Topološki digitalni prostori

Grbeša Dragun, Ivona

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

IVONA GRBEŠA DRAGUN

TOPOLOŠKI DIGITALNI PROSTORI

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

TOPOLOŠKI DIGITALNI PROSTORI

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Ivona Grbeša Dragun

Mentor:
doc. dr. sc. Goran Erceg

Split, rujan 2023.

Zahvaljujem svom mentoru doc. dr. sc. Goranu Ercegu na izdvojenom vremenu, susretljivosti, pomoći, prenesenom znanju i podršci tijekom pisanja ovog rada, ali i u prethodnