Radon - Nikodymova derivacija

Mikulić, Lucia

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

LUCIA MIKULIĆ

RADON - NIKODYMOVA DERIVACIJA

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

RADON - NIKODYMOVA DERIVACIJA

DIPLOMSKI RAD

Neposredna voditeljica:
dr. sc. Ana Laštre
Mentorica:
doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš

Studentica:
Lucia Mikulić

Split, rujan 2023.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

RADON - NIKODYMOVA DERIVACIJA

Lucia Mikulić

Sažetak:

Radon-Nikodymova teorija derivacija se smatra temeljem moderne teorije uvjetne vjerojatnosti. Na početku rada javlja se pitanje odnosa operacija integracije i diferencijacije. Definiranjem, između ostalog, disjunktnih nosača i apsolutne neprekidnosti dobili smo karakterizaciju. Funkcija distribucije F ima oblik $\int_{-\infty}^{x} F'(t)dt$ ako i samo ako je apsolutno neprekidna. U drugom dijelu rada cilj je pokazati da ako su ν i μ σ-konačne mjere na $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$, onda ν ima gustoću f u odnosu na μ. Sada vidimo da smo tu tvrdnju prethodno dokazali za $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1), \lambda)$ i za uzete mjere μ i λ. Problem je poznat i kao Radon-Nikodymov teorem. Za ν koja je apsolutno neprekidna u odnosu na μ, postoji gustoća f koja je nenegativna. Naziv tražene gustoće je upravo Radon-Nikodymova derivacija.

Ključne riječi:

gornja i donja desna derivacija, gornja i donja lijeva derivacija, disjunktni nosači, apsolutna neprekidnost, mjera s predznakom, međusobna singularnost

Podatci o radu:

broj stranica 54, broj slika 5, broj literaturnih navoda 9, jezik izvornika: hrvatski

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Mentorica: *doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš*

Neposredna voditeljica: *dr. sc. Ana Laštre, pred.*

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc., Vesna Gotovac Đogaš

dr. sc., Ana Laštre, pred.

dr. sc., Ivan Jelić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *29. rujna.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

RADON - NIKODYM DERIVATIVE

Lucia Mikulić

Abstract:

Radon-Nikodym's theory of derivatives underlies the modern theory of conditional probability. At the beginning, the question of the relationship between integration and differentiation operations arises. By defining, among other things, disjoint supports and absolute continuity, we obtained a characterization. The distribution function F *has the form* $\int_{-\infty}^{x} F'(t)dt$ *if and only if it is absolutely continuous. In the second part, the goal is to show that if* ν *and* μ *are* σ*-final measures on* $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$*, then* ν *has density* f *compared to* μ*. Now we see that this statement was previously proved for* $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1), \lambda)$ *and for the taken measures* μ *and* λ*. The problem is also known as the Radon-Nikodym theorem. For* ν *which is absolutely continuous with respect to* μ*, there exists a density* f *which is non-negative. The name of the desired density is precisely the Radon-Nikodym derivative.*

Key words:

upper and lower right derivatives, upper and lower left derivatives, disjoint supports, absolute continuity, signed measure, mutual singularity

Specifications:

54 pages, 5 figures, 9 reference, original in: Croatian

Mentor: *assisstant professor Vesna Gotovac Đogaš*

Immediate mentor: *dr. sc. Ana Laštre, lecturer*

BASIC DOCUMENTATION CARD

Committee:

assisstant professor, Vesna Gotovac Đogaš

dr. sc., Ana Laštre, lecturer

dr. sc., Ivan Jelić

This thesis was approved by a Thesis commettee on *September 29.*

Uvod

Lebesgueova teorija derivacija realnih funkcija realnih varijabli služi za uvođenje opće teorije, Radon-Nikodymove teorije derivacija, koja je temelj moderne teorije uvjetne vjerojatnosti. Početni rezultati su sami po sebi zanimljivi i o njima će se kasnije govoriti u svrhu ilustracije i usporedbe, te neće biti potrebni u naknadnim dokazima. U kojoj su mjeri operacije integracije i diferencijacije inverzne jedna drugoj? To je jedno od temeljnih pitanja na koje pokušavamo pronaći odgovor, a kasnije nam pomaže shvatiti puno složeniji problem.

Matematika nam još jednom daje uvid u to da se ništa ne smije uzimati zdravo za gotovo.

Za vrijeme studiranja susreli smo se sa raznim primjenama integrala i derivacija, bilo da treba izračunati površine ravninskih likova i volumene tijela ili odrediti monotonost funkcija i ekstreme funkcija. Primjene su još višestruke. Ali, malo nas se zapravo zapitalo koji je pravi odnos ovih dviju operacija koje su na prvi pogled usko povezane. Ukoliko postavimo neka ograničenja na podintegralnu funkciju, vrlo lako se otkrije i njihov odnos. No, želja za nečim jačim dovela nas je do karakterizacije koja će nam uvelike razjasniti drugi dio diplomskog rada.

U središtu pozornosti drugog dijela se nalazi dokaz Radon-Nikodymova teorema. Za nenegativnu funkciju f na prostoru mjere $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$ možemo definirati drugu mjeru na $\mathbb{F}$ pomoću $\nu(A) = \int_A f d\mu$. Dakle, ν ima gustoću f u odnosu na mjeru μ. Također, za svaki $A \in \mathbb{F}$, $\mu(A) = 0$ očito implicira $\nu(A) = 0$. Cilj je dokazati obrnuto. Ako zadnji uvjet vrijedi te ako su ν i μ σ-konačne mjere na $\mathbb{F}$, onda treba dokazati da ν ima gustoću f u odnosu na μ. Iz ove tvrdnje i prethodno dokazane karakterizacije ćemo vrlo lako uočiti određenu povezanost. Na ovaj način dolazimo do zaključka da se zapravo cijeli diplomski rad svodi na taj vrlo važan dokaz.

Gustoća f, čije postojanje trebamo dokazati, se naziva Radon-Nikodymova derivacija od ν u odnosu na μ. Sam teorem, pa i njegov dokaz, je izuzetno važan u proširenju ideja teorije vjerojatnosti, sa gustoće definirane nad realnim brojevima na vjerojatnosnu mjeru definiranu na proizvoljnim skupovima. Govori je li i kako moguće promijeniti jednu vjerojatnosnu mjeru u drugu. Financijska matematika, uz ostala područja, u velikoj mjeri koristi ovaj teorem. Promjena vjerojatnosnih mjera koristi se za pretvaranje stvarnih vjerojatnosti u vjerojatnosti neutralne prema riziku.

Sadržaj

Poglavlje 1

Teorijska pozadina

Za razumijevanje diplomskog rada, ponajprije je potrebno dobro poznavati teoriju mjere i integrala. Kako bi čitanje rada proteklo što uspješnije, ukratko ćemo se prisjetiti osnovnih definicija, tvrdnji i teorema. Također ćemo se prisjetiti i nekih pojmova iz teorije vjerojatnosti, budući se isti spominju kasnije u radu. Kako ovo poglavlje služi samo kao ponavljanje, dokaze navedenih teorema izostavljamo.

1.1 Teorija mjere i integrala

Definicija 1.1 *Familiju $\mathcal{A}$ podskupova skupa X nazivamo **σ-algebra skupova** na skupu X ako ona ima sljedeća svojstva:*

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Longrightarrow A^C \in \mathcal{A}$
3. *Unija prebrojivo mnogo elemenata iz $\mathcal{A}$ je element iz $\mathcal{A}$, tj. za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

*Za uređeni par $(X, \mathcal{A})$ kažemo da je **izmjeriv prostor**. Svaki element od $\mathcal{A}$ zove se **izmjeriv skup**.*

Dakle, σ-algebra na skupu X je familija podskupova od X koja sadrži skup X, zatvorena je na komplementiranje i na formiranje prebrojivih unija. Ako se u prethodnoj definiciji umjesto uvjeta (3.) zahtijeva da $\mathcal{A}$ bude zatvorena na formiranje konačnih unija, dobiva se definicija **algebre skupova** na skupu X.

Prisjetimo se, **topološki prostor** je par $(X,\mathcal{U})$ gdje je X neprazan skup, a $\mathcal{U}$ familija podskupova od X sa svojstvima:

1. $\emptyset, X \in \mathcal{U}$,
2. Unija svake familije skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$,
3. Presjek konačno mnogo skupova iz $\mathcal{U}$ je skup iz $\mathcal{U}$.

Familija $\mathcal{U}$ zove se **topološka struktura** ili **topologija**, a njezine članove zovemo **otvorenim skupovima**.

Pojam topološkog prostora, kao i korolar koji slijedi, potrebni su nam da se prisjetimo što su to Borelovi skupovi i Borelova σ-algebra.

Korolar 1.2 *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova skupa X. Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\mathcal{A} : \mathcal{A} \quad je \quad \sigma - algebra, \quad \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}$$

najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$. Za $\sigma(\mathcal{F})$ kažemo da je σ-algebra generirana s $\mathcal{F}$.

Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Za σ-algebru $\sigma(\mathcal{U})$ generiranu topologijom $\mathcal{U}$ kaže se da je **Borelova σ-algebra** na skupu X, i najčešće se označava s $\mathcal{B}(X,\mathcal{U})$, $\mathcal{B}(X)$ ili $\mathcal{B}_X$. Članovi od $\mathcal{B}(X)$ zovu se **Borelovi skupovi**.

Skupu $\mathbb{R}$ dodat ćemo dvije međusobno različite nove točke: $+\infty$ (plus beskonačno) i $-\infty$ (minus beskonačno). Dobiveni skup $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ naziva se **prošireni skup realnih brojeva** i označava s $\bar{\mathbb{R}}$.

Definicija 1.3 *Neka je $\mathcal{A}$ σ-algebra na skupu X. Mjera na $\mathcal{A}$ svako je preslikavanje $\mu : \mathcal{A} \to \bar{\mathbb{R}}$ s ovim svojstvima:*

1. *(nenegativnost) $\mu(A) \geq 0$ za svaki $A \in \mathcal{A}$,*
2. *$\mu(\emptyset) = 0$,*
3. *(σ-aditivnost ili prebrojiva aditivnost) Za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*
$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

*Za $\mu(A)$ kaže se da je **mjera skupa A**. Trojka $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zove se **prostor mjere**. Kažemo da je mjera μ **konačna** ako je $\mu(X) < \infty$. Mjera μ je **σ-konačna** ako se skup X može prikazati kao prebrojiva unija nekih skupova konačne μ-mjere, tj. ako postoji niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{A}$ takvih da je $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ i $\mu(A_i) < \infty$ za svaki $i \in \mathbb{N}$.*

U teoriji mjere od izuzetne je važnosti Lebesgueova mjera, kojoj ćemo posvetiti posebnu pažnju i u ovom diplomskom radu.

Definicija 1.4 *Neka je X skup, a 2^X njegov partitivni skup. **Vanjska mjera** na skupu X je svaka funkcija $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ s ovim svojstvima:*

1. *$\mu^*(\emptyset) = 0$,*

2. *(monotonost)* $A \subseteq B \subseteq X \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

3. *(σ-subaditivnost) Za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ skupova iz X vrijedi*

$$\mu^*\Big(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu^*(A_i).$$

Neka je X skup, $\mathcal{A}$ σ-algebra na X i $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mjera. Ako je skup $B \subseteq X$ izmjeriv, tj. $B \in \mathcal{A}$, onda je

$$\mu(A) = \mu(A \cap B) + \mu(A \cap B^c), \quad \forall A \in \mathcal{A}.$$

Drugim riječima, izmjeriv skup B razbija svaki drugi izmjeriv skup A na dva disjunktna izmjeriva skupa $A \cap B$ i $A \cap B^c$ čije se mjere zbrajaju na željeni način.

Vanjska mjera $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ nema to svojstvo. Preciznije, ako je $B \subseteq X$, tj. $B \in 2^X$, zbog σ-subaditivnosti vanjske mjere je

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c), \quad \forall A \subseteq X$$

s tim što se može pojaviti stroga nejednakost. Zato uvodimo sljedeću definiciju:

Definicija 1.5 *Neka je $\mu^* : 2^X \to [0, \infty]$ vanjska mjera na skupu X. Za skup $B \subseteq X$ kažemo da je μ^***-izmjeriv** ako je*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c), \quad \forall A \subseteq X.$$

Definicija 1.6 *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}$. Sa $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih otvorenih intervala $(a_i, b_i), i \in \mathbb{N}$, takvih da je $a_i \leq b_i$ te da vrijedi $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty}(a_i, b_i)$. Funkciju $\lambda^* : 2^{\mathbb{R}} \to [0, \infty]$ definiranu sa*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty}(b_i - a_i) : ((a_i, b_i), i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A\}$$

zovemo Lebesgueova vanjska mjera na $\mathbb{R}$.

Definicija 1.7 *Za skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je **izmjeriv u smislu Lebesguea** ili da je **Lebesgueov skup** ako je on λ^*-izmjeriv.*

Familija $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ svih podskupova od $\mathbb{R}$ izmjerivih u smislu Lebesguea je σ-algebra na $\mathbb{R}$, a restrikcija Lebesgueove vanjske mjere λ^* na σ-algebru $\mathcal{M}_{\lambda^*}$ je mjera. Tu restrikciju označavamo s λ i zovemo **Lebesgueova mjera na** $\mathbb{R}$.

Intervale oblika (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$, $[a, b]$, gdje su $a, b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$, zovemo 1-intervali. Neka su $I_1, I_2, \ldots, I_d$ 1-intervali. Skup oblika $I_1 \times I_2 \times \cdots \times I_d$ zovemo d**-interval** na $\mathbb{R}^d$.

Definicija 1.8 *Neka je $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Sa $\mathcal{C}_A$ označimo familiju svih nizova $(I_i, i \in \mathbb{N})$ omeđenih i otvorenih $d-$intervala za koje vrijedi $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$. Neka je*

$$vol(I) = \prod_{i=1}^{d} \lambda(T_i)$$

volumen $d-$intervala $I = T_1 \times T_2 \times \cdots \times T_d$. Lebesgueovom vanjskom mjerom na $\mathbb{R}^d$ zovemo funkciju $\lambda_d^* : 2^{\mathbb{R}^d} \to [0, \infty]$ koja je definirana formulom

$$\lambda_d^*(A) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} vol(I_i) : (I_i, i \in \mathbb{N}) \in \mathcal{C}_A\}.$$

Radi jednostavnosti, ponekad ćemo funkciju λ_d^* kraće označavati s λ^*.

Definicija 1.9 *Za skup $A \subseteq \mathbb{R}^d$ kažemo da je **izmjeriv u smislu Lebesguea** ili da je **Lebesgueov skup** ako je on λ_d^*-izmjeriv.*

Familija $M_{\lambda_d^*}$ svih podskupova od $\mathbb{R}^d$ izmjerivih u smislu Lebesguea je σ-algebra na $\mathbb{R}^d$, a restrikcija Lebesgueove vanjske mjere λ_d^* na σ-algebru $M_{\lambda_d^*}$ je mjera. Tu restrikciju označavamo s λ_d i zovemo **Lebesgueova mjera na** $\mathbb{R}^d$.

Definicija 1.10 *Neka su* $(X, \mathcal{A})$ *i* $(Y, \mathcal{B})$ *izmjerivi prostori,* $A \subseteq X$ *skup i* $f : A \to Y$ *funkcija. Funkcija* f *je* ***izmjeriva*** *u paru* σ*-algebri* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *ili kraće* $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ *izmjeriva ako je* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *za svaki* $B \in \mathcal{B}$*.*

Ako je $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$, onda za izmjerivu funkciju kažemo da je **Borelova** ili izmjeriva u smislu Borela.

Neka je $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ mjera na $\sigma-$ algebri $\mathcal{A}$ podskupova od X. Prisjetimo se da uredenu trojku $(X, \mathcal{A}, \mu)$ zovemo prostor mjere, a članove od $\mathcal{A}$ izmjerivi skupovi. Za skup $N \subseteq X$ kažemo da je $\mu-$zanemariv ili kraće **zanemariv** ako postoji skup $B \in \mathcal{A}$ takav da je $N \subseteq B$ i $\mu(B) = 0$. Dakle, zanemarivi skupovi su podskupovi izmjerivih skupova mjere nula.

Definicija 1.11 *Neka je* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *prostor mjere, a* $T \subseteq X$ *podskup od* X*. Ako neka tvrdnja ili svojstvo vrijede za sve* $x \in T$ *osim za* $x \in N$ *, gdje je* $N \subseteq T$ *zanemariv skup, onda kažemo da ta tvrdnja ili svojstvo vrijedi* $\mu-$***skoro svuda na*** T *ili* $\mu-$ ***gotovo svuda na*** T*. Ako je iz konteksta jasno na koju mjeru* μ *i na koji skup* T *mislimo, onda koristimo kraće nazive: skoro svuda ili gotovo svuda. Za označavanje svojstva koje vrijedi skoro svuda koristi se kratica (s.s.).*

Sljedeći teorem, poznat pod nazivom Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji, daje nam koristan kriterij pod kojim integral i limes mogu zamijeniti svoja mjesta.

Teorem 1.12 (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji) *Neka su* $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $\Sigma-$*izmjerive funkcije i neka je* $g : X \to [0, \infty]$ *integrabilna funkcija. Ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

1. $f = \lim_n f_n \quad (s.s.)$,

2. *Funkcije f_n dominirane su funkcijom g, tj.*

$$|f_n| \leq g \quad (s.s.) \quad za \quad svaki \quad n \in \mathbb{N},$$

onda su sve funkcije f i f_n, $n \in \mathbb{N}$, integrabilne i vrijedi

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

U teoriji integrala od izuzetne je važnosti tzv. Levijev teorem koji nam govori da na skupu svih nenegativnih i izmjerivih funkcija integral i limes rastućeg niza funkcija "komutiraju". Pri tome je dopuštena promjena granične funkcije na zanemarivom skupu. Taj teorem je poznat i pod nazivom Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji.

Teorem 1.13 (Levijev teorem o monotonoj konvergenciji) *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ $\Sigma-$izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz $\Sigma-$izmjerivih funkcija $f_n : X \to [0, \infty]$ sa sljedeća dva svojstva:*

1. $f_n \leq f_{n+1} \quad (s.s.) \quad za \quad svaki \quad n \in \mathbb{N},$

2. $\lim_{n \to \infty} f_n = f \quad (s.s.).$

Tada je

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

Integral po mjeri dobro se ponaša prema graničnom postupku.

Teorem 1.14 (Fatouova lema) *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ i $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, $\Sigma-$izmjerive funkcije. Ako je $f = \liminf_n f_n \quad (s.s.)$, onda je*

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

1.2 Teorija vjerojatnosti

Definicija 1.15 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F})$ *izmjeriv prostor. Funkcija* $\mathcal{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *jest* ***vjerojatnost*** *(na* $\mathcal{F}$*, na* Ω*) ako vrijedi*

1. $\mathcal{P}(A) \geq 0, \quad A \in \mathcal{F}; \quad \mathcal{P}(\Omega) = 1,$

2. $A_i \in \mathcal{F}, \quad i \in \mathbb{N} \quad i \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad za \quad i \neq j,$

$$(A_i - međusobno \quad disjunktni) \Longrightarrow \mathcal{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_i).$$

Definicija 1.16 *Uređena trojka* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$*, gdje je* $\mathcal{F}$ $\sigma-$*algebra na* Ω *i* $\mathcal{P}$ *vjerojatnost na* $\mathcal{F}$*, zove se* ***vjerojatnosni prostor****.*

Definicija 1.17 *Neka je* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ *vjerojatnosni prostor. Funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *jest* ***slučajna varijabla*** *(na* Ω*) ako je* $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ *za proizvoljno* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ *tj.* $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \in \mathcal{F}$*.*

Neka je $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ vjerojatnosni prostor i X slučajna varijabla na Ω. Skup Ω na kojem je X definirana može biti sasvim općenit, ali ako nas zanima problem vezan za određenu slučajnu varijablu X ta općenitost može biti smetnja. U takvom slučaju pogodnije je operirati s vjerojatnosnim prostorom koji je induciran sa X. Za $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ stavimo

$$\mathcal{P}_X(B) = \mathcal{P}(X^{-1}(B)) = \mathcal{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} = \mathcal{P}\{X \in B\}.$$

Ovom relacijom definirana je funkcija $\mathcal{P}_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ i lako se provjeri da je $\mathcal{P}_X$ vjerojatnost, odnosno vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. $\mathcal{P}_X$ zovemo vjerojatnosna mjera inducirana sa X, a vjerojatnosni prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_X)$ zovemo vjerojatnosni prostor induciran sa X. Dakle, svakoj slučajnoj varijabli X se na prirodan način pridružuje vjerojatnosni prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathcal{P}_X)$ i probleme vezane za slučajnu varijablu X rješavamo u okviru toga vjerojatnosnog prostora. $\mathcal{P}_X$ često zovemo i zakon razdiobe od X.

Definicija 1.18 *Neka je X slučajna varijabla na Ω.* ***Funkcija distribucije*** *od X je funkcija $F_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ definirana sa*

$$F_X(x) = \mathcal{P}_X((-\infty, x]) = \mathcal{P}\{X \leq x\}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Teorem 1.19 *Funkcija distribucije F slučajne varijable X je rastuća i neprekidna zdesna na $\mathbb{R}$ i zadovoljava*

$$F(-\infty) = \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0,$$

$$F(+\infty) = \lim_{x \to +\infty} F(x) = 1.$$

Definicija 1.20 *Neka je X slučajna varijabla na vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ i neka je F_X njezina funkcija distibucije. Kažemo da je X apsolutno neprekidna ili, kraće, neprekidna slučajna varijabla ako postoji nenegativna realna Borelova funkcija f na $\mathbb{R}$ takva da je*

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) d\lambda(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Za funkciju distribucije F_X neprekidne slučajne varijable X, dakle za funkciju prethodno napisanu, kažemo da je apsolutno neprekidna funkcija distribucije. Ako je X neprekidna slučajna varijabla, tada se funkcija f iz prethodnog zapisa zove ***funkcija gustoće vjerojatnosti od*** *X, tj. od njezine funkcije distribucije F_X ili, kraće,* ***gustoća od*** *X, i ponekad je označujemo sa f_x.*

Poglavlje 2

Derivacije na pravcu

2.1 Osnovni teorem integralnog računa

Deriviranje i integriranje imaju široku i nezaobilaznu primjenu u svim prirodnim i tehničkim znanostima. Naš cilj je pokazati u kakvom su odnosu te dvije operacije, a pri tome će nam uvelike pomoći Osnovni teorem integralnog računa.

Funkcija F je, po definiciji, **neodređeni integral** druge funkcije f na segmentu $[a, b]$ ako je

$$F(x) - F(a) = \int_a^x f(t)dt \tag{2.1}$$

za $a \leq x \leq b$. Funkcija F je, po definiciji, **primitivna funkcija** od f ako ima derivaciju f:

$$F'(x) = f(x) \tag{2.2}$$

za $a \leq x \leq b$. Integral je definiran kao

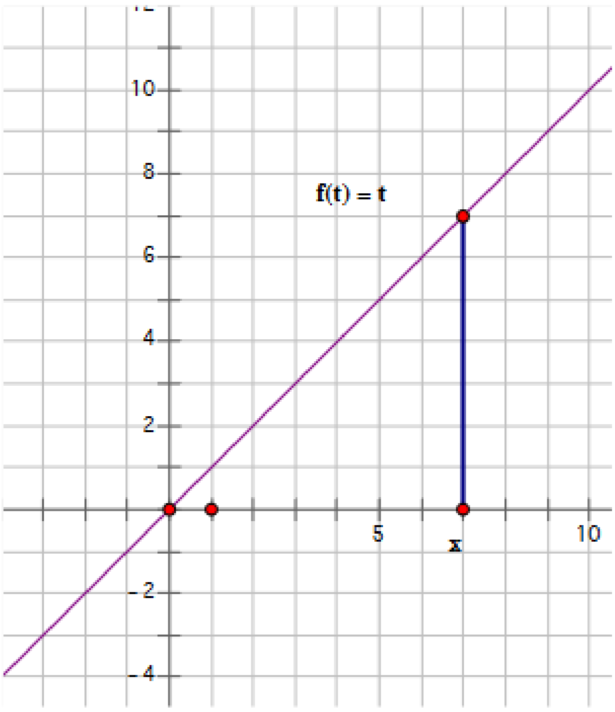
$$\int f d\mu = sup \sum_i [inf_{\omega \in A_i} f(\omega)] \mu(A_i)$$

gdje je f izmjeriva funkcija na prostoru mjere $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$. Supremum se ovdje proteže preko konačne dekompozicije A_i od Ω iz σ-algebre $\mathbb{F}$.

Za početak, promotrimo funkciju $f(t) = t$. Za bilo koju vrijednost $x > 0$, možemo izračunati integral

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x tdt,$$

izračunavanjem površine ispod zadane funkcije:



Slika 2.1: Promatramo površinu lika omeđenog zadanom funkcijom, pravcem $t = x$ i koordinatnom t-osi.

Na ovaj način smo dobili formulu za izračunavanje $\int_0^x f(t)dt$ u odnosu na x, ali možemo uočiti da je ovo zapravo funkcija od x:

$$F(x) = \int_0^x tdt.$$

Međutim, čemu je jednako $F'(x)$?

Za odgovor na ovo pitanje, potrebna nam je i tvrdnja Weierstrassovog teorema.

Teorem 2.1 (Weierstrassov teorem) *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoje točke $x_1, x_2 \in [a, b]$ tako da je $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ za svaki $x \in [a, b]$, tj. funkcija f ima i minimum i maksimum na $[a, b]$.*

Vrijedi sljedeće:

Teorem 2.2 (Osnovni teorem integralnog računa, 1. dio) *Neka je f neprekidna funkcija na $[a, b]$. Tada je funkcija g definirana sa*

$$g(x) = \int_a^x f(t)dt, \quad a \leq x \leq b$$

neprekidna na $[a, b]$, diferencijabilna na (a, b), te je $g'(x) = f(x)$, tj.

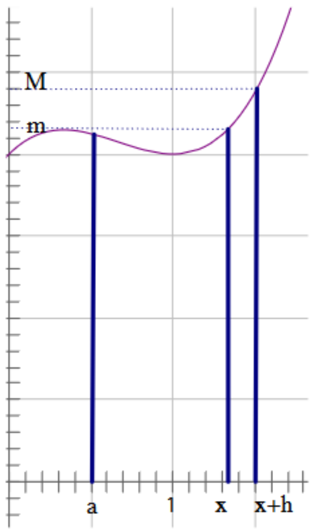
$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x). \tag{2.3}$$

Dokaz. Znamo da je

$$g'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h}.$$

Prvo ćemo se usredotočiti na preoblikovanje desne strane jednakosti gornjeg izraza, kako bi ga mogli lakše izračunati. Korištenjem definicije za funkciju g, dobili smo da je

$$\begin{aligned} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} &= \frac{\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \frac{\int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt}{h} \\ &= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt. \end{aligned} \tag{2.4}$$



Slika 2.2: Primjer funkcije f.

Ako je $f(x) > 0$, integral $\int_x^{x+h} f(t)dt$ jednak je površini između krivulje $y = f(t)$ i t-osi, te pravaca $t = x$ i $t = x + h$. Kako je f neprekidna na segmentu $[x, x+h]$, možemo iskoristiti Weierstrassov teorem kako bi pokazali da f ima maksimum M i minimum m na tom segmentu. Stoga, za sve $t \in [x, x + h]$,

$$m \leq f(t) \leq M.$$

Sada je

$$m(x+h-x) \leq \int_x^{x+h} f(t)dt \leq M(x+h-x),$$

pa dijeljenjem sa h dobijemo

$$m \leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq M.$$

Maksimum i minimum nisu nužno krajnje točke segmenta, za što je primjer i slika iznad. Weierstrassov teorem tvrdi da postoji točka $c_1 \in [x, x+h]$ takva da je $f(c_1) = m \leq f(t), \forall t \in [x, x+h]$ i točka $c_2 \in [x, x+h]$ takva da je $f(c_2) = M \geq f(t), \forall t \in [x, x+h]$. Sada slijedi

$$f(c_1) \leq f(t) \leq f(c_2),$$

pa je

$$\lim_{h\to 0} f(c_1) \leq \lim_{h\to 0} f(t) \leq \lim_{h\to 0} f(c_2).$$

Ako $h \to 0$, to je $c_1 \to x$ i $c_2 \to x$ budući duljina segmenta teži prema 0. Kako je f neprekidna, to je

$$\lim_{h\to 0} f(c_1) = f(x) = \lim_{h\to 0} f(c_2)$$

i

$$f(x) \leq \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \leq f(x),$$

pa je

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

Ovime smo dokazali da je

$$g'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt = f(x).$$

■

Kako bi prešli na drugi dio Osnovnog teorema integralnog računa, prisjetit ćemo se najprije jedne definicije i tvrdnje korolara.

Definicija 2.3 *Za skup $A \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je* ***konveksan****, ako, za svake dvije točke $x, y \in A$ takve da je $x \leq y$, A sadrži i segment $[x, y]$, tj. $[x, y] \subseteq A$.*

Korolar 2.4 *Neka su funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$ derivabilne na konveksnom skupu $X \subseteq \mathbb{R}$. Ako je $f'(x) = g'(x)$, za svaki $x \in X$, onda je $f - g$ konstantna funkcija.*

Teorem 2.5 (Osnovni teorem integralnog računa, 2. dio) *Neka je f neprekidna na $[a, b]$. Tada je*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \tag{2.5}$$

gdje je F funkcija takva da je $F' = f$.

Dokaz. Neka je $g(x) = \int_a^x f(t)dt$. Tada iz prethodnog teorema znamo da je $g'(x) = f(x)$. No ako je F još jedna funkcija s tim svojstvom, onda je

$$F(x) = g(x) + C,$$

za neku konstantu C i $a < x < b$. Kako su F i g neprekidne, to je $F(a) = g(a) + C$ i $F(b) = g(b) + C$. Sada je

$$g(a) = \int_a^a f(t)dt = 0 \quad i \quad g(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Stoga je

$$F(b) - F(a) = (g(b) + C) - (g(a) + C) = g(b) - g(a) = \int_a^b f(t)dt.$$

■

Ovim rezultatima računanje integrala postaje znatno jednostavnije za one funkcije za koje možemo pronaći primitivne funkcije.

Za neprekidnu funkciju f, (2.3) i (2.5) su dva načina izražavanja **Osnovnog teorema integralnog računa**.

Prema Osnovnom teoremu integralnog računa, u slučaju neprekidne funkcije f vrijedi sljedeće:

Teorem 2.6 *Neka je f neprekidna na [a, b].*

1. *Neodređeni integral od f je primitivna funkcija od f ako (2.1) vrijedi za sve* $x \in [a, b]$*. Tada vrijedi i (2.2) za sve* $x \in [a, b]$*.*

2. *Primitivna funkcija od f je neodređeni integral od f ako (2.2) vrijedi za sve* $x \in [a, b]$*. Tada vrijedi i (2.1) za sve* $x \in [a, b]$*.*

Osnovni problem je istražiti u kojoj mjeri ovaj teorem vrijedi ako ne pretpostavimo da je f neprekidna funkcija. Razmotrimo odmah prvi dio. Kako bi desna strana u (2.1) imala smisla, pretpostavimo da je f integrabilna. Ako je $f(x) = 0$ za $x < m$ i $f(x) = 1$ za $x \geq m$, $(a < m < b)$, onda funkcija F, koja zadovoljava (2.1), nema derivaciju u točki m. Stoga je previše za tražiti da (2.2) vrijedi za sve x. S druge strane, prema poznatom **Lebesgueovom teoremu**, ako (2.1) vrijedi za sve x, onda (2.2) vrijedi skoro svuda - tj. osim za x koji se nalaze u skupu Lebesgueove mjere 0. Svojstvo "skoro svuda" će se ovdje odnositi samo na Lebesgueovu mjeru. Ovaj rezultat, inače od velike važnosti, bit će dokazan u nastavku.

Proučimo sada drugi dio teorema. Pretpostavimo da (2.2) vrijedi skoro svuda, kao u navedenom Lebesgueovom teoremu. Slijedi li tada (2.1)? Odgovor na postavljeno pitanje je ne; ako je funkcija f jednaka konstantnoj funkciji sa vrijednosti 0, te ako je $F(x) = 0$ za $x < m$ i $F(x) = 1$ za $x \geq m$,

$(a < m < b)$, onda (2.2) vrijedi skoro svuda, ali (2.1) ne vrijedi za $x \geq m$. Pitanje je zapravo pogrešno postavljeno, ali pravi problem ne treba tražiti daleko; ako je f integrabilna i vrijedi (2.1), onda je

$$F(x+h) - F(x) = \int_a^b I_{(x,x+h)}(t) f(t) dt \to 0 \tag{2.6}$$

kad $h \downarrow 0$ prema Teoremu o dominiranoj konvergenciji. Koristeći upravo $h \uparrow 0$ pokazuje se da funkcija F treba biti neprekidna. Sada pitanje glasi ovako: "Ako je F neprekidna i f integrabilna te ako (2.2) vrijedi skoro svuda, slijedi li i (2.1)?". Odgovor je, začudo, i dalje ne; u jednom od narednih primjera konstruirat ćemo neprekidnu, strogo rastuću funkciju F za koju je $F'(x) = 0$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0, pa je, naravno, nemoguće da vrijedi (2.1) ako f nestaje skoro svuda i F strogo raste. Sve ovo dovodi do problema karakterizacije onih funkcija F za koje slijedi (2.1) ukoliko vrijedi (2.2) izvan skupa Lebesgueove mjere 0 i ukoliko je funkcija f integrabilna.

Drugim riječima, koje funkcije su integrali njihovih (skoro svuda) derivacija? Jedan od budućih teorema daje karakterizaciju.

Ono što si postavljamo kao prvi osnovni zadatak, u ovom diplomskom radu, je pokazati da (2.1) za integrabilnu funkciju f implicira da (2.2) vrijedi skoro svuda. Naš sljedeći zadatak bi onda bio okarakterizirati one funkcije F za koje vrijedi obrnuta implikacija. Pokazat će se da će u većini slučajeva f b́iti nenegativna i F neopadajuća. Ta pojava je od najvećeg interesa za teoriju vjerojatnosti; F se može smatrati distribucijskom funkcijom, a f gustoćom.

2.2 Derivacije integrala

Prije nego krenemo sa rješavanjem našeg osnovnog zadatka, prisjetit ćemo se pojma otvorenog pokrivača skupa i tvrdnje teorema regularnosti.

Definicija 2.7 ***Otvoreni pokrivač*** *skupa* $A \subseteq \mathbb{R}$ *je familija otvorenih skupova* $\{U_i; i \in \mathcal{J}\}$ *za koje je* $A \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{J}} U_i$*, za neki indeksni skup* $\mathcal{J}$*.*

Teorem 2.8 *Neka je* μ *mjera na* $\mathbb{R}^n$*, takva da je* $\mu(A) < \infty$ *ukoliko je* A *omeđen.*

1. *Za* $A \in \mathbb{R}^n$ *i* $\epsilon > 0$*, postoji zatvoreni skup* C *i otvoreni skup* G *takvi da je* $C \subset A \subset G$ *i* $\mu(G - C) < \epsilon$*.*

2. *Ako je* $\mu(A) < \infty$*, onda je* $\mu(A) = \sup \mu(K)$*, tj. supremum koji se proteže preko kompaktnih podskupova* K *od* A*.*

Prvi korak je pokazati da neopadajuća funkcija ima derivaciju skoro svuda. Za to su nam potrebna dva preliminarna rezultata. Označimo sa λ Lebesgueovu mjeru.

Lema 2.9 *Neka je* A *omeđeni linearni Borelov skup, i neka je* $\mathbb{J}$ *familija otvorenih intervala koji prekrivaju* A*. Tada* $\mathbb{J}$ *sadrži konačnu disjunktnu podfamiliju intervala* $I_1, \ldots, I_k$ *za koje je* $\sum_{i=1}^{k} \lambda(I_i) \geq \frac{\lambda(A)}{6}$*.*

Dokaz. λ je mjera na $\mathbb{R}^k$ takva da je $\lambda(A) < \infty$ ako je A omeđen. Po našoj pretpostavci je A omeđen, te po teoremu regularnosti zatim slijedi da je $\lambda(A) = sup\lambda(K)$, odnosno supremum koji se proteže preko kompaktnih podskupova K od A. Samim time, A sadrži kompaktan podskup K koji zadovoljava $\lambda(K) \geq \frac{\lambda(A)}{2}$. Označimo sa $\mathbb{J}_0$ konačan broj intervala uzetih iz $\mathbb{J}$ koji prekrivaju K. Neka je I_1 interval iz $\mathbb{J}_0$ maksimalne duljine; izbacimo iz

$\mathbb{J}_0$ interval I_1 i sve one intervale koji sijeku I_1. Među preostalim intervalima u $\mathbb{J}_0$, neka je sada I_2 interval maksimalne duljine; izbacimo iz $\mathbb{J}_0$ interval I_2 i sve one intervale koji sijeku I_2. Nastavljamo ovaj postupak sve dok $\mathbb{J}_0$ ima elemenata. I_i su disjunktni. Neka je J_i interval sa istim središtem kao I_i i tri puta veće duljine. Ako je I interval u $\mathbb{J}_0$ koji je izbačen zato što siječe I_i, to znači da je $I \subset J_i$. Na taj način je svaki odbačeni interval sadržan u jednom od J_i, te tako J_i prekrivaju K. Stoga je $\sum \lambda(I_i) = \sum \frac{\lambda(J_i)}{3} \geq \frac{\lambda(K)}{3} \geq \frac{\lambda(A)}{6}$. ■

Neka je F funkcija nad $[a,b]$, te neka je

$$\Delta : a = a_0 < a_1 < \ldots < a_k = b \tag{2.7}$$

particija segmenta $[a,b]$. U tom slučaju definirajmo $||F||_\Delta$ kao

$$||F||_\Delta = \sum_{i=1}^{k} \Big| F(a_i) - F(a_{i-1}) \Big|. \tag{2.8}$$

Lema 2.10 *Razmotrimo particiju (2.7) i nenegativan θ. Ako je*

$$F(a) \leq F(b), \tag{2.9}$$

i ako je

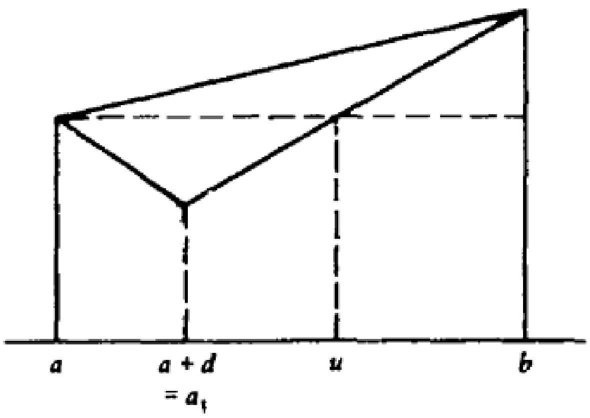
$$\frac{F(a_i) - F(a_{i-1})}{a_i - a_{i-1}} \leq -\theta \tag{2.10}$$

za skup intervala $[a_{i-1}, a_i]$ ukupne duljine d, onda je

$$||F||_\Delta \geq |F(b) - F(a)| + 2\theta d.$$

Ovo također vrijedi ako su nejednakosti u (2.9) i (2.10) obrnute te je $-\theta$ zamijenjen sa θ u posljednjem slučaju.

Dokaz. Slika ispod prikazuje slučaj kada je $k = 2$ i lijevi interval zadovoljava (2.10). Tada je $F(a_1) - F(a) \leq -\theta(a_1 - a) = -\theta d$, pa funkcija F pada najmanje θd na $[a, a+d]$, te se zatim vraća prema istoj vrijednosti na $[a+d, u]$, da bi zatim dobila na vrijednosti još $F(b) - F(a)$ na $[u, b]$.



Slika 2.3: Mogući slučaj za k=2.

Općenito, neka $\sum'$ označava sumu koja se proteže preko onih i koji zadovoljavaju (2.10) i neka $\sum''$ označava sumu koja se proteže preko onih i koji su ostali, $(1 \leq i \leq k)$. Tada je

$$\begin{aligned} ||F||_\Delta &= \sum{}'(F(a_{i-1}) - F(a_i)) + \sum{}''\Big|F(a_i) - F(a_{i-1})\Big| \\ &\geq \sum{}'(F(a_{i-1}) - F(a_i)) + \Big|\sum{}'' F(a_i) - F(a_{i-1})\Big| \\ &= \sum{}'(F(a_{i-1}) - F(a_i)) + \Big|(F(b) - F(a)) + \sum{}'(F(a_{i-1}) - F(a_i))\Big| \end{aligned} \tag{2.11}$$

Budući su sve razlike u posljednjem izrazu od (2.11) nenegativne, možemo odbaciti apsolutne zagrade. Dakle,

$$\begin{aligned} ||F||_\Delta &\geq F(b) - F(a) + 2\sum{}^{'}(F(a_{i-1}) - F(a_i)) \\ &\geq F(b) - F(a) + 2\theta\sum{}^{'}(a_i - a_{i-1}). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Kako za i iz $\sum'$ vrijedi da je ukupna duljina segmenata $[a_{i-1}, a_i]$ jednaka d, iz (2.12) proizlazi

$$||F||_\Delta \geq |F(b) - F(a)| + 2\theta d.$$

■

Definicija 2.11 *Neka je dana funkcija $F : [a, b] \to \mathbb{R}$. Gornja desna derivacija i donja desna derivacija funkcije F u točki $x \in [a, b)$ je definirana kao:*

$$D^F(x) = \limsup_{h\downarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h},$$

$$D_F(x) = \liminf_{h\downarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Slično definiramo gornju lijevu derivaciju i donju lijevu derivaciju funkcije F u točki $x \in (a, b]$ kao:

$${}^F D(x) = \limsup_{h\downarrow 0} \frac{F(x) - F(x-h)}{h},$$

$${}_F D(x) = \liminf_{h\downarrow 0} \frac{F(x) - F(x-h)}{h}.$$

Naravno, derivacija funkcije može biti beskonačna. Funkcija F je diferencijabilna u točki $x \in (a, b)$ ako su sve četiri derivacije konačne i jednake, dok je diferencijabilna u točki a ili b ako su odgovarajuće dvije derivacije konačne i jednake.

Ako je $u \leq x \leq v$, onda se lako vidi da je

$$\left| \frac{F(v) - F(u)}{v - u} - F'(x) \right| \leq \frac{v - x}{v - u} \left| \frac{F(v) - F(x)}{v - x} - F'(x) \right| + \frac{x - u}{v - u} \left| \frac{F(x) - F(u)}{x - u} - F'(x) \right|.$$

Stoga,

$$\frac{F(v) - F(u)}{v - u} \to F'(x) \tag{2.13}$$

kada $u \uparrow x$ i $v \downarrow x$. To jest, za svaki ϵ postoji δ takav da $u \leq x \leq v$ i $0 < v - u < \delta$ zajedno impliciraju da se veličine s obje strane "$\to$" razlikuju za manje od ϵ.

Pretpostavimo da je F izmjeriva funkcija i da je neprekidna osim u, moguće, prebrojivo mnogo točaka. To će biti točno ukoliko je F neopadajuća ili je razlika dviju neopadajućih funkcija. Neka je M prebrojiv, gust skup koji sadrži sve točke u kojima je funkcija F prekidna, te neka je $r_n(x)$ najmanji broj oblika $\frac{k}{n}$ koji prelazi x. Tada je

$$D^F(x) = \lim_{n \to \infty} \sup_{x < y < r_n(x), y \in M} \frac{F(y) - F(x)}{y - x}.$$

Funkcija unutar limesa je izmjeriva budući je skup svih x-eva na kojima funkcija prelazi α jednak

$$\bigcup_{y\in M}\Big[x : x < y < r_n(x), F(y) - F(x) > \alpha(y-x)\Big].$$

Stoga je $D^F(x)$ izmjeriva, te se slično pokaže da su i ostale tri derivacije izmjerive funkcije. Beskonačne vrijednosti se ne isključuju. Skup u kojem ove četiri derivacije imaju istu konačnu vrijednost F' je stoga Borelov skup. U sljedećem teoremu postavimo, recimo, $F' = 0$ izvan toga skupa. F' je tada Borelova funkcija.

