riješiti simpleks metodom, jer varijable $x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$ čine početnu dopustivu bazu. Ukoliko ne vrijedi, $x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_{n+m}=0$ linearni program je nedopustiv.
Pretpostavimo da vrijedi $x_{n+1}=x_{n+2}=\ldots=x_{n+m}=0$. Simpleks metoda uvijek vraća dopustivo bazično rješenje.

- Ako nijedna od novih varijabli $x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$ nije sadržana u bazi dobivenog optimalnog rješenja, tada je dobivena baza ujedno i baza originalnog problema. Sada imamo bazu i možemo započeti simpleks metodu.

- Ako se neke od novih varijabli $x_{n+1},x_{n+2},\ldots,x_{n+m}$ nalaze u dobivenoj bazi, tada nam ta baza ne može poslužiti kao baza originalnog problema. Općenito, optimalno rješenje ima najviše m nenula elemenata, te su stupci matrice A linearno nezavisni. U slučaju da je tih stupaca manje od m, moramo dodati više linearno neavisnih stupaca matrici A i dobiti bazu, kao u dokazu Leme 2.1.

3.4 Pivot pravila

Pivot pravilo je pravilo odabira varijable koja ulazi u bazu, u slučaju kada imamo više kandidata. Pivot pravila mogu olakšati odabir varijable koja napušta bazu.
Pod *"varijablom koju poboljšavamo"* mislimo na kandidata za ulazak u bazu. Nabrojati ćemo nekoliko osnovnih pivot pravila.

1. *Najveći keoficijent:* za varijablu koju poboljšavamo odaberemo onu s najvećim koeficijentom u zadnjem retku simpleks tablice, odnosno u retku funkcije cilja z. Ovo originalno pravilo maksimizira poboljšanje funkcije cilja z *po jedinici povećanja* varijable koja ulazi u bazu.

2. *Najveće povećanje:* za varijablu koju poboljšavamo biramo onu koja dovodi do najvećeg *apsolutnog* poboljšanja funkcije cilja z. Ovo pravilo je računski skuplje od prvog pravila, ali lokalno maksimizira napredak.

3. *Najstrmiji rub:* za varijablu koju poboljšavamo biramo onu čiji ulazak u bazu pomiče trenutno bazično dopustivo rješenje u smjeru najbliže smjeru vektora c, odnosno zapisano formulom, omjer:
$$\frac{c^T\left(x_{novi} - x_{stari}\right)}{||x_{novi} - x_{stari}||}$$
trebamo maksimizirati. x_{stari} je bazično dopustivo rješenje trenutne simpleks tablice, a x_{novi} bazično dopustivo rješenje simpleks tablice koju bismo dobili da razmatrana varijabla uđe u bazu.
Pravilo *najstrmijeg ruba* je najbrže, pa samim time i najbolje, među svim pivot pravilima.

4. *Blandovo pravilo:* za varijablu koju poboljšavamo izaberemo onu sa najmanjim indeksom. Također, za varijablu koja izlazi iz baze također

biramo onu sa najmanjim indeksom. Ovo pravilo je bitno u sprječavanju ciklusa, pa ćemo o tome više reći u nastavku.

5. *Slučajni rub:* varijablu koju poboljšavamo izaberemo na slučajan način između svih varijabli koje možemo poboljšati.

3.5 Ciklusi simpleks metode

U Primjeru 3.3 smo uveli pojam ciklusa, odnosno cikliranja. Ovakvi slučajevi se događaju veoma rijetko u praksi, pa mnoge implementacije algoritma ignoriraju mogućnost nastanka ciklusa.
Postoji nekoliko načina da spriječimo nastanak ciklusa.
Leksikografsko pravilo:
Ciklusi mogu nastati kod degeneriranih linearnih problema, jer degeneracija može dovesti do veza kandidata za varijablu koja izlazi iz baze. Leksikografsko pravilo sprječava takve veze varijabli na sljedeći način:
Neka je S skup svih indeksa koji su kandidati za varijablu koja izlazi iz baze, takvih da za svaki $\alpha \in S$ vrijedi:

$$q_{\alpha\beta} < 0 \text{ i } -\frac{p_\alpha}{q_{\alpha\beta}} = \min\left\{-\frac{p_i}{q_{i\beta}} : q_{i\beta} < 0, i = 1, 2, \ldots, m\right\}.$$

