Matematički Spot It!

Gujinović, Neda

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

NEDA GUJINOVIĆ

MATEMATIČKI *SPOT IT!*

DIPLOMSKI RAD

Split, travanj 2024.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

MATEMATIČKI *SPOT IT!*

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Neda Gujinović

Mentor:
doc. dr. sc. Aljoša Šubašić

Split, travanj 2024.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

MATEMATIČKI *SPOT IT!*

Neda Gujinović

Sažetak:
Predmet proučavanja ovog rada je primjena matematike u izradi igre Spot It! *prilagođene nastavi matematike. U prvom poglavlju objašnjavamo osnovne pojmove teorije dizajna kao što su incidencijska struktura, projektivna i afina ravnina, blok dizajni i grčko - latinski kvadrati, te navodimo odgovarajuće primjere. Nadalje, objašnjavamo matematičku pozadinu igre te u konačnici i primijenimo usvojene činjenice za izradu vlastite igre.*

Ključne riječi:
Incidencijska struktura, projektivna ravnina, red projektivne ravnine, afina ravnina, društvena igra

Podatci o radu:
38 stranica, 30 slika, 1 tablica, 7 literaturnih navoda, hrvatski jezik)

Mentor: *doc. dr. sc. Aljoša Šubašić*

Članovi povjerenstva:

v. pred Željka Zorić

mag. math. Pavao Radić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *26. ožujka 2024.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

NASLOV TEME NA ENG

Neda Gujinović

Abstract:

The subject of this paper is the application of mathematicsin the creation of the "Spot It!" game, adapted for mathematics education. In the first chapter we explain basic concepts of design theory such as incidence structures, projective and affine planes, block designs and Greco - Latin squares, along with relevant examples. Furthermore, we elucidate the mathematical background of the game and ultimately apply the acquired knowledge to create out own game.

Key words:

incidence structure, projective plane, order of the projective plane, affine plane, social game

Specifications:

38 pages, 30 images, 1 table, 7 references, Croatian

Mentor: *assisstant professor Aljoša Šubašić*

Committee:

professor Željka Zorić

Pavao Radić, mag.math

This thesis was approved by a Thesis commettee on *March 26, 2024.*

S dubokim poštovanjem izražavam zahvalnost mentoru za neizmjernu pomoć, vodstvo i strpljenje tijekom izrade ovog diplomskog rada.

Zahvaljujem obitelji i Duji za neumornu podršku, ljubav i vjeru u moje sposobnosti. Bez vas ovaj uspjeh ne bi bio moguć.

Na kraju, veliko hvala mojim prijateljima, koji su uvijek bili uz mene i učinili studiranje lijepim dijelom moga života.

Hvala vam svima, još jednom, na neizmjernom doprinosu i podršci.

Uvod

Kombinatorna teorija dizajna ili kraće teorija dizajna je grana diskretne matematike. Ključnu ulogu u nastanku teorije dizajna odigrao je Kirkmanov problem 15 učenica iz 1850. godine koji je objavljen u časopisu *Lady's and Gentleman's Diary*, a glasi ovako:

Učitelj svakog dana šalje u šetnju svojih 15 učenica. One šeću u 5 grupa, u svakoj po 3. Može li se napraviti raspored šetnji za tjedan dana tako da svaka učenica u tih 7 dana bude točno jedanput u grupi sa svakom od preostalih učenica?

Generalizaciju Kirkmanova problema riješili su neovisno Lu, Ray - Chaduri i Wilson tek 100 godina kasnije.

Teorija dizajna ima svoje korijene u rekreativnoj matematici, ali se u 20. stoljeću razvila u punopravnu matematičku disciplinu sa širokom primjenom u statistici i informatici. Temeljni problemi u teoriji dizajna su dovoljno jednostavni da se mogu objasniti čak i nematematičarima.

Navedena se disciplina bavi pitanjem mogućnosti raspodjele elemenata konačnog skupa u podskupove tako da budu zadovoljena određena svojstva. Stoga će nam upravo teorija dizajna dati odgovore na mnoga pitanja o izradi društvene igre *Spot It!* koja je predmet proučavanja ovog rada. No, najprije je potrebno upoznati osnovne pojmove teorije dizajna.

Nakon što definiramo različite vrste dizajna, razmotrimo bitne tvrdnje te proučimo neke od primjera, objasnit ćemo kako je sve to povezano s dizajnom igre *Spot It!*. Detaljno ćemo proučiti matematičku pozadinu igre, a naposljetku sve navedeno iskoristiti u konstrukciji vlastite matematičke igre.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju upoznat ćemo se s osnovnim pojmovima i tvrdnjama teorije dizajna bez kojih ne bi bilo moguće dizajnirati proučavanu igru.

1.1 Incidencijske strukture i incidencijske matrice

Definicija 1.1 ***Incidencijska struktura*** *je trojka* $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *pri čemu su* V *i* $\boldsymbol{B}$ *bilo koja dva disjunktna skupa, a* I *bilo koja binarna relacija na* V *i* $\boldsymbol{B}$*, tj.* $I \subseteq V \times \boldsymbol{B}$*. Elementi skupa* V *nazivaju se* **točkama***, skupa* $\boldsymbol{B}$ **blokovima***, a skupa* I **incidencijama** *ili* **flagovima***.*

Točke se obično označavaju malim latiničnim slovima, a blokovi velikim latiničnim slovima. Sa $D(p)$ označava se skup svih blokova koji su incidentni s p za bilo koju točku p , odnosno

$$D(p) := \{B \in \mathbf{B} : (p, B) \in I\}.$$

Broj blokova koji su incidentni s točkom p naziva se **stupnjem točke** p. Analogno, s $D(B)$ označava se skup svih točaka incidentnih s B za bilo koji blok B, odnosno

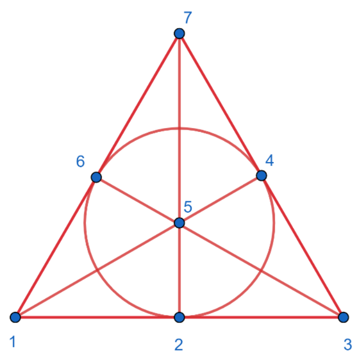
$$D(B) := \{p \in V : (p, B) \in I\}.$$

Broj točaka koje su incidentne s blokom B naziva se **stupnjem bloka** B.
Različiti blokovi mogu biti incidentni s istim skupom točaka pa se govori o **ponovljenim blokovima**.

Primjer 1.2 *Ako je* $V = \{1, 2, 3\}$*,* $\boldsymbol{B} = \{B_1, B_2, B_3\}$ *i* $D(B_1) = D(B_2) = \{1, 2\}$*,* $D(B_3) = \{1, 3\}$*, onda je* $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *primjer valjane incidencijske strukture.*

Definicija 1.3 *Incidencijsku strukturu* D *nazivamo* ***jednostavnom*** *ako za svaka dva različita bloka* B_1 *i* B_2 *vrijedi* $D(B_1) \neq D(B_2)$*.*

Primjer 1.4 *Neka je* $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ *skup točaka i*
$\boldsymbol{B} = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 6, 7\}, \{3, 4, 7\}, \{1, 5, 4\},$
$\{3, 5, 6\}, \{2, 5, 7\}, \{2, 4, 6\}\}$ *skup blokova te incidencija* I *dana relacijom "biti element". Za svaku jednostavnu incidencijsku strukturu može se identificirati svaki blok sa skupom točaka, a relacija* I *s relacijom pripadanja* $\in$*. Lakše je shvatiti ovu identifikaciju ako se pogleda slikovni prikaz:*



Slika 1.1: Incidencijska struktura

Za svaku incidencijsku strukturu može se definirati incidencijska matrica kako slijedi u nastavku.

Definicija 1.5 *Neka je $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ konačna incidencijska struktura i neka su njezine točke označene s $p_1, p_2, ..., p_v$, a blokovi s $B_1, ..., B_b$. Tada matricu $M = (m_{ij})$ definiranu s*

$$m_{ij} := \begin{cases} \quad c \\ 1 \ ako \ (p_i, B_j) \in I \\ 0 \qquad inače \end{cases}$$

nazivamo ***incidencijskom matricom*** *strukture D. Stupac matrice M koji odgovara bloku B nazivamo* ***incidencijskim vektorom*** *bloka B.*

M je prelikavanje iz $V \times B$ u skup $\{0, 1\}$. Također, svaka matrica s elementima 0 i 1 određuje neku incidencijsku strukturu.

Propozicija 1.6 *Pretpostavimo da postoji incidencijska struktura sa stupnjevima točaka $r_1, ..., r_v$ i stupnjevima blokova $k_1, ..., k_b$. Tada je*

$$\textstyle\sum_{i=1}^{v} r_i = \sum_{j=1}^{b} k_j.$$

Kao posljedicu prethodne Prepozicije, dobivamo sljedeću tvrdnju.