Teorem 2.12 *Neopadajuća funkcija F je diferencijabilna skoro svuda, derivacija F' je nenegativna te vrijedi*

$$\int_a^b F'(t)dt \leq F(b) - F(a) \tag{2.14}$$

za sve a i b.

Ovaj i sljedeći teoremi se također mogu preformulirati za funkcije na intervalu.

Dokaz. Ako se može pokazati da je

$$D^F(x) \leq {}_FD(x) \tag{2.15}$$

osim na skupu Lebesgueove mjere 0, onda će istim rezultatom primjenjenim na $G(x) = -F(-x)$ slijediti da je ${}^FD(x) = D^G(-x) \leq {}_GD(-x) = D_F(x)$ skoro svuda. Ovo će dalje implicirati da je $D_F(x) \leq D^F(x) \leq {}_FD(x) \leq {}^FD(x) \leq D_F(x)$ skoro svuda, budući su prva i treća nejednakost očite. Odnosno, skoro svuda je $D_F(x) = D^F(x) = {}_FD(x) = {}^FD(x)$. Stoga, izvan skupa Lebesgueove mjere 0, F će imati derivaciju, moguće beskonačnu. Budući je

F neopadajuća, F' mora biti nenegativna. Kada se dokaže i (2.14), slijedit će da je F' konačna skoro svuda.

Ako (2.15) ne vrijedi za neki x, onda za neki par racionalnih brojeva α i β, koji zadovoljava $\alpha < \beta$, će vrijediti da x leži u skupu $A_{\alpha\beta} = [x : {}_F D(x) < \alpha < \beta < D^F(x)]$. Budući da postoji samo prebrojivo mnogo ovakvih skupova, (2.15) će vrijediti izvan skupa Lebesgueove mjere 0 ako je $\lambda(A_{\alpha\beta}) = 0$ za sve α i β.

Neka je $G(x) = F(x) - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)x$ i $\theta = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)$. Budući je razlika linearna, slijedi da je $A_{\alpha\beta} = B_\theta = [x : {}_G D(x) < -\theta < \theta < D^G(x)]$. Kako F i G imaju samo prebrojivo mnogo točaka u kojima su prekidne, dovoljno je dokazati da je $\lambda(C_\theta) = 0$, gdje je C_θ skup točaka iz B_θ u kojima je funkcija G neprekidna. Razmotrimo interval (a, b) i pretpostavimo na trenutak da je $G(a) \leq G(b)$. Za svaki x iz C_θ koji zadovoljava $a < x < b$, iz ${}_G D(x) < -\theta$ slijedi da postoji otvoreni interval (a_x, b_x) za koji je $x \in (a_x, b_x) \subset (a, b)$ i

$$\frac{G(b_x) - G(a_x)}{b_x - a_x} < -\theta. \tag{2.16}$$

Po jednoj od prethodno dokazanih lema postoji konačan skup disjunktnih intervala (a_{x_i}, b_{x_i}) ukupne duljine $\sum(b_{x_i} - a_{x_i}) \geq \lambda((a, b) \cap C_\theta)/6$. Neka Δ bude particija (2.7) segmenta $[a, b]$ sa točkama a_{x_i} i b_{x_i} u ulozi točaka $a_0, \ldots, a_k$.

Također smo dokazali da je

$$||G||_\Delta \geq |G(b) - G(a)| + \frac{1}{3}\theta\lambda((a, b) \cap C_\theta). \tag{2.17}$$

Ako umjesto $G(a) \leq G(b)$ vrijedi obrnuta nejednakost, odaberite a_x i b_x tako da razlomak iz (2.16) bude veći od θ, što je moguće budući je $D^G(x) > \theta$ za $x \in C_\theta$. Ponovno (2.17) slijedi.

Za svaki segment $[a, b]$ postoji particija (2.7) koja zadovoljava (2.17). Primjenimo ovo na svaki segment $[a_{i-1}, a_i]$ u particiji. Na ovaj način smo dobili particiju Δ_1 koja profinjuje particiju Δ, te zbrajanjem odgovarajućih nejednakosti (2.17) dovodi do

$$||G||_{\Delta_1} \geq ||G||_{\Delta} + \frac{1}{3}\theta\lambda((a, b) \cap C_\theta).$$

Nastavljajući dalje, dolazimo do niza uzastopno finijih particija Δ_n takvih da je

$$||G||_{\Delta_n} \geq n\frac{\theta}{3}\lambda((a, b) \cap C_\theta). \tag{2.18}$$

Sada je $||G||_{\Delta}$ omeđeno sa $|F(b) - F(a)| + \frac{1}{2}|\alpha + \beta|(b - a)$ jer je F monotona. Zbog toga je (2.18) nemoguće osim ako je $\lambda((a, b) \cap C_\theta) = 0$. Budući da (a, b) može biti bilo koji interval, to je $\lambda(C_\theta) = 0$. Ovo dokazuje (2.15) i uspostavlja diferencijabilnost funkcije F skoro svuda.

Ostaje dokazati (2.14). Neka je

$$f_n(x) = \frac{F(x + n^{-1}) - F(x)}{n^{-1}}. \tag{2.19}$$

Kao što vidimo, f_n je nenegativna, te $f_n(x) \to F'(x)$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Prema Fatouovoj lemi i činjenici da je F neopadajuća, slijedi

$$\begin{aligned} \int_a^b F'(x)dx &\leq \liminf_n \int_a^b f_n(x)dx \\ &= \liminf_n [n \int_b^{b+n^{-1}} F(x)dx - n \int_a^{a+n^{-1}} F(x)dx] \\ &\leq \liminf_n [F(b + n^{-1}) - F(a)] = F(b+) - F(a). \end{aligned} \tag{2.20}$$

Zamjenivši u (2.20) b sa $b-\epsilon$ i pustivši $\epsilon \to 0$ dobijemo (2.14). ■

Teorem 2.13 *Ako je funkcija f nenegativna i integrabilna, te ako je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, onda je $F'(x) = f(x)$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0.*

Iz nenegativnosti funkcije f proizlazi da je F neopadajuća, pa možemo iskoristiti tvrdnju prethodnog teorema. Dakle, funkcija F je diferencijabilna skoro svuda. Kao jedini problem nam onda ostaje pokazati da se derivacija F' podudara s f skoro svuda.

Dokaz. Dokaz ćemo prvo provesti za omeđenu funkciju f. Pretpostavimo da je funkcija f omeđena sa M. Tada je $\int_x^{x+n^{-1}} f(t)dt \leq \int_x^{x+n^{-1}} Mdt$, tj. $n\int_x^{x+n^{-1}} f(t)dt \leq n\int_x^{x+n^{-1}} Mdt = M$. Neka je f_n definirana kao kod (2.19). Dakle, $f_n(x) = n\int_x^{x+n^{-1}} f(t)dt$ je ograničena sa M i konvergira skoro svuda prema $F'(x)$, pa Teorem o dominiranoj konvergenciji daje

$$\begin{aligned}\int_a^b F'(x)dx &= \lim_n \int_a^b f_n(x)dx \\ &= \lim_n \left[n\int_b^{b+n^{-1}} F(x)dx - n\int_a^{a+n^{-1}} F(x)dx \right]. \qquad (2.21)\end{aligned}$$

Kako je F neprekidna, iz zadnje jednakosti u (2.21) dobili smo da je $F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(t)dt - \int_{-\infty}^{a} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt$. Stoga je $\int_A F'(x)dx = \int_A f(x)dx$ za omeđene intervale $A = (a, b]$. Prisjetimo se, π-sistem na nekom skupu X je familija podskupova od X koja je zatvorena na konačne presjeke. Skup svih intervala oblika $(a, b]$ tvori π-sistem, iz čega slijedi da je $F' = f$ skoro svuda.

Primijenimo sada prethodni rezultat za omeđene funkcije na funkcije f koje su ograničene sa n; ako je $h_n(x)$ isto što i $f(x)$ ili n takav da je

$f(x) \leq n$ ili $f(x) > n$, onda derivacija od $H_n(x) = \int_{-\infty}^{x} h_n(t)dt$ odgovara $h_n(x)$ skoro svuda po već dokazanom dijelu. Neka je sada $F(x) = H_n(x) + \int_{-\infty}^{x}(f(t) - h_n(t))dt$. Ovdje je integral neopadajući budući je funkcija ispod integrala nenegativna, pa po već dokazanom teoremu ima nenegativnu derivaciju skoro svuda. Sada je $F'(x) \geq H_n'(x) = h_n(x)$ skoro svuda. Kako je n bio proizvoljan, to je $F'(x) \geq f(x)$ skoro svuda, pa je $\int_a^b F'(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = F(b) - F(a)$. Obrnutu nejednakost (2.14) smo također dokazali. Zbog toga, $\int_a^b (F'(x) - f(x))dx = 0$, pa je kao i prije $F' = f$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0. ■

2.3 Singularne funkcije

U prethodnom teoremu smo dokazali da se vraćamo nenegativnoj i integrabilnoj funkciji $f(x)$, osim možda na skupu Lebesgueove mjere 0, ukoliko deriviramo njezin neodređeni integral $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Obrnuto pitanje je sljedeće:"Ako je $F(x)$ neopadajuća i stoga ima derivaciju $F'(x)$ skoro svuda, je li integriranjem $F'(x)$ dolazimo ponovno do $F(x)$?" Čak i da funkcija F ima snažno svojstvo neprekidnosti, pokazuje se da je odgovor ne.

Primjer 2.14 *Neka su $X_1, X_2, \ldots$ nezavisne, jednako distribuirane slučajne varijable takve da je $P[X_n = 0] = p_0$ i $P[X_n = 1] = 1 - p_0$, te neka je $X = \sum_{n=1}^{\infty} X_n 2^{-n}$. Neka je $F(x) = P[X \leq x]$ funkcija distribucije od X. Za proizvoljan niz $u_1, u_2, \ldots$ nula i jedinica, $P[X_n = u_n, n = 1, 2, \ldots] = \lim_n p_{u_1} \cdots p_{u_n} = 0$. Kako x ima najviše dva dijadska proširenja, $x = \sum_n u_n 2^{-n}$, tada je $P[X = x] = P[X_n = u_n, n = 1, 2, \ldots] = 0$. Zbog toga je F svugdje neprekidna. Naravno, $F(0) = 0$ i $F(1) = 1$. Za $0 \leq k < 2^n$, $k2^{-n}$ ima oblik $\sum_{i=1}^{n} u_i 2^{-i}$ za neku n-torku $(u_1, \ldots, u_n)$ nula i jedinica. Budući je F*

neprekidna,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\frac{k}{2^n}\right) &= P\left[\frac{k}{2^n} < X \leq \frac{k+1}{2^n}\right] \\ &= P\Big[X_i = u_i, i \leq n\Big] \\ &= p_{u_1} \cdots p_{u_n}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Ovo pokazuje da F strogo raste na jediničnom intervalu.

Ako je $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$, desna strana od (2.22) iznosi 2^{-n} te se može pokazati da je $F(x) = x$ za $0 \leq x \leq 1$. Pretpostavimo da je $p_0 \neq p_1$. Pokazat ćemo da je u ovom slučaju $F'(x) = 0$, osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Očito je derivacija jednaka 0 izvan jediničnog intervala, a kako je F neopadajuća, to po već dokazanom teoremu slijedi da je i unutar jediničnog intervala derivabilna skoro svuda. Pretpostavimo, dakle, da je $0 < x < 1$ i da F ima derivaciju $F'(x)$ u x. Pokazat ćemo da je $F'(x) = 0$.

Za svaki n odaberimo k_n tako da se x nalazi u intervalu $I_n = (k_n 2^{-n}, (k_n + 1)2^{-n})$. Kao što vidimo, I_n su dijadski intervali ranga n koji sadrže x. Sada je

$$\frac{P[X \in I_n]}{2^{-n}} = \frac{F((k_n+1)2^{-n}) - F(k_n 2^{-n})}{2^{-n}} \to F'(x),$$

prema (2.13). Ako je $F'(x)$ različit od 0, onda omjer dva uzastopna člana mora ići prema 1, tj.

$$\frac{P[X \in I_{n+1}]}{P[X \in I_n]} \to \frac{1}{2}. \tag{2.23}$$

Ako se I_n sastoji od realnih brojeva sa beskonačnim proširenjima unutar baze 2 te ako započinju sa znamenkama $u_1, \ldots, u_n$, onda je $P[X \in I_n] = p_{u_1} \cdots p_{u_n}$, prema (2.22). Ali I_{n+1} se mora za neki u_{n+1} sastojati od realnih *brojeva koji počinju sa* $u_1, \ldots, u_n, u_{n+1}$ *(*u_{n+1} *je 1 ili 0, ovisno o tome je li se* x *nalazi na desnoj strani središta od* I_n *ili ne). Stoga je* $P[X \in I_{n+1}]/P[X \in I_n] = p_{u_{n+1}}$ *ili* p_0 *ili* p_1*, te je (2.23) moguće samo ako je* $p_0 = p_1$*, što je isključeno prema pretpostavci.*

Stoga je F *neprekidna i strogo rastuća na* $[0, 1]$*, ali je* $F'(x) = 0$ *osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Za* $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ *nezavisnost daje*

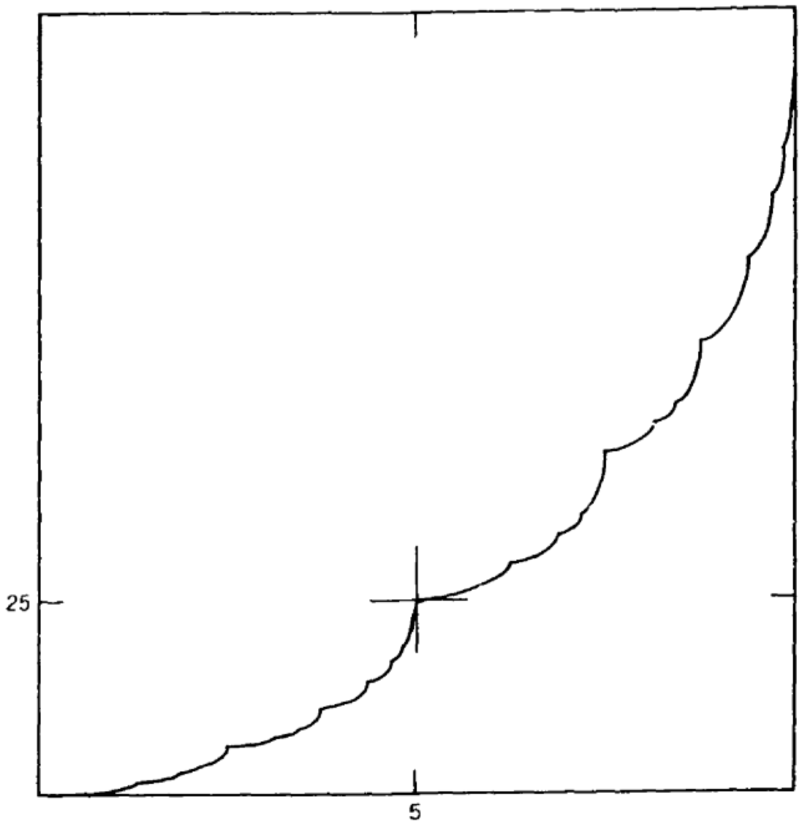
$$F(x) = P\left[X_1 = 0, \sum_{n=2}^{\infty} X_n 2^{-n+1} \leq 2x\right] = p_0 F(2x).$$

Slično,

$$F(x) - p_0 = p_1 F(2x - 1),$$

za $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$*. Dakle,*

$$F(x) = \begin{cases} p_0 F(2x) & , \text{ ako je } 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \\ p_0 + p_1 F(2x-1) \, , & \text{ ako je } \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases} \tag{2.24}$$

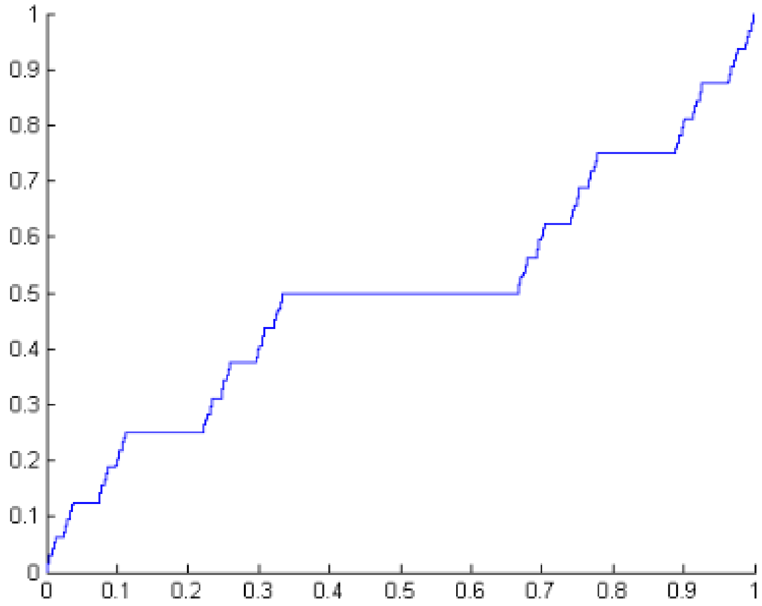


Slika 2.4: Graf od $F(x)$ za $p_0 = 0.25$ i $p_1 = 0.75$. Zbog rekurzije u (2.24), dio grafa iznad $[0, 0.5]$ i dio grafa iznad $[0.5, 1]$ su identični, osim promjena u mjerilu. Svaki segment krivulje stoga sadrži skalirane kopije cjeline.

Definicija 2.15 *Za neprekidnu, rastuću funkciju $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ kažemo da je **singularna** ako je $f(a) < f(b)$ i ako je $f'(x) = 0$, za skoro sve $x \in [a, b]$.*

Iz definicije singularnosti je odmah očito da je trivijalni primjer singularne funkcije step funkcija, tj. po dijelovima konstantna funkcija.

Primjer 2.16 *Gledajući graf tzv. Cantorove funkcije, na slici ispod, nije iznenađujuće da je ta funkcija upravo singularna. Kao što vidimo, ova funkcija je skoro svuda konstantna.*



Slika 2.5: Cantorova funkcija.

Ono što je neočekivano je pojava u jednom od prethodnih primjera. Naime, definirali smo funkciju koja je neprekidna i strogo rastuća, ali opet ima derivaciju 0 osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Dakle, singularna je. Za ovakvu funkciju F vrijedi stroga nejednakost u (2.14).

Daljna svojstva neopadajućih funkcija mogu se otkriti proučavajući mjere koje one generiraju. Funkcija F će nam nadalje predstavljati neopadajuću funkciju koja je neprekidna zdesna, te će imati svojstvo da je $0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) \leq \lim_{x\to+\infty} F(x) = m < \infty$. Takvu funkciju F ćemo nazvati **distribucijska funkcija**, iako m ne mora biti 1.

Kako bismo mogli uvesti mjeru koja će nam biti od velike važnosti u daljnjem razmatranju, definirajmo najprije pojam lokalno konačne mjere.

Definicija 2.17 *Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor, a $(X,\mathcal{A},\mu)$ prostor mjere takav da je $\mathcal{B}(X) \subseteq \mathcal{A}$. Za mjeru μ kažemo da je* ***lokalno konačna*** *ako za* *svaku točku $x \in X$ postoji otvorena okolina $U_x \in \mathcal{U}$ točke x sa svojstvima $x \in \mathcal{U}_x$ i $\mu(U_x) < \infty$.*

Budući nam je potrebna samo tvrdnja sljedećeg teorema, dokaz izostavljamo.

Teorem 2.18 *Neka je $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ rastuća i zdesna neprekidna funkcija na $\mathbb{R}$. Tada postoji jedna jedina lokalno konačna Borelova mjera μ na $\mathbb{R}$ takva da je*

$$\mu(a, b] = F(b) - F(a), \quad a \leq b. \tag{2.25}$$

Naravno, $\mu(\mathbb{R}^1) = m$ je konačno.

Što je veći F', veći je i μ:

Teorem 2.19 *Neka je veza između F i μ dana sa (2.25), te neka $F'(x)$ postoji na cijelom Borelovom skupu A.*

1. *Ako je $F'(x) \leq \alpha$ za $x \in A$, onda je $\mu(A) \leq \alpha\lambda(A)$.*

2. *Ako je $F'(x) \geq \alpha$ za $x \in A$, onda je $\mu(A) \geq \alpha\lambda(A)$.*

Dokaz. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je A omeđen. Fiksirajmo ϵ. Neka je E prebrojiv i gust skup te neka je $A_n = \bigcap(A \cap I)$, gdje se presjek proteže preko intervala $I = (u, v]$ za koji je $u, v \in E$, $0 < \lambda(I) < n^{-1}$ i

$$\mu(I) < (\alpha + \epsilon)\lambda(I). \tag{2.26}$$

Tada je A_n Borelov skup te je $A_n \to A$ zbog (2.13) pod 1. pretpostavkom. μ je mjera na Borelovim skupovima te je $\mu(\mathbb{R}^1) = m$, pa je μ konačna. Također, A_n je Borelov skup. Zbog toga slijedi (po teoremu kojeg nećemo dokazivati) da postoje disjunktni intevali I_{nk} otvoreni slijeva i zatvoreni zdesna takvi da je $A_n \subset \bigcup_k I_{nk}$ te

$$\sum_k \lambda(I_{nk}) < \lambda(A_n) + \epsilon. \tag{2.27}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da svaki interval I_{nk} ima krajnje točke u E, siječe A_n i zadovoljava $\lambda(I_{nk}) < n^{-1}$. Sada (2.26) primijenimo na svaki I_{nk}, te slijedi

$$\mu(A_n) \leq \sum_k \mu(I_{nk}) \leq (\alpha + \epsilon) \sum_k \lambda(I_{nk}) \leq (\alpha + \epsilon)(\lambda(A_n) + \epsilon).$$

Sada iz $n \to \infty$ i $\epsilon \to 0$ slijedi 1. tvrdnja.

Kako bismo dokazali 2. tvrdnju, pretpostavimo da prebrojiv, gust skup E sadrži sve točke u kojima je funkcija F prekidna. Umjesto (2.26) neka vrijedi $\mu(I) \geq (\alpha - \epsilon)\lambda(I)$ te, zahvaljujući svojstvima μ mjere, $\sum_k \mu(I_{nk}) < \mu(A_n) + \epsilon$ umjesto (2.27). Kako E sadrži sve točke u kojima je F prekidna, bez smanjenja općenitosti opet možemo pretpostaviti da svaki I_{nk} ima krajnje točke u E, siječe A_n i zadovoljava $\lambda(I_{nk}) < n^{-1}$. Onda slijedi

$$\mu(A_n) + \epsilon > \sum_k \mu(I_{nk}) \geq (\alpha - \epsilon) \sum_k \lambda(I_{nk}) \geq (\alpha - \epsilon)\lambda(A_n).$$

Opet iz $n \to \infty$ i $\epsilon \to 0$ slijedi 2. tvrdnja. ∎

Mjere μ i λ imaju **disjunktne nosače** ako postoje Borelovi skupovi S_μ i S_λ takvi da je

$$\begin{cases} \mu(\mathbb{R}^1 \setminus S_\mu) = 0, \\ \lambda(\mathbb{R}^1 \setminus S_\lambda) = 0, \\ S_\mu \cap S_\lambda = 0. \end{cases} \tag{2.28}$$

Teorem 2.20 *Neka je veza F i μ dana sa (2.25). Nužan i dovoljan uvjet da mjere μ i λ imaju disjunktne nosače je da je $F'(x) = 0$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0.*

Dokaz. Prema prethodnom teoremu, $\mu[x : |x| \leq a, F'(x) \leq \epsilon] \leq \epsilon\lambda([-a, a]) = \epsilon 2a = 2a\epsilon$, pa uzevši $\epsilon \to 0$ i $a \to \infty$ dobijemo $\mu[x : F'(x) = 0] = 0$. Pretpostavimo da je $F'(x) = 0$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Neka je tada $S_\lambda = [x : F'(x) = 0]$. Po pretpostavci tada slijedi da je $\lambda(\mathbb{R}^1 \setminus S_\lambda) = 0$. Uzevši da je $S_\mu = \mathbb{R}^1 \setminus S_\lambda$ imamo da je $\mu(\mathbb{R}^1 \setminus S_\mu) = \mu(S_\lambda) = 0$. Također, prema definiciji skupova vidimo da je $S_\mu \cap S_\lambda = 0$. Dakle, dovoljnost je dokazana.

Pretpostavimo sada da postoje S_μ i S_λ koji zadovoljavaju (2.28). Prema drugom dijelu prethodnog teorema, $\epsilon\lambda[x : F'(x) \geq \epsilon] = \epsilon\lambda[x : x \in S_\lambda, F'(x) \geq \epsilon] \leq \mu(S_\lambda) = 0$. Puštajući $\epsilon \to 0$, slijedi da je $F'(x) = 0$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Time je dokazana i nužnost. ■

Primjer 2.21 *Neka je mjera μ diskretna, takva da se sastoji od mase m_k na svakoj od prebrojivo mnogo točaka x_k. Tada je $F(x) = \sum m_k$, tj. suma koja se proteže preko onih k za koje je $x_k \leq x$. Odmah je očito da mjere μ i λ imaju disjunktne nosače ako točke x_k nemaju granične točke, ali ne i ako su guste. Stavimo li da je S_μ skup koji se sastoji od tih prebrojivo mnogo točaka x_k, dobit ćemo $\mu(\mathbb{R}^1 \setminus S_\mu) = 0$. Za taj skup također vrijedi $\lambda(S_\mu) = 0$, pa je $\lambda(\mathbb{R}^1 \setminus (\mathbb{R}^1 \setminus S_\mu)) = 0$. Dakle, uzmimo da je $S_\lambda = \mathbb{R}^1 \setminus S_\mu$. Očito su S_μ i S_λ disjunktni, pa iz svega toga slijedi da μ i λ imaju disjunktne nosače. Prema prethodnom teoremu onda slijedi da je $F'(x) = 0$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0.*

Primjer 2.22 *Promotrimo opet distribucijsku funkciju F zadanu sa (2.24) iz jednog od prethodnih primjera. Vrijedi da je $\mu(A) = P[X \in A]$. Budući je F singularna, μ i λ imaju disjunktne nosače. Ova činjenica ima zanimljiv izravan vjerojatnosni dokaz.*

Za x u jediničnom intervalu, neka $d_1(x), d_2(x), \ldots$ budu znamenke njegovog beskonačnog dijadskog razvoja. Ako je $(k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$ dijadski interval ranga n koji se sastoji od realnih brojeva čiji razvoj počinje sa znamenkama $u_1, \ldots, u_n$, onda slijedi, prema (2.22),

$$\mu\left(\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right] = \mu[x : d_i(x) = u_i, i \leq n] = p_{u_1} \cdots p_{u_n}. \tag{2.29}$$

Ako se jedinični interval shvati kao vjerojatnosni prostor sa mjerom μ, onda $d_i(x)$ postaju slučajne varijable te nam (2.29) govori da su ove slučajne varijable nezavisne i jednako distribuirane. Također je $\mu[x : d_i(x) = 0] = p_0$, te $\mu[x : d_i(x) = 1] = p_1$.

Kako ove slučajne varijable imaju očekivanu vrijednost p_1, jaki zakon velikih brojeva implicira da njihovi prosjeci teže prema p_1 sa vjerojatnosti 1:

$$\mu\left[x \in (0,1] : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i(x) = p_1\right] = 1. \tag{2.30}$$

S druge strane, prema Borelovu teoremu o normalnim brojevima slijedi:

$$\lambda\left[x \in (0,1] : \lim_n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} d_i(x) = \frac{1}{2}\right] = 1. \tag{2.31}$$

(Naravno, (2.31) je upravo (2.30) za specijalni slučaj $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$. U ovom slučaju se μ i λ podudaraju na jediničnom intervalu.) No, ako je $p_1 \neq \frac{1}{2}$, onda su skupovi u (2.30) i (2.31) disjunktni, pa μ i λ imaju disjunktne nosače.

U jednom od prethodnih primjera je pokazano da je, ako uopće i postoji, $F'(x)$ $(0 \leq x \leq 1)$ jednako 0. Prema prvom dijelu teorema, kojeg smo već dokazali, slijedi da skup na kojem $F'(x)$ ne postoji ima μ-mjeru 1. Posebno, takav skup je neprebrojiv.

U slučaju singularnosti, prema prethodnom teoremu slijedi da F' nestaje na λ nosaču. Sada se pitamo za veličinu F' na nosaču μ. Ako je B skup gdje F ima konačnu derivaciju, te ako vrijedi (2.28), onda prema jednom od prethodnih teorema slijedi da je $\mu[x \in B : F'(x) \leq n] = \mu[x \in B \cap S_\mu : F'(x) \leq n] \leq n\lambda(S_\mu) = 0$. Stoga je $\mu(B) = 0$. Sljedeći teorem ide još dalje.

Teorem 2.23 *Neka je veza F i μ dana sa (2.25) te neka mjere μ i λ imaju disjunktne nosače. Tada je, osim za x koji se nalazi u skupu μ-mjere 0, ${}_F D(x) = \infty$.*

Dokaz. Neka je A_n skup za kojeg vrijedi ${}_F D(x) < n$. Problem je dokazati da je $\mu(A_n) = 0$, a prema (2.28) je dovoljno dokazati da je $\mu(A_n \cap S_\mu) = 0$. Nadalje, μ je mjera na Borelovim skupovima u $\mathbb{R}^1$ za koju je $\mu(A) < \infty$ ukoliko je A omeđen. Za takvu mjeru vrijedi da ako je $\mu(A_n \cap S_\mu) = 0$, onda je $\mu(K) = 0$ za bilo koji kompaktan podskup od $A_n \cap S_\mu$.

Fiksirajmo ϵ. Budući je $\lambda(K) = 0$, postoji otvoreni skup G takav da je $K \subset G$ i da je $\lambda(G) < \epsilon$. Ako je $x \in K$, onda je $x \in A_n$. Prema definiciji ${}_F D$ i činjenici da je F zdesna neprekidna, postoji otvoren interval I_x za koji je $x \in I_x \subset G$ te $\mu(I_x) < n\lambda(I_x)$. Zbog kompaktnosti, K ima konačan podpokrivač $I_{x_1}, \ldots, I_{x_k}$. Ako neka tri skupa od ovih imaju neprazan presjek, jedan od njih mora biti sadržan u uniji ostala dva skupa. Takvi se suvišni intervali mogu ukloniti iz podpokrivača, i stoga se može pretpostaviti da nijedna točka iz K ne leži u više od dva I_{x_i}. Ali onda slijedi

$$\begin{aligned} \mu(K) &\le \mu(\bigcup_i I_{x_i}) \le \sum_i \mu(I_{x_i}) \\ &\le n \sum_i \lambda(I_{x_i}) \le 2n\lambda(\bigcup_i I_{x_i}) \\ &\le 2n\lambda(G) \le 2n\epsilon. \end{aligned} \tag{2.32}$$

Budući je ϵ bio proizvoljan, to iz (2.32) slijedi $\mu(K) = 0$. ■

Primjer 2.24 *Ograničimo funkciju F iz Primjera 2.14 i Primjera 2.22 na $(0,1)$ te neka je funkcija g njezin inverz. Sada su F i g neprekidna, strogo rastuća preslikavanja sa $(0,1)$ na samog sebe. Ako je $A = [x \in (0,1) : F'(x) = 0]$, onda je $\lambda(A) = 1$ i $\mu(A) = 0$. To smo već prije pokazali. Neka je sada H neki podskup od $(0,1)$ koji nije Lebesgueov skup. Kako je $H \setminus A$ sadržan u skupu Lebesgueove mjere 0, to je Lebesgueov skup. Stoga $H_0 = H \cap A$ nije Lebesgueov skup, jer bi inače $H = H_0 \cup (H \setminus A)$ bio Lebesgueov skup. Ako je $B = (0,x]$, onda je $\lambda g^{-1}(B) = \lambda(0, F(x)] = F(x) = \mu(B)$, i onda slijedi da je $\lambda g^{-1}(B) = \mu(B)$ za svaki Borelov skup B. Kako je $g^{-1}H_0$ podskup od $g^{-1}A$ i vrijedi $\lambda(g^{-1}A) = \mu(A) = 0$, $g^{-1}H_0$ je Lebesgueov skup. S druge strane, kad bi $g^{-1}H_0$ bio Borelov skup, $H_0 = F^{-1}(g^{-1}H_0)$ bi također bio Borelov skup. Dakle, time smo pokazali da je $g^{-1}H_0$ primjer Lebesgueova skupa koji nije Borelov skup.*

2.4 Integrali derivacija

Vratimo se sada na problem proširenja drugog dijela Teorema 2.6, na problem karakterizacije onih distribucijskih funkcija F za koje integriranjem derivacije F' dobijemo ponovno F:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt. \tag{2.33}$$

Prvi korak je jednostavan. Ako vrijedi (2.33), onda F ima oblik

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{2.34}$$

za nenegativnu, integrabilnu funkciju f (gustoću). Naime, vrijedi $f = F'$. S druge strane, funkcija f je nenegativna i integrabilna. Po teoremu kojeg smo dokazali, ako vrijedi i (2.34), onda je $F' = f$ izvan skupa Lebesgueove mjere 0 pa vrijedi (2.33). Stoga, (2.33) vrijedi ako i samo ako F ima oblik (2.34) za neku funkciju f pa je problem naći karakterizaciju funkcija ovog oblika. Funkcija F koju smo imali u Primjeru 2.14 nije među njima.

Kao što smo vidjeli ranije kod (2.6), funkcija F oblika (2.34) sa integrabilnom funkcijom f je neprekidna. Postoji još jače svojstvo: Za svaki ϵ postoji δ takav da je

$$\int_A f(x)dx < \epsilon \quad ako \quad je \quad \lambda(A) < \delta. \tag{2.35}$$

Doista, ako je $A_n = [x : f(x) > n]$, onda $A_n \to \varnothing$. Budući je f integrabilna, prema Teoremu o dominiranoj konvergenciji slijedi da je $\int_{A_n} f(x)dx < \frac{\epsilon}{2}$ za velike n. Fiksirajmo takav n i neka je $\delta = \epsilon/2n$. Ako je $\lambda(A) < \delta$, onda je $\int_A f(x)dx \leq \int_{A\setminus A_n} f(x)dx + \int_{A_n} f(x)dx \leq n\lambda(A) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$.

Ako je F dan pomoću (2.34), onda je $F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{-\infty} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$, te uz (2.35) imamo za posljedicu sljedeće: Za svaki ϵ postoji δ takav da za svaku konačnu familiju $[a_i, b_i], i = 1, \ldots, k$, intervala koji se ne preklapaju, vrijedi

$$\sum_{i=1}^{k}\Big|F(b_i)-F(a_i)\Big|<\epsilon \quad ako \quad je \quad \sum_{i=1}^{k}(b_i-a_i)<\delta. \tag{2.36}$$

Za funkciju F s ovim svojstvom kažemo da je **apsolutno neprekidna**. Funkcija oblika (2.34) (f integrabilna) je stoga apsolutno neprekidna.

Neprekidna funkcija distribucije je uniformno neprekidna, pa stoga za svaki ϵ postoji δ takav da vrijedi implikacija (2.36) pod uvjetom da je $k=1$. Definicija apsolutne neprekidnosti zahtijeva da ovo vrijedi za bilo koji k, čime dobivamo stroga ograničenja za funkciju F. Apsolutna neprekidnost funkcije F se može okarakterizirati u smislu mjere μ:

Teorem 2.25 *Neka je veza F i μ dana sa (2.25). F je apsolutno neprekidna, u smislu (2.36), ako i samo ako je $\mu(A)=0$ za svaki A za koji je $\lambda(A)=0$.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da je F apsolutno neprekidna i da je $\lambda(A)=0$. Za dani ϵ, neka je δ takav da vrijedi (2.36). Postoji prebrojiva disjunktna unija $B=\bigcup_k I_k$ intervala takva da je $A\subset B$ i $\lambda(B)<\delta$. Prema (2.36) i vezi između F i μ slijedi da je $\mu(\bigcup_{k=1}^n I_k)<\epsilon$ za svaki n te stoga $\mu(A)\le\mu(B)\le\epsilon$. Zbog proizvoljnosti od ϵ, slijedi tvrdnja.

Neka je sada $\mu(A)=0$ za svaki A za koji je $\lambda(A)=0$. Tvrdimo da je F apsolutno neprekidna. Ako F nije apsolutno neprekidna, onda postoji ϵ takav da za svaki δ neka konačna disjunktna unija intervala A zadovoljava $\lambda(A)<\delta$ i $\mu(A)\ge\epsilon$. Odaberimo A_n takav da je $\lambda(A_n)<n^{-2}$ i $\mu(A_n)\ge\epsilon$. Kako očito $\sum_n\lambda(A_n)$ konvergira, to po prvoj lemi Borel-Cantelli slijedi $\lambda(\limsup_n A_n)=0$ (sam dokaz ne zahtijeva da mjera bude vjerojatnosna ili konačna). S druge strane, vrijedi $\mu(\limsup_n A_n)\ge\limsup_n\mu(A_n)\ge\limsup_n\epsilon=\epsilon>0$. Dakle, dobili smo kontradikciju sa pretpostavkom da za svaki A, za koji vrijedi $\lambda(A)=0$, slijedi $\mu(A)=0$. ■

Ovaj rezultat dovodi do karakterizacije neodređenih integrala.

Teorem 2.26 *Funkcija distribucije $F(x)$ ima oblik $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ za integrabilnu funkciju f ako i samo ako je apsolutno neprekidna u smislu (2.36).*

Dokaz. Da je funkcija F oblika (2.34) apsolutno neprekidna, dokazano je u argumentu koji vodi do definicije (2.36). Za dokaz u drugom smjeru koristit ćemo prethodni teorem.

Za distribucijsku funkciju F definirajmo

$$F_{ac}(x) = \int_{-\infty}^{x} F'(t)dt \tag{2.37}$$

i

$$F_s = F(x) - F_{ac}(x). \tag{2.38}$$

Neopadajuća funkcija F je diferencijabilna skoro svuda, derivacija F' je nenegativna te vrijedi $\int_a^b F'(t)dt \leq F(b) - F(a)$, za sve a i b, prema već dokazanom teoremu. Prema tome slijedi da su (2.37) i (2.38) nenegativne i neopadajuće. Također, F_s je zdesna neprekidna. Zbog samog oblika F_{ac}, slijedi da je ona apsolutno neprekidna. Kako je F' nenegativna i integrabilna te vrijedi (2.37), to je $F'_{ac}(x) = F'(x)$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Stoga je $F'_s = 0$, osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Dakle, F ima dekompoziciju

$$F(x) = F_{ac}(x) + F_s(x), \tag{2.39}$$

gdje je F_{ac} apsolutno neprekidna i F_s singularna. Ovu dekompoziciju nazivamo **Lebesgueova dekompozicija**.

Pretpostavimo da je F apsolutno neprekidna. Tada F_s treba, kao razlika dviju apsolutno neprekidnih funkcija, biti apsolutno neprekidna. Ako se može pokazati da je F_s jednako 0, slijedit će da $F = F_{ac}$ ima traženi oblik. Stoga je dovoljno pokazati da je distribucijska funkcija, koja je ujedno i apsolutno neprekidna i singularna, jednaka 0. Ako je distribucijska funkcija singularna, onda postoje disjunktni nosači S_μ i S_λ. Ali, ako je F_s također apsolutno neprekidna, onda iz $\lambda(S_\mu) = 0$ slijedi $\mu(S_\mu) = 0$. Ali onda je $\mu(\mathbb{R}^1) = 0$, i stoga $F_s(x) \equiv 0$. ■

Ovaj teorem identificira funkcije distribucije, koje su integrali svojih derivacija, kao apsolutno neprekidne funkcije.

Poglavlje 3

Radon - Nikodymov teorem

Ovo poglavlje se temelji na konceptu diferencijacije mjere ν s obzirom na drugu mjeru μ, na istoj $\sigma-$ algebri. Postavljajući sami problem koji pokušavamo riješiti, vrlo brzo se uočava povezanost prethodnog dijela diplomskog rada s ovim. Naime, riješavajući naizgled potpuno drugi problem, uspjeli smo nas uvesti u srž trenutnog problema. Znamo da, ako je funkcija f nenegativna funkcija na prostoru mjere $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$, onda pomoću $\nu(A) = \int_A f d\mu$ možemo definirati drugu mjeru na $\mathbb{F}$. Da je ν mjera, slijedi iz činjenice da je f nenegativna funkcija te da je μ mjera. Kao što vidimo, ν ima gustoću f u odnosu na mjeru μ. Ono što možemo uočiti iz same definicije je da za svaki skup A u σ-algebri $\mathbb{F}$, $\mu(A) = 0$ implicira $\nu(A) = 0$. Cilj je pokazati obrnuto, tj. ako zadnji uvjet vrijedi te ako su ν i μ σ-konačne mjere na $\mathbb{F}$, onda ν ima gustoću u odnosu na μ. Pomoću Teorema 2.25 i Teorema 2.26 smo ovu tvrdnju dokazali za slučaj $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1), \lambda)$, gdje smo imali mjere μ i λ. Dakle, prethodno poglavlje je na neki način služilo kao uvod u ono što slijedi. Ono što prvo zapažamo je da je korisno generalizirati pojam mjere kako bi se omogućilo da mjera poprima negativne ili čak složene vrijednosti.

3.1 Mjera s predznakom

Nadalje, $(\Omega, \mathbb{F})$ će biti izmjeriv prostor. Za sve skupove ćemo smatrati da su elementi σ-algebre $\mathbb{F}$.

Mjera s predznakom na $(\Omega, \mathbb{F})$ je funkcija $\varphi : \mathbb{F} \to [-\infty, \infty]$ takva da je

1. $\varphi(\emptyset) = 0$;

2. φ poprima najviše jednu od vrijednosti $\pm\infty$;

3. Ako je $\{A_n\}$ niz disjunktnih skupova iz $\mathbb{F}$, onda je $\varphi\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi(A_n)$, gdje suma na desnoj strani apsolutno konvergerira ukoliko je $\varphi\big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\big)$ konačno.

Stoga je svaka mjera upravo mjera s predznakom. Mjera s predznakom se razlikuje od mjere po tome što vrijednosti $\varphi(A)$ mogu biti negativne. Ponekad ćemo, kako bi naglasili razliku, mjeru nazivati pozitivnom mjerom.

Primjer 3.1 *Neka su μ_1 i μ_2 mjere na σ-algebri $\mathbb{F}$ te neka je barem jedna od tih mjera konačna. Tada je $\varphi(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$ mjera s predznakom. Naime, vrijedi $\varphi\big(\bigcup_n A_n\big) = \mu_1\big(\bigcup_n A_n\big) - \mu_2\big(\bigcup_n A_n\big) = \sum_n \mu_1(A_n) - \sum_n \mu_2(A_n) = \sum_n(\mu_1(A_n) - \mu_2(A_n)) = \sum_n \varphi(A_n)$ ako je $A_1, A_2, \ldots$ konačan ili beskonačan niz disjunktnih skupova. Iz konačnosti mjere μ_1 ili mjere μ_2 slijedi da φ poprima najviše jednu od vrijednosti $\pm\infty$. Također, $\varphi(\emptyset) = \mu_1(\emptyset) - \mu_2(\emptyset) = 0 - 0 = 0$.*

Primjer 3.2 *Neka je μ mjera na σ-algebri $\mathbb{F}$ i neka je $f : \Omega \to [-\infty, \infty]$ izmjeriva funkcija takva da je $\int f^+ d\mu < \infty$ ili $\int f^- d\mu < \infty$ (u tom slučaju funkciju f možemo zvati proširenom μ-integrabilnom funkcijom). Tada je funkcija $\varphi(A) = \int_A f d\mu$ mjera s predznakom. Kako je $\varphi(A) = \int_A f d\mu =$*

$\int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$, te je po pretpostavci $\int f^+ d\mu < \infty$ ili $\int f^- d\mu < \infty$, to φ poprima najviše jednu od vrijednosti $\pm\infty$. Očito, $\varphi(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = \int 1_\emptyset f d\mu = 0$. Također, $\varphi\big(\bigcup_n A_n\big) = \int_{\bigcup_n A_n} f d\mu = \int_{A_1} f d\mu + \int_{A_2} f d\mu + \cdots = \sum_n \int_{A_n} f d\mu = \sum_n \varphi(A_n)$ ako je $A_1, A_2, \ldots$ konačan ili beskonačan niz disjunktnih skupova.