Sada izaberemo indeks $\alpha \in S$ za koji je vektor

$$\left(\frac{q_{\alpha 1}}{q_{\alpha\beta}}, \frac{q_{\alpha 2}}{q_{\alpha\beta}}, \ldots, \frac{q_{\alpha(n-m)}}{q_{\alpha\beta}}\right)$$

najmanji u leksikografskom poretku.

Definicija 3.3 *Za vektor $x \in \mathbb{R}^k$ ćemo reći da je **leksikografski manji** od vektora $y \in \mathbb{R}^k$ ako vrijedi $x_1 < y_1$ ili $x_1 = y_1$ i $x_2 < y_2$, i tako dalje. Odnosno, ako postoji indeks $j \leq k$ takav da je $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2, \ldots, x_{j-1} = y_{j-1}$ i $x_j < y_j$.*

Kako je matrica A ranga m, bilo koja od dva takva vektora se razlikuju u nekom indeksu. Zbog toga možemo razriješiti veze između bilo kojeg skupa S od redaka. Odabrani indeks retka određuje izlaznu varijablu.
Nedostatak Leksikografskog pravila je činjenica da to pravilo može biti dosta skupo.

Geometrijska interpretacija: degeneracija znači da skup rješenja F sistema $Ax = b$ sadrži točku koja ima više od $n - m$ komponenti koje su nula. Leksikografsko pravilo ima isti učinak kao i dobro odabrana perturbacija (mijenjajući vektor b) skupa F. Zbog toga se i optimalno rješenje promijeni za malo.

Blandovo pravilo:

Blandovo pravilo sprječava nastanak ciklusa linearnog programa, ali je i najsporije pivot pravilo, pa se većinom izbjegava.

Teorem 3.1 *Simpleks metoda u kojoj se koristi Blandovo pivot pravilo, je uvijek ograničena, odnosno nastanak ciklusa je nemoguć.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji ciklus, i neka je F skup svih varijabli koji tijekom metode barem jednom ulaze ili izlaze iz baze. Takve varijable nazivamo *promjenjivim varijablama.*
Tvrdnja: Sve baze koje susrećemo u ciklusu daju isto bazično dopustivo rješenje, i u tom rješenju, sve promjenjive varijable su nula.
Dokaz tvrdnje: Neka je B dopustiva baza koju susrećemo u ciklusu, $N = \{1, 2, \ldots, n\} \backslash B$ i $B' = (B \backslash \{u\}) \cup \{v\}$ sljedeća baza. Od svih nebazičnih varijabli u trenutku kada iz baze B prelazimo u bazu B' jedini kandidat za ulazak u bazu je x_v, ostale nebazične varijable ostaju nula. Znamo da koeficijent uz x_v u zadnjem redu simpleks tablice mora biti pozitivan. U tom slučaju, kako je $z = z_0 + r^T x_N$, vidimo da će se i funkcija cilja povećavati. Zbog toga bazično dopustivo rješenje koje odgovara bazama B iB', slaže se

u svim komponentama skupa N. Ako se prisjetimo Propozicije 2.1, znamo da je bazično dopustivo rješenje na jedinstven način određeno bazom, pa zajedničke komponente iz N na jedinstven način određuju i preostale. Dakle bazično dopustivo rješenje se ne mijenja. Time je tvrdnja dokazana.

Krenimo sada sa dokazom teorema.