Korolar 1.7 *Neka je D incidencijska struktura koja se sastoji od v točaka stupnja r i b blokova stupnja k. Tada je*

$$vr = bk.$$

Sada navodimo nužan i dovoljan uvjet za postojanje jednostavne incidencijske strukture sa zadanim stupnjevima točaka i blokova. U dokazu sljedećeg teorema koristi se tvrdnja:

Lema 1.8 *Pretpostavimo da postoji jednostavna incidencijska struktura D s v točaka i b blokova, konstantnih stupnjeva blokova k i stupnjevima točaka $r_1, ..., r_v$. Ako za neki par indeksa i, j vrijedi $r_i > r_j$, onda postoji jednostavna incidencijska struktura D' s v točaka i b blokova, konstantnih stupnjeva blokova k i stupnjevima točaka $r_1, ..., r_i - 1, ..., r_j + 1, ..., r_v$.*

Teorem 1.9 *Jednostavna incidencijska struktura s v točaka i b blokova, pri čemu su sve točke stupnja r i svi blokovi stupnja k, postoji ako i samo ako vrijedi $vr = bk$ i $b \leq \binom{v}{k}$.*

1.2 Blok dizajni i primjeri iz projektivne i afine geometrije

Posebno su zanimljive incidencijske strukture s određenim stupnjem pravilnosti koje se tradicionalno nazivaju **blokovnim dizajnima** ili **dizajnima**. Projektivne i afine ravnine su također primjeri incidencijskih struktura. U nastavku ćemo navesti precizne definicije.

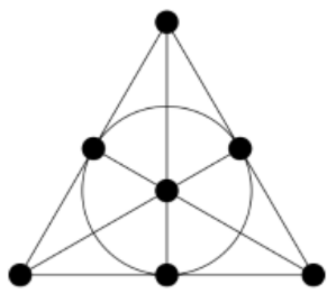
Slika 1.2: Prikaz paralelnih tračnica

Na slici 1.2 vidimo tračnice koje se pružaju u daljinu. Čini li vam se možda kao da se lijeva i desna tračnica sijeku u nekoj točki u beskonačnosti? No, to nije tako. Ako ipak pretpostavimo da se one sijeku u beskonačnosti, dobivamo primjer proširene Euklidske ravnine u kojoj se svi pravci sijeku. Tada se govori o projektivnoj ravnini koju ćemo definirati u nastavku.

Definicija 1.10 *Incidencijsku strukturu $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ nazivamo* ***projektivnom ravninom*** *ako vrijedi:*
(a) Svake dvije točke leže na točno jednom pravcu.
(b) Svaka dva pravca se sijeku u točno jednoj točki.
(c) Postoje četiri različite točke takve da nikoje tri od njih nisu kolinearne.

U teoriji dizajna ćemo koristiti termin 'blokovi' umjesto 'pravci'.
Od posebnog su interesa konačne projektivne ravnine. Konačna projektivna ravnina je ravnina koja ima konačan broj pravaca i točaka.

Primjer 1.11 ***(Fanova ravnina)*** *Najjednostavniji primjer projektivne ravnine je Fanova ravnina koja se sastoji od sedam točaka i sedam pravaca. To je ujedno i najmanja moguća projektivna ravnina. Možemo je predočiti slikom:*



Slika 1.3: Fanova ravnina

Na slici se može uočiti da je jedan pravac u Fanovoj ravnini prikazan kao kružnica.

Posebno je zanimljiva uniformnost Fanove ravnine: svaka točka je na tri pravca, na svakom pravcu se nalaze tri točke, broj točaka i pravaca se podudara. No, to nije slučajnost, već posljedica tvrdnje u čijem se dokazu koriste sljedeće dvije leme.

Lema 1.12 *Neka je p proizvoljna točka i l proizvoljan pravac projektivne ravnine D. Tada vrijedi:*
(a) $|D(p)| \geq 3$*;*
(b) $|D(l)| \geq 3$.

Lema 1.13 *Neka je p proizvoljna točka projektivne ravnine D. Tada postoji pravac l takav da $p \notin l$.*

Propozicija 1.14 *Neka je $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ konačna projektivna ravnina. Tada postoji prirodan broj n koji zadovoljava sljedeće:*
(a) $|D(p)| = |D(\boldsymbol{B})| = n + 1$ *za sve* $p \in V$ *i sve* $B \in \boldsymbol{B}$*;*
(b) $|V| = |\boldsymbol{B}| = n^2 + n + 1$.
Broj n s navedenim svojstvima naziva se ***redom*** *od D.*

Iz Propozicije 1.14 lako je zaključiti da je Fanova ravnina projektivna ravnina reda 2.

Sada je došao red da se uvede i pojam afine ravnine. Najprije se prisjetimo da su pravci G i H paralelni ako je $G = H$ ili $D(G) \cap D(H) = \emptyset$. Tada pišemo $G \| H$.

Definicija 1.15 *Incidencijska struktura $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ naziva se* ***afinom ravninom*** *ako vrijedi:*
(a) Svake dvije točke leže na točno jednom pravcu.

(b) Za svaku točku p i svaki pravac G takve da $p \notin G$ postoji točno jedan pravac H takav da $p \in H$ i $H||G$
(c) Postoje tri različite nekolinearne točke.

Najpoznatiji primjer afine ravnine je ona euklidska.

Afina ravnina u kojoj na svakom pravcu leži n točaka naziva se **afinom ravninom reda** n i označava s $AG(2, n)$.

Definicija 1.16 *Neka je $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ incidencijska struktura, $Q \subseteq V$ i $C \subseteq \boldsymbol{B}$. Incidencijska struktura inducirana s D na Q i C je struktura $D' = (Q, C, I \cap (Q \times C))$. D' se naziva **induciranom podstrukturom** od D.*

Umjesto $I \cap (Q \times C)$ najčešće se piše samo I.

Definicija 1.16 nije bez razloga uvedena. Može se dokazati da je lako pronaći primjer afine ravnine ako pokažemo da su afina i projektivna ravnina blisko povezane. O tome govori sljedeća tvrdnja.

Propozicija 1.17 *Neka je $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ projektivna ravnina i G pravac na D. Tada je podstruktura $D_G = (V \setminus D(G), \boldsymbol{B} \setminus \{G\}, I)$ afina ravnina. Također, svaka afina ravnina se može dobiti iz projektivne ravnine na isti način. U slučaju konačnih ravnina, red od D i D_G su jednaki.*

Projektivna ravnina se može dobiti iz afine ravnine dodavanjem točaka u beskonačnosti u kojima se sijeku paralelni pravci i dodavanjem pravca u beskonačnosti na kojem se nalaze sve točke u beskonačnosti.

Kod generalizacija konačnih afinih i projektivnih ravnina javljaju se strukture koje se nazivaju blok dizajni, a precizna definicija navedena je u nastavku.

Definicija 1.18 *Konačna incidencijska struktura $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ naziva se **blok dizajnom s parametrima** v, k, λ ako vrijedi:*

(a) $|V| = v$*;*

(b) $|D(p) \cap D(q)| = \lambda$ *za svaki dvije različite točke* $p, q \in V$*;*

(c) $|D(\boldsymbol{B})| = k$ *za svaki* $B \in \boldsymbol{B}$*.*

Definicija 1.19 *Neka je* $k \in \mathbb{N}$ *i* $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *konačna incidencijska struktura. D se naziva k-**hipergrafom** ako i samo ako vrijedi* $|D(B)| = k$ *za svaki* $B \in \boldsymbol{B}$*.*

Iz Definicije 1.19 slijedi da se za $k = 2$ govori o grafu.Tada se točke naziva **vrhovima**, a blokove **bridovima** grafa.

Definicija 1.20 *Neka su t i* λ *pozitivni brojevi, a* $D = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *konačna incidencijska struktura. D se naziva t-**uravnoteženom** s parametrom* λ *ako i samo vrijedi* $|D(Q)| = \lambda$ *za svaki t-podskup* $Q \subseteq V$*.*
*Ako je D i k-hipergraf, onda se naziva t-**dizajnom s parametrima** k i* λ*.*

Blok dizajni s parametrima v, k, λ alternativno se označavaju $S_\lambda(2, k; v)$, a t-dizajni s v točaka $S_\lambda(t, k; v)$ Posebno za $\lambda = 1$ piše se $S(2, k; v)$. Tada se govori o Steinerovom sistemu. Na primjer, projektivna ravnina reda n je Steinerov sistem $S(2, n+1; n^2+n+1)$, a afina ravnina reda n $S(2, n, n^2)$.

Teorem 1.21 *Neka je* $D = S_\lambda(2, k; v)$*. Tada je:*
(a) $|D(p)| = \lambda(v-1)/(k-1) =: r$*, za svaki p;*
(b) $|\boldsymbol{B}| = \lambda v(v-1)/k(k-1) =: b$*.*

Budući da ukupni broj blokova i broj blokova kroz svaku točku moraju biti prirodni brojevi, kao rezultat vrijedi sljedeći korolar.

Korolar 1.22 *Neka su* $v, k, \lambda \in \mathbb{N}$*. Nužni uvjeti za postojanje* $S_\lambda(2, k; v)$ *su:*
(a) $\lambda(v-1) \equiv 0 \ (mod\ k-1)$*;*
(b) $\lambda v(v-1) \equiv 0 \ (mod\ k(k-1))$*.*

1.3 Latinski kvadrati

Latinskim kvadratima bavio se švicarski matematičar *Leonhard Euler* još u 18. stoljeću. Pri tome je kao simbole koristio latinična slova pa zato takav naziv. U početku su smatrani dijelom zabavne matematike, ali s vremenom je primjećena netrivijalnost kombinatornih problema koji proizlaze iz razmatranja o njima, kao i njihova primjena u drugim granama matematike.

Latinski kvadrat je $n \times n$ tablica s n različitih simbola tako da se svaki simbol pojavljuje točno jednom u svakom retku i svakom stupcu. No, uvedimo preciznu definiciju.

Definicija 1.23 *Neka je $n \in \mathbb{N}$. Kvadratna matrica A reda n naziva se* ***latinskim kvadratom*** *ako vrijedi:*
(1) Elementi matrice A su elementi nekog n-članog skupa $\{a_1, ..., a_n\}$.
(2) U svakom retku matrice A svaki element $a_i, i = 1, 2, ..., n$, nalazi se na točno jednom mjestu.
(3) U svakom stupcu matrice A svaki element $a_i, i = 1, 2, ..., n$, nalazi se na točno jednom mjestu.

Primjer 1.24 *Matrica* $P = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & c & d & a \\ c & d & a & b \\ d & a & b & c \end{pmatrix}$ *je latinski kvadrat reda 4.*

Primjer 1.25 *Matrica* $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ *je latinski kvadrat reda 5.*

Primjetimo da je u ovom primjeru svaki redak i svaki stupac permutacija skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$. *To možemo poopćiti i na skup* $\{1, 2, ..., n\}$.

Kaže se da je latinski kvadrat **standardan** ili **reduciran** ako su u njegovom prvom retku i prvom stupcu elementi prirodno poredani - brojevi po veličini, slova po abecedi...

Dakle, latinski kvadrat P iz Primjera 1.24 je standardan, dok latinski kvadrat Q iz Primjera 1.25 nije.

Definicija 1.26 *Kaže se da su dva latinska kvadrata* $A = [a_{ij}]$ *i* $B = [b_{ij}]$ *reda n međusobno* ***ortogonalna*** *ako vrijedi: za svaki uređeni par* (k, l) *elemenata iz skupa* $\{1, 2, ..., n\}$ *postoji točno jedan uređen par* (i, j) *takav da je* $a_{ij} = k$ *i* $b_{ij} = l$.

Ako se par ortogonalnih latinskih kvadrata $A = [a_{ij}]$ i $B = [b_{ij}]$ reda n zapiše u obliku matrice C tako da je $C = [(a_{ij}, b_{ij}], i, j = 1, ..., n$, onda se govori o **grčko-latinskom kvadratu**.

Poglavlje 2

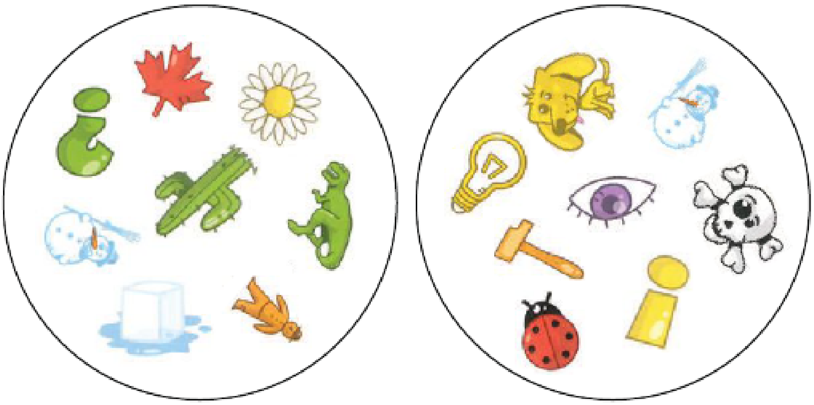
Društvena igra *Spot It!*

Nakon što smo uveli potrebnu terminologiju, definirat ćemo neka od pravila igranja igre *Spot It!* te objasniti povezanost pojmova iz prvog poglavlja s dizajnom ove igre.

2.1 Pravila igre

Spot It! ili *Dobble* je jednostavna društvena igra prepoznavanja u kojoj igrači pokušavaju pronaći isti simbol na dvije različite karte. Karte su napravljene tako da svake dvije uvijek imaju točno jedan zajednički simbol. Možete li uočiti isti simbol na priloženim kartama?

2.1. Pravila igre



Slika 2.1: Prepoznavanje zajedničkog simbola

Jasno je, na obje karte se javlja snjegović.

Igra je namijenjena za 2 do 8 igrača. Sastoji se od posebnih karata kružnog oblika s odgovarajućim brojem sličica, odnosno simbola. Osnovno pakiranje sadrži 55 karata, a na svakoj je karti 8 simbola. Međutim, iz špila su izbačene dvije karte što znači da je maksimalan broj karata 57. Postoji pakiranje za djecu, tzv. *Dobble Kids*, koji ima 30 karata, a na svakoj je karti 5 simbola.

2.1. Pravila igre

Slika 2.2: Igra

Postoji više varijanti ove igre,a navodimo neke od njih:

(1) Podijeli se po jedna karta okrenuta licem prema dolje svakom igraču. Ostatak špila se stavi na sredinu stola s kartama licem prema gore. Igrači istovremeno okreću svoje karte. Prvi igrač koji pronađe i kaže koji je simbol na njegovoj karti isti s onim na karti sa sredine stola uzima tu kartu i stavlja je na vrh licem prema gore, a igra se nastavlja dalje okretanjem nove karte iz špila. Nakon što su sve karte iz špila podijeljene pobjeđuje igrač s najviše skupljenih karata.

(2) Izvuče se jedna karta iz špila i okrene se licem prema dolje. Podijele se sve preostale karte tako da svaki igrač dobije jednak broj karata okrenutih licem prema dolje. Na sredinu stola se otkrije uklonjena karta. Igrači istovremeno okreću prvu

kartu sa svog špila. Igrač koji prvi pronađe i imenuje simbol iz centralne karte koji se podudara sa simbolom sa njegove karte, stavlja kartu sa strane i okreće novu kartu u svom špilu. Pobjeđuje igrač koji se prvi riješi svih karata.
(3) Svi igrači u ruku dobiju po jednu kartu licem okrenutim prema dolje. Istovremeno otkrivaju svoju kartu. Prvi igrač koji pronađe isti simbol na svojoj karti i karti drugog igrača oglasi par i stavlja kartu u ruku drugog igrača. Zatim, taj igrač traži par između nove karte i karata preostalih igrača, dok i ostali igrači istovremeno traže par. Kada igrač pronađe par, on stavlja sve svoje karte iz ruke na vrh karata u ruci igrača čija karta sadrži simbol iz para. Krug završava kada sve karte završe u ruci jednog igrača. On ih stavlja ispred sebe i novi krug započinje dijeljenjem karata. Igrači igraju određen broj krugova, a igrač s najviše karata je gubitnik.
(4) Jedna karta postavlja se na sredinu stola licem prema gore, a svakom igraču podijeli se po jedna karta licem prema dolje. Igrači istovremeno otkrivaju svoje karte i traže iste simbole s karte u sredini i bilo koje druge karte na stolu. Igrač koji prvi pronađe iste simbole uzima otkrivenu kartu i postavlja je licem prema dolje ispred sebe. Zajedno s ostalim igračima nastavlja potragu za istim simbolima s preostalih karata. Nakon što su sve karte igrača pokupljene, karta sa sredine se stavi na dno špila i podijele se nove karte. Nakon što se podijele sve karte iz špila, pobjednik je igrač s najviše karata.
(5) Podijeli se svakom igraču po jedna karta licem prema dolje. Ostatak špila postavi se na sredinu stola. Igrači istovremeno otkrivaju svoje karte i gledaju koji su simboli na kartama drugih igrača zajednički s kartom sa sredine. Igrač koji prvi pronađe iste simbole postavlja kartu sa sredine na vrh špila igrača čija se karta poklapa sa centralnom. Igra se nastavlja s novootkrivenom kartom. Kada nema više karata u špilu, pobjeđuje igrač s najmanje karata.

2.2 Matematička pozadina igre

Možemo se pitati kakve veze imaju uvedeni pojmovi u prvom poglavlju s predstavljenom igrom. No, u nastavku ćemo pokazati da je zapravo teorija dizajna u srži ove igre. Zapravo, konačne projektivne ravnine su upravo matematičke strukture koje su temelj za izradu igre *Spot It!*.

