Odabrana poglavlja teorije kontinuuma

Maleš, Antonia

Master's thesis / Diplomski rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:880073

Rights / Prava: In copyright/Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-02-17**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Science

zir.nsk.hr

UNIVERSITY OF SPLIT

dabar

DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ANTONIA MALEŠ

ODABRANA POGLAVLJA TEORIJE KONTINUUMA

DIPLOMSKI RAD

Split, prosinac 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

ODABRANA POGLAVLJA TEORIJE KONTINUUMA

DIPLOMSKI RAD

Student(ica):
Antonia Maleš

Mentor(ica):
doc. dr. sc. Goran Erceg

Split, prosinac 2023.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

ODABRANA POGLAVLJA TEORIJE KONTINUUMA

Antonia Maleš

Sažetak:

Kontinuum je neprazan, povezan i kompaktan metrički prostor. Može biti rastavljiv ili nerastavljiv. Cilj ovog rada je proučiti tri osnovne metode kojima se od jednostavnijih primjera kontinuuma mogu konstruirati složeniji. Prva je metoda ugniježđenih presjeka, a ključan rezultat koji omogućuje njeno korištenje tvrdi da je ugniježđeni presjek kontinuuma također kontinuum. Druga je metoda inverznih limesa, za koju se pokaže da je poseban slučaj ugniježđenih presjeka. Dodatno se opisuju nerastavljivi inverzni nizovi čiji inverzni limesi daju nerastavljive kontinuume. Treća metoda je dekompozicija kontinuuma čija je ideja da se od particije kontinuuma dobije novi kontinuum. Pokaže se da to uvijek vrijedi za posebnu klasu takozvanih usc dekompozicija. Za sve metode navode se primjeri kontinuuma koji se pomoću njih konstruiraju.

Ključne riječi:

topološki prostor, povezanost, kompaktnost, metrizabilnost, neprekidnost, Kartezijev produkt, ugniježđeni presjek, inverzni limes, particija, usc dekompozicija

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Podatci o radu:

53 stranice, 15 slika, 7 literaturnih navoda, jezik izvornika: hrvatski

Mentor(ica): *doc. dr. sc. Goran Erceg*

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Tanja Vojković

dr. sc. Ivan Jelić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *15. prosinca 2023.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

SELECTED CHAPTERS OF CONTINUUM THEORY

Antonia Maleš

Abstract:

A continuum is a nonempty, compact and connected metric space. It can be decomposable or indecomposable. The objective of this thesis is to describe three main methods for constructing complex examples of continuua from simpler ones. The first method uses nested intersections. The key to using this method lies in proving that the nested intersection of continua is a continuum. Second method uses inverse limits, which we prove to be a special case of nested intersections. Additionally, we describe indecomposable inverse sequences, whose inverse limits form indecomposable continua. Third method is the decomposition of continua. The idea is to obtain a new continuum using a partition of the given one. We show that this is always the case for a special class of so-called usc decompositions. For each method we give examples of continua constructed by them.

Key words:

topological space, connectedness, compactness, metrizability, continuity, Cartesian product, nested intersection, inverse limit, partition, usc decomposition

Specifications:

53 pages, 15 pictures, 7 citations, language of the original: Croatian

BASIC DOCUMENTATION CARD

Mentor: *assistant professor Goran Erceg*

Committee:

assistant professor Tanja Vojković

Ivan Jelić, phd

This thesis was approved by a Thesis committee on *December 15th, 2023*

Uvod

Topologija kao grana matematike razvila se u 20. stoljeću, a nastala je iz koncepata koje su matematičari počeli definirati i proučavati u drugoj polovici 19. stoljeća. U početku su se najviše proučavali podskupovi n-dimenzionalnih euklidskih prostora, iz čega su kasnije izvedena poopćenja osnovnih pojmova, kao što su povezanost i kompaktnost. Prva klasa prostora na kojoj su uspješno poopćeni mnogi rezultati, bili su metrički prostori.

Ovo je dovelo do pojma kontinuuma, koji se definira kao neprazan, kompaktan, povezan metrički prostor. Pojam je prvobitno uveo Georg Cantor 1883. godine u nešto drugačijem obliku nego što ga znamo danas (za opširniji povijesni pregled pogledati [7]).

Cilj ovog rada je opisati tri osnovne metode konstrukcije kompleksnih primjera kontinuuma, a to su ugniježđeni presjeci, inverzni limesi i dekompozicije kontinuuma. U prvom poglavlju navode se osnovni pojmovi i rezultati iz topoloških i metričkih prostora te se za kraj uvodi pojam kontinuuma uz jednostavne primjere. U drugom poglavlju definiraju se ugniježđeni presjeci i dokazuje da je ugniježđeni presjek kontinuuma također kontinuum. Primjena ovog rezultata pokazana je na primjerima konstrukcije ulančanog nerastavljivog kontinuuma i tepiha Sierpińskog. U trećem poglavlju uvode se inverzni limesi i pokazuje da ih se može promatrati kao poseban slučaj ugniježđenih presjeka. Iz toga lako proizlazi da je inverzni limes kontinuuma također kontinuum. U ovom poglavlju poseban naglasak je na podklasi kontinuuma koji se nazivaju nerastavljivima. U tu svrhu uvodi se pojam nerastavljivog inverznog niza i pokazuje se da je njegov inverzni limes nerastavljivi kontinuum. Za kraj se opisuje konstrukcija p-adičkog solenoida i Knasterovog kontinuuma, te se uz pomoć prethodnih rezultata pokazuje da se radi o nerastavljivim kontinuumima. U četvrtom poglavlju na particiji prostora uvodi se topologija te se tako dobiven topološki prostor naziva dekompozicijom početnog prostora. Pokazuje se da je, uz određene uvjete, dekompozicija kontinuuma također kontinuum. Budući da te uvjete nije uvijek lako provjeriti, uvodi se posebna klasa dekompozicija, koje nazivamo usc dekompozicijama i pokazuje se da je usc dekompozicija kontinuuma uvijek kontinuum. Za kraj se navode neki specifični i neki poopćeniji primjeri konstrukcije kontinuuma korištenjem usc dekompozicija.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

U ovom poglavlju navodimo osnovne definicije, primjere i rezultate bez dokaza koji će nam biti potrebni za razumijevanje teme rada. Sve što ćemo ovdje spomenuti preuzeto je iz [2], ukoliko nije naglašeno drugačije, gdje možete pronaći dokaze i detaljnija objašnjenja.

1.1 Topološki prostori

Topologija

Definicija 1.1 *Neka je X skup i $\mathcal{T}$ neka množina podskupova od X za koju vrijedi:*

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(T2) Ako su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, *onda je i* $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$;

(T3) Unija svake familije elemenata iz $\mathcal{T}$ *je element iz* $\mathcal{T}$, *tj. ako je* $(U_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ *familija elemenata* $U_\lambda \in \mathcal{T}$, *onda je* $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$.

Množinu $\mathcal{T}$ nazivamo ***topologijom na skupu*** *X, njene elemente* ***otvorenim skupovima*** *od X, a elemente od X* ***točkama****. Uređeni par $(X, \mathcal{T})$ nazivamo* ***topološkim prostorom****.*

Definicija 1.2 *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na X i neka je $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ neka podmnožina od $\mathcal{T}$. Kažemo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako se svaki otvoreni skup $U \in \mathcal{T}$ može prikazati kao unija neke familije elemenata iz $\mathcal{B}$.*

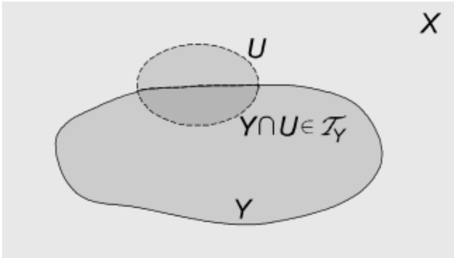
Teorem 1.3 (Karakterizacija baze topologije) *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na X i $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ neka podmnožina od $\mathcal{T}$. $\mathcal{B}$ je baza topologije $\mathcal{T}$ ako i samo ako, za svaki $U \in \mathcal{T}$ i svaki $x \in U$, postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq U$.*

Primjer 1.4 *Neka je $\leq$ standardni potpuni uređaj na skupu $\mathbb{R}$. Definirajmo sljedeće skupove: $\langle \cdot, x \rangle = \{x' \in \mathbb{R} : x' < x\}$, $\langle x, \cdot \rangle = \{x' \in \mathbb{R} : x < x'\}$ i $\langle x, y \rangle = \{x' \in \mathbb{R} : x < x' < y\}$. Ovi skupovi tvore bazu topologije koju nazivamo* ***standardnom topologijom*** *na $\mathbb{R}$.*

Topološke prostore koji su nam već poznati možemo iskoristiti za izgradnju novih. Pritom želimo da nova topologija bude usklađena s početnom. U nastavku ćemo pokazati kako ovo primijeniti na podskupovima i Kartezijevim produktima topoloških prostora.

Definicija 1.5 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $Y \subseteq X$. Topološki prostor $(Y, \mathcal{T}_Y)$, gdje je $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$, naziva se* ***potprostor*** *prostora $(X, \mathcal{T})$, a $\mathcal{T}_Y$* ***relativna*** *topologija na Y.*

Lako se provjeri da $\mathcal{T}_Y$ zadovoljava svojstva (T1), (T2) i (T3), tj. da je doista topologija. Možemo reći da podskupovi topološkog prostora X na prirodan način "nasljeđuju" njegovu topologiju.



Slika 1.1: Otvoreni skup s obzirom na relativnu topologiju na $Y \subseteq X$ (preuzeto iz [2, str. 29])

Neka je $(X_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ familija topoloških prostora $(X_\lambda, \mathcal{T}_\lambda)$. **Kartezijev produkt** $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ skupova X_λ je skup svih preslikavanja $x : \Lambda \to \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ sa svojstvom da je $x(\lambda) \in X_\lambda$, za svaki $\lambda \in \Lambda$. Ako označimo $x(\lambda) = x_\lambda$, onda preslikavanje x označavamo sa (x_λ).

Na Kartezijevom produktu $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ sada ćemo uvesti topologiju. Označimo sa $p_\lambda : \prod\limits_{\mu\in\Lambda} X_\mu \to X_\lambda$ projekciju iz Kartezijevog produkta na λ-koordinatu X_λ, za svaki $\lambda \in \Lambda$. Promotrimo sljedeće skupove:

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) = \{(x_\lambda) \in \prod_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda : x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i},\ i = 1, ..., n\},$$

gdje je $\{\lambda_1, ..., \lambda_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, konačan podskup od Λ i $U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i} \setminus \{\emptyset, X_{\lambda_i}\}$, $i = 1, ..., n$. Ove skupove označavamo sa $U_{\lambda_1} \times \cdots \times U_{\lambda_n} \times \prod\limits_{\lambda\in\Lambda\setminus\{\lambda_1,..,\lambda_n\}} X_\lambda$ ili $\langle U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_n} \rangle$.

Definicija 1.6 *Neka je $(X_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ proizvoljna familija topoloških prostora X_λ. Topologija $\mathcal{T}$ na $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, kojoj bazu tvore skupovi oblika*

$$\langle U_{\lambda_1}, ..., U_{\lambda_n} \rangle := \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}),$$

*gdje je $U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i} \setminus \{\emptyset, X_{\lambda_i}\}$, za svaki $i \in \{1, ..., n\}, n \in \mathbb{N}$, naziva se **produktna topologija** na $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, a topološki prostor $(\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda, \mathcal{T})$ naziva se **topološki produkt** prostora X_λ, $\lambda \in \Lambda$.*

Interior i zatvarač skupa

Definicija 1.7 *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Unija svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ koji su sadržani u A naziva se* ***interior*** *skupa A u prostoru X i označava s* $\operatorname{Int} A$.

Po $(T3)$ slijedi da je $\operatorname{Int} A$ otvoren skup i to najveći koji je sadržan u A.

Primjer 1.8 *Promotrimo podskupove $A = \langle 0, 1]$ i $B = \langle 0, 1\rangle \cup \{2\} \cup [3, 4]$ prostora $\mathbb{R}$ sa standardnom topologijom. Tada je* $\operatorname{Int} A = \langle 0, 1\rangle$ *i*
$\operatorname{Int} B = \langle 0, 1\rangle \cup \langle 3, 4\rangle$.

Definicija 1.9 ***Okolinom točke*** *$x_0 \in X$ u prostoru X nazivamo svaki skup $O \subseteq X$ takav da je $x_0 \in \operatorname{Int} O$.*

Teorem 1.10 (Karakterizacija otvorenih skupova preko okolina) *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $U \subseteq X$. U je otvoren u X ako i samo ako za svaku točku $x \in U$ postoji okolina O točke x takva da je $O \subseteq U$ (Teorem 1.58 iz [6, str. 26]).*

Do sada smo pričali samo o otvorenim skupovima. U nastavku uvodimo pojam zatvorenih.

Definicija 1.11 *Kažemo da je skup $A \subseteq X$* **zatvoren** *u prostoru X, ako je skup $X \setminus A$ otvoren u X.*

Teorem 1.12 *Množina svih zatvorenih skupova u prostoru X ima sljedeća svojstva:*

(T1)' $\emptyset$ *i X su zatvoreni skupovi.*

(T2)' Unija od konačno mnogo zatvorenih skupova je zatvoren skup.

(T3)' Presjek svake familije zatvorenih skupova je zatvoren skup.

Definicija 1.13 *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Presjek svih zatvorenih skupova $F \subseteq X$ koji sadrže A naziva se **zatvarač** skupa A u prostoru X i označava s $\operatorname{Cl} A$.*

Po $(T3)'$ je $\operatorname{Cl} A$ zatvoren skup i to najmanji koji sadrži A.

Primjer 1.14 *Promotrimo skupove A i B iz Primjera 1.8. Vrijedi:* $\operatorname{Cl} A = [0,1]$ *i* $\operatorname{Cl} B = [0,1] \cup \{2\} \cup [3,4]$.

Separacijski aksiomi

U ovom odlomku navodimo podjelu topoloških prostora s obzirom na svojstvo "razdvajanja" nekih njegovih podskupova, i to jednotočkovnih i zatvorenih. Na kraju navodimo neka zanimljiva svojstva ovih prostora koja će nam poslužiti u nastavku rada.