Neka je v najveći indeks skupa F. B baza ciklusa prije ulaska varijable x_v u bazu, a B' baza ciklusa prije izlaska varijable x_v iz baze. Neka su r, p, Q, z_0 parametri simpleks tablice $\mathcal{T}(B)$, a r', p', Q', z_0' parametri $\mathcal{T}(B')$.

Sada koristimo Blandovo pravilo. Neka je $B = \{k_1, k_2, \ldots, k_m\}$, $N = \{l_1, l_2, \ldots l_{n-m}\}$, te $k_1 < k_2 < \ldots < k_m$ i $l_1 < l_2, < \ldots < l_{n-m}$. x_v je jedini kandidat za ulazak u bazu, jer Blandovo pravilo zahtijeva da uzmemo najmanji indeks od svih kandidata, a naša pretpostavka je da je v i najveći. To znači da sve promjenjive varijable u zadnjem redu simpleks tablice imaju negativne koeficijente. Dakle ako je β indeks takav da je $v = l_\beta$, onda je

$$r_\beta > 0 \text{ i } r_j \leq 0, \text{ za svaki } j \text{ takav da je } l_j \in F \backslash \{v\}. \tag{3.3}$$

Dalje, neka je $B' = \{k_1', k_2', \ldots, k_m'\}$, $N' = \{l_1', l_2', \ldots l_{n-m}'\}$, te $k_1' < k_2' < \ldots < k_m'$ i $l_1' < l_2', < \ldots < l_{n-m}'$. Neka je α' indeks varijable koja izlazi iz baze x_v u B', tj. $k_{\alpha'}' = v$, te β' indeks varijable koja izlazi iz baze x_u. Zbog uvjeta (3.1) i (3.2) za varijablu koja izlazi iz baze vrijedi: $i = \alpha'$ je jedini i za koji je $k_i' \in F$ i $q_{i\beta'}' < 0$ takav da minimizira omjer $-\frac{p_i'}{q_{i\beta'}'}$. Kako p' specificira vijednost baričnih varijabli, a promjenjive varijable su tijekom ciklus nula, to je za svaki i, takav da je $k_i' \in F$, $p_i' = 0$. Sada je

$$q_{\alpha'\beta'}' < 0 \text{ i } q_{i\beta'}' \geq 0, \text{ za svaki } i \text{ takav da je } k_i' \in F \backslash \{v\}. \tag{3.4}$$

Želimo napraviti pomoćni linearni problem, kojemu će (3.3) dokazati da ima optimalno rješenje, a (3.4) da je neograničen. Te tvrdnje će kontradiktirati pretpostavci da postoji ciklus.

Pomoćni problem:

$$\begin{array}{ll} \text{Maksimizirajmo} & c^T x \\ \text{uz uvjete} & Ax = b, \\ & x_{F\setminus v} \geq 0 \\ & x_v \leq 0 \\ & x_{N\setminus F} = 0. \end{array}$$

Optimalnost pomoćnog linearnog problema: Neka je $\tilde{x}$ bazično dopustivo rješenje početnog problema povezanog sa bazom B. Kako je $\tilde{x}_N = 0$ i zbog dokazane tvrdnje $\tilde{x}_F = 0$, to je $\tilde{x}$ dopustiv za pomoćni problem. Za svaki x koji zadovoljava uvjet $Ax = b$, vrijednost funkcije cilja možemo izraziti na sljedeći način

$$c^T x = z = z_0 + r^T x_N.$$

Za svako dopustivo rješenje x pomoćnog problema vrijedi

$$x_{l_j} \begin{cases} \geq 0 \text{ ako je } l_j \in F\setminus\{v\} \\ \leq 0 \text{ ako je } l_j = l_\beta = v \end{cases},$$

a zajedno sa (3.3) vrijedi

$$r_j x_{l_j} \leq 0 \text{ za svaki } j \text{ takav da je } l_j \in F.$$

Kako je jedan od uvjeta pomoćnog problema i $x_{N\setminus F} = 0$ dobijemo $r^T x_N \leq 0$. Dodatno, zbog zapisa funkcije cilja imamo $z \leq z_0$ za sva dopustiva rješenja pomoćnog problema. Dakle $\tilde{x}$ je optimalno rješenje pomoćnog problema.

Neograničenost pomoćnog linearnog problema: Tvrdnja na početku dokaza nam govori da je $\tilde{x}$ bazično dopustivo rješenje i originalnog linearnog problema povezanog sa bazom B'. Za svaki x koji zadovoljava uvjet $Ax = b$ je

$$x_{B'} = p' + Q' x_{N'}. \tag{3.5}$$

Promijenimo $\tilde{x}_{N'}$ na način da dopustimo povećanje $\tilde{x}_u$ sa nula na neku vrijednost $t > 0$. Iz (3.5) dobijemo da povećanje varijable dovodi do novog rješenja $\tilde{x}(t)$ sistema jednadžbi $Ax = b$. Dokazat ćemo da za svaki $t > 0$ novo rješenje je dopustivo rješenje pomoćnog problema i vrijednost funkcije cilja $c^T \tilde{x}(t)$ teži u beskonačnost za $t \to \infty$. Neka je

$$\tilde{x}_{l'_j}(t) := \begin{cases} 0 \text{ ako vrijedi } l'_j \in N' \backslash u \\ t \text{ ako vrijedi } l'_j = l'_{\beta'} = u \end{cases}.$$

Iz $t > 0$, $\tilde{x}_v = 0$, (3.4) i (3.5) slijedi

$$\tilde{x}_{k'_i}(t) = \tilde{x}_{k'_i} + tq'_{i\beta'} \begin{cases} \geq 0 \text{ ako vrijedi } k'_i \in F \backslash \{v\} \\ < 0 \text{ ako vrijedi } k'_i = k'_{\alpha'} = v \end{cases}.$$

Dakle $\tilde{x}(t)$ je dopustivo rješenje pomoćnog problema.

Kako je kandidat za ulazak u bazu B' varijabla $x_u = x_{l'_{\beta'}}$, i znamo da je $r'_{\beta'} > 0$, slijedi

$$c^T \tilde{x}(t) = z'_0 + r'^T \tilde{x}_{N'}(t) = z'_0 + tr'_{\beta'} \to \infty, \text{ za svaki } t \to \infty.$$

Dakle pomoćni problem je i neograničen. ■

3.6 Algoritam simpleks metode

1. Pretvorimo ulazni linearni problem u odgovarajući standardni oblik:

Maksimizirajmo vrijednosti	$c^T x$
među svim vektorima $x \in \mathbb{R}^n$ koji zadovoljavaju	$Ax \leq b$,

   sa n varijabli i m jednadžbi, gdje je m rang matrice A.

2. Ako dopustiva baza nije dostupna, namjestimo $b \geq 0$ i riješimo sljedeći pomoćni linearni problem:

$$\begin{aligned} &\text{Maksimizirajmo} && -(x_{n+1} + x_{n+2} + \ldots + x_{n+m}) \\ &\text{uz uvjete} && \bar{A}\bar{x} = b, \\ & && \bar{x} \geq 0, \end{aligned}$$

gdje je $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+m})$ vektor svih varijabli, a $\bar{A} = (A|I_m)$. Sada imamo dva slučaja:

- ako je optimalna vrijednost funkcije cilja negativna $\rightarrow$ orginalni linearni problem je nedopustiv $\rightarrow$ **stani**
- prvih n komponenti optimalnog rješenja formiraju dopustivu bazu izvornog linearnog problema.

3. Za dopustivu bazu $B \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ računamo simpleks tablicu $\mathcal{T}(B)$:

$$\begin{array}{c} x_B = \mathbf{p} + Qx_N \\ \hline z = z_0 + \mathbf{r}^T x_N \end{array}$$

4. Ako je $r \leq 0$ u trenutnoj simpleks tablici, vrati optimalno rješenje (nebazične varijable su nula, a bazične varijable specificira p) $\rightarrow$ **stani**.

5. Inače, izaberi vaijablu koja ulazi u bazu x_v, čiji je koeficijent u vektoru r pozitivan. Ako postoji više kandidata, iskoristi pivot pravilo.

6. Ako je stupac varijable koja ulazi u bazu x_v negativan, tada je linearni program neograničen $\rightarrow$ **stani**.

7. Inače, izaberi varijablu koja izlazi iz baze x_u. U svim redovima simpleks tablice gdje je koeficijent uz x_v negativan, podijelimo komponentu vektora p sa tim koeficijentom i promijenimo predznak. Tražimo red u kojem je dobivena vrijednost najmanja. Ukoliko postoji više kandidata za izlazak iz baze, koristimo pivot pravilo, a ako i dalje nemamo jedinstvenog kandidata, izaberemo proizvoljno.

8. Zamijeni trenutnu dopustivu bazu B novom dopustivom bazom $(B\backslash\{u\})\cup\{v\}$. Popravi simpleks tablicu da odgovara novoj bazi. Vrati se na korak 4.

Poglavlje 4

Primjeri

U prethodnom poglavlju smo se upoznali sa algoritmom simpleks metode. Sada ćemo najprije ukazati na probleme koji se mogu svesti na problem linearnog programiranja, te riješiti jedan primjer simpleks metodom.

Najprije pogledajmo primjere koji se svode na problem linearnog programiranja.

Primjer 4.1 ***Problem optimalne proizvodnje:*** *Neka tvrtka T proizvodi n različitih proizvoda $P_1, \ldots, P_n$ uz pomoć m različitih strojeva $S_1, \ldots, S_m$. Uvedimo oznake.*
Neka je b_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ oznaka za maksimalan broj sati tijekom kojih je stroj S_i u stanju rada. Količinu sati S_i-tog stroja, $i = 1, 2, \ldots, m$, potrebnu za proizvodnju proizvoda P_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ označimo s a_{ij}. Količinu zarade koju tvrtka dobije prodajom proizvoda P_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, označimo s c_j. Neka je x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ broj proizvedenih proizvoda P_j.
Svaka tvrtka želi maksimizirati zaradu. Dakle cilj tvrtke je odrediti koliko će proizvesti proizvoda, s tim da ostvareni prihod mora biti maksimalan.
Uz sve oznake, problem proizvodnje možemo svesti na sljedeći problem linearnog programiranja:

$$\begin{array}{lll} \textit{Maksimiziraj} & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \textit{uz uvjete} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \leq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Odnosno:

$$\begin{array}{ll} \textit{Maksimiziraj} & c^T x \\ \textit{uz uvjete} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Primjer 4.2 ***Problem optimalne prehrane:*** *Neka su* $N_1, \ldots, N_n$ *namirnice koje imamo na raspolaganju u kućanstvu.*
Uvedimo oznake.
Sa c_j*, za* $j = 1, \ldots, n$*, označimo cijenu po jedinici namirnice* N_j*. Neka su* $E_1, \ldots, E_m$ *prisutni nutritivni elementi, pri čemu je* a_{ij}*,* $i = 1, \ldots, m$*,* $j = 1, \ldots, n$*, količina nutritivnog elementa* E_i *u namirnici* N_j*. Količinu nutritivnog elementa* E_i *koju osoba mora unijeti tijekom dana označimo sa* b_i*,* $i = 1, \ldots, m$*.*
Svakoj osobi je cilj konzumirati dovoljnu količinu pojedinih namirnica kako bi zadovoljili potrebu za nutritivnim elementima tijekom dana, a pri tome minimizirati cijenu prehrane.
Neka je x_j*,* $j = 1, \ldots, n$ *količina konzumirane namirnice* N_j*,* $j = 1, \ldots, n$*.*
Uz sve oznake, problem proizvodnje možemo svesti na sljedeći problem linearnog programiranja:

$$\begin{array}{lll} \textit{Minimiziraj} & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\ \textit{uz uvjete} & a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n \geq b_i, & i = 1, 2, \ldots, m \\ & x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n \end{array}$$