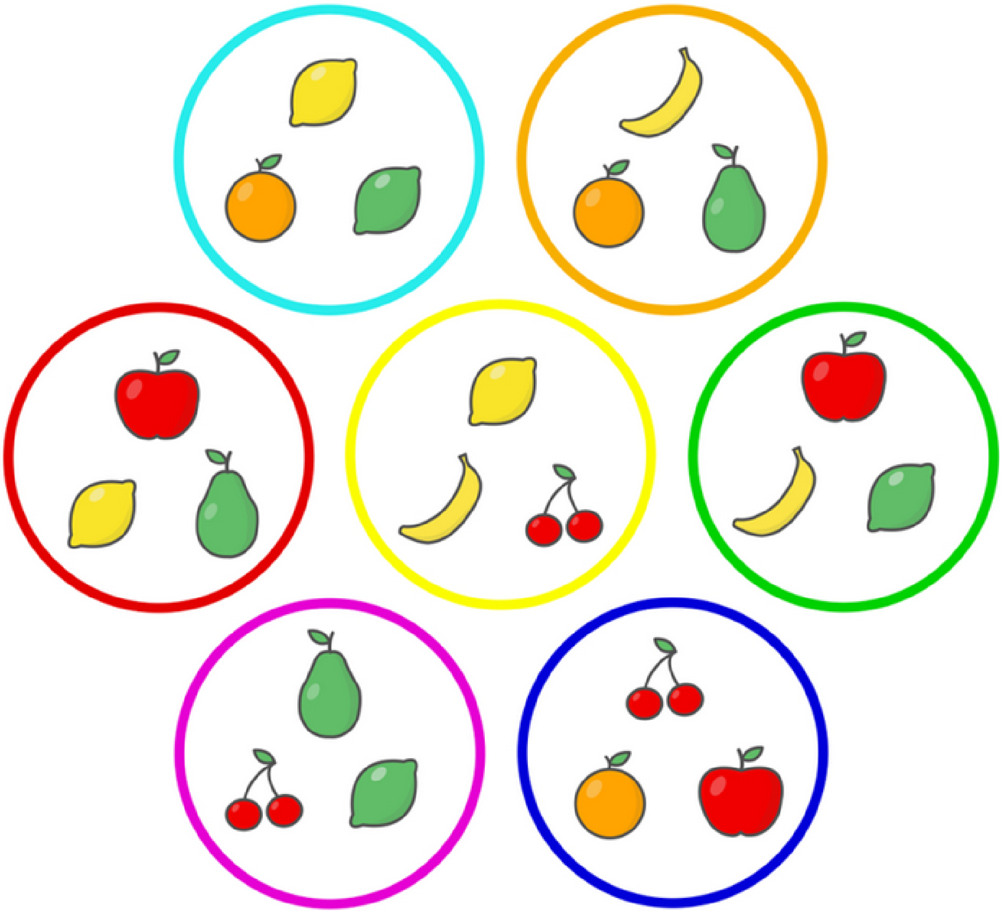
Navest ćemo neka pitanja koja se svima nameću.

- Zašto 55 karata u špilu?
- Zašto 8 simbola na karti?
- Kako to da se svake dvije karte podudaraju u točno jednom simbolu?

Odgovore na ova, ali i još neka druga pitanja navest ćemo u nastavku.

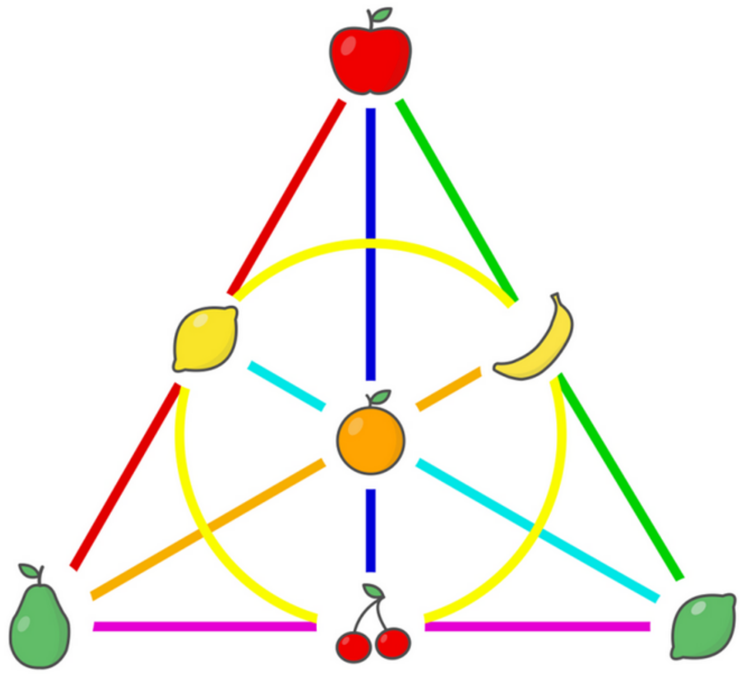
2.2. Matematička pozadina igre

Započnimo s pojednostavljenom verzijom igre.



Slika 2.3: Igra sa 7 karata

Na Slici 2.2 prikazana je igra sa samo 7 karata. Lako je za uočiti da svake dvije imaju točno jedan zajednički simbol. Pomoću Fanove ravnine prikazat ćemo kako su simboli organizirani na kartama.



Slika 2.4: Fanova ravnina s voćem

Ako identificiramo simbole s točkama, a karte s pravcima, onda nije teško za zaključiti da vrijede svojstva projektivne ravnine, odnosno:

(1) Svake dvije točke povezane su točno jednim pravcem.

(2) Svaka dva pravca se sijeku u točno jednoj točki.

(3) Postoje četiri točke takve da nikoje tri nisu kolinearne.

Dakle, pojednostavljena verzija igre *Spot It!* je zapravo projektivna ravnina reda 2. No, nas više zanima osnovna igra, a navedeno vrijedi i za nju. Kako se naša igra sastoji od konačnog broja simbola i karata, zaključujemo da je u pitanju konačna incidencijska struktura.

Stupanj bilo koje točke smo definirali kao broj blokova koji su incidentni s tom točkom, a budući da nama ovdje simboli predstavljaju točke, stupanj točke je 8 jer se svaki simbol nalazi na točno 8 karata. Analogno, stupanj bloka je broj točaka incidentnih s tim blokom pa je u primjeru osnovne igre *Spot It!* stupanj bloka jednak 8 jer svaka karta sadrži točno 8 simbola. Dakle, zaključujemo da su stupanj točke i stupanj bloka konstantni i iznose 8.

Osim toga, *Spot It!* je jednostavna incidencijska struktura jer na svake dvije različite karte su svi, osim jednog, različiti simboli.

Ako sada uvedemo oznake u kontekstu igre:

- v-ukupan broj simbola
- r-stupanj simbola
- b-broj karata u špilu
- k- stupanj karte

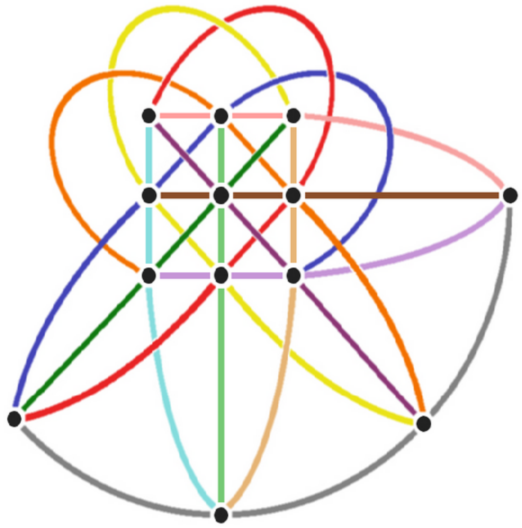
onda imamo: $v = 57, r = 8, b = 57, k = 8$. Tada vidimo da vrijedi da je $57 * 8 = 57 * 8$, odnosno zadovoljena je tvrdnja Korolara 1.7.

Nakon što smo odredili stupanj točke i bloka konačne projektivne ravnine, možemo odrediti njezin red. Kao što nam kaže Propozicija 1.14, *Spot It!* je konačna projektivna ravnina reda 7.

Dakle, postoji nekoliko važnih formula povezanih s konačnim projektivnim ravninama. Ako je n red igre, onda se računa:

- Ukupan broj simbola u igri je $n^2 + n + 1$.
- Ukupan broj simbola na karti je $n + 1$.
- Svaki simbol se pojavljuje na $n + 1$ karata.

Nije uvijek lako grafički prikazati odnos pravaca i točaka. Kako se povećava red projektivne ravnine, tako slika postaje složenija. Već je i za ravninu reda 3 dovoljno komplicirana.



Slika 2.5: Projektivna ravnina reda 3

Upravo su matrice incidencije, koje smo ranije definirali, riješile taj problem. Možemo ih upotrijebiti za vizualizaciju svih simbola i karata u igri, ali još zanimljivije, možemo vidjeti koje karte imaju koje simbole. Napravit ćemo tablicu koja će detaljnije pokazati kako bismo konstruirali matricu incidencije za pojednostavljenu verziju igre prikazanu na slici 2.2.