Definicija 1.15 *Za topološki prostor X kažemo da je T_0-prostor, ako za svaki par različitih točaka $x, y \in X$ bar jedna od njih ima okolinu koja ne sadrži onu drugu točku.*

Definicija 1.16 *Za topološki prostor X kažemo da je T_1-prostor, ako za svaki par različitih točaka $x, y \in X$ svaka od njih ima okolinu koja ne sadrži onu drugu točku.*

Definicija 1.17 *Za topološki prostor X kažemo da je **Hausdorffov** (ili T_2-prostor), ako svake dvije različite točke od X imaju okoline koje su disjunktne.*

Definicija 1.18 *Za topološki prostor X kažemo da je **regularan** (ili T_3-prostor), ako je T_1-prostor i ako svaka točka $x \in X$ i svaki zatvoren skup $A \subseteq X$, $x \notin A$, imaju disjunktne okoline.*

Definicija 1.19 *Za topološki prostor X kažemo da je* ***normalan*** *(ili T_4-prostor), ako je T_1-prostor i ako svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova $A, B \subseteq X$ ima par disjunktnih okolina.*

Napomena 1.20 *Vrijedi sljedeće:*

(i) X je T_1-prostor ako i samo ako je svaki jednotočkovni skup $\{x\}$ zatvoren u X.

(ii) Svaki metrički prostor (Definicija 1.38) je normalan.

(iii) $T_4 \subset T_3 \subset T_2 \subset T_1 \subset T_0$.

Povezanost

Sljedeća definicija i napomena preuzeti su iz [6, str. 33].

Definicija 1.21 *Kažemo da je topološki prostor X* ***nepovezan*** *ako postoje neprazni, otvoreni skupovi $U, V \subseteq X$ takvi da je $U \cup V = X$ i $U \cap V = \emptyset$. Drugim riječima, prostor je nepovezan ako ga možemo rastaviti na dva disjunktna neprazna otvorena skupa. U protivnom, kažemo da je X* ***povezan****. Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je (ne)povezan, ako je A (ne)povezan kao potprostor od X.*

Napomena 1.22 *Prethodna definicija ostala bi ekvivalentna kada bi umjesto otvorenosti skupova U i V, zahtijevali zatvorenost.*

Primjer 1.23 $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$, $[a, b\rangle$ *i* $[a, b]$ *su povezani podskupovi od $\mathbb{R}$ uz standardnu topologiju (Primjer 5.17 iz [2, str. 104]).*

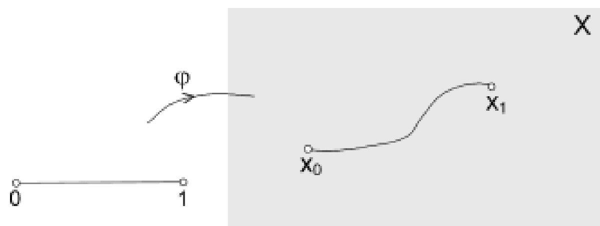
Sada dajemo iskaze dvaju rezultata koji nam govore o povezanosti unije i produkta povezanih prostora.

Teorem 1.24 *Neka je $(X_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ familija nepraznih podskupova $X_\lambda \subseteq X$ prostora X za koje vrijedi $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ i $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda \neq \emptyset$. Ako je svaki X_λ, $\lambda \in \Lambda$, povezan, onda je i prostor X povezan (za dokaz pogledati Teorem 1.89 iz [6, str. 34]).*

Teorem 1.25 *Topološki produkt $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ je povezan ako i samo ako je svaki prostor X_λ, $\lambda \in \Lambda$, povezan.*

U nastavku uvodimo pojam jači od povezanosti, a to je putevima povezanost.

Definicija 1.26 ***Put*** *u prostoru X je svako neprekidno preslikavanje $\varphi : [0,1] \to X$. Točka $x_0 = \varphi(0)$ naziva se početak, a točka $x_1 = \varphi(1)$ kraj puta φ. Još se kaže da put φ povezuje točku x_0 s točkom x_1.*



Slika 1.2: Put φ koji povezuje točku x_0 s točkom x_1 (preuzeto iz [2, str. 107])

Definicija 1.27 *Kažemo da je topološki prostor X* ***putevima povezan****, ako za svaki par točaka $x_0, x_1 \in X$ postoji put φ u X koji povezuje x_0 sa x_1.*

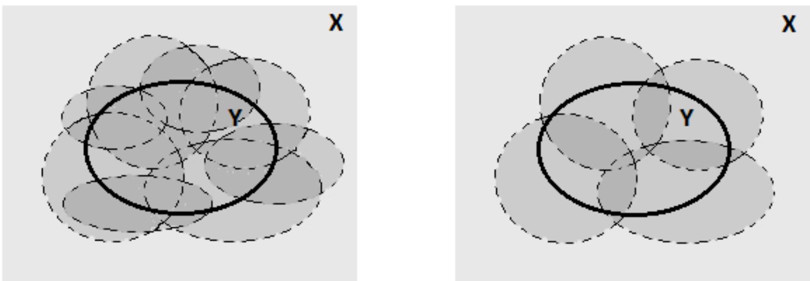
Teorem 1.28 *Svaki putevima povezan prostor je povezan.*

Kompaktnost

Definicija 1.29 *Kažemo da je familija $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ podskupova A_λ skupa X* ***pokrivač skupa*** *X ako je $X = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$.*
Za pokrivač $\mathcal{A}$ kažemo da je ***konačan*** *(**prebrojiv**) ako je skup Λ konačan (prebrojiv). Ako je $\Lambda' \subseteq \Lambda$ i $X = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda'} A_\lambda$, onda kažemo da je $\mathcal{A}' = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda')$* ***potpokrivač*** *od $\mathcal{A}$.*

Definicija 1.30 *Neka je X topološki prostor. Za pokrivač $\mathcal{U} = (U_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ skupa X kažemo da je* ***otvoreni pokrivač*** *prostora X, ako je svaki $U_\lambda, \lambda \in \Lambda$, otvoren u X.*

Definicija 1.31 *Za topološki prostor X kažemo da je* ***kompaktan*** *ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X postoji konačan potpokrivač. Za podskup $Y \subseteq X$ kažemo da je kompaktan, ako je Y kompaktan kao potprostor od X (Definicija 1.90 iz [6, str. 35]).*



Slika 1.3: Otvoreni pokrivač i pripadajući potpokrivač skupa $Y \subseteq X$

Napomena 1.32 *Neka je $Y \subseteq X$ potprostor prostora X i $A \subseteq Y$. A je kompaktan potprostor prostora Y ako i samo ako je A kompaktan potprostor prostora X.*

Primjer 1.33 *Podskup $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ prostora $\mathbb{R}$ sa standardnom topologijom je kompaktan (Primjer 6.13 iz [2, str. 123]).*

Neki od najvažnijih rezultata vezanih za kompaktnost, koje ćemo koristiti u ovom radu, dani su u nastavku.

Teorem 1.34 *Svaki zatvoren podskup $F \subseteq X$ kompaktnog prostora X je kompaktan.*

Teorem 1.35 *Neka je X Hausdorffov prostor i $K \subseteq X$ kompaktan podskup. Tada je K zatvoren u X.*

Primjer 1.36 *Podskupovi $\langle a, b\rangle$, $\langle a, b]$ i $[a, b\rangle$ prostora $\mathbb{R}$ sa standardnom topologijom nisu kompaktni jer nisu zatvoreni.*

Teorem 1.37 (Tihonovljev teorem) *Produkt $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ je kompaktan prostor ako i samo ako je svaki prostor X_λ, $\lambda \in \Lambda$, kompaktan (za dokaz pogledati [5, str. 17]).*

1.2 Metrički prostori

Definicija 1.38 *Neka je X skup i $d : X \times X \to \mathbb{R}$ realna funkcija koja ima sljedeća svojstva:*

(M1) *Za svaki $x, y \in X$ je $d(x, y) \geq 0$;*

(M2) *Za svaki $x, y \in X$, $d(x, y) = 0$ ako i samo ako je $x = y$;*

(M3) *Za svaki $x, y \in X$ je $d(x, y) = d(y, x)$;*

(M4) *Za svaki $x, y, z \in X$ vrijedi $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.*

*Funkcija d naziva se **metrikom(udaljenošću)** na skupu X, a par (X,d) naziva se **metričkim prostorom**.*

Primjer 1.39 *Na skupu $\mathbb{R}^n$ definirana je metrika $d_2 : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ na sljedeći način:*

$$d_2(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2},$$

*gdje $x = (x_1, ..., x_n)$ i $y = (y_1, ..., y_n)$. Nazivamo ju **euklidskom** metrikom, a metrički prostor $(\mathbb{R}^n, d_2)$ n-**dimenzionalnim euklidskim prostorom**. U prostoru $\mathbb{R}$ ova metrika poprima oblik $d_2(x,y) = |x-y|$, a u $\mathbb{R}^2$ dobijemo $d_2(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$ (vidi [6, str. 13]).*

Neka je (X,d) metrički prostor i $Y \subseteq X$. Označimo sa $d_Y := d|_{Y\times Y}$ restrikciju metrike d na skup $Y \times Y$. Tada je d_Y također metrika, a (Y, d_Y) metrički prostor kojeg nazivamo **potprostor** od X (vidi [6, str. 15]).

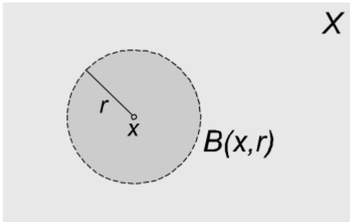
U nastavku, kada god budemo govorili o podskupu nekog metričkog prostora (X,d), podrazumijevat ćemo da se također radi o metričkom prostoru s metrikom d_Y. Posebno, kada budemo spominjali prostor $\mathbb{R}^n$, podrazumijevat ćemo da se radi o euklidskom prostoru i da svaki podskup nasljeđuje euklidsku metriku.

Definicija 1.40 *Neka je (X,d) metrički prostor, $x \in X$ i $r > 0$ pozitivan realan broj. Skup*

$$B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\} \subseteq X$$

*nazivamo **kuglom sa središtem x radijusa r.***

Teorem 1.41 *Neka je (X,d) metrički prostor i $\mathcal{B} = \{B(x,r) : x \in X, r > 0\}$ množina svih kugala u njemu. Tada postoji jedinstvena topologija na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Ta se topologija naziva **metrička topologija** ili **topologija inducirana metrikom** d i označava sa $\mathcal{T}_d$.*



Slika 1.4: Kugla sa središtem x radijusa r (preuzeto iz [2, str. 11])

Prethodni teorem govori nam da svaki metrički prostor možemo promatrati kao topološki prostor, a kugle (i njihove unije) kao otvorene skupove u tom prostoru.

Topologiju na $\mathbb{R}^n$ induciranu metrikom d_2 iz Primjera 1.39 nazivamo **standardnom topologijom** na $\mathbb{R}^n$. Uočimo, na skupu $\mathbb{R}$ ova topologija podudara se sa standardnom topologijom iz Primjera 1.4. Također, može se pokazati da se produktna topologija na $\mathbb{R}^n$, gdje svaki $\mathbb{R}$ ima standardnu topologiju, podudara sa standardnom topologijom na $\mathbb{R}^n$ (Primjer 1.112 iz [2, str. 35–36]).

Definicija 1.42 *Kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$* ***metrizabilan****, ako postoji metrika d na X takva da je $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.*

Uočimo da svaki metrizabilan topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ možemo promatrati kao metrički prostor s metrikom d jer ta metrika inducira topologiju $\mathcal{T}_d = \mathcal{T}$.

U nastavku dajemo neke od najvažnijih rezultata vezanih za zatvorenost i kompaktnost na metričkim prostorima.

Teorem 1.43 (Nizovna karakterizacija zatvorenih skupova) *Neka je (X,d) metrički prostor i $A \subseteq X$. A je zatvoren ako i samo ako za svaki niz (x_n) u A koji konvergira prema $x_0 \in X$, vrijedi $x_0 \in A$.*

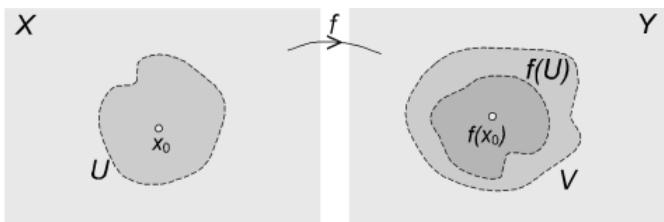
Napomena 1.44 *Iz Teorema 1.35 slijedi da je svaki kompaktan podskup $K \subseteq X$ metričkog prostora X ujedno i zatvoren.*

Teorem 1.45 (Karakterizacija kompaktnosti) *Neka je (X,d) metrički prostor. X je kompaktan ako i samo ako svaki niz (x_n) u X ima konvergentan podniz (x_{n_k}).*

Teorem 1.46 (Karakterizacija kompaktnosti za euklidske prostore) *Podskup euklidskog prostora je kompaktan ako i samo ako je omeđen i zatvoren (Teorem 1.97 iz [6, str. 37]).*

1.3 Neprekidnost

Definicija 1.47 *Neka su X, Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. Kažemo da je f* ***neprekidno u točki*** *$x_0 \in X$, ako za svaku okolinu V točke $f(x_0)$ u Y postoji okolina U točke x_0 u X takva da je $f(U) \subseteq V$.*



Slika 1.5: Neprekidnost preslikavanja f u točki x_0 (preuzeto iz [2, str. 77])

Napomena 1.48 *Dovoljno je za provjeru neprekidnosti u točki promatrati samo bazne elemente umjesto svih okolina.*

Definicija 1.49 *Neka su X i Y topološki prostori. Kažemo da je preslikavanje $f : X \to Y$* ***neprekidno****, ako je f neprekidno u svakoj točki $x \in X$.*

Primjer 1.50 *Neka je $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje i $A \subseteq X$ potprostor od X. Tada su restrikcija $f|_A : A \to Y$ i korestrikcija $f : X \to f(X)$ također neprekidna preslikavanja.*

Teorem 1.51 (Karakterizacija neprekidnosti) *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. f je neprekidno preslikavanje ako i samo ako za svaki skup $A \subseteq Y$ otvoren (zatvoren) u Y je i skup $f^{-1}(A) \subseteq X$ otvoren (zatvoren) u X.*

Definicija 1.52 *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Kažemo da je f* ***homeomorfizam****, ako postoji neprekidno preslikavanje $g : Y \to X$ tako da je $gf = id_X$ i $fg = id_Y$.*

Uočimo da je preslikavanje f homeomorfizam ako i samo ako je f neprekidna bijekcija s neprekidnim inverzom.

Definicija 1.53 *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. Kažemo da je f* ***otvoreno (zatvoreno)*** *preslikavanje, ako je za svaki otvoren (zatvoren) skup $A \subseteq X$ u X, skup $f(A)$ otvoren (zatvoren) u Y.*

Teorem 1.54 (Karakterizacija homeomorfizma) *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ preslikavanje. f je homeomorfizam ako i samo ako je f neprekidna otvorena (zatvorena) bijekcija.*

Definicija 1.55 *Neka su X i Y topološki prostori. Kažemo da su X i Y* ***homeomorfni****, ako postoji barem jedan homeomorfizam $f : X \to Y$.*

Svako svojstvo prostora koje je zajedničko svim međusobno homeomorfnim prostorima naziva se **topološko svojstvo**. Topološka svojstva koja će nam biti od interesa su povezanost (Korolar 5.11 iz [2, str. 102]), kompaktnost (Korolar 6.28 iz [2, str. 128]) i očito metrizabilnost.

Napomena 1.56 *Ako znamo da je topološki prostor X povezan ili kompaktan te želimo provjeriti vrijedi li isto svojstvo za prostor Y, dovoljno je konstruirati neprekidnu surjekciju sa X na Y (Propozicija 5.10 iz [2, str. 102] i Propozicija 6.27 iz [2, str. 128]).*

1.4 Kontinuum i uvodni primjeri

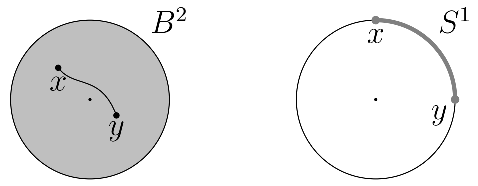
U ovom odjeljku uvodimo pojam kontinuuma i dajemo neke jednostavne primjere. Za kraj navodimo podjelu na rastavljive i nerastavljive kontinuume. Odjeljak je preuzet iz [1, str. 3–5, 7].

Definicija 1.57 ***Kontinuum*** *je neprazan, kompaktan i povezan metrički prostor.* ***Potkontinuum*** *je potprostor kontinuuma koji je i sam kontinuum. Za potkontinuum $Y \subseteq X$ od X kažemo da je* ***pravi*** *ako je Y pravi podskup od X.*

Primjer 1.58 ***Luk****. Luk je bilo koji prostor homeomorfan zatvorenom intervalu $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$. Budući da je $[0,1]$ kontinuum (pogledati Primjere 1.23 i 1.33), luk je također kontinuum jer su povezanost, kompaktnost i metrizabilnost topološka svojstva.*

Primjer 1.59 ***n-disk****. Neka je $B^n := \{x \in \mathbb{R}^n : d_2(x,0) \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$. n-disk je bilo koji prostor homeomorfan B^n te je kontinuum jer je B^n kontinuum (kompaktnost slijedi iz Teorema 1.46, a povezanost jer je očito putevima povezan).*

Primjer 1.60 ***n-sfera****. Neka je $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : d_2(x,0) = 1\} \subseteq \mathbb{R}^n$. n-sfera je bilo koji prostor homeomorfan S^n, te je kontinuum jer je S^n kontinuum (prema istim zaključcima kao kod n-diska).*



Slika 1.6: Putevi između dviju točaka u 2-disku i 1-sferi, redom

Primjer 1.61 ***Hilbertova kocka.*** *Hilbertova kocka je prostor homeomorfan prebrojivom topološkom produktu*

$$\prod_{n=1}^{\infty} I_n, \quad gdje\ I_n = [0,1],\ za\ svaki\ n \in \mathbb{N}.$$

Kasnije ćemo pokazati da je produkt kontinuuma kontinuum (vidi Teorem 3.3), prema tome Hilbertova kocka je kontinuum.

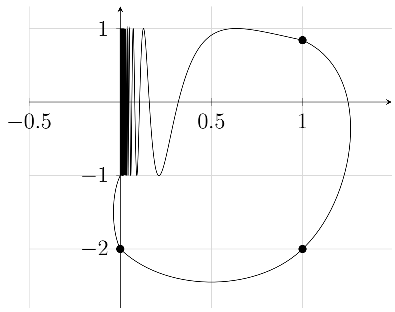
Primjer 1.62 ***Topološka sinusna krivulja.*** *Neka je*

$$X = \{(x, \sin\frac{1}{x}) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1\} \cup \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq y \leq 1\}$$

podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}^2$ (vidi Sliku 1.8). X nazivamo topološkom sinusnom krivuljom. Za detalje o tome zašto je X je kontinuum, pogledati Primjere 5.18 i 6.36 iz [2, str. 104 i 130].

Primjer 1.63 ***Varšavska kružnica.*** *Neka $W = X \cup Y$, gdje je X topološka sinusna krivulja, a Y unija tri luka u $\mathbb{R}^2$, jednog od $(0,-1)$ do $(0,-2)$, jednog od $(0,-2)$ do $(1,-2)$ i jednog od $(1,-2)$ do $(1, \sin(1))$ (vidi Sliku 1.7). W nazivamo Varšavska kružnica. Iz prethodnih razmatranja očito je da je W kontinuum. Naime, povezanost slijedi iz Teorema 1.24, a kompaktnost iz kompaktnosti lukova i topološke sinusne krivulje.*

Definicija 1.64 *Kažemo da je kontinuum X* ***rastavljiv*** *ako se može prikazati kao unija dva svoja prava potkontinuuma. Ako kontinuum nije rastavljiv kažemo da je* ***nerastavljiv****.*

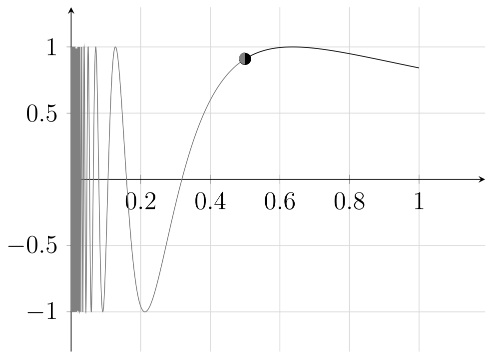


Slika 1.7: Varšavska kružnica

Uočimo da su svi gore navedeni primjeri kontinuuma rastavljivi. Naime, luk možemo rastaviti na dva luka. n-disk i n-sfera su očito rastavljivi. Hilbertovu kocku možemo zapisati kao uniju sljedećih kontinuuma:

$$A = [0, 1/2] \times \prod_{n=2}^{\infty} I_n \quad i \quad B = [1/2, 1] \times \prod_{n=2}^{\infty} I_n.$$

Na topološkoj sinusnoj krivulji možemo izdvojiti točku kao na Slici 1.8, iz čega lako vidimo da je prostor lijevo od točke kontinuum homeomorfan topološkoj sinusnoj krivulji, a desno od točke dobijemo luk. Na sličan način možemo rastaviti i Varšavsku kružnicu.



Slika 1.8: Rastav topološke sinusne krivulje na dva potkontinuuma

U narednim poglavljima konstruirat ćemo i neke primjere nerastavljivih kontinuuma.

Poglavlje 2

Ugniježđeni presjeci i primjena u konstrukciji kontinuuma

Ovo poglavlje preuzeto je iz [1, str. 6–10].

2.1 Ugniježđeni presjeci

Jedna od temeljnih metoda u teoriji kontinuuma je metoda ugniježđenih presjeka. Koristimo ju za konstrukciju raznih primjera, kao i za dokaze mnogih teorema. U nastavku su dana dva važna rezultata na kojima počiva korištenje ove metode.

Propozicija 2.1 *Neka je* (X_n) *niz kompaktnih metričkih prostora takvih da je* $X_{n+1} \subseteq X_n$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i neka je*

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Tada je X *također kompaktan metrički prostor.*
Nadalje, ako je U *otvoren podskup od* X_1 *takav da je* $X \subseteq U$*, onda postoji* $n_0 \in \mathbb{N}$ *takav da je*

$$X_n \subseteq U, \text{ za sve } n \geq n_0.$$

Specijalno, ako je svaki X_n neprazan, onda je i X neprazan.

Dokaz. Pokažimo prvo da je X kompaktan metrički prostor. Kako je $X \subseteq X_1$ i X_1 metrički prostor, to je X također metrički prostor (str. 10). Nadalje, po Napomeni 1.44, svaki X_n je zatvoren. X je dakle presjek familije zatvorenih skupova pa je po $(T3)'$ iz Teorema 1.12, zatvoren. Po Teoremu 1.34, X je kompaktan kao zatvoren podskup kompaktnog prostora X_1.

Neka je sada U otvoren podskup od X_1 takav da je $X \subseteq U$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. da za svaki $n \in \mathbb{N}$, $X_n \nsubseteq U$. Tada postoji $x_n \in X_n \backslash U \subseteq X_1 \backslash U$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Budući da je $X_1 \backslash U$ kompaktan metrički prostor (vidi Teorem 1.34 i str. 10), to po Teoremu 1.45 svaki niz ima konvergentan podniz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je niz (x_n) konvergentan i da konvergira prema nekoj točki x_0. Budući da je $X_1 \setminus U$ zatvoren (jer je U otvoren), to po Teoremu 1.43 vrijedi da je $x_0 \in X_1 \setminus U$.
Budući da je $X_{n+1} \subseteq X_n$, to je, za svaki $n \in \mathbb{N}$, $x_k \in X_n$ za svaki $k \geq n$. Po tome i Teoremu 1.43, vrijedi da je $x_0 \in X_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, a time i $x_0 \in X$. Ovo je kontradikcija s time da $x_0 \notin U$ i $X \subseteq U$. Dakle, postoji neki $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $X_{n_0} \subseteq U$, a time i $X_n \subseteq U$, za svaki $n \geq n_0$.

Neka su sada svi X_n neprazni. Pokažimo da je tada i X neprazan. Pretpostavimo suprotno, neka je $X = \emptyset$. Tada možemo uzeti $U = \emptyset$. Po prethodnome, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $X_n \subseteq U = \emptyset$, za svaki $n \geq n_0$, a to je kontradikcija s time da su svi X_n neprazni. Dakle, $X \neq \emptyset$. ■

Teorem 2.2 *Neka je (X_n) niz kontinuuma takvih da je $X_{n+1} \subseteq X_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$ i neka*

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Tada je X kontinuum.

Dokaz. Po Propoziciji 2.1, X je neprazan i kompaktan metrički prostor. Da bi dokazali da je X kontinuum, trebamo još samo pokazati da je povezan. Pretpostavimo suprotno, neka je X nepovezan. Tada po Napomeni 1.22, u X postoje disjunktni, neprazni i zatvoreni skupovi A i B takvi da je $X = A \cup B$. Po Propoziciji 1.103 iz [2, str. 31–32], A i B su zatvoreni u X_1. Kako je X_1 metrički prostor, to znači da je i normalan pa A i B imaju disjunktne otvorene okoline. Označimo ih redom sa V i W. Neka je $U = V \cup W$. Tada vrijedi da je $X \subseteq U \subseteq X_1$ pa, po Propoziciji 2.1, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $X_n \subseteq U$, za svaki $n \geq n_0$. Prema tome vrijedi:

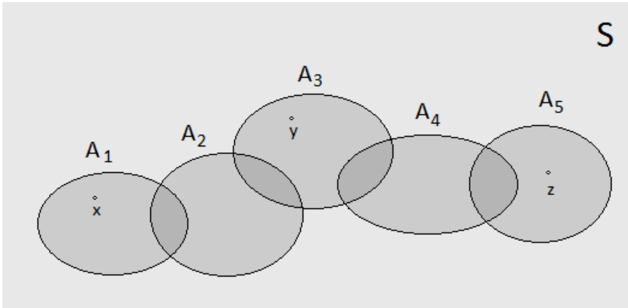
$$X_{n_0} = X_{n_0} \cap U = (X_{n_0} \cap V) \cup (X_{n_0} \cap W).$$

Budući da je $A \cup B = X \subseteq X_{n_0}$ te A i B neprazni, to je $(X_{n_0} \cap V) \neq \emptyset$ i $(X_{n_0} \cap W) \neq \emptyset$. Također, $(X_{n_0} \cap V)$ i $(X_{n_0} \cap W)$ su otvoreni kao presjeci dva otvorena skupa. Dakle, rastavili smo X_{n_0} na dva disjunktna, neprazna otvorena skupa pa po Definiciji 1.21 slijedi da X_{n_0} nije povezan. Ovo je kontradikcija s time da je X_{n_0} kontinuum. Dakle, pretpostavka je bila pogrešna, odnosno X je povezan. ■

2.2 Primjeri

U ovom odjeljku konstruirat ćemo dva primjera kontinuuma pomoću ugniježđenih presjeka. Prije svega uvodimo pojam jednostavnog lanca kojeg ćemo koristiti u prvom primjeru.

Definicija 2.3 *Neka je S skup,* $n \in \mathbb{N}$ *i* $\mathcal{C} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *konačan skup podskupova od S takvih da* $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ *ako i samo ako* $\mid i - j \mid \leq 1$, *za svaki* $i, j \in \{1, 2, ..., n\}$. *Neka su* $x, y, z \in S$ *točke skupa S za koje vrijedi da je* $x \in A_i$ *ako i samo ako* $i = 1$, $z \in A_i$ *ako i samo ako* $i = n$ *i* $y \in A_i$ *za* *neki* $i \in \{1, 2, ..., n\}$. *Kažemo da je* $\mathcal{C}$ ***jednostavan lanac*** *od* x *do* z *preko* y. *Članovi* A_i *jednostavnog lanca* $\mathcal{C}$ *nazivaju se* ***karikama***.



Slika 2.1: Jednostavan lanac od x do z preko y

Primjer 2.4 ***Nedegenerirani***[1] ***nerastavljivi kontinuum.*** *Neka su* $a, b, c \in \mathbb{R}^2$ *tri različite točke. Možemo definirati jednostavne lance* $\mathcal{C}_n$ *u* $\mathbb{R}^2$, $n \in \mathbb{N}$, *kojima su karike 2-diskovi radijusa* $< 2^{-n}$ *tako da su zadovoljeni sljedeći uvjeti:*

(1) Za svaki $n \in \mathbb{N}_0$, $\mathcal{C}_{3n+1}$ *ide od* a *do* c *preko* b, $\mathcal{C}_{3n+2}$ *ide od* b *do* c *preko* a *i* $\mathcal{C}_{3n+3}$ *ide od* a *do* b *preko* c;

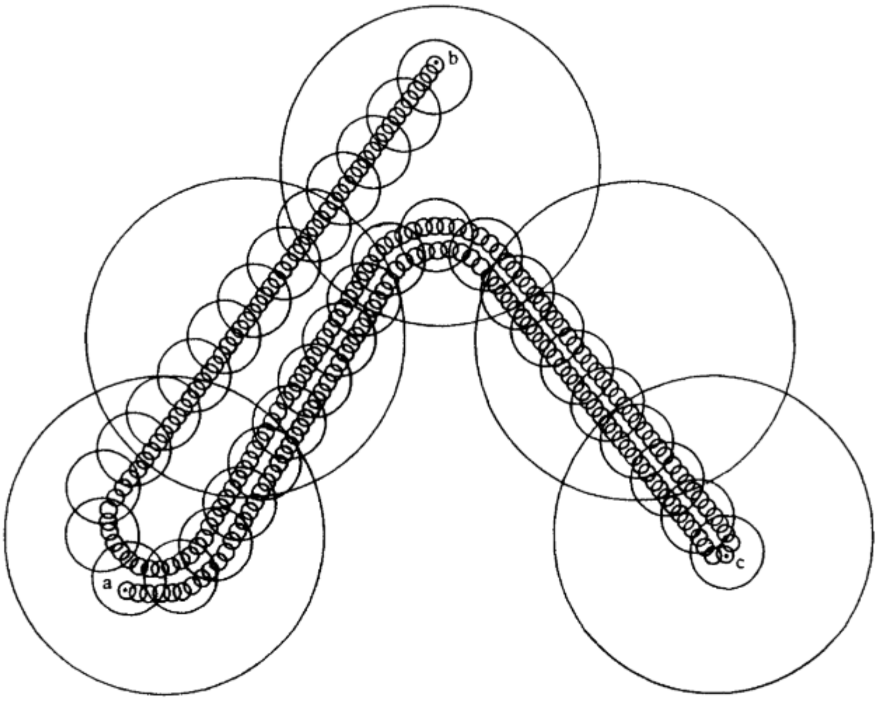
(2) Za svaki $n \in \mathbb{N}$, $\cup\mathcal{C}_n \supset \cup\mathcal{C}_{n+1}$.

Neka je

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\cup\mathcal{C}_n).$$

Uočimo da su $\cup\mathcal{C}_n$ *kontinuumi, za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Naime, metrika se nasljeđuje iz* $\mathbb{R}^2$ *(str. 10), povezanost možemo dobiti rekurzivno iz Teorema 1.24 počevši od dva diska, a kompaktnost slijedi jer konačan potpokrivač možemo dobiti kao konačnu uniju konačnih potpokrivača svakog diska u lancu. Po Teoremu*

[1] prostor koji sadrži više od jedne točke



Slika 2.2: Prikaz lanaca $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ *i* $\mathcal{C}_3$ (slika 1.10 iz [1, str. 8])

2.2, X je kontinuum (i očito nedegeneriran jer sadrži a, b i c). Pokažimo da je X nerastavljiv. Za početak dokažimo pomoćnu tvrdnju:

Tvrdnja 1 *Nijedan pravi potkontinuum Y od X ne sadrži* $\{a, c\}$.

Dokaz. *Pretpostavimo suprotno, neka postoji pravi potkontinuum Y od X koji sadrži* $\{a, c\}$ *i neka* $p \in X \backslash Y$. *Budući da* $p \notin Y$, *to postoji dovoljno veliki* $n \in \mathbb{N}$ *takav da karike od* $\mathcal{C}_{3n+1}$ *koje sadrže p ne sijeku Y (*$\mathbb{R}^2$ *je metrički prostor pa možemo uzeti da je radijus diska manji od polovine udaljenosti između p i Y). Neka su* $A_1, A_2, ..., A_m$ *karike od* $\mathcal{C}_{3n+1}$ *i neka je* A_k *karika koja sadrži p, za neki* $k \in \{1, 2, ..., m\}$. *Tada je* $A_k \cap Y = \emptyset$. *Vrijedi:*

$$Y \subset X \subset \cup \mathcal{C}_{3n+1}.$$

Prema tome, Y možemo zapisati na sljedeći način:

$$Y = \Big(Y \cap \big(\cup\{A_1, A_2, ..., A_{k-1}\}\big)\Big) \bigcup \Big(Y \cap \big(\cup\{A_{k+1}, ..., A_m\}\big)\Big).$$

Budući da Y sadrži $\{a, c\}$ te su po definiciji lanca $\mathcal{C}_{3n+1}$ $a \in A_1$ i $c \in A_m$, to vrijedi:

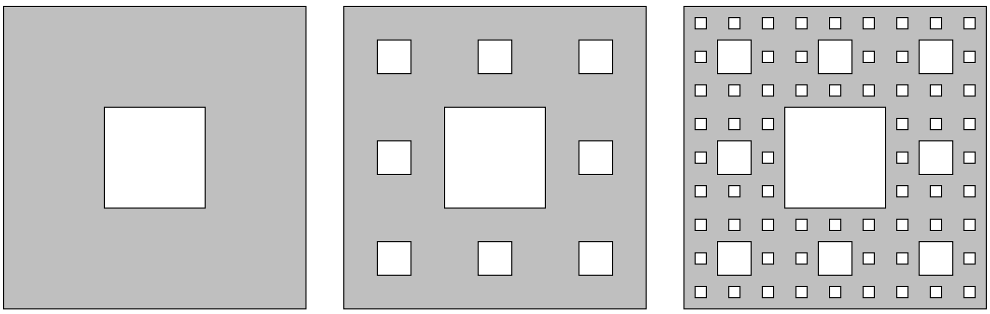
$$Y \cap \big(\cup\{A_1, A_2, ..., A_{k-1}\}\big) \neq \emptyset \quad i \quad Y \cap \big(\cup\{A_{k+1}, ..., A_m\}\big) \neq \emptyset.$$

Dakle, rastavili smo Y na dva neprazna, disjunktna (samo susjedne karike se sijeku), zatvorena (slijedi po $(T2)'$ i $(T3)'$ jer su Y i n-diskovi zatvoreni) skupa što je kontradikcija s povezanošću od Y (vidi Napomenu 1.22). Zaključujemo da je početna pretpostavka bila pogrešna, tj. Y ne sadrži $\{a, c\}$. ■

Na sličan način pokaže se da nijedan pravi potkontinuum od X ne sadrži nijedan par točaka a, b i c.

Pretpostavimo sada da je X rastavljiv. Tada se on može zapisati kao unija dva svoja prava potkontinuuma. Po Dirichletovom principu, jedan od njih mora sadržavati barem dvije od tri točke a, b i c. Ovo je kontradikcija s prethodno dokazanom tvrdnjom. Dakle, X je nerastavljiv.

Primjer 2.5 ***Tepih Sierpińskog.*** *Neka je $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ kvadrat u*



Slika 2.3: Prva tri koraka u konstrukciji tepiha Sierpińskog

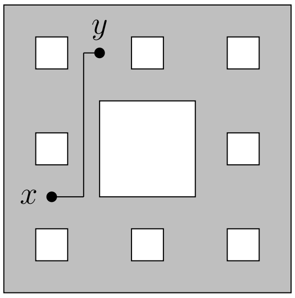
prostoru $\mathbb{R}^2$. Razdijelimo ga na devet sukladnih kvadrata i neka je

$$X_1 = I^2 \setminus \Big\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \Big\rangle \times \Big\langle \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \Big\rangle.$$

Drugim riječima, X_1 *dobijemo tako da iz* I^2 *"izbacimo" središnji kvadrat. Razdijelimo sada preostalih osam kvadrata na isti način i izbacimo iz svakog središnji kvadrat. Skup koji time dobijemo ćemo označiti sa* X_2*. Postupak nastavljamo za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Uočimo da je svaki* X_n *kontinuum. Naime,* X_n *je kompaktan jer je omeđen i zatvoren (Teorem 1.46), povezan jer je putevima povezan (Slika 2.4), a metrika se nasljeđuje iz* $\mathbb{R}^2$*. Neka je*

$$X = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n.$$

Po Teoremu 2.2, X *je kontinuum i nazivamo ga* ***tepih Sierpińskog****.*



Slika 2.4: Put između dviju točaka u X_2

Poglavlje 3

Inverzni limesi i primjena u konstrukciji kontinuuma

U prethodnom poglavlju, pokazali smo što su ugniježđeni presjeci i kako ih koristiti da bi od jednostavnijih primjera kontinuuma konstruirali složenije. U ovom poglavlju koristit ćemo inverzne limese na isti način. Prije nego što ih definiramo, ukratko ćemo navesti neka razmatranja vezana za Kartezijev produkt koja će nam biti od značaja.
Poglavlje je preuzeto iz [1, str. 17–22].

3.1 Kartezijev produkt

U Odjeljku 1.1 na stranici 3 definirali smo Kartezijev produkt i pokazali kako na njemu možemo uvesti topološku strukturu. Ovdje napominjemo da će nam od interesa biti samo konačni ili prebrojivi produkti te ćemo podrazumijevati da Kartezijev produkt prostora ima produktnu topologiju, pa ćemo skraćeno govoriti samo o produktu.

Primjer 3.1 *Već smo definirali Hilbertovu kocku kao produkt kontinuuma* *u Primjeru 1.61. Mogli smo i n-disk definirati kao produkt n lukova, za* $n \geq 2$. *Naime, luk možemo shvatiti kao 1-disk jer je* $B^1 = [-1, 1]$, *a to je homeomorfno zatvorenom intervalu* $[0, 1]$. *Na stranici 11 već smo spomenuli da se produktna topologija na* $\mathbb{R}^n$, *gdje je svaka koordinata euklidski prostor, podudara sa n-dimenzionalnim euklidskim prostorom.*

Napomena 3.2 *Neka je* $(X_n, n \in \mathbb{N})$ *familija metričkih prostora* $(X_n, d^{(n)})$. *Na produktu* $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *možemo definirati metriku* $d : \prod_{n=1}^{\infty} X_n \times \prod_{n=1}^{\infty} X_n \to \mathbb{R}$ *na sljedeći način:*

$$d(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \frac{d^{(n)}(x_n, y_n)}{1 + d^{(n)}(x_n, y_n)},$$

gdje $x = (x_n)$ *i* $y = (y_n)$. *Pokaže se da se topologija na* $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ *inducirana metrikom d podudara s produktnom topologijom na* $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$. *Za više detalja pogledati [4, str. 212–213].*

Teorem 3.3 *Konačan ili prebrojiv produkt nepraznih kompaktnih metričkih prostora je neprazan kompaktan metrički prostor. Konačan ili prebrojiv produkt kontinuuma je kontinuum.*

Dokaz. Kompaktnost slijedi iz Teorema 1.37, povezanost iz Teorema 1.25, a metrizabilnost iz Napomene 3.2. U slučaju konačnog produkta očito je neprazan, a u slučaju prebrojivog slijedi da je neprazan po aksiomu izbora[1].

■

[1]**Aksiom izbora.** Neka je X skup kojem su elementi međusobno disjunktni neprazni skupovi. Tada postoji skup Y sa svojstvom da je $Y \cap x$ jednočlan skup, za svaki $x \in X$. Aksiom izbora ekvivalentan je tvrdnji: Ako je je $(X_i, i \in I)$ neprazna familija nepraznih skupova X_i, onda je $\prod_{i \in I} X_i \neq \emptyset$. Preuzeto iz [3, str. 21–24].

3.2 Inverzni limesi

Definicija 3.4 ***Inverzni niz*** *je "dvostruki niz" (X_n, f_n) koji se sastoji od topoloških prostora X_n, koje nazivamo* ***članovima niza****, i neprekidnih preslikavanja $f_n : X_{n+1} \to X_n$, koje nazivamo* ***veznim preslikavanjima****.*

Inverzne nizove ponekad prikazujemo na sljedeći način:

$$X_1 \xleftarrow{f_1} X_2 \xleftarrow{f_2} \cdots \xleftarrow{f_{n-1}} X_n \xleftarrow{f_n} X_{n+1} \xleftarrow{f_{n+1}} \cdots$$

Definicija 3.5 ***Inverzni limes*** *niza (X_n, f_n), u oznaci $\varprojlim(X_n, f_n)$, je potprostor topološkog produkta $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, definiran na sljedeći način:*

$$\varprojlim(X_n, f_n) = \Big\{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n(x_{n+1}) = x_n, \ \textit{za svaki } n \in \mathbb{N}\Big\}.$$

Sljedeća propozicija pokazuje nam kako inverzne limese možemo shvatiti kao poseban slučaj ugniježđenih presjeka.

Propozicija 3.6 *Neka je (X_n, f_n) inverzni niz. Za svaki $m \in \mathbb{N}$ definiramo skup $\mathcal{Q}_m(X_n, f_n)$ na sljedeći način:*

$$\mathcal{Q}_m(X_n, f_n) = \Big\{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n(x_{n+1}) = x_n, \ \textit{za svaki } n \leq m\Big\}.$$

Tada vrijedi:

(1) $\mathcal{Q}_{m+1}(X_n, f_n) \subseteq \mathcal{Q}_m(X_n, f_n)$, za sve $m \in \mathbb{N}$;

(2) $\mathcal{Q}_m(X_n, f_n)$ je homeomorfan produktu $\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} X_n$, za sve $m \in \mathbb{N}$;

(3) $\varprojlim(X_n, f_n) = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty} \mathcal{Q}_m(X_n, f_n)$.

Dokaz. Dokažimo (1). Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $(x_n) \in \mathcal{Q}_{m+1}(X_n, f_n)$. Tada vrijedi $f_n(x_{n+1}) = x_n$, za svaki $n \leq m+1$. Prema tome, jednakost vrijedi i za svaki $n \leq m \leq m+1$, pa je $(x_n) \in \mathcal{Q}_m(X_n, f_n)$.

Iz definicije inverznog limesa i skupova $Q_m(X_n, f_n)$ očito je da vrijedi (3).

Pokažimo još da vrijedi (2) tako što ćemo definirati homeomorfizam između danih prostora. Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $h : \mathcal{Q}_m(X_n, f_n) \to \prod\limits_{n=m+1}^{\infty} X_n$ preslikavanje definirano sa:

$$h((x_n)) = (x_n)_{n \geq m+1},$$

gdje je $(x_n)_{n\geq m+1}$ oznaka za restrikciju preslikavanja [2] $(x_n) : \mathbb{N} \to \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ na skup $\mathbb{N} \setminus \{1, ..., m\}$. Očito je takvo preslikavanje element produkta $\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} X_n$ pa je h dobro definirano. Pokažimo da je h homeomorfizam.

(i) Bijektivnost. Neka je $(x_n)_{n\geq m+1} \in \prod\limits_{n=m+1}^{\infty} X_n$ proizvoljan. Uvedimo oznake $x_m := f_m(x_{m+1})$,..., $x_1 := f_1(x_2)$. Time smo dobili jedinstvenu točku $(x_n) \in Q_m(X_n, f_n)$, takvu da je $h((x_n)) = (x_n)_{n\geq m+1}$. Dakle, h je bijekcija.

(ii) Neprekidnost. Neka je $V = \langle V_{i_1}, ..., V_{i_k} \rangle$, $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \mathbb{N} \setminus \{1, ..., m\}$, otvoren skup u $\prod\limits_{n=m+1}^{\infty} X_n$. Označimo sa $V' = X_1 \times ... \times X_m \times V$. V' je očito otvoren u $\prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, pa je $V' \cap Q_m(X_n, f_n)$ otvoren u $Q_m(X_n, f_n)$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} h^{-1}(V) &= \{(x_n) \in \mathcal{Q}_m(X_n, f_n) : h((x_n)) \in V\} = \\ &= \{(x_n) \in \mathcal{Q}_m(X_n, f_n) : (x_n)_{n\geq m+1} \in V\} = \\ &= V' \cap \mathcal{Q}_m(X_n, f_n). \end{aligned}$$

[2] Prisjetimo se, elementi Kartezijevog produkta $\prod\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$ su preslikavanja $x : \Lambda \to \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, za koja vrijedi $x_\lambda := x(\lambda) \in X_\lambda$.

Dakle, $h^{-1}(V)$ je otvoren u $Q_m(X_n, f_n)$ pa je h neprekidno po Teoremu 1.51.

(iii) Otvoreno preslikavanje. Neka je $U \subseteq Q_m(X_n, f_n)$ otvoren u $Q_m(X_n, f_n)$. Tada postoji skup $U' \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ otvoren u $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$, takav da je $U = U' \cap Q_m(X_n, f_n)$. Označimo $U' = U_{i_1} \times \cdots \times U_{i_k} \times \prod_{n \in \mathbb{N} \setminus \{i_1,...,i_k\}} X_n$, gdje je $\{i_1, ..., i_k\} \subseteq \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$, takav da je $i_1 < ... < i_k$. Neka je $i_s \in \{i_1, ..., i_k\}$ prvi u tom nizu koji je veći ili jednak $m + 1$. Neka je sada $V = U_{i_s} \times \cdots \times U_{i_k} \times \prod_{\substack{n=m+1 \\ n \notin \{i_s,...,i_k\}}}^{\infty} X_n$. Možemo reći da smo V dobili tako što smo skupu U' "uklonili" prvih m koordinata. Uočimo da je $h(U) = V$. Naime, po definiciji preslikavanja h, $h(U)$ dobijemo tako da svakoj točki iz skupa U "uklonimo" prvih m koordinata. Budući da je $Q_m(X_n, f_n)$ podskup produkta $\prod_{n=1}^{\infty} X_n$ koji postavlja uvjete samo na prvih m koordinata, to znači da se na ostalim koordinatama $Q_m(X_n, f_n)$ podudara sa $\prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$. Prema tome, U i U' se podudaraju na svim koordinatama većim ili jednakim $m+1$, odnosno kada skupu U "uklonimo" prvih m koordinata dobijemo upravo V. Očito je V otvoren pa je h zaista otvoreno preslikavanje.

Po Teoremu 1.54 slijedi da je h homeomorfizam. ■

Teorem 3.7 *Inverzni limes nepraznih kompaktnih metričkih prostora je neprazan kompaktan metrički prostor. Inverzni limes kontinuuma je kontinuum.*

Dokaz. Neka je (X_n, f_n) inverzni niz, takav da je X_n kontinuum, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Po Teoremu 3.3, $\prod_{n=m+1}^{\infty} X_n$ je kontinuum, za svaki $m \in \mathbb{N}$. Po Propoziciji 3.6 (2), svaki $Q_m(X_n, f_n)$ je homeomorfan kontinuumu pa je i sam kontinuum. Sada po Propoziciji 3.6 (1) i (3), inverzni limes možemo zapisati kao ugniježđeni presjek kontinuuma, a to znači da je po Teoremu 2.2 inverzni limes kontinuum. Dokaz u slučaju nepraznih kompaktnih metričkih prostora provodimo na isti način, osim što se na kraju umjesto na Teorem 2.2 pozivamo na Propoziciju 2.1. ∎

3.3 Nerastavljivi kontinuumi dobiveni pomoću inverznih limesa

U prethodnim poglavljima upoznali smo se s pojmom nerastavljivog kontinuuma i konstruirali jedan zanimljiv primjer pomoću ugniježđenih presjeka. Sada ćemo pokazati kako inverzne limese možemo iskoristiti za konstrukciju novih primjera nerastavljivog kontinuuma. U tu svrhu uvodimo novi pojam nerastavljivog inverznog niza.

Definicija 3.8 *Neka je (X_n, f_n) inverzni niz, takav da je X_n kontinuum, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kažemo da je (X_n, f_n)* ***nerastavljivi inverzni niz*** *ako za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaki izbor potkontinuuma A_{n+1} i B_{n+1} od X_{n+1} takvih da je $X_{n+1} = A_{n+1} \cup B_{n+1}$, vrijedi da je $f_n(A_{n+1}) = X_n$ ili $f_n(B_{n+1}) = X_n$.*

Uočimo da Definicija 3.8 povlači da su sva vezna preslikavanja f_n, kod nerastavljivog inverznog niza (X_n, f_n), surjekcije. Ovo je očito u slučaju kada su svi članovi X_n rastavljivi. Ukoliko postoji neki X_n koji je nerastavljiv, možemo ga prikazati kao $X_n \cup X_n$ iz čega jednostavno slijedi surjektivnost.

Lema 3.9 *Neka je (X_n, f_n) inverzni niz nepraznih kompaktnih metričkih prostora. Označimo sa X_0 njegov inverzni limes, a sa $p_n : X_0 \to X_n$ projekciju na n-tu koordinatu, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $A \subseteq X_0$ neprazan i kompaktan. Tada je $\left(p_n(A), f_n|_{p_{n+1}(A)}\right)$ inverzni niz sa surjektivnim veznim* *preslikavanjima i vrijedi:*

$$\varprojlim\Big(p_n(A), f_n|_{p_{n+1}(A)}\Big) = A = \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_0. \qquad (*)$$

Dokaz. Da bi $\Big(p_n(A), f_n|_{p_{n+1}(A)}\Big)$ bio inverzni niz, $f_n|_{p_{n+1}(A)}$ moraju biti vezna preslikavanja, tj. moraju biti neprekidna i kodomena svakog $f_n|_{p_{n+1}(A)}$ mora biti $p_n(A)$. Neprekidnost se nasljeđuje od f_n (vidi Primjer 1.50). Pokazat ćemo da je $f_n|_{p_{n+1}(A)}\big(p_{n+1}(A)\big) = p_n(A)$, iz čega direktno slijedi da je $f_n|_{p_{n+1}(A)}$ vezno preslikavanje i to surjektivno, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Neka je $(x_n) \in X_0$. Tada po definiciji inverznog limesa i projekcija vrijedi $f_n(p_{n+1}((x_n))) = f_n(x_{n+1}) = x_n = p_n((x_n))$. Dakle, vrijedi $f_n \circ p_{n+1} = p_n$. Prema tome, $(f_n \circ p_{n+1})(A) = f_n\big(p_{n+1}(A)\big) = p_n(A)$. Budući da se f_n podudara sa $f_n|_{p_{n+1}(A)}$ na skupu $p_{n+1}(A)$, to po prethodnoj jednakosti slijedi $f_n|_{p_{n+1}(A)}\big(p_{n+1}(A)\big) = p_n(A)$.

Pokažimo sada da vrijedi $(*)$. Prvo uočimo da po definiciji inverznog limesa vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\varprojlim\Big(p_n(A), f_n|_{p_{n+1}(A)}\Big) = \\
&= \Big\{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} p_n(A) : f_n|_{p_{n+1}(A)}(x_{n+1}) = f_n(x_{n+1}) = x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\Big\} = \\
&= \Big\{(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} X_n : f_n(x_{n+1}) = x_n,\ \forall n \in \mathbb{N}\Big\} \cap \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right].
\end{aligned}$$

Dakle, pokazali smo da je:

$$\varprojlim\Big(p_n(A), f_n|_{p_{n+1}(A)}\Big) = \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_0. \qquad (1)$$

Nadalje, neka je $(x_n) \in A$. Tada je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $p_n((x_n)) = x_n \in p_n(A)$. Dakle, $(x_n) \in \prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)$ po definiciji Kartezijevog produkta. Prema tome je

$A \subseteq \prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)$ pa vrijedi:

$$A \subseteq \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_0. \tag{2}$$

Zbog (1) i (2), da bi dokazali (∗), preostaje pokazati još samo da je

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_0 \subseteq A. \tag{3}$$

Neka je $y = (y_n) \in \left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_0$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo K_n na način:

$$K_n = A \cap p_n^{-1}(y_n).$$

Pokazat ćemo da su ovako definirani skupovi K_n neprazni, kompaktni metrički prostori i da tvore padajući niz iz čega će po Propoziciji 2.1 proizaći da im je presjek neprazan. Tu činjenicu ćemo iskoristiti za pokazati da je $y \in A$.

Po Teoremu 3.7, X_0 je metrički prostor pa je $K_n \subseteq A \subseteq X_0$ također metrički prostor (str. 10), za svaki $n \in \mathbb{N}$. Nadalje, A je kompaktan podskup metričkog prostora X_0 pa je, po Napomeni 1.44, zatvoren. $p_n^{-1}(y_n)$ je također zatvoren jer je $\{y_n\}$ zatvoren i p_n neprekidna (vidjeti Teorem 1.51 i Napomenu 1.20). Sada jednostavno slijedi da je svaki K_n zatvoren kao presjek dva zatvorena skupa, a onda je po Teoremu 1.34 i kompaktan. Budući da je $y \in \prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)$, to je $y_n \in p_n(A)$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz ovoga je očito da postoji neki element u skupu A kojem je projekcija na n-tu koordinatu jednaka y_n. Taj isti element nalazi se u $p_n^{-1}(y_n)$ po definiciji praslike. Dakle, svaki K_n je neprazan. Pokažimo još da se radi o padajućem nizu, tj. $K_{n+1} \subseteq K_n$. Dovoljno je pokazati da je $p_{n+1}^{-1}(y_{n+1}) \subseteq p_n^{-1}(y_n)$. Neka je $x \in p_{n+1}^{-1}(y_{n+1})$. Tada je $p_{n+1}(x) = y_{n+1}$ pa je $f_n(p_{n+1}(x)) = f_n(y_{n+1})$.

Iz ovoga, budući da su $x, y \in X_0$, koristeći definiciju inverznog limesa i zaključak da je $f_n \circ p_{n+1} = p_n$, slijedi $p_n(x) = y_n$. Dakle, $x \in p_n^{-1}(y_n)$. Time smo pokazali da je $p_{n+1}^{-1}(y_{n+1}) \subseteq p_n^{-1}(y_n)$.

Dokazali smo sve uvjete potrebne da bi vrijedilo:

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n \neq \emptyset.$$

Neka je sada $z \in \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$. Očito je tada $z \in A$ i n-ta koordinata od z mora biti y_n (zbog $K_n \subseteq p_n^{-1}(y_n)$), za svaki $n \in \mathbb{N}$. Dakle, mora vrijediti $z = y$, a time $y \in A$. Ovim smo dokazali da vrijedi (3) pa je dokaz završen. ■

Teorem 3.10 *Ako je (X_n, f_n) nerastavljivi inverzni niz s inverznim limesom X_0, onda je X_0 nerastavljivi kontinuum.*

Dokaz. Po Teoremu 3.7, X_0 je kontinuum. Pokažimo da je nerastavljiv. Neka su A i B dva potkontinuuma od X_0, takvi da je $X_0 = A \cup B$. Pokazat ćemo da je tada $A = X_0$ ili $B = X_0$. Iz Definicije 3.8 već smo zaključili da su sva vezna preslikavanja f_n surjekcije. Pokažimo da iz toga slijedi da su sve projekcije $p_n : X_0 \to X_n$ također surjekcije. Općenito vrijedi $p_n(X_0) \subseteq X_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo obrat. Neka je $x^{(n)} \in X_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Kako je f_{n+1} surjekcija, to postoji $x^{(n+1)} \in X_{n+1}$ takav da je $f_n(x^{(n+1)}) = x^{(n)}$. Postupak možemo nastaviti za svaki $k \geq n+2$. S druge strane, f_{n-1} preslikava $x^{(n)}$ u neki $x^{(n-1)} \in X_{n-1}$, zatim f_{n-2} preslikava $x^{(n-1)}$ u $x^{(n-2)} \in X_{n-2}$ i tako dalje sve do f_1. Ovim postupkom konstruirali smo točku $x \in X_0$ (pripada skupu X_0 po definiciji inverznog limesa), takvu da je $p_n(x) = x^{(n)}$. Dakle, $x^{(n)} \in p_n(X_0)$ pa je $p_n(X_0) = X_n$. Time smo pokazali da je p_n surjekcija.

Sada možemo zaključiti da vrijedi:

$$X_{n+1} = p_{n+1}(X_0) = p_{n+1}(A) \cup p_{n+1}(B), \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Po Definiciji 3.8 slijedi

$$f_n(p_{n+1}(A)) = X_n \ ili \ f_n(p_{n+1}(B)) = X_n, \ za \ svaki \ n \in \mathbb{N}.$$

U prethodnom dokazu već smo zaključili da definicija inverznog limesa povlači da je $f_n \circ p_{n+1} = p_n$ pa sada dobivamo

$$p_n(A) = X_n \ ili \ p_n(B) = X_n, \ za \ svaki \ n \in \mathbb{N}.$$

Bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da je $p_n(A) = X_n$, za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$. Koristeći surjektivnost veznih preslikavanja i činjenicu da je (višestruka primjena $f_n \circ p_{n+1} = p_n$)

$$f_j \circ \cdots \circ f_k \circ p_{k+1} = p_j, \ za \ 1 \leq j < k,$$

dobijemo da, za bilo koji odabrani $n \in \mathbb{N}$, takav da je $p_n(A) = X_n$, vrijedi $p_k(A) = X_k$, za svaki $k \leq n$. Budući da takvih $n \in \mathbb{N}$ ima beskonačno, zaključujemo da je $p_n(A) = X_n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Iz toga slijedi $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n(A) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} X_n$, pa je

$$\left[\prod_{n=1}^{\infty} p_n(A)\right] \cap X_0 = \left[\prod_{n=1}^{\infty} X_n\right] \cap X_0 = X_0.$$

Po $(*)$ iz Leme 3.9, ovo povlači da je $A = X_0$, što smo i htjeli dokazati. ∎

Prethodni teorem daje nam važan rezultat koji nam može poslužiti u konstrukciji nekih zanimljivih primjera nerastavljivog kontinuuma. U nastavku dajemo dva takva.

Primjer 3.11 ***p-adički solenoid.*** *Neka je S^1 središnja jedinična kružnica u $\mathbb{R}^2$ (Primjer 1.60). Za svaki $p \geq 2$ definiramo preslikavanje $f^p : S^1 \to S^1$ sa $f^p(z) = z^p$, gdje z^p označava p-tu potenciju od z, s obzirom na množenje* *kompleksnih brojeva. Za zadani* $p \geq 2$ *neka je*

$$\sum_p = \varprojlim(X_n, f_n), \text{ gdje su } X_n = S^1 \text{ i } f_n = f^p, \text{ za svaki } n \in \mathbb{N}.$$

Pokažimo da je (X_n, f_n) *nerastavljivi inverzni niz. Skup* S^1 *možemo zapisati na sljedeći način:*

$$S^1 = \{\cos\phi + i\sin\phi : 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

Za $z = \cos\phi + i\sin\phi$, *vrijedi da je* $z^p = \cos(p\phi) + i\sin(p\phi)$. *Označimo sada sa* X_k *sljedeće podskupove od* S^1*:*

$$X_k = \{\cos\phi + i\sin\phi : (k-1)\frac{2\pi}{p} \leq \phi \leq k\frac{2\pi}{p}\}, \text{ za } k = 1, ..., p.$$

X_k *su lukovi koji u uniji daju* S^1. *Uočimo da je, po definiciji množenja kompleksnih brojeva, slika svakog skupa* X_k *upravo* S^1. *Neka su sada* A *i* B *potkontinuumi od* S^1, *takvi da je* $S^1 = A \cup B$. *Zbog povezanosti kontinuuma, barem jedan od njih sadrži barem jedan* X_k. *Dakle,* $f_n(A) = S^1$ *ili* $f_n(B) = S^1$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Pokazali smo da je* (X_n, f_n) *nerastavljivi inverzni niz (Definicija 3.8), pa je, po Teoremu 3.10,* $\sum_p$ *nerastavljivi kontinuum i naziva se p-adički solenoid.*

Primjer 3.12 ***Brouwer-Janiszewski-Knasterov kontinuum****. Neka je* $X_n = [0,1]$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *i* $f_n : X_{n+1} \to X_n$ *preslikavanje definirano sa:*

$$f_n(t) = \begin{cases} 2t, & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -2t+2, & 1/2 \leq t \leq 1 \end{cases},$$

za svaki $n \in \mathbb{N}$. *Pokažimo da je* (X_n, f_n) *nerastavljivi inverzni niz. Neka su* A *i* B *potkontinuumi od* $[0,1]$ *takvi da je* $[0,1] = A \cup B$. *Uočimo da, zbog povezanosti kontinuuma, to znači da barem jedan od njih sadrži segment* $[0,1/2]$ *ili* $[1/2,1]$. *Uočimo sada da svaki* f_n *po definiciji preslikava segmente* $[0,1/2]$

i $[1/2,1]$ *u* $[0,1]$. *Dakle, vrijedi da je* $f_n(A)=[0,1]$ *ili* $f_n(B)=[0,1]$, *za svaki* $n\in\mathbb{N}$. *Ovim smo pokazali da je* (X_n,f_n) *uistinu nerastavljivi inverzni niz. Označimo sa* X_0 *njegov inverzni limes. Po Teoremu 3.10,* X_0 *je nerastavljivi kontinuum i naziva se Brouwer-Janiszewski-Knasterov kontinuum (na eng. "bucket-handle" - kablićeva ručka).*

Poglavlje 4

Dekompozicije kontinuuma

U ovom poglavlju opisujemo još jednu metodu konstrukcije kontinuuma, takozvanu odozgo poluneprekidnu dekompoziciju. U nastavku ćemo ju skraćeno nazivati usc dekompozicija, po engleskom nazivu "upper semi-continuous". Pokazat ćemo neke važne rezultate potrebne za korištenje ove metode u konstrukciji kontinuuma i ilustrirati primjenu na nekoliko primjera. Za početak, uvodimo pojam dekompozicijskog prostora i dajemo uvjete pod kojima je dekompozicijski prostor kontinuuma kontinuum.
Poglavlje je preuzeto iz [1, str. 36–45].

4.1 Dekompozicijski prostor

Definicija 4.1 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ neprazan topološki prostor i neka je $\mathcal{D}$ skup nepraznih, u parovima disjunktnih podskupova od X, takvih da je $X = \cup\mathcal{D}$. $\mathcal{D}$ nazivamo* ***particijom*** *prostora X.*

Neka je

$$\mathcal{T}(\mathcal{D}) = \{\mathcal{U} \subseteq \mathcal{D} : \cup\, \mathcal{U} \in \mathcal{T}\}. \tag{$*$}$$

Očito je $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ topologija na $\mathcal{D}$.

Sada možemo definirati prirodno preslikavanje $\pi : X \to \mathcal{D}$ sa

$$\pi(x) = D \in \mathcal{D}, \text{ pri čemu je } D \text{ jedinstveni skup takav da je } x \in D.$$

Pokažimo da ovo preslikavanje ima sljedeća lijepa svojstva:

1. Surjektivnost (proizlazi iz činjenice da su po definiciji svi $D \in \mathcal{D}$ neprazni).

2. $V \subseteq \mathcal{D}$ je otvoren u $\mathcal{D}$ ako i samo ako je $\pi^{-1}(V) \subseteq X$ otvoren u X. Naime, uočimo da za svaki $V \subseteq \mathcal{D}$ vrijedi

$$\pi^{-1}(V) = \{x \in X : \pi(x) \in V\} = \{x \in X : x \in D, D \in V\} = \cup\, V.$$

   Dakle, $\pi^{-1}(V)$ je otvoren u X ako i samo ako je $\cup V$ otvoren u X, a to po definiciji topologije $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ vrijedi ako i samo ako je V otvoren u $\mathcal{D}$.

3. Neprekidnost. Slijedi direktno iz prethodne točke i Teorema 1.51.

4. Očito je da za svaki $D \in \mathcal{D}$ vrijedi $\pi(D) = \{D\}$ i $\pi^{-1}(D) = D$.

Ubuduće kada budemo spominjali prirodno preslikavanje π, podrazumijevat ćemo da se radi o preslikavanju definiranom poviše.

Definicija 4.2 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ neprazan topološki prostor, $\mathcal{D}$ njegova particija i $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ topologija na $\mathcal{D}$ definirana kao u $(*)$. Topološki prostor $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ naziva se **dekompozicijski prostor** ili kraće, **dekompozicija** od X. Topologija $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ naziva se **dekompozicijska topologija**.*

Prirodno se nameće pitanje je li dekompozicija kontinuuma kontinuum. Međutim, tvrdnja općenito ne vrijedi. Pokažimo to jednostavnim primjerom.

Neka je $X = [-1, 1]$ podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}$ i $\mathcal{D}$ particija od X definirana sa

$$\mathcal{D} = \Big\{\{x, -x\} : -1 < x < 1\Big\} \cup \Big\{\{-1\}, \{1\}\Big\}.$$

Po definiciji relativne topologije, otvoreni skupovi u X su oblika $[-1, b\rangle$, $\langle a, b\rangle$ *i* $\langle a, 1]$ (i njihovih unija), gdje su $-1 \le a < b \le 1$. Možemo ih dobiti kao uniju elemenata sljedećih podskupova od $\mathcal{D}$:

(1) $\Big\{\{x, -x\} : -1 \le a < x < b \le 1\Big\}$

(2) $\Big\{\{x, -x\} : -1 < x < b \le 1\Big\} \cup \Big\{\{-1\}\Big\}$

(3) $\Big\{\{x, -x\} : -1 \le a < x < 1\Big\} \cup \Big\{\{1\}\Big\}$

Skupovi pod (1), (2) i (3) (kao i njihove unije) čine elemente od $\mathcal{T}(\mathcal{D})$. Uočimo sada da se svake dvije okoline od $\{1\}$ i $\{-1\}$ sijeku. Dakle, $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ nije Hausdorffov prostor, a time ni metrizabilan (vidi Napomenu 1.20). Iz ovoga slijedi da $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ nije kontinuum iako X to jest. U nastavku ćemo pokazati da je "biti Hausdorffov prostor" nužno i dovoljno da bi dekompozicija kontinuuma bila kontinuum.

Lema 4.3 *Neka je X kompaktan metrički prostor, Y Hausdorffov i $f : X \to Y$ neprekidno surjektivno preslikavanje. Tada je Y metrizabilan.*

Dokaz. U dokazu ćemo koristiti Urysohnov teorem (Teorem 1 iz [4, str. 241]) koji tvrdi da je svaki regularan prostor s prebrojivom bazom metrizabilan.

Po Napomeni 1.56, Y je kompaktan. Sada je, po Teoremu 6.21 iz [2, str. 125], Y normalan, a time i regularan. Preostaje još pokazati da Y ima prebrojivu bazu. Koristeći Teorem 6.43, Lemu 6.42 i Korolar 1.96 iz [2, str. 28

i 134], zaključujemo da X ima prebrojivu bazu. Označimo ju sa $\mathcal{B}$. Za svaki konačan podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$, definiramo sljedeći skup:

$$E(\mathcal{S}) := Y \setminus f\big(X \setminus \cup\mathcal{S}\big).$$

Neka je sada

$$\mathcal{P} = \big\{E(\mathcal{S}) : \mathcal{S} \textit{ je konačan podskup od } \mathcal{B}\big\}.$$

Po Teoremu 2.3.15 iz [3, str. 42], $\mathcal{P}$ je prebrojiv. Korištenjem Teorema 1.3, pokazat ćemo da je upravo $\mathcal{P}$ prebrojiva baza za Y.

Pokažimo prvo da je svaki element iz $\mathcal{P}$ otvoren u Y. Uočimo da je $X \setminus \cup\mathcal{S}$ zatvoren za svaki $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$. Kako je X kompaktan, to po Teoremu 1.34 slijedi da je $X \setminus \cup\mathcal{S}$ kompaktan. Sada je po Napomeni 1.56, $f(X \setminus \cup\mathcal{S})$ također kompaktan. Kako je Y Hausdorffov prostor, to po Teoremu 1.35 sada dobivamo da je $f(X \setminus \cup\mathcal{S})$ zatvoren. Prema tome, $E(\mathcal{S})$ je otvoren, za svaki $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}$.

Neka je sada U otvoren podskup od Y i $x \in U$. Kako je Y Hausdorffov, to je po Napomeni 1.20, $\{x\}$ zatvoren. Zbog neprekidnosti od f, ovo povlači da je $f^{-1}(x)$ također zatvoren. Koristeći kompaktnost od X, Teorem 1.34 i Napomenu 1.32, zaključujemo da je $f^{-1}(x)$ kompaktan u $f^{-1}(U)$. Nadalje, neprekidnost od f povlači da je $f^{-1}(U)$ otvoren u X pa ga možemo zapisati kao uniju nekog podskupa $\mathcal{A}$ baze $\mathcal{B}$. Tada $\mathcal{A}$ pokriva $f^{-1}(x) \subseteq f^{-1}(U)$, pa zbog kompaktnosti od $f^{-1}(x)$, postoji konačan podskup $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ koji ga također pokriva. Dakle, dobili smo

$$f^{-1}(x) \subseteq \cup\mathcal{S} \subseteq f^{-1}(U).$$

Iz ovoga lako dobijemo da je

$$x \in E(\mathcal{S}) \subseteq U.$$

Naime, ako pretpostavimo da $x \notin E(\mathcal{S})$, dobijemo $x \in f\big(X \setminus \cup\mathcal{S}\big)$, što znači da postoji $y \in X \setminus \cup\mathcal{S}$ takav da je $f(y) = x$. Ovo je kontradikcija sa $f^{-1}(x) \subseteq \cup\mathcal{S}$. Također, vrijedi

$$\begin{aligned}\cup\mathcal{S} \subseteq f^{-1}(U) &=> X \setminus \cup\mathcal{S} \supseteq X \setminus f^{-1}(U) => \\ &=> f(X \setminus \cup\mathcal{S}) \overset{f\ surj.}{\supseteq} Y \setminus f(f^{-1}(U)) \supseteq Y \setminus U => \\ &=> E(\mathcal{S}) \subseteq U.\end{aligned}$$

Ovime smo ispunili uvjete da $\mathcal{P}$ bude prebrojiva baza za Y, pa su time zadovoljeni uvjeti Urysohnovog teorema da Y bude metrizabilan. ■

Teorem 4.4 *Dekompozicija $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ kompaktnog metričkog prostora X je metrizabilna ako i samo ako je $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ Hausdorffov prostor.*

Dokaz. => Neka je $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ metrizabilna. Tada je očito Hausdorffov prostor (Napomena 1.20).
<= Neka je $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ Hausdorffov prostor. Prirodno preslikavanje π definirano na stranici 37 je neprekidna surjekcija pa je po Lemi 4.3 $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ metrizabilan. ■

Teorem 4.5 *Dekompozicija $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ kontinuuma X je kontinuum ako i samo ako je $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ Hausdorffov prostor.*

Dokaz. => Neka je $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ kontinuum. Tada je ujedno metrički prostor pa je i Hausdorffov.
<= Neka je $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ Hausdorffov. Kako je X kontinuum, to znači da je kompaktan metrički prostor pa je po Teoremu 4.4 $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ metrizabilan. Budući da je π neprekidna surjekcija, kompaktnost i povezanost slijede po Napomeni 1.56. Dakle, $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ je kontinuum. ■

4.2 Usc dekompozicija

Kao što vidimo iz prethodnih razmatranja, dekompozicije su još jedan način na koji možemo od postojećih kompaktnih metričkih prostora ili kontinuuma konstruirati nove. Međutim, nezgodno je uvijek provjeravati uvjet da je dekompozicija Hausdorffov prostor. Zato se pojavila potreba za uvođenjem neke posebne klase dekompozicija, čije bi uvjete bilo lako provjeriti, a koja bi istovremeno bila dovoljno općenita da se može primijeniti u mnogim slučajevima. Time dolazimo do pojma usc dekompozicije. Naziv vjerojatno potječe iz sljedećih razmatranja. Kažemo da je preslikavanje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ odozgo poluneprekidno ili skraćeno usc, ako je neprekidno uz standardnu topologiju na domeni i topologiju lijevih zraka[1] na kodomeni.