Odnosno:

$$\begin{aligned} &\textit{Minimiziraj} && c^T x \\ &\textit{uz uvjete} && Ax \geq b \\ & && x \geq 0 \end{aligned}$$

Napomena 4.1 *Danas je popularno brinuti o unosu kalorija, pa ovaj problem možemo formulirati u problem minimizacije unosa kalorija. Da bismo transformirali problem optimalne prehrane u problem minimizacije unosa kalorija, potrebno je samo cijenu po namirnici zamijeniti s kalorijama.*

Primjer 4.3 ***Problem najboljeg pravca:*** *Neka su podaci zadani u obliku točaka* (t_i, y_i), $i = 1, 2, \ldots, r$. *Problem najboljeg pravca je problem određivanja pravca* $y = kx + l$ *koji najbolje aproksimira zadane podatke. Jedan od načina rješavanja ovog problema je minimizacija sume vertikalnih udaljenosti točaka od pravca, odnosno minimizacija fukcije:*

$$F(k, l) = \sum_{i=1}^{r} |kt_i + l - y_i|.$$

Označimo:

$$z_i := |kt_i + l - y_i| = \max\{kt_i + l - y_i, -kt_i - l + y_i\}, i = 1, 2, \ldots, r.$$

Sada je očigledno da je za $i = 1, 2, \ldots, r$*:*

$$\begin{aligned} kt_i + l - y_i &\leq 0, \\ -kt_i - l + y_i &\leq 0 \end{aligned}$$

Sada problem minimizacije sume možemo zapisati u sljedećem obliku:

$$z_1 + z_2 + \ldots + z_r + 0 \cdot k + 0 \cdot l \to \min$$

uz uvjete:

$$-z_1 + kt_1 + l \leq y_1$$
$$-z_1 - kt_1 - l \leq -y_1$$
$$-z_2 + kt_2 + l \leq y_2$$
$$-z_2 - kt_2 - l \leq -y_2$$
$$\vdots$$
$$-z_r + kt_r + l \leq y_r$$
$$-z_r - kt_r - l \leq -y_r$$

U matričnom zapisu linearni problem izgleda ovako:

$$\begin{aligned} &\textit{Minimiziraj} && c^T x \\ &\textit{uz uvjete} && Ax \leq b \end{aligned}$$

gdje su:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & \dots & 0 & t_1 & 1 \\ -1 & 0 & \dots & 0 & -t_1 & -1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & t_2 & 1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & -t_2 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & t_r & 1 \\ 0 & 0 & \dots & -1 & -t_r & -1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2r\times(r+2)}, b = \begin{bmatrix} y_1 \\ -y_1 \\ y_2 \\ -y_2 \\ \vdots \\ y_r \\ -y_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2r}, c = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r+2}$$

te $x = \begin{bmatrix} z_1 & z_2 & \dots & z_r & k & l \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^{r+2}$.

Ovo su samo neke od primjena linearnog programiranja. Postoji ih još mnogo, svi problemi se definiraju na sličan način. Nabrojimo ih još nekoliko:

- Minimizacija po dijelovima linearne funkcije
- Problem rasporeda radnika
- Problem transporta proizvoda
- Problem portfelja
- Problem optimizacije reklamacije kampanja
- ...

Sljedeći problem ćemo riješiti simpleks metodom.