KARTA	LIMUN	NARANČA	LIMETA	BANANA	KRUŠKA	JABUKA	TREŠNJA
1	1	1	1	0	0	0	0
2	0	1	0	1	1	0	0
3	1	0	0	0	1	1	0
4	1	0	0	1	0	0	1
5	0	0	1	1	0	1	0
6	0	0	1	0	1	0	1
7	0	1	0	0	0	1	1

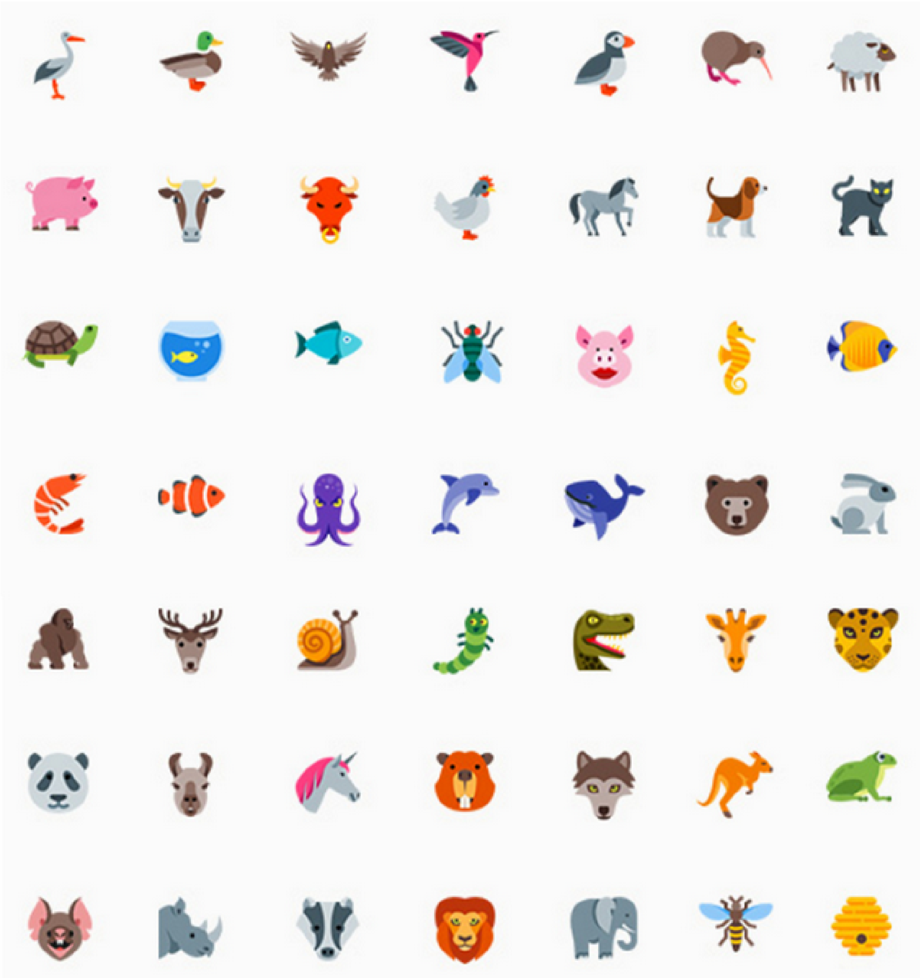
Iz navedene tablice koja prikazuje vrijednosti matrice incidencije vidimo da se bilo koje dvije karte podudaraju u točno jednom simbolu.

Budući da je broj simbola na jednoj karti konstantan i iznosi 8, *Spot It!* je i 8-hipergraf. Dodatno, radi se o Steinerovom sistemu $S(2, 8; 57)$. To smo mogli zaključiti koristeći Definiciju 1.18. Pri tome je $\lambda = 1$.

2.3 Konstrukcija špila karata

Ako se prisjetimo da se špil sastoji od 55 karata sa 8 simbola na svakoj tako da se svake dvije karte podudaraju u točno jednom simbolu te za bilo koja dva simbola postoji samo jedna karta koja ih sadrži, posebno je zanimljivo pitanje kako dizajnirati takav špil.

Za početak izrade karata za igru trebamo rasporediti 49 simbola u mrežu 7×7, odnosno u grčko-latinski kvadrat reda 7. Takvu raspodjelu možemo vidjeti na slici 2.3. Preostalih 8 simbola (bubamara, rak, zvijezda, pauk, leptir, skakavac, komarac, ptica) su ”beskonačne točke”. Kao kod svih grčko-latinskih kvadrata, svaki simbol se pojavljuje samo jednom u svakom retku i svakom stupcu.



Slika 2.6: Raspodjela simbola u mrežu

Nadalje, možemo vidjeti koji bi se simboli trebali pojaviti na svakoj karti. Svaka linija predstavlja jednu kartu, a simboli kroz koje ta linija prolazi su simboli za tu kartu. Na Slici 2.3, crvena i zelena linija slijede jedna drugu. Budući da se paralelne unutar mreže, nemaju zajednički simbol sve dok se ne doda 'beskonačna točka' - pauk. Plava linija siječe crvenu i zelenu liniju tako da će plava karta imati točno jedan zajednički simbol sa crvenom i zelenom kartom. Plava karta također treba 'beskonačnu točku' za stupce, a to je rak.

2.3. Konstrukcija špila karata

Postoji 8 kompleta od 7 paralelnih linija, što nam daje špil od 56 karata. Vjerojatno se pitate gdje je 57. karta. Ona sadrži 8 'beskonačnih točaka'.

Slika 2.7: Izrada karata

Poglavlje 3

Izrada igre *Spot It!*

Činjenica je da većina učenika nema dovoljno razvijeno logičko razmišljanje i zaključivanje. Kao posljedica toga, dolazi do brzog odustajanja pri rješavanju problemskih zadataka. Stoga treba raditi na ustrajnosti i upornosti prilikom rješavanja takve vrste zadataka. Dobar način za postizanje tog cilja je uvođenje društvenih igara u nastavu matematike.

3.1 Matematički *Spot It!*

Pitamo se može li se osmisliti igra *Spot It!* prilagođena nastavi matematike. Mi ćemo to pokušati za onu jednostavniju verziju prilagođenu djeci, odnosno igru kod koje se špil sastoji od 31 karte. U poglavlju prije ovoga smo proučavali matematičku pozadinu igre pa možemo reći da će ova naša igra biti konačna projektivna ravnina reda 5.

Cilj je osmisliti 31 pojam iz gradiva za osnovnu školu te svaki prikazati na 6 različitih načina. U daljnjem su dani takvi ekvivalentni prikazi istog matematičkog izraza.

3.1. Matematički *Spot It!*

1. pojam	2. pojam	3. pojam
$2\ tjedna$	$3.5\ dana$	$10\%\ od\ 100\ min$
$14\ dana$	$\frac{1}{2}\ tjedna$	$\frac{1}{6}\ h$
$\sqrt{4}\ tjedna$	$84\ h$	$600\ s$
$336\ h$	$5\,040\ min$	$5\ \mathrm{min} \cdot 2$
$20\,160\ min$	$302\,400\ s$	$\frac{1}{144}\ dana$
$1\,209\,600\ s$	$3\ dana\ 12\ h$	$24\ \mathrm{min}\ 14\ s - 14\ \mathrm{min}\ 14\ s$

4. pojam	5. pojam	6. pojam
$4\ m\ 2\ cm$	$4\ dm\ 2\ cm$	$102\ g$
$402\ cm$	$42\ cm$	$10.2\ dag$
$4\,020\ mm$	$420\ mm$	$10\ dag\ 2\ g$
$40.2\ dm$	$4.2\ dm$	$102\,000\ mg$
$40\ dm\ 2\ cm$	$0.42\ m$	$0.120\ kg$
$4.02\ m$	$40\ cm\ 20\ mm$	$1.02 \cdot 10^{-4}\ t$

7. pojam	8. pojam	9. pojam
$102\ dag$	$3 \cdot 5 + 1$	10^2
$1\,020\ g$	$17 - 1$	$2^2 \cdot 5^2$
$1\ kg\ 2\ dag$	4^2	$\sqrt{10\,000}$
$1.02\ kg$	2^4	$10^4 : 10^2$
$1.02 \cdot 10^{-3}\ t$	$\frac{2^5}{2}$	$\frac{1}{4}\ od\ 400$
$1\,020\,000\ mg$	$(7-3)^2$	$0.1 \cdot 1\,000$

Slika 3.1: Simboli

3.1. Matematički *Spot It!*

10.pojam	11.pojam	12.pojam
10^5	10^0	$(3+3):3$
$10^2 \cdot 10^3$	$\sqrt{1}$	$\sqrt[4]{16}$
$10^{14} : 10^9$	$10^5 - 99\,999$	$\lvert -2 \rvert$
$\frac{200\,000}{2}$	$(-1)^2$	$6 \cdot 2 - 10$
$0.001 \cdot 10^8$	$0.1 \cdot 10$	$\frac{36}{18}$
$10 \cdot \sqrt{10^8}$	100%	$1+\frac{5}{5}$

13.pojam	14.pojam	15.pojam
$2\ l$	$2\ hl$	$\frac{3}{4}$
$2\ dm^3$	$200\ l$	75%
$2\,000\ ml$	$0.2\ m^3$	$\frac{15}{20}$
$2\,000\ cm^3$	$200\,000\ ml$	0.75
$20\ dl$	$2 \cdot 10^8\ mm^3$	$\frac{75}{100}$
$\frac{1}{50}\ hl$	$2\,000\ dl$	$750‰$

Slika 3.2: Simboli

3.1. Matematički *Spot It!*

16.pojam	17.pojam	18.pojam
$pola$	$3:2$	$\frac{17}{5}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{6}$	$17:5$
0.5	$\frac{3}{2}$	$3\frac{2}{5}$
50%	$1\frac{1}{2}$	$2+1\frac{2}{5}$
$\frac{12}{24}$	1.5	3.4
$\frac{50}{100}$	$\frac{15}{10}$	$\frac{34}{10}$

19.pojam	20.pojam	21.pojam
$\frac{534}{100}$	$\frac{4\frac{2}{3}}{2}$	$\frac{1}{2+\frac{1}{2}}$
5.34	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{267}{50}$	$2\frac{1}{3}$	0.4
534%	$7:3$	$4:10$
$5+\frac{34}{100}$	$\left\|-\frac{7}{3}\right\|$	$\sqrt{\frac{4}{25}}$
$5+0.34$	$\sqrt{\frac{49}{9}}$	$-\left(-\frac{2}{5}\right)$