Ispostavit će se da su ovo zapravo i jedini primjeri. Odnosno, opća mjera s predznakom ima točno jedan od ova dva prikazana oblika iz prethodnih primjera.

Dokaz glavnog teorema ovog rada zahtijeva određene činjenice o mjerama s predznakom, iako tvrdnja teorema uključuje samo mjere.

Lema 3.3 *Ako $E_u \uparrow E$ ili $E_u \downarrow E$, onda $\varphi(E_u) \to \varphi(E)$.*

Dokaz. Ako $E_u \uparrow E$, onda $\varphi(E) = \varphi(E_1 \cup \cup_{n=1}^{\infty}(E_{u+1} \setminus E_u)) = \varphi(E_1) + \sum_{u=1}^{\infty} \varphi(E_{u+1} \setminus E_u)) = \lim_\nu \big[\varphi(E_1) + \sum_{u=1}^{\nu-1} \varphi(E_{u+1} \setminus E_u))\big] = \lim_\nu \varphi(E_\nu)$ prema definiciji mjere s predznakom. Ako $E_u \downarrow E$, onda $E_u^c \uparrow E^c$ i stoga $\varphi(E_u) = \varphi(\Omega) \setminus \varphi(E_u^c) \to \varphi(\Omega) \setminus \varphi(E^c) = \varphi(E)$. ■

Neka je φ mjera s predznakom na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathbb{F})$. Za skup $E \in \mathbb{F}$ kažemo da je **pozitivan** za φ ako je $\varphi(F) \geq 0$, za sve $F \in \mathbb{F}$ takve da je $F \subset E$. Skup $E \in \mathbb{F}$ je **negativan** za φ ako je $\varphi(F) \leq 0$, za sve $F \in \mathbb{F}$, $F \subset E$. Također, skup $E \in \mathbb{F}$ je **nulti** za φ ako je $\varphi(F) = 0$, za sve $F \in \mathbb{F}$, $F \subset E$.

Stoga, za funkciju $\varphi(E) = \int_E f d\mu$ navedenu u gornjem primjeru, E je pozitivan, negativan ili nulti kada je $f \geq 0$, odnosno $f \leq 0$ ili $f = 0$ (s.s.) na E.

Lema 3.4 *Svaki izmjerivi podskup pozitivnog skupa je pozitivan. Unija bilo koje prebrojive familije pozitivnih skupova je pozitivan.*

Dokaz. Prva tvrdnja je očita iz definicije pozitivnog skupa. Ako su $P_1, P_2, \ldots$ pozitvni skupovi, neka je $Q_n = P_n \setminus \cup_{j=1}^{n-1} P_j$. Tada je $Q_n \subset P_n$, pa je Q_n pozitivan skup. Stoga, ako je $E \subset \cup_{j=1}^{\infty} P_j$, onda je $\varphi(E) = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi(E \cap Q_j) \geq 0$. Dakle, vrijedi i druga tvrdnja. ■

3.2 Hahnova dekompozicija

Teorem 3.5 *Za bilo koju mjeru s predznakom φ postoje disjunktni skupovi A^+ i A^- takvi da je $A^+ \cup A^- = \Omega$, $\varphi(E) \geq 0$ za sve E iz A^+ te $\varphi(E) \leq 0$ za sve E iz A^-. Ako su B^+ i B^- još jedan par skupova za koje to vrijedi, onda je $A^+ \triangle B^+ (= A^- \triangle B^-)$ nulti skup za φ.*

A^+ i A^- u teoremu rastavljaju Ω na pozitivan i negativan skup. Takva dekompozicija se naziva **Hahnova dekompozicija**. Obično nije jedinstvena (nulti skupovi za φ se mogu premjestiti iz skupa A^+ u skup A^- ili obrnuto), ali vodi prikazu mjere s predznakom φ kao razlike dviju pozitivnih mjera.

Ako je $\varphi(A) = \int_A f d\mu$, rezultat je jednostavan. Stavimo $A^+ = \left[f \geq 0\right]$ i $A^- = \left[f < 0\right]$.

Dokaz. Neka je $\alpha = \sup\left[\varphi(A) : A \in \mathbb{F}\right]$. Pretpostavimo da postoji skup A^+ takav da je $\varphi(A^+) = \alpha$ (što implicira da je α konačan). Neka je $A^- = \Omega \setminus A^+$. Ako je $A \subset A^+$ i $\varphi(A) < 0$, onda je $\varphi(A^+ \setminus A) > \alpha$, što je nemoguće. Stoga je A^+ pozitivan skup. Ako je $A \subset A^-$ i $\varphi(A) > 0$, onda je $\varphi(A^+ \cup A) > \alpha$, što je nemoguće. Dakle, A^- je negativan skup.

Stoga je jedino potrebno konstruirati skup A^+ za kojeg vrijedi $\varphi(A^+) = \alpha$. Neka su A_n takvi da je $\varphi(A_n) \to \alpha$, i neka je $A = \bigcup_n A_n$. Za svaki

n razmotrimo 2^n skupova B_{ni} (neki moguće prazni) koji su presjeci oblika $\bigcap_{k=1}^{n} A'_k$, gdje je svaki A'_k jednak A_k ili $A \setminus A_k$. Familija $\mathbb{B}_n = \big[B_{ni} : 1 \leq i \leq 2^n\big]$ ovih skupova tvori particiju skupa A. Očito, $\mathbb{B}_n$ profinjuje $\mathbb{B}_{n-1}$. Naime, svaki B_{nj} je sadržan u točno jednom $B_{n-1,i}$.

Neka je C_n unija onih B_{ni} u $\mathbb{B}_n$ za koje je $\varphi(B_{ni}) > 0$. Budući je A_n unija određenih B_{ni}, onda slijedi da je $\varphi(A_n) \leq \varphi(C_n)$. Budući su particije $\mathbb{B}_1, \mathbb{B}_2, \ldots$ redom sve finije, $m < n$ implicira $\big(C_m \cup \cdots \cup C_n\big) \setminus \big(C_m \cup \cdots \cup C_{n-1}\big)$ je unija (moguće prazna) određenih skupova B_{ni}. B_{ni} u ovoj uniji moraju zadovoljavati $\varphi(B_{ni}) > 0$ jer su sadržani u C_n. Stoga je $\varphi\big(C_m \cup \cdots \cup C_{n-1}\big) \leq \varphi\big(C_m \cup \cdots \cup C_n\big)$, pa se indukcijom dobije $\varphi(A_m) \leq \varphi(C_m) \leq \varphi\big(C_m \cup \cdots \cup C_n\big)$. Ako je $D_m = \bigcup_{n=m}^{\infty} C_n$, onda je $\varphi(A_m) \leq \varphi(D_m)$. Neka je $A^+ = \bigcap_{m=1}^{\infty} D_m$. Tada $D_m \downarrow A^+$. Prema Lemi 3.3, $\alpha = \lim_m \varphi(A_m) \leq \lim_m \varphi(D_m) = \varphi(A^+)$. Dakle, A^+ ima maksimalnu φ-vrijednost.

Konačno, neka su B^+ i B^- još jedan par skupova za koje vrijedi tvrdnja teorema. Tada je $A^+ \setminus B^+ \subset A^+$ te $A^+ \setminus B^+ \subset B^-$, pa je $A^+ \setminus B^+$ ujedno i pozitivan i negativan skup. Dakle, to je nulti skup. Analogno se dobije za $B^+ \setminus A^+$. ■

3.3 Apsolutna neprekidnost i singularnost

Mjere μ i ν na $(\Omega, \mathbb{F})$ su po definiciji **međusobno singularne** ako imaju disjunktne nosače, tj. ako postoje skupovi S_μ, $S_\nu \in \mathbb{F}$ takvi da je

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus S_\mu) = 0, \\ \nu(\Omega \setminus S_\nu) = 0, \\ S_\mu \cap S_\nu = \emptyset. \end{cases} \tag{3.1}$$

U ovom slučaju također se kaže da je μ singularan u odnosu na ν i da je ν singularan u odnosu na μ. Ono što je odmah primjetno je da je S_ν nulti skup za μ, te je S_μ nulti skup za ν. Neformalno govoreći, međusobna singularnost znači da μ i ν "žive na disjunktnim skupovima". Također, lako se vidi da su dvije mjere singularne ako je jedna od njih jednaka 0. Međusobnu singularnost dviju mjera simbolično prikazujemo znakom okomitosti:

$$\mu \perp \nu.$$

Teorem 3.6 (Jordanova dekompozicija) *Neka je φ mjera s predznakom. Postoje jedinstvene pozitivne mjere φ^+ i φ^- takve da je $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, te je $\varphi^+ \perp \varphi^-$.*

Dokaz. Neka je $\Omega = A^+ \cup A^-$ Hahnova dekompozicija za φ, te neka je $\varphi^+(E) = \varphi(E \cap A^+)$ i $\varphi^-(E) = -\varphi(E \cap A^-)$. Tada je očito $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, te je $\varphi^+ \perp \varphi^-$. Ako je također $\varphi = \mu^+ - \mu^-$ i $\mu^+ \perp \mu^-$, onda neka su $E, F \in \mathbb{F}$ takvi da je $E \cap F = \emptyset, E \cup F = \Omega$ te $\mu^+(F) = \mu^-(E) = 0$. Tada je $\Omega = E \cup F$ druga Hahnova dekompozicija za φ, pa je $A^+ \triangle E$ nulti skup za φ. Stoga, za svaki $A \in \mathbb{F}$, $\mu^+(A) = \mu^+(A \cap E) = \varphi(A \cap E) = \varphi(A \cap A^+) = \varphi^+(A)$. Analogno, $\varphi^- = \mu^-$. ■

Mjere φ^+ i φ^- se nazivaju **gornja** i **donja varijacija** od φ. Prikaz $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$ se naziva **Jordanovom dekompozicijom** od φ. Nadalje, mjera $|\varphi|$ sa vrijednošću $\varphi^+(A) + \varphi^-(A)$ u A se naziva **totalnom varijacijom**.

Prije smo dokazali da ako je veza između F i μ dana sa (2.25), onda je nužan i dovoljan uvjet da μ i λ imaju disjunktne nosače taj da je $F'(x) = 0$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Dakle, konačna mjera na $\mathbb{R}^1$ sa distribucijskom funkcijom F je singularna u odnosu na Lebesgueovu mjeru, u smislu (3.1), ako i samo ako je $F'(x) = 0$ osim na skupu Lebesgueove mjere

0. U prethodnom poglavlju smo (2.28) uzeli za definiciju singularnosti, ali zahtjev o disjunktnim nosačima je taj koji se može generalizirati sa $\mathbb{R}^1$ na proizvoljni Ω.

Kažemo da je mjera ν **apsolutno neprekidna** u odnosu na μ i pišemo

$$\nu \ll \mu$$

ako za svaki A iz $\mathbb{F}$, $\mu(A) = 0$ implicira $\nu(A) = 0$.

U ovom slučaju također kažemo da μ dominira nad ν. Ako je $\nu \ll \mu$ i $\mu \ll \nu$, mjere su **ekvivalentne** i to označavamo sa $\nu \equiv \mu$.

Neka je veza između F i μ dana sa (2.25). Dokazali smo da je tada F apsolutno neprekidna, u smislu (2.36), ako i samo ako je $\mu(A) = 0$ za svaki A za koji je $\lambda(A) = 0$. Dakle, konačna mjera na pravcu je apsolutno neprekidna u odnosu na Lebesgueovu mjeru ako i samo ako odgovarajuća distribucijska funkcija F zadovoljava uvjet (2.36).

Također, postoji definicija apsolutne neprekidnosti koja je iskazana preko ϵ i δ.

Neka su ν i μ mjera na izmjerivom prostoru $(\Omega, \mathbb{F})$. Pokazat ćemo da ako je ν konačna, ν je apsolutno neprekidna u odnosu na μ ako i samo ako za svaki ϵ postoji δ takav da je

$$\nu(A) < \epsilon \quad ako \quad je \quad \mu(A) < \delta. \tag{3.2}$$

Ako ovaj uvjet vrijedi, $\mu(A) = 0$ implicira $\nu(A) < \epsilon$ za svaki ϵ i stoga je $\nu \ll \mu$. Pretpostavimo, s druge strane, da ovaj uvjet ne vrijedi i da je ν konačna mjera. Tada za neki ϵ postoje skupovi A_n takvi da je $\mu(A_n) < n^{-2}$ i $\nu(A_n) \geq \epsilon$. Ako je $A = \limsup_n A_n$, tada po prvoj Borel-Cantelli lemi (koja se primjenjuje na proizvoljne mjere) slijedi da je $\mu\big(\limsup_n A_n\big) =$

$\mu(A) = 0$ budući $\sum \mu(A_n)$ konvergira. Ali, vrijedi $\nu(A) = \nu\big(\limsup_n A_n\big) \geq \limsup_n \nu(A_n) \geq \limsup_n \epsilon = \epsilon > 0$ (gdje nejednakosti vrijede budući je ν konačna mjera). Stoga $\nu \ll \mu$ ne vrijedi i time je tvrdnja dokazana. Ovaj uvjet nije pogodan za definiciju, budući se koristi ako je ν konačan.

3.4 Glavni teorem

Stigli smo do glavnog teorema ovog poglavlja, ali i diplomskog rada. Ako je $\nu(A) = \int_A f d\mu$, onda je sigurno $\nu \ll \mu$. O suprotnom smjeru govori **Radon-Nikodymov teorem**:

Teorem 3.7 *Ako su μ i ν σ-konačne mjere takve da je $\nu \ll \mu$, onda postoji nenegativna funkcija f koju zovemo gustoća, takva da je $\nu(A) = \int_A f d\mu$ za sve $A \in \mathbb{F}$. Za dvije takve gustoće f i g vrijedi $\mu[f \neq g] = 0$.*

Prije svega, navest ćemo tvrdnje teorema koji su nam bitni za dokaz glavnog teorema.