Neka je sada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ preslikavanje koje poprima samo nenegativne vrijednosti. Definirajmo

$$D_x = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq f(x)\big\},\ x \in \mathbb{R}.$$

Neka je $X = \bigcup\limits_{x \in \mathbb{R}} D_x$ i $\mathcal{D} = \{D_x : x \in \mathbb{R}\}$ pripadajuća dekompozicija. Pokaže se da je $\mathcal{D}$ usc dekompozicija ako i samo ako je f usc preslikavanje (vidi Vježbu 3.25 iz [1, str. 46]).

Definicija 4.6 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $\mathcal{D}$ particija od X za koju vrijedi sljedeće:*

Za svaki $D \in \mathcal{D}$ i svaki $U \in \mathcal{T}$ takve da je $D \subseteq U$, postoji $V \in \mathcal{T}$ takav da je $D \subseteq V$ i da za svaki $A \in \mathcal{D}$ koji siječe V vrijedi $A \subseteq U$.

*Takvu particiju $\mathcal{D}$ nazivamo **odozgo poluneprekidnom (usc) particijom**. Uzimajući na particiji $\mathcal{D}$ dekompozicijsku topologiju, kažemo da je $\mathcal{D}$ **usc dekompozicija**.*

[1] topologija kojoj bazu čine skupovi oblika $\langle -\infty, x\rangle$, $x \in \mathbb{R}$ ([2, str. 2])

Definicija 4.7 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor,* $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ *njegova dekompozicija i* $A \subseteq X$. *Kažemo da je* A $\mathcal{D}$-***zasićen****, ako postoji* $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ *takav da je* $A = \cup\, \mathcal{C}$.

Uočimo sljedeće:

1. $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ *je* $\mathcal{D}$-zasićen skup, za svaki $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$, jer $\pi^{-1}(\mathcal{C}) = \cup\, \mathcal{C}$ (str. 37).

2. $A \subseteq X$ je $\mathcal{D}$-zasićen ako i samo ako je $A = \pi^{-1}(\pi(A))$. Naime, ako je A $\mathcal{D}$-zasićen, onda postoji $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ takav da je $A = \cup\, \mathcal{C}$. Prema tome, $\pi(A) = \mathcal{C}$ što povlači $\pi^{-1}(\pi(A)) = \pi^{-1}(\mathcal{C}) = \cup\, \mathcal{C} = A$. Obratno, neka je $A = \pi^{-1}(\pi(A))$. Kako je $\pi(A) \subseteq \mathcal{D}$, to je, po 1. točki, A $\mathcal{D}$-zasićen.

3. Ako je $V \subseteq X$ $\mathcal{D}$-zasićen i otvoren u X, onda je $\pi(V)$ otvoren u $\mathcal{D}$. Naime, zbog $\mathcal{D}$-zasićenosti je $V = \pi^{-1}(\pi(V))$. Tvrdnja sada slijedi po 2. svojstvu na stranici 37.

Propozicija 4.8 (Karakterizacija usc dekompozicije) *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor,* $\mathcal{D}$ *dekompozicija od* X *i* π *prirodno preslikavanje. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) $\mathcal{D}$ *je usc dekompozicija;*

(2) π *je zatvoreno preslikavanje;*

(3) Ako su $D \in \mathcal{D}$ *i* $U \in \mathcal{T}$ *takvi da je* $D \subseteq U$*, onda postoji* $V \in \mathcal{T}$ *takav da je* $D \subseteq V \subseteq U$ *i* V *je* $\mathcal{D}$*-zasićen.*

Dokaz. (1) => (2) Neka je $\mathcal{D}$ usc dekompozicija i neka je $F \subseteq X$ zatvoren. Trebamo pokazati da je $\pi(F)$ zatvoren, odnosno da je $\mathcal{D} \setminus \pi(F)$ otvoren. U 2. točki na stranici 37 pokazali smo da je $\mathcal{D} \setminus \pi(F)$ otvoren ako i samo ako je $\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(F))$ otvoren. Neka je

$$x \in \pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(F)).$$

Tada je po definiciji praslike $\pi(x) \in \mathcal{D} \setminus \pi(F)$. Označimo $D := \pi(x)$. Pokažimo da je $D \subseteq X \setminus F$. Pretpostavimo suprotno, neka je $y \in D \cap F$. Tada vrijedi:

(*i*) $y \in F$

(*ii*) $y \in \pi(y) \cap D$

Prema (*i*), $\pi(y) \in \pi(F)$. Prema (*ii*), $\pi(y) = D$ (jer su $\pi(y)$ *i* D elementi particije). Ovo dvoje povlači da je $D \in \pi(F)$ što je kontradikcija sa $D \in \mathcal{D} \setminus \pi(F)$. Dakle, $D \subseteq X \setminus F$.

Budući da je $\mathcal{D}$ usc i $D \subseteq X \setminus F$, to po Definiciji 4.6 postoji $V \in \mathcal{T}$ takav da je $D \subseteq V$ i da za bilo koji $z \in V$ vrijedi $\pi(z) \subseteq X \setminus F$. Očito je $x \in V$, jer $x \in D$ *i* $D \subseteq V$. Cilj nam je pokazati da je $V \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(F))$, tj. da je V otvorena okolina od x koja je sadržana u $\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(F))$, pa bi taj skup bio otvoren po Teoremu 1.10.

Pokažimo prvo da je $\pi(V) \subseteq \mathcal{D} \setminus \pi(F)$. Pretpostavimo suprotno, neka je $Z = \pi(z) \in \pi(V) \cap \pi(F)$ (takav $z \in X$ postoji jer je π surjekcija). Kako je $\pi(z) \in \pi(V)$, to po definiciji skupa $\pi(V)$ postoji $v \in V$ takav da je $\pi(z) = \pi(v)$. Na isti način, postoji $y \in F$ takav da je $\pi(z) = \pi(y)$. Dakle, $\pi(v) = \pi(y)$ i $y \in \pi(v) \cap F$. Ovo povlači da $\pi(v) \nsubseteq X \setminus F$, a time $v \notin V$, što je kontradikcija. Zaključujemo da je $\pi(V) \subseteq \mathcal{D} \setminus \pi(F)$. Prema tome,

$$V \overset{\text{inače}}{\subseteq} \pi^{-1}(\pi(V)) \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(F)).$$

Ovime smo zadovoljili uvjet da $\pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(F))$ bude otvoren, a time $\pi(F)$ zatvoren.

(2) => (3) Neka je π zatvoreno preslikavanje. Neka su $D \in \mathcal{D}$ i $U \in \mathcal{T}$ takvi da je $D \subseteq U$. Budući da je U otvoren, to je $X \setminus U$ zatvoren, pa je po pretpostavci $\pi(X \setminus U)$ zatvoren. Definirajmo

$$V = \pi^{-1}\big(\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)\big).$$

Zbog prethodnih razmatranja i neprekidnosti od π, vidimo da je V otvoren. Pokažimo da je $D \subseteq V \subseteq U$. Pokažimo prvo da je $\pi(D) \subseteq \mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)$. Pretpostavimo suprotno, neka je $\pi(x) \in \pi(D) \cap \pi(X \setminus U)$. Budući da je $D \in \mathcal{D}$, očito je $\pi(D) = \{D\}$, pa je $\pi(x) = D$. Nadalje, kako je $\pi(x) \in \pi(X \setminus U)$, to postoji $y \in X \setminus U$, takav da je $\pi(x) = \pi(y)$. Prema tome, $\pi(y) = D$. Sada vidimo da je $y \in \pi(y) = D$, pa je $D \cap (X \setminus U) \neq \emptyset$. Ovo je kontradikcija sa $D \subseteq U$. Dakle, pokazali smo da vrijedi $\pi(D) \subseteq \mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)$. Iz toga slijedi

$$D \subseteq \pi^{-1}(\pi(D)) \subseteq \pi^{-1}(\mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U)) = V.$$

Neka je sada $x \in V$. Tada vrijedi:

$$\pi(x) \in \mathcal{D} \setminus \pi(X \setminus U) => \pi(x) \notin \pi(X \setminus U) = \{\pi(y) : y \in X \setminus U\} =>$$
$$=> x \notin X \setminus U => x \in U.$$

Time smo pokazali $D \subseteq V \subseteq U$. $\mathcal{D}$-zasićenost od V slijedi iz toga što je $\pi^{-1}(\mathcal{C})$ $\mathcal{D}$-zasićen skup, za svaki $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ (pokazano u 1. točki na stranici 42).
(3) => (1) Neka vrijedi (3) te neka su $D \in \mathcal{D}$ i $U \in \mathcal{T}$ takvi da je $D \subseteq U$. Prema (3), postoji $V \in \mathcal{T}$ takav da je $D \subseteq V \subseteq U$ i V je $\mathcal{D}$-zasićen. Neka je sada $A \in \mathcal{D}$ i $A \cap V \neq \emptyset$. Treba pokazati da je tada $A \subseteq U$. Kako je V $\mathcal{D}$-zasićen, to postoji $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{D}$ takav da je $V = \cup\, \mathcal{C}$. Sada zbog $A \cap (\cup\, \mathcal{C}) \neq \emptyset$ i činjenice da su elementi particije u parovima disjunktni, slijedi $A \cap V = A$. Dobivamo da je $A = A \cap V \subseteq V \subseteq U$. Dakle, $A \subseteq U$. Time smo pokazali da su zadovoljeni svi uvjeti da $\mathcal{D}$ bude usc dekompozicija. ■

Lema 4.9 *Ako je $\mathcal{D}$ usc dekompozicija T_1-prostora $(X, \mathcal{T})$, onda je $\mathcal{D}$ zatvorena*[2] *particija od X.*

Dokaz. Neka je $D \in \mathcal{D}$. Moramo pokazati da je D zatvoren podskup od X. Neka je $x \in D$ (postoji jer su svi elementi particije neprazni). Tada

[2]sastoji se od zatvorenih podskupova od X

je $\pi(x) = D$. Budući da je X T_1-prostor, to iz Napomene 1.20 slijedi da je $\{x\}$ zatvoren. Nadalje, $\mathcal{D}$ je usc dekompozicija pa je po Propoziciji 4.8 (2), π zatvoreno preslikavanje. Dakle, $\pi(\{x\}) = \{D\}$ je zatvoren s obzirom na topologiju $\mathcal{T}(\mathcal{D})$. Sada slijedi da je $\mathcal{D} \setminus \{D\}$ otvoren u $\mathcal{T}(\mathcal{D})$ pa je, po definiciji od $\mathcal{T}(\mathcal{D})$, $\cup\, \mathcal{D} \setminus \{D\}$ otvoren u $\mathcal{T}$. Uočimo da je $\cup\, \mathcal{D} \setminus \{D\} = X \setminus D$ pa je $X \setminus D$ otvoren, odnosno D je zatvoren podskup od X. ■

Teorem 4.10 *Usc dekompozicija kompaktnog metričkog prostora je metrizabilna.*

Dokaz. Po Teoremu 4.4, dovoljno je pokazati da je takva dekompozicija Hausdorffov prostor. Neka je $(X, \mathcal{T})$ kompaktan metrički prostor, $\mathcal{D}$ usc dekompozicija od X i $\pi : X \to \mathcal{D}$ prirodno preslikavanje. Da bi pokazali da je $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ Hausdorffov prostor, moramo pokazati da svake dvije različite točke iz $\mathcal{D}$ imaju okoline koje se ne sijeku. Neka su $D_1, D_2 \in \mathcal{D}$ dvije različite točke. Uočimo da su to onda disjunktni, zatvoreni (Lema 4.9) podskupovi od X. Budući da je X metrički prostor, to je ujedno i normalan (Napomena 1.20) pa postoje $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ takvi da je $D_1 \subseteq U_1$, $D_2 \subseteq U_2$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. Nadalje, $\mathcal{D}$ je usc dekompozicija pa po Propoziciji 4.8 (3), postoje $V_1, V_2 \in \mathcal{T}$ takvi da je $D_1 \subseteq V_1 \subseteq U_1$ i $D_2 \subseteq V_2 \subseteq U_2$, te da su V_1 i V_2 $\mathcal{D}$-zasićeni. Kako su V_i otvoreni i $\mathcal{D}$-zasićeni, to po 3. točki na stranici 42 slijedi da su $\pi(V_i)$ otvoreni u $\mathcal{D}$. Uočimo još da iz $D_i \subseteq V_i$ slijedi $\pi(D_i) \subseteq \pi(V_i)$, a to zbog $D_i \in \mathcal{D}$ povlači $D_i \in \pi(V_i)$, za $i = 1, 2$. Ako još pokažemo da vrijedi $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$, onda su $\pi(V_1)$ i $\pi(V_2)$ tražene okoline i dokaz time završava. Budući da su $U_1 \cap U_2 = \emptyset$ i $V_i \subseteq U_i$, to vrijedi $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Nadalje, po 2. točki na stranici 42, vrijedi $\pi^{-1}(\pi(V_i)) = V_i$, za $i = 1, 2$. Iz toga dobivamo:

$$\emptyset = V_1 \cap V_2 = \pi^{-1}(\pi(V_1)) \ \cap \ \pi^{-1}(\pi(V_2)) = \pi^{-1}(\pi(V_1) \ \cap \ \pi(V_2)).$$

Budući da je π surjekcija, iz ovoga slijedi da je $\pi(V_1) \cap \pi(V_2) = \emptyset$ (u protivnom bi za $y \in \pi(V_1) \cap \pi(V_2) \subseteq \mathcal{D}$ postojao $x \in X$ koji se u njega preslika). Ovime smo zadovoljili sve uvjete da $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ bude Hausdorffov prostor. ∎

Teorem 4.11 *Usc dekompozicija kontinuuma je kontinuum.*

Dokaz. Po Teoremu 4.10, takva usc dekompozicija je metrizabilna. Budući da je π neprekidna surjekcija, kompaktnost i povezanost slijede po Napomeni 1.56. ∎

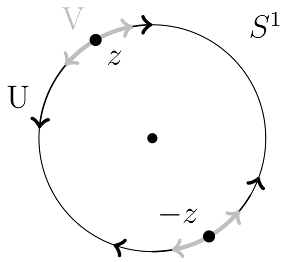
4.3 Primjeri

U ovom odjeljku dajemo neke primjere primjene usc dekompozicija za konstrukciju novih kontinuuma. Počinjemo s konkretnim primjerima, a onda dajemo neke općenitije metode konstrukcije.