Slika 3.3: Simboli

22.pojam	23.pojam	24.pojam
$10\%\ od\ (-2\ 000)$	$-\|5\|$	$\|10\| + \|-10\|$
$-2 \cdot 10^2$	$-\sqrt{25}$	$4 \cdot 5$
$-(-(-200))$	$\frac{1}{2}\ od\ (-10)$	$\frac{1}{5}\ od\ 100$
$-\|-200\|$	$-(-(-5))$	$4^2 + 4$
$-2 \cdot 100$	$-20 + 15$	$-40 + 60$
$\frac{1}{4}\ od\ (-800)$	$-3 - 2$	$0 - (-20)$

25.pojam	26.pojam	27.pojam
$\|10\| - 10$	$-\frac{-1}{-8}$	$-\frac{3}{4}$
0^2	$-\frac{5}{40}$	$-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}$
$-4 + 4$	$2 \cdot \left(\frac{-1}{16}\right)$	-0.75
$-(-(-0))$	$\frac{\frac{5}{-16}}{\frac{5}{2}}$	$-\sqrt{\left(-\frac{3}{4}\right)^2}$
$\frac{0}{5}$	$-\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2$	$3\frac{1}{4} - 4$
$-20 \cdot 0$	$\frac{1}{-8}$	$\frac{\sqrt{9}}{-4}$

Slika 3.4: Simboli

3.1. Matematički *Spot It!*

28.pojam	29.pojam	30.pojam
$\frac{8}{\sqrt{2}}$	9	-9
$\sqrt{32}$	3^2	$-\lvert -9 \rvert$
$4\sqrt{2}$	$\sqrt{81}$	-3^2
$\frac{16}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$	$\lvert -9 \rvert$	$1-10$
$-\sqrt{2}+5\sqrt{2}$	$45 \cdot \frac{1}{5}$	$-3 \cdot 3$
$\sqrt{4} \cdot \sqrt{2^3}$	$\frac{\sqrt{243}}{\sqrt{3}}$	$-1-8$

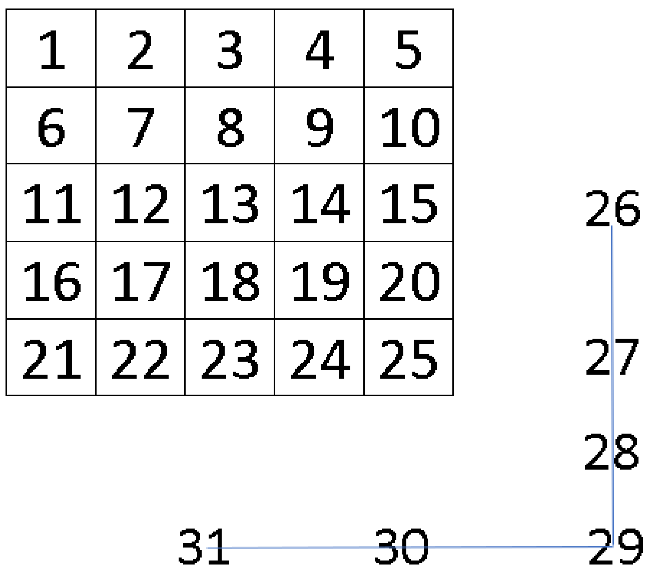
31.pojam
$25\%\ od\ 1\,200$
$10\%\ od\ 3\,000$
$-200+500$
$\frac{300}{1}$
$\sqrt{90\,000}$
$75 \cdot 2^2$

Slika 3.5: Simboli

3.2 Konstrukcija karata za igru

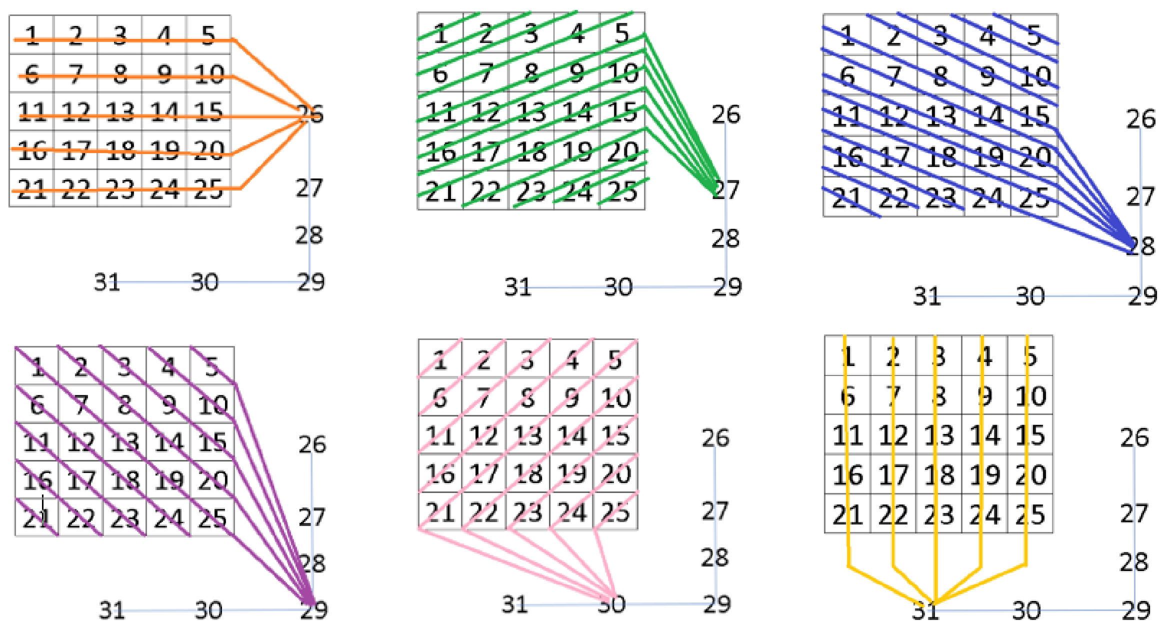
Nakon što smo definirali pojmove (simbole) za igru, javlja se pitanje kako ih rasporediti na karte. Već ranije smo na primjeru originalne igre objasnili da to ne možemo učiniti bilo kako, nego da je jako bitan raspored simbola na karte. Sada ćemo napokon primjeniti naučeno na modificiranu igru za osnovnu školu. Radi jednostavnosti, u postupku objašnjavanja koristit ćemo se rednim brojevima matematičkih izraza.

Točke, odnosno brojeve u našem primjeru, rasporedimo u grčko-latinski kvadrat reda 5 kao što je prikazano na slici 3.2. Preostalih 6 točaka rasporedimo sa strane kao na slici te ih spojimo. Time smo dobili jednu kartu.



Slika 3.6: Grčko-latinski kvadrat reda 5

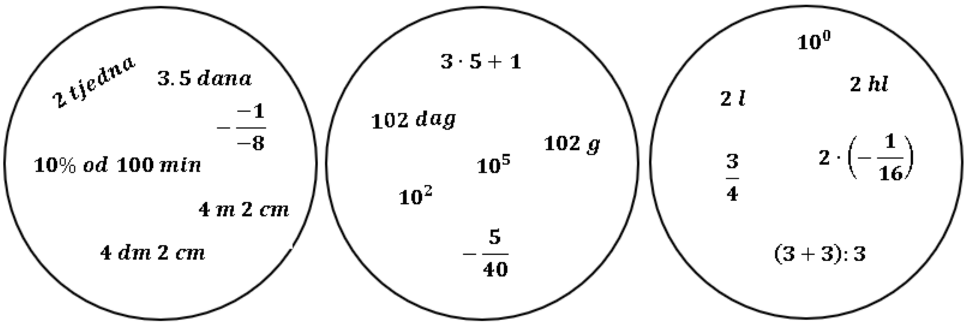
Sada iz svake od tih 6 točaka, koje se nalaze izvan grčko-latinskog kvadrata, povlačimo paralele spajajući tu točku s 5 točaka iz grčko-latinskog kvadrata. To možemo vidjeti u prilogu.



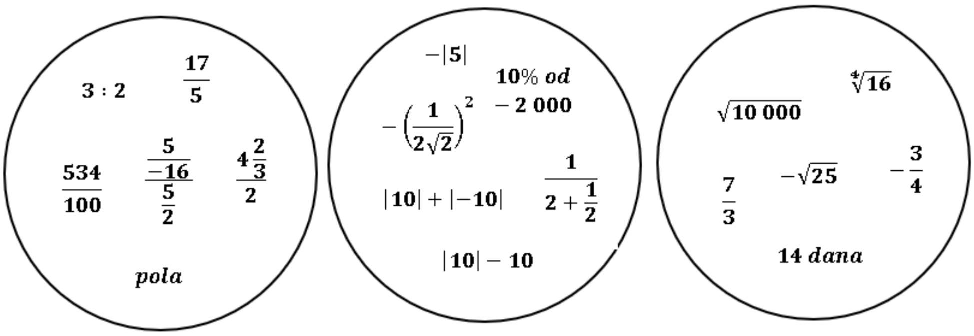
Slika 3.7: Odabir točaka za karte

Na ovaj način smo, koristeći principe teorije dizajna, konačno uspjeli dizajnirati špil od 31 karte za modificiranu igru *Spot It!*. Pogledajmo kako izgledaju karte.