Teorem 3.8 *Ako ν ima gustoću δ u odnosu na μ, onda*

$$\int f d\nu = \int f \delta d\mu$$

vrijedi za nenegativne f. Štoviše, f (ne nužno nenegativna) je integrabilna u odnosu na ν ako i samo ako je $f\delta$ integrabilna u odnosu na μ, te u tom slučaju vrijedi prethodna jednakost i

$$\int_A f d\nu = \int_A f \delta d\mu.$$

Za nenegativnu funkciju f, zadnja jednakost uvijek vrijedi.

Teorem 3.9 *1. Ako su f i g nenegativne i $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ za sve $A \in \mathbb{F}$, te ako je μ σ-konačna, onda je $f = g$ skoro svuda.*

2. *Ako su f i g integrabilne i $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ za sve $A \in \mathbb{F}$, onda je $f = g$ skoro svuda.*

3. *Ako su f i g integrabilne i $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ za sve $A \in \mathcal{P}$, gdje je $\mathcal{P}$ π-sistem koji generira $\mathbb{F}$ i Ω je konačna ili prebrojiva unija $\mathcal{P}$-skupova, onda je $f = g$ skoro svuda.*

Prema 1. tvrdnji Teorema 3.9 slijedi da se mora dokazati samo postojanje gustoće iz tvrdnje Radon-Nikodymova teorema.

Gustoća f je integrabilna u odnosu na μ ako i samo ako je ν konačna mjera. Ali budući da je f integrabilna na skupu A u odnosu na μ ako je $\nu(A) < \infty$, te je pretpostavljeno da je ν σ-konačna mjera, to je $f < \infty$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Može se uzeti da je f svugdje konačna funkcija. Integrali u odnosu na ν se mogu računati prema formuli

$$\int_A h d\nu = \int_A h f d\mu. \tag{3.3}$$

Gustoća, čije postojanje treba dokazati, se naziva **Radon-Nikodymova derivacija** od ν u odnosu na μ i često se zapisuje kao $d\nu/d\mu$. U jednom od prethodnih teorema smo dokazali da ako je f nenegativna i integrabilna te ako je $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$, onda je $F'(x) = f(x)$ osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Stoga je termin derivacija, u nazivu Radon-Nikodymove derivacije, prikladan. Također smo dokazali da distribucijska funkcija $F(x)$ ima oblik $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ za integrabilnu funkciju f ako i samo ako je apsolutno neprekidna u smislu (2.36). Stoga za apsolutno neprekidnu distribucijsku funkciju F, na pravcu, odgovarajuća mjera μ ima u odnosu na Lebesgueovu mjeru Radon-Nikodymovu derivaciju F'. Primijetimo da se (3.3) može zapisati kao

$$\int_A h d\nu = \int_A h \frac{d\nu}{d\mu} d\mu. \tag{3.4}$$

Pretpostavimo da teorem vrijedi za konačne mjere μ i ν (što je zapravo dovoljno za većinu vjerojatnosnih primjena). U slučaju σ-konačnosti postoji prebrojiva dekompozicija od Ω u skupove A_n σ-algebre $\mathbb{F}$ za koje je $\mu(A_n)$ i $\nu(A_n)$ konačno. Ako je

$$\mu_n(A) = \mu(A \cap A_n), \quad \nu_n(A) = \nu(A \cap A_n), \tag{3.5}$$

onda $\nu \ll \mu$ implicira $\nu_n \ll \mu_n$, pa je $\nu_n(A) = \int_A f_n d\mu_n$ za neku gustoću f_n. Kako je $\mu_n(A) = \mu(A \cap A_n) = \int I_{A \cap A_n} d\mu = \int_A I_{A_n} d\mu$, μ_n ima gustoću I_{A_n} u odnosu na μ. Tada je

$$\begin{aligned} \nu(A) &= \sum_n \nu_n(A) = \sum_n \int_A f_n d\mu_n \\ &= \sum_n \int_A f_n I_{A_n} d\mu \\ &= \int_A \sum_n f_n I_{A_n} d\mu. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Stoga je, prema (3.6), $\sum_n f_n I_{A_n}$ tražena gustoća.

Dakle, dovoljno je zahtijevati da su μ i ν konačne mjere. Ovo zahtijeva preliminarni rezultat.

Lema 3.10 *Ako su μ i ν konačne mjere te nisu međusobno singularne, onda postoje skup A i pozitivan ϵ takvi da je $\mu(A) > 0$ i $\epsilon\mu(E) \leq \nu(E)$ za sve $E \subset A$.*

Dokaz. Neka je $A_n^+ \bigcup A_n^-$ Hahnova dekompozicija za mjeru s predznakom $\nu - n^{-1}\mu$. Neka je $M = \bigcup_n A_n^+$. Tada je $M^C = \bigcap_n A_n^-$. Budući je M^C sadržan u negativnom skupu A_n^- za $\nu - n^{-1}\mu$, slijedi da je $\nu(M^C) \leq n^{-1}\mu(M^C)$. Kako ovo vrijedi za svaki n, to je $\nu(M^C) = 0$. Stoga je M nosač mjere ν te iz činjenice da μ i ν nisu međusobno singularni slijedi da M^C ne može biti nosač mjere μ. Dakle, $\mu(M)$ mora biti pozitivan. Stoga, $\mu(A_n^+) > 0$ za neki n. Uzmimo $A = A_n^+$ i $\epsilon = n^{-1}$. ■

Primjer 3.11 *Pretpostavimo da je* $(\Omega, \mathbb{F}) = (\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1))$, μ *je Lebesgueova mjera* λ *te* $\nu(a,b] = F(b) - F(a)$. *Ako* ν *i* λ *nemaju disjunktne nosače, onda je* $\lambda\big[x : F'(x) > 0\big] > 0$ *jer je dovoljan uvjet za disjunktne nosače taj da je* $F'(x) = 0$ *osim na skupu Lebesgueove mjere 0. Stoga, za neki* ϵ, $A = \big[x : F'(x) > \epsilon\big]$ *zadovoljava* $\lambda(A) > 0$. *Ako je* $E = (a,b]$ *dovoljno mali interval oko* x *u* A, *onda je* $\nu(E)/\lambda(E) = (F(b) - F(a))/(b-a) \geq \epsilon$, *što je isto kao* $\epsilon\lambda(E) \leq \nu(E)$.

Stoga je prethodna lema povezana sa derivacijama i kvocijentima $\nu(E)/\mu(E)$ za "male" skupove E.

Dokaz (Radon-Nikodymov teorem). Pretpostavimo da su μ i ν konačne mjere koje zadovoljavaju $\nu \ll \mu$. Neka je $\mathbb{G}$ skup svih nenegativnih funkcija g takvih da je $\int_E g d\mu \leq \nu(E)$ za svaki skup E. Ako su g i g' elementi skupa $\mathbb{G}$, onda je $\max(g, g')$ također element skupa $\mathbb{G}$ jer je

$$\begin{aligned} \int_E \max(g,g')d\mu &= \int_{E\cap[g\geq g']} g d\mu + \int_{E\cap[g'>g]} g' d\mu \\ &\leq \nu\big(E \cap [g \geq g']\big) + \nu\big(E \cap [g' > g]\big) = \nu(E). \end{aligned} \tag{3.7}$$

Stoga je $\mathbb{G}$, prema (3.7), zatvoren na konačne maksimume. Sada pretpostavimo da su funkcije g_n elementi skupa $\mathbb{G}$ te da je $g_n \uparrow g$. Tada je $\int_E g d\mu = \lim_n \int_E g_n d\mu \leq \nu(E)$ prema Levijevu teoremu o monotonoj konvergenciji. Dakle, g je element skupa $\mathbb{G}$, pa je $\mathbb{G}$ zatvoren i na limes neopadajućih nizova.

Neka je $\alpha = \sup \int g d\mu$ za funkcije g iz skupa $\mathbb{G}$, $(\alpha \leq \nu(\Omega))$. Izaberimo g_n iz $\mathbb{G}$ tako da je $\int g_n d\mu > \alpha - n^{-1}$. Ako je $f_n = \max(g_1, \ldots, g_n)$ i $f = \lim f_n$, onda je f element skupa $\mathbb{G}$ i vrijedi $\int f d\mu = \lim_n \int f_n d\mu \geq \lim_n \int g_n d\mu = \alpha$. Iz ovoga slijedi da je f element skupa $\mathbb{G}$ za kojeg je $\int f d\mu$ maksimalan.

Definirajmo ν_{ac} kao $\nu_{ac}(E) = \int_E f d\mu$ i ν_s kao $\nu_s(E) = \nu(E) - \nu_{ac}(E)$. Sada je

$$\nu(E) = \nu_{ac}(E) + \nu_s(E) = \int_E f d\mu + \nu_s(E). \tag{3.8}$$

Kako je f element skupa $\mathbb{G}$, to je ν_s, isto kao i ν_{ac}, konačna mjera. Naravno, ν_{ac} je apsolutno neprekidna u odnosu na μ.

Pretpostavimo da ν_s i μ nisu međusobno singularne mjere. Iz prethodne leme tada slijedi da postoje skup A i pozitivan ϵ takvi da je $\mu(A) > 0$ i $\epsilon\mu(E) \leq \nu_s(E)$ za svaki $E \subset A$. Tada za svaki E vrijedi

$$\begin{aligned}\int_E (f + \epsilon I_A) d\mu &= \int_E f d\mu + \epsilon\mu(E \cap A) \leq \int_E f d\mu + \nu_s(E \cap A) \\ &= \int_{E\cap A} f d\mu + \nu_s(E \cap A) + \int_{E\setminus A} f d\mu \\ &= \nu(E \cap A) + \int_{E\setminus A} f d\mu \leq \nu(E \cap A) + \nu(E \setminus A) \\ &= \nu(E). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Drugim riječima, po (3.9) je $f + \epsilon I_A$ element skupa $\mathbb{G}$. Budući je $\int(f + \epsilon I_A) d\mu = \alpha + \epsilon\mu(A) > \alpha$, dobili smo kontradikciju sa maksimalnosti od f.

Dakle, μ i ν_s su međusobno singularne, pa postoji skup S takav da je $\nu_s(S) = \mu(S^C) = 0$. Ali budući da je $\nu \ll \mu$, to je $\nu_s(S^C) \leq \nu(S^C) = 0$. Stoga je $\nu_s(\Omega) = 0$, pa krajnji desni izraz u (3.8) otpada. ∎

Kao što vidimo, apsolutna neprekidnost nije korištena sve do zadnjeg koraka dokaza.

Dekompozicija $\nu = \nu_{ac} + \nu_s$, gdje je $\nu_{ac} \perp \nu_s$ i $\nu_{ac} \ll \mu$ se naziva **Lebesgueova dekompozicija** od ν u odnosu na μ. Ono što zapravo možemo uočiti je da ν uvijek ima dekompoziciju (3.8) na apsolutno neprekidan dio i singularan dio u odnosu na μ.

Također, možemo koristiti sljedeću oznaku da izrazimo odnos $\nu(A) = \int_A f d\mu$:

$$d\nu = f d\mu.$$

U slučaju kada je $\nu \ll \mu$, prethodni teorem zapravo kaže da je $d\nu = f d\mu$ za neku funkciju f. Ovaj rezultat je obično poznat kao **Radon-Nikodymov teorem**, te se f naziva **Radon-Nikodymova derivacija** od ν u odnosu na μ. Budući je zapisujemo kao $d\nu/d\mu$, to je:

$$d\nu = \frac{d\nu}{d\mu} d\mu.$$

Zaključak

Krenuvši jednostavnijim pristupom, brzo uočavamo odnos operacija integracije i diferencijacije. Pomoću Osnovnog teorema integralnog računa lako se dokaže da je, za neprekidnu funkciju f, neodređeni integral od f jednak primitivnoj funkciji od f, i obrnuto. Daljnim istraživanjem također dolazimo do zaključka da je za većinu namjena teorije vjerojatnosti prirodno nametnuti uvjete samo skoro svuda, što nam uvelike olakšava rad. Kako bi razmotrili slučaj kada funkcija nije neprekidna, potrebno je uvesti i nove pojmove. Neki od uvedenih pojmova su gornja i donja desna derivacija, gornja i donja lijeva derivacija, distribucijska funkcija, disjunktni nosači te apsolutna neprekidnost. Shvativši njihova značenja i svojstva, dobili smo određenu karakterizaciju, kojoj su prethodili brojni teoremi, leme i primjeri. Funkcija distribucije $F(x)$ ima oblik $\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ za integrabilnu funkciju f ako i samo ako je apsolutno neprekidna. U drugom dijelu rada cilj je dokazati da ako za svaki skup A u σ-algebri $\mathbb{F}$ $\mu(A) = 0$ implicira $\nu(A) = 0$ te ako su ν i μ σ-konačne mjere na $(\Omega, \mathbb{F}, \mu)$, onda ν ima gustoću u odnosu na μ. Taj problem je poznat i pod nazivom Radon-Nikodymov teorem. Sada vidimo da smo tu tvrdnju dokazali u prvom dijelu rada za slučaj $(\mathbb{R}^1, \mathbb{B}(\mathbb{R}^1), \lambda)$, gdje smo imali mjere μ i λ. Definirajući, između ostalog, kada je mjera ν apsolutno neprekidna u odnosu na mjeru μ, mogli smo dokazati Radon-Nikodymov teorem. Ako su μ i ν σ-konačne mjere tako da je ν apsolutno neprekidna u odnosu na

μ, onda postoji nenegativna funkcija f, gustoća, takva da je $\nu(A) = \int_A f d\mu$ za sve $A \in \mathbb{F}$. Također, za dvije gustoće f i g vrijedi $\mu[f \neq g] = 0$. Gustoća, čije smo postojanje dokazali, se naziva Radon-Nikodymova derivacija od ν u odnosu na μ.

Literatura

[1] Bernstein D. (2013) Algorithmic Definitions of Singular Functions. Davidson College.

[2] Billingsley P. (1995) Probability and Measure, Third Edition. The University of Chicago.

[3] Folland G. B. (1999) Real Analysis: Modern Techniques and Their Applications, Second Edition. A Wiley-Interscience publication.

[4] Gordon R. A. (1994) The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron, and Henstock. Graduate Studies in Mathematics.

[5] Guljaš B. (2020) Osnove matematičke analize, skripta.

[6] Jukić D. (2012) Mjera i integral. Osijek: Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku.

[7] Matijević V. (2018) Matematička analiza 1, skripta.

[8] Sarapa N. (2002) Teorija vjerojatnosti. Zagreb: Školska knjiga.

[9] University of Notre Dame (2010) The Fundamental Theorem of Calculus/ The Fundamental Theorem of Calculus. On-Line URL: https://www3.nd.edu/ apilking/Math10550/Lectures/26. Pristupljeno: 18.09.2023.