Primjer 4.4 *Tvrtka T proizvodi 3 proizvoda X, Y i Z. Svaka jedinica proizvoda X zahtijeva 2 sata rada i 3 sata rada stroja, dok proizvod Y zahtijeva 4 sata rada i 1 sat stroja, a proizvod Z zahtijeva 1 sat rada i 2 sata stroja. Tvrtka ima na raspolaganju 50 sati rada i 40 sati rada stroja tjedno. Cijena jedinice proizvoda X je 80 dolara, Y je 100 dolara, a Z je 60 dolara. Tvrtka želi maksimizirati tjedni profit.*

Uvedimo oznake:

- $x_1 \to$ *broj proizvedenih jedinica proizvoda X*
- $x_2 \to$ *broj proizvedenih jedinica proizvoda Y*
- $x_3 \to$ *broj proizvedenih jedinica proizvoda Z.*

Funkcija cilja $\to$ maksimizirati ukupni tjedni profit: $\max(80x_1 + 100x_2 + 60x_3)$.

Uvjeti:

- *radno vrijeme:* $2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 50$
- *vrijeme korištenja stroja:* $3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 40$.

Rješenje:

Nakon uvođenja slabih varijabli dobijemo prvu simpleks tablicu:

$$\begin{array}{c} x_4 = 50 - 2x_1 - 4x_2 - x_3 \\ x_5 = 40 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \\ \hline z = 80x_1 + 100x_2 + 60x_3 \end{array}$$

Varijable x_4 *i* x_5 *su bazične varijable, pa među njima biramo kandidata koji će izaći iz baze. Kako povećanjem svih varijabli dolazi do povećanja funkcije cilja, možemo proizvoljno izabrati varijablu koju želimo uvesti u bazu. Neka je to varijabla* x_3.

Iz uvjeta $x_4 \geq 0$, $x_1 = 0$ *i* $x_2 = 0$ *slijedi:*

$$x_4 = 50 - 2x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$50 - 2x_1 - 4x_2 - x_3 \geq 0$$

$$x_3 \leq 50$$

Iz uvjeta $x_5 \geq 0$, $x_1 = 0$ *i* $x_2 = 0$ *slijedi:*

$$x_5 = 40 - 3x_1 - x_2 - 2x_3$$

$$40 - 3x_1 - x_2 - 2x_3 \geq 0$$

$$x_3 \leq 20$$

Dakle maksimalno povećanje varijable x_3 *je* $x_3 = 20$. *Uvrštavanjem* $x_3 = 20$, $x_1 = 0$ *i* $x_2 = 0$, *pogledajmo koja varijabla postaje nebazična:*

$$x_4 = 50 - 2x_1 - 4x_2 - x_3$$

$$x_4 = 30$$

$$x_5 = 40 - 3x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$x_5 = 0$$

Dakle x_5 postaje nula, odnosno nebazična varijabla, a x_3 različit od nula, odnosno bazična varijabla.

$$x_5 = 40 - 3x_1 - x_2 - 2x_3$$
$$x_3 = 20 - \frac{3x_1}{2} - \frac{x_2}{2} - \frac{x_5}{2}$$

Supstitucijom x_3 dobijemo sljedeću simpleks tablicu:

$$\begin{array}{c}
x_3 = 20 - \frac{3x_1}{2} - \frac{x_2}{2} - \frac{x_5}{2} \\
x_4 = 30 - \frac{x_1}{2} - \frac{7x_2}{2} + \frac{x_5}{2} \\
\hline
z = 1200 - 10x_1 + 70x_2 - 30x_5
\end{array}$$

Iz oblika funkcije cilja zaključujemo da je jedini kandidat za povećanje varijabla x_2, jer povećanjem varijabli x_1 i x_5 smanjuje se vrijednost funkcije cilja.