Primjer 4.12 ***Projektivni n-prostor.*** *Neka je S^n n-sfera (Primjer 1.60) za bilo koji $n \in \mathbb{N}$. Na S^n definiramo particiju $\mathcal{D}$ na način:*

$$\mathcal{D} = \Big\{ \{z, -z\} : z \in S^n \Big\}.$$

Pokažimo da je $\mathcal{D}$ usc dekompozicija. Neka je $\{z, -z\} \in \mathcal{D}$ i $U \subseteq S^n$ otvoren u S^n te neka je $\{z, -z\} \subseteq U$. Tada postoji otvoren skup $U' \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$, takav da je $U = U' \cap S^n$. Budući da se nalazimo u euklidskom prostoru, možemo uzeti dovoljno male kugle V' i V'' u R^{n+1} jednakih radijusa sa središtima u z i -z, redom, tako da su $V', V'' \subseteq U'$. Sada možemo definirati $V := (V' \cup V'') \cap S^n$. Iz ovako definiranog skupa V je očito da je $\{z, -z\} \subseteq V \subseteq U$ i da čim V sadrži točku x (u blizini z), sadrži i -x (u blizini -z), tj. V se može zapisati kao unija dvotočkovnih skupova $\{x, -x\} \in \mathcal{D}$ pa je V $\mathcal{D}$-zasićen. Po Propoziciji 4.8 (3), $\mathcal{D}$ je usc dekompozicija. Sada po Teoremu 4.11 zaključujemo da je $\mathcal{D}$ kontinuum. Označavamo ga s P^n i nazivamo projektivnim n-prostorom.



Slika 4.1: Odabir skupa V u projektivnom 1-prostoru

Primjer 4.13 ***Möbiusova vrpca.*** *Neka je $I^2 = [0,1] \times [0,1]$ kvadrat na kojem je definirana particija $\mathcal{D}$ na način:*

$$\mathcal{D} = \Big\{\{(x,0),(1-x,1)\}\colon 0 \le x \le 1\Big\} \cup \Big\{\{(x,y)\}\colon 0 \le x \le 1,\ 0 < y < 1\Big\}.$$

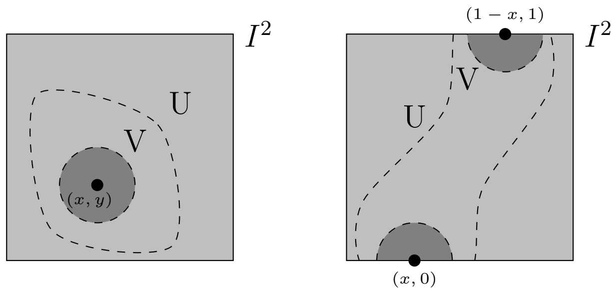
Neka je $D \in \mathcal{D}$ i $U \subseteq I^2$ otvoren u I^2, tako da je $D \subseteq U$. Tada postoji $U' \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren u $\mathbb{R}^2$, takav da je $U = U' \cap I^2$. Promotrimo prvo slučaj kad je $D = \{(x,y)\}$, za $0 \le x \le 1$ i $0 < y < 1$. Sada možemo uzeti dovoljno malu kuglu $B \subseteq U'$ sa središtem u (x,y), takvu da za svaki $(a,b) \in B$ vrijedi $0 < b < 1$. Definirajmo $V := B \cap I^2$. Očito je da V možemo zapisati kao uniju jednotočkovnih skupova $\{(a,b)\} \in \mathcal{D}$, $0 \le a \le 1$, $0 < b < 1$, pa je V $\mathcal{D}$-zasićen.

Promotrimo sada slučaj gdje je $D = \{(x,0),(1-x,1)\}$. Postupak je sličan kao u prethodnom slučaju samo što umjesto kugle B uzimamo uniju dviju kugli jednakih radijusa, sa središtima u $(x,0)$ i $(1-x,1)$.

Po Propoziciji 4.8 (3), $\mathcal{D}$ je usc dekompozicija, pa je po Teoremu 4.11 kontinuum. Nazivamo ga Möbiusovom vrpcom.

Primjer 4.14 ***M-kontinuum.*** *Neka je X topološka sinusna krivulja (Primjer 1.62) i $\mathcal{D}$ particija od X čiji su članovi:*

$$\big\{(0,y),(0,1-y)\big\},\ \text{za } 0 \le y < \frac{1}{2} \quad i \quad \big\{(x,y)\big\}\ \text{inače.}$$



Slika 4.2: Dva slučaja odabira skupa V kod Möbiusove vrpce

Na sličan način kao u prethodna dva primjera pokaže se da je ovako definirana particija usc. Po Teoremu 4.11, pripadajuća usc dekompozicija je kontinuum koji nazivamo M-kontinuumom.

Primjer 4.15 ***Prostori X/A.*** *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor,* $A \subseteq X$ *neprazan zatvoren podskup od* X *i* $\mathcal{D}_A$ *particija na* X *zadana sa:*

$$\mathcal{D}_A = \{A\} \ \cup \ \Big\{\{z\} : z \in X \setminus A\Big\}.$$

Neka su $D \in \mathcal{D}_A$ *i* $U \in \mathcal{T}$ *takvi da je* $D \subseteq U$*. Ako je* $D \neq \{A\}$*, onda možemo uzeti* $V := U \setminus A$ *(otvoren je jer je* A *zatvoren). Tada je očito* $D \subseteq V \subseteq U$ *i* V *se može zapisati kao unija jednotočkovnih skupova* $\{z\} \in \mathcal{D}$*, pa je* V $\mathcal{D}_A$*-zasićen. Ako je* $D = \{A\}$*, onda možemo uzeti* $V = U$*. Opet je* $D \subseteq V \subseteq U$ *i* V *je* $\mathcal{D}_A$*-zasićen jer se može zapisati kao* $A \cup (\bigcup_{z \in V \setminus A} \{z\})$*.*

Po Propoziciji 4.8 (3), particija $\mathcal{D}_A$ *je usc. Pripadajuću usc dekompoziciju označavamo sa* X/A *i možemo ju zamišljati kao prostor dobiven iz* X *svođenjem skupa* A *na točku. Ako je* X *kontinuum, onda je po Teoremu 4.11,* X/A *također kontinuum.*

Primjer 4.16 ***Topološki konus.*** *Neka je* $Y = X \times [0, 1]$*, gdje je* X *topološki prostor, a na* Y *je dana produktna topologija. Neka je* $A = \{(x, 1) : x \in X\}$*. Tada dekompoziciju* Y/A *(po Primjeru 4.15) nazivamo* ***topološkim***

konusom nad *X i označavamo sa TC(X).* ***Vrh*** *konusa je točka A, a* ***baza*** *je skup $\pi(\{(x,0) : x \in X\})$. Može se pokazati da je TC(X) uvijek (putevima) povezan, pa je po Primjeru 4.15 dovoljno provjeriti da je X kompaktan metrički prostor da bi TC(X) bio kontinuum.*

U nastavku dajemo primjer kojim možemo od bilo koja dva neprazna topološka prostora dobiti novi. Zatim ćemo pokazati neke rezultate pomoću kojih to možemo primijeniti na kontinuume. Radi se o metodi lijepljenja prostora. U dokazima koristimo usc dekompozicije.

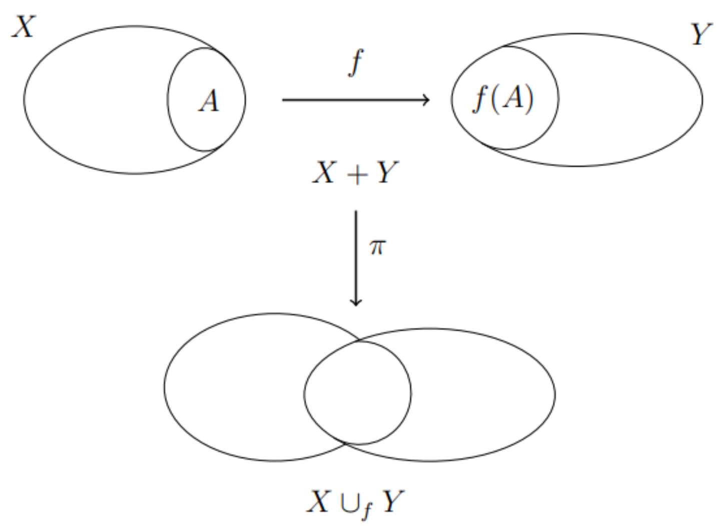
Definicija 4.17 *Neka su $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topološki prostori takvi da je $X \cap Y = \emptyset$ (ovo ne smanjuje općenitost jer u slučaju da X i Y nisu disjunktni, za $p \neq q$ dobivamo njihove disjunktne kopije $X \times \{p\}$ i $Y \times \{q\}$). Definiramo novi topološki prostor $(Z, \mathcal{T})$, gdje je $Z = X \cup Y$, a $\mathcal{T}$ topologija takva da je $U \in \mathcal{T}$ ako i samo ako $U \cap X \in \mathcal{T}_X$ i $U \cap Y \in \mathcal{T}_Y$. Topološki prostor $(Z, \mathcal{T})$ nazivamo* ***slobodnom unijom*** *od X i Y te ga označavamo sa $X + Y$.*

Uočimo da vrijedi $\mathcal{T}_X \subseteq \mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_Y \subseteq \mathcal{T}$.

Definicija 4.18 *Neka su $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ topološki prostori takvi da je $X \cap Y = \emptyset$. Neka je A neprazan zatvoren podskup od X i $f : A \to Y$ neprekidno preslikavanje. Neka je $\mathcal{D}$ particija od $X + Y$, zadana na sljedeći način:*

$$\mathcal{D} = \Big\{ \{x\} \cup f^{-1}(x) : x \in f(A) \Big\} \cup \Big\{ \{y\} : y \in (X+Y) \setminus (A \cup f(A)) \Big\}.$$

Dekompoziciju $(\mathcal{D}, \mathcal{T}(\mathcal{D}))$ dobivenu uvođenjem dekompozicijske topologije na $\mathcal{D}$ označavamo sa $X \cup_f Y$ i kažemo da je X ***zalijepljen za*** *Y* ***preslikavanjem*** *f. Možemo to zamišljati kao da su X i Y spojeni preko skupa A, na način da svaki $a \in A$ poistovjetimo s njegovom slikom $f(a) \in Y$.*



Slika 4.3: Ilustracija lijepljenja skupova X i Y preslikavanjem f

Ubuduće ćemo kod korištenja oznake $X \cup_f Y$ podrazumijevati da je $f : A \to Y$ već poznato preslikavanje za neki neprazan zatvoren $A \subseteq X$ i da se radi o dekompoziciji slobodne unije $X + Y$ iz Definicije 4.17.

Sljedeću propoziciju navodimo bez dokaza.

Propozicija 4.19 *Neka su X i Y disjunktni kompaktni metrički prostori. Tada je $X \cup_f Y$ usc dekompozicija.*

Teorem 4.20 *Ako su X i Y disjunktni, neprazni, kompaktni metrički prostori, onda je $X \cup_f Y$ neprazan, kompaktan metrički prostor.*

Dokaz. Po Propoziciji 4.19, $X \cup_f Y$ je usc dekompozicija. Nadalje, očito je da je X+Y neprazan, kompaktan, metrički prostor. Sada primjenom Teorema 4.10 zaključujemo da je $X \cup_f Y$ metrizabilna. Kompaktnost slijedi iz Napomene 1.56 jer je π neprekidna surjekcija, a očito je i da je $X \cup_f Y$ neprazan jer je to particija nepraznog skupa X+Y. ■

Teorem 4.21 *Ako su X i Y disjunktni kontinuumi, onda je $X \cup_f Y$ kontinuum.*

Dokaz. Po Teoremu 4.20, $X \cup_f Y$ je neprazan, kompaktan metrički prostor. Dakle, trebamo još samo pokazati da je povezan. Promotrimo prirodno preslikavanje $\pi : X + Y \to X \cup_f Y$. Budući da je π neprekidna, to korištenjem Primjera 1.50 i Napomene 1.56, zaključujemo da su $\pi(X)$ i $\pi(Y)$ povezani skupovi. Nadalje, uočimo da, zbog surjektivnosti od π vrijedi:

$$X \cup_f Y = \pi(X + Y) \overset{Def.\ 4.17}{=} \pi(X \cup Y) = \pi(X) \cup \pi(Y).$$

Također, $\pi(X)$ i $\pi(Y)$ se sijeku. Naime, za $a \in A \subseteq X$ je $\pi(a) = \pi(f(a))$, po definiciji particije $X \cup_f Y$. Dakle, $\pi(a) \in \pi(X) \cap \pi(Y)$. Sada po Teoremu 1.24, zaključujemo da je $X \cup_f Y$ povezan. ■

Sljedeći teorem govori nam kako možemo poistovjetiti usc dekompozicije kompaktnih metričkih prostora sa slikama tih prostora po neprekidnim preslikavanjima. Navodimo ga bez dokaza.

Teorem 4.22 *Neka su X i Y kompaktni metrički prostori, te $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija. Tada je skup $\mathcal{D}_f$, definiran sa*

$$\mathcal{D}_f = \{f^{-1}(y) : y \in Y\},$$

usc dekompozicija od X i homeomorfan je s Y. Obratno, bilo koja usc dekompozicija od X je kompaktan metrički prostor koji možemo dobiti kao sliku od X po nekom neprekidnom preslikavanju f.

Ovaj teorem može nam poslužiti u situacijama gdje želimo konstruirati ili dokazati nepostojanje usc dekompozicije s određenim topološkim svojstvima na nekom kompaktnom metričkom prostoru. Naime, ponekad nam može biti lakše konstruirati neprekidnu surjekciju sa X na neki prostor sa željenim topološkim svojstvima. Usc dekompoziciju tada dobivamo na način na koji smo u teoremu definirali $\mathcal{D}_f$.

Literatura

[1] S. B. Nadler, Jr., *Continuum theory: an introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1992.

[2] V. Matijević, *Uvod u opću topologiju*, skripta, PMF Split

[3] V. Matijević, *Uvod u teoriju skupova*, skripta, PMF Split

[4] K. Kuratowski, *Topology, Vol. I*, Academic Press, New York, N.Y., 1966.

[5] K. Kuratowski, *Topology, Vol. II*, Academic Press, New York, N.Y., 1968.

[6] N. Koceić-Bilan, *Osnove matematičke analize I*, skripta, PMF Split, 2020.

[7] J. J. Charatonik, *History of continuum theory*, in: C.E. Aull, R. Lowen (eds.), Handbook of the History of General Topology, Vol. 2, 703-786, Kluwer Academic Publishers, 1998.