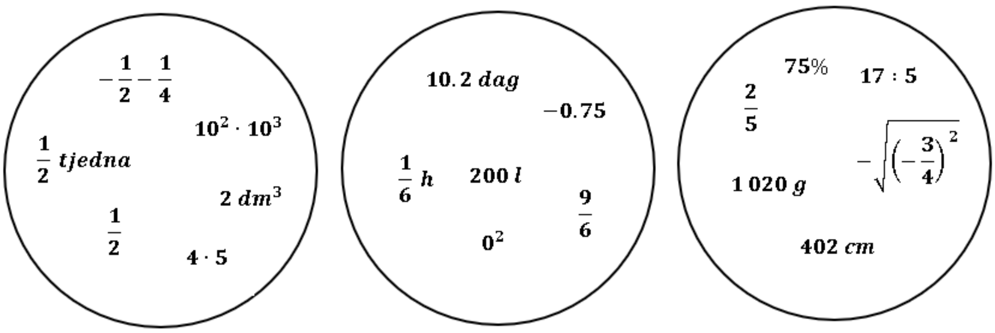
3.2. Konstrukcija karata za igru



Slika 3.8: 1.karta, 2.karta, 3.karta

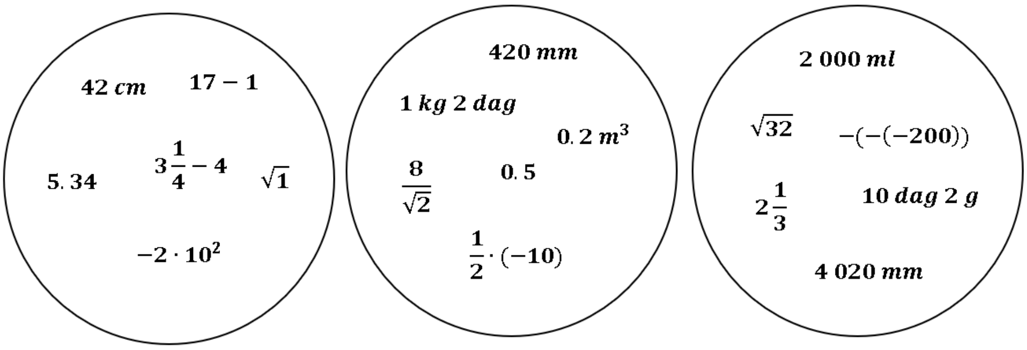


Slika 3.9: 4.karta, 5.karta, 6.karta

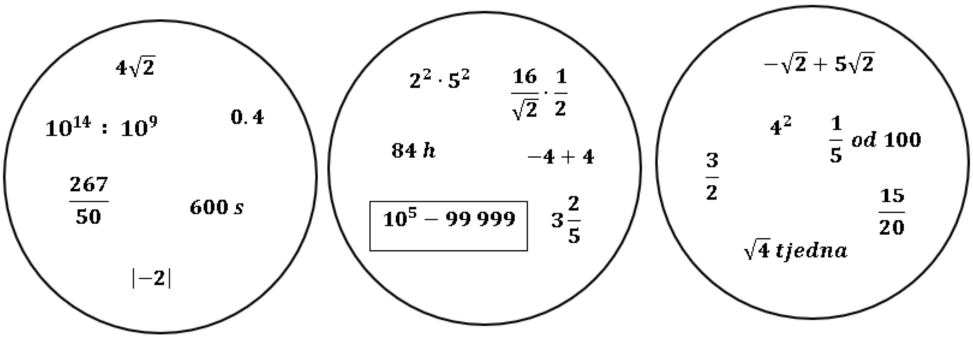


Slika 3.10: 7.karta, 8.karta, 9.karta

3.2. Konstrukcija karata za igru

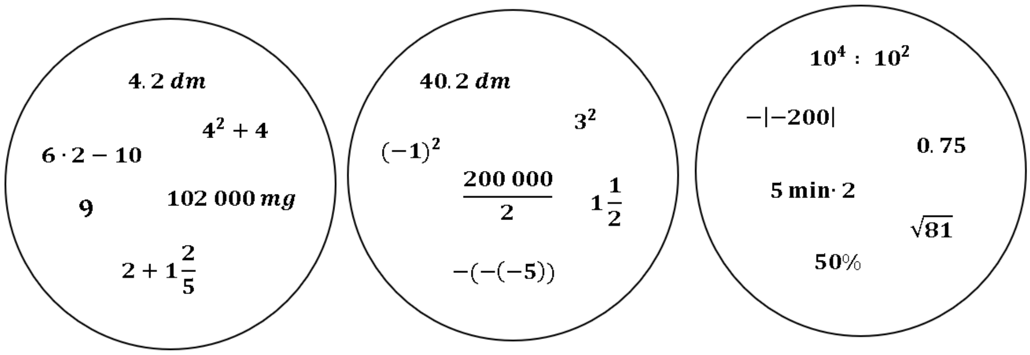


Slika 3.11: 10.karta, 11.karta, 12.karta

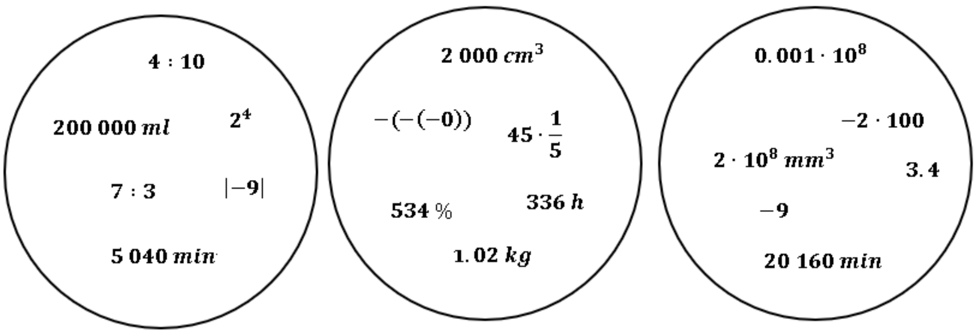


Slika 3.12: 13.karta, 14.karta, 15.karta

3.2. Konstrukcija karata za igru

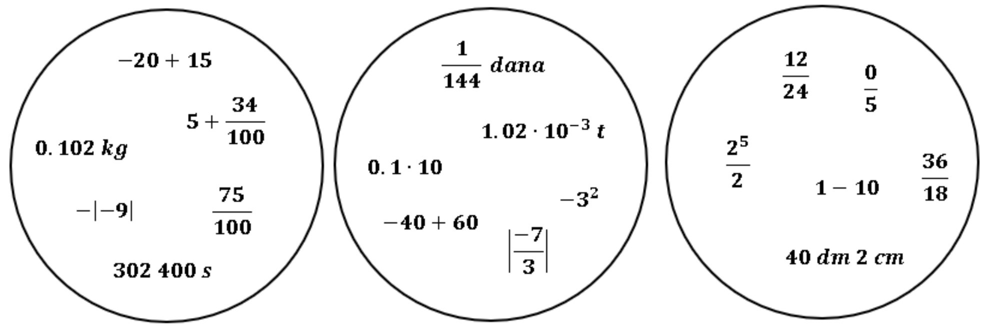


Slika 3.13: 16.karta, 17.karta, 18.karta

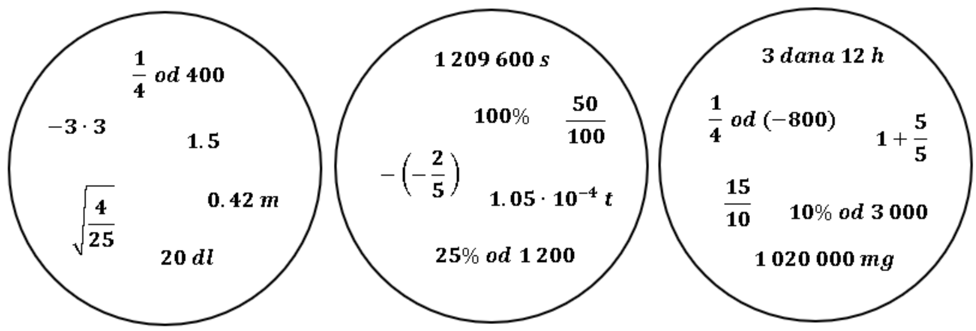


Slika 3.14: 19.karta, 20.karta, 21.karta

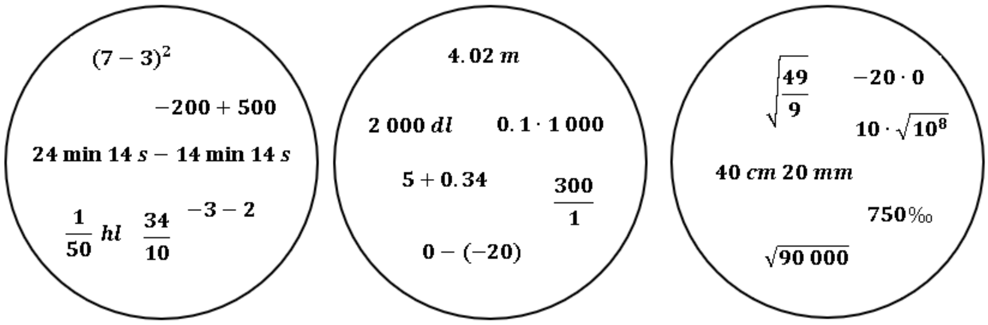
3.2. Konstrukcija karata za igru



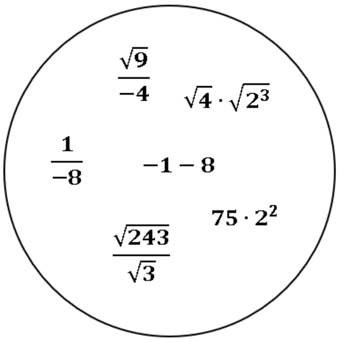
Slika 3.15: 22.karta, 23.karta, 24.karta