Iz uvjeta $x_3 \geq 0$, $x_1 = 0$ i $x_5 = 0$ slijedi:

$$x_3 = 20 - \frac{3x_1}{2} - \frac{x_2}{2} - \frac{x_5}{2}$$
$$20 - \frac{3x_1}{2} - \frac{x_2}{2} - \frac{x_5}{2} \geq 0$$
$$x_2 \leq 40$$

Iz uvjeta $x_4 \geq 0$, $x_1 = 0$ i $x_5 = 0$ slijedi:

$$x_4 = 30 - \frac{x_1}{2} - \frac{7x_2}{2} + \frac{x_5}{2}$$
$$30 - \frac{x_1}{2} - \frac{7x_2}{2} + \frac{x_5}{2} \geq 0$$
$$x_2 \leq \frac{60}{7}$$

Dakle maksimalno povećanje varijable x_2 *je* $x_2 = \frac{60}{7}$. *Uvrštavanjem* $x_2 = \frac{60}{7}$, $x_1 = 0$ *i* $x_5 = 0$, *pogledajmo koja varijabla postaje nebazična:*

$$x_3 = 20 - \frac{3x_1}{2} - \frac{x_2}{2} - \frac{x_5}{2}$$
$$x_3 = \frac{110}{7}$$

$$x_4 = 30 - \frac{x_1}{2} - \frac{7x_2}{2} + \frac{x_5}{2}$$
$$x_4 = 0$$

Dakle varijabla x_2 *postaje bazična, a* x_4 *nebazična varijabla. Prebacivanjem* x_4 *na desnu stranu, a* x_2 *na lijevu stranu jednadžbe, te uvrštavanjem, dobijemo sljedeću simpleks tablicu.*

$$\begin{array}{c} x_2 = \frac{60}{7} - \frac{x_1}{7} - \frac{2x_4}{7} + \frac{x_5}{7} \\ x_3 = \frac{110}{7} - \frac{10x_1}{7} - \frac{x_4}{7} - \frac{4x_5}{7} \\ \hline z = 1800 - 20x_1 - 20x_4 - 20x_5 \end{array}$$

Iz posljednje simpleks tablice zaključujemo da je za $B = \{2, 3\}$, $\left(0, \frac{60}{7}, \frac{110}{7}, 0, 0\right)$ *bazično dopustivo rješenje. Vrijednost funkcije cilja, odnosno profita je* $z = 1800$.

Zaključak

Na probleme optimizacije često nailazimo u svakodnevnom životu. Kao jedan od najvažnijih alata za rješavanje optimizacijskih problema je linearno programiranje. Uz poštivanje linearnih ograničenja, veoma brzo pronalazi optimalno rješenje, čije su karakteristike maksimizacija resursa, povećanje učinkovitosti te smanjenje troškova. Postoje razne metode koje koristimo pri rješavanju linearnih problema, no najvažnija je simpleks metoda. Kao što smo primijenili u raznim primjerima, algoritam simpleks metode prolazi bridovima konveksnog poliedra, kojeg nazivamo dopustivim područjem, u potrazi za točkom (vrhom) poliedra u kojoj je vrijednost funkcije cilja maksimalna. Naravno, postoje iznimke. Mogućnost zaglavljenja u degeneriranim točkama ili ciklusima može utjecati na brzinu algoritma, pa je cilj spriječiti nastanak ciklusa. Usprkos iznimkama, simpleks metoda je veoma učinkovita, te je, kako je i prikazano kroz brojne primjere, primjenjiva u raznim područjima i slučajevima. Neki od tih su proizvodnja, logistika, financije, inžinjering, problem transporta, problem rasporeda smjena i problem distribucije.

Literatura

[1] J. Matoušek, B. Gärtner (2006) Understanding and Using Linear Programming, Springer

[2] I. Kuzmanović, K. Sabo (2016) Linearno Programiranje, Radni materijal za predavanja, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku – Odjel za matematiku

[3] D. Jukić (2013) Konveksni skupovi, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku - Odjel za matematiku

[4] P. R. Thie, G. E. Keough (2008) Mathematical introduction to linear programming and game theory - Third Edition, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, New Jersey

[4] A. Schrijver (1999) Theory of Linear and Integer Programming, John Wiley & Sons

[5] Wikipedia, Linear programming, url: `https://en.wikipedia.org/wiki/Linear_programming`

[6] Wikipedia, Simplex algorithm, url: `https://en.wikipedia.org/wiki/Simplex_algorithm`