Slika 3.16: 25.karta, 26.karta, 27.karta



Slika 3.17: 28.karta, 29.karta, 30.karta



Slika 3.18: 31.karta

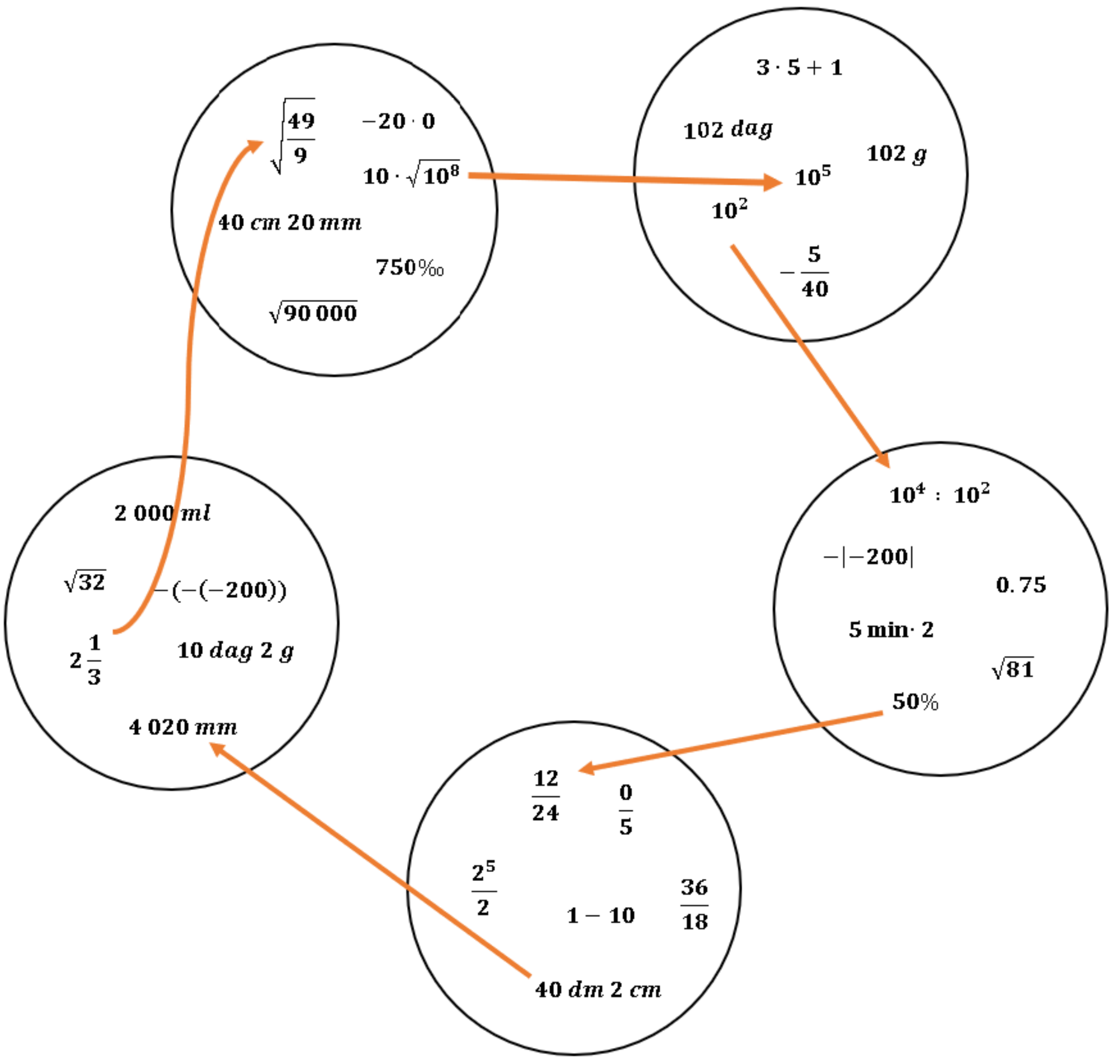
Dakle, napokon smo dobili špil od 31 karte koji zadovoljava sve tražene uvjete:

- Ukupno je 31 simbol.
- Svaka karta sadrži točno 6 simbola.
- Svaki simbol se pojavljuje na točno 6 karata.
- Svake dvije karte se podudaraju u točno jednom simbolu.

Igra s ovako osmišljenim špilom karata je namijenjena učenicima za ponavljanje gradiva iz matematike na kraju osnovne škole ili kao uvodno ponavljanje u prvom razredu srednje škole. Pravila igre ista su kao i u originalnom *Spot It!*-u koji smo predstavili u prethodnom poglavlju.

3.2. Konstrukcija karata za igru

Uvjerimo se na primjeru slučajno odabranih 5 karata da se uistinu svake dvije podudaraju u točno jednom izrazu.

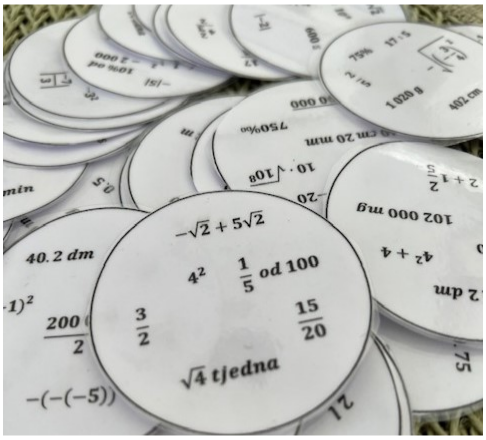


Slika 3.19: Otkrivanje zajedničkog izraza

Poglavlje 4

Zaključak

Nakon što su osmišljeni simboli za kartice te uspješno raspoređeni na kartice, ideja je bila testirati igru s učenicima. Kartice su izrađene, a zatim i isprintane te plastificirane kako bi se učenicima bilo što lakše uživjeti u igranje igre. Kako je to zapravo izgledalo u stvarnosti, može se vidjeti na slici 4:



Slika 4.1: Plastificirane kartice

Za testiranje igre odabrani su učenici 8.razreda Osnovne škole *Kula Norinska*. Kako bi igra mogla biti u potpunosti korektno testirana bilo je potrebno da su

učenici svladali i gradivo drugog korijena na što se pazilo da bude ispoštovano.
Učenici su samu ideju igranja igre na satu matematike prihvatili s oduševljenjem, uz naravno malu dozu nesigurnosti zbog toga što nisu znali koliko će zadaci biti zahtjevni. No, i taj strah je već na samom početku uklonjen.
Nitko od učenika nije od prije čuo za igru *Spot It!* pa je bilo potrebno detaljno objasniti princip i pravila igre. Igra se igrala u četveročlanim skupinama tako da je svaki učenik dobio jednak broj kartica koje su okrenute licem prema dnu, a jedna kartica je otvorena na sredini stola. Učenici su istovremeno otvorili po jednu karticu iz vlastitog špila te pokušavali naći zajednički simbol sa kartom sa sredine. Osoba koja je prva otkrila zajednički simbol osvojila bi jedan poen te bi započela sljedeća runda s novim kartama iz špila. Pobjednik igre bio je učenik s najviše poena nakon svih odigranih rundi.
Odmah se na početku igre probudio natjecateljski duh. Učenici su bez problema razlikovali oznake u simbolima te automatski eliminirali pojmove koji nisu međusobno povezani. Najviše muke su im zadale mjerne jedinice te neki matematički sadržaji koji prethodno nisu dovoljno dobro usvojeni. Naravno, kao što je i očekivano, uspješniji su bili oni učenici s boljim predznanjem jer bi smislenije grupirali sadržaje, a u konačnici i brže došli do ekvivalentnog pojma. Učenicima se svidio drukčiji oblik rada, a čak se jedan od učenika dosjetio da bi bilo zgodno napraviti aplikaciju za igranje ovakve igre.

Literatura

[1] Douglas R. Stinson, *Combinatorial Designs: Constructions and Analysis*

[2] Aljoša Šubašić, *Teorija dizajna*

[3] Anka Golemac, Danijela Šarac, Tanja Vučičić, *Konačna geometrija*, $http://e.math.hr/category/klju-ne-rije-i/kona-na-geometrija$

[4] *Finite Projective Planes and the Math of Spot It!*, https://puzzlewocky.com/games/the-math-of-spot-it/

[5] Micky Dore, *The maths behind Dobble*, https://mickydore.medium.com/dobble-theory-and-implementation-ff21ddbb5318

[6] *The Mathematics of Dobble*, http://thewessens.net/ClassroomApps/Main/finitegeometry.html?topic=geometryid=19

[7] *Latinski kvadrati*, https://hrcak.srce.hr/file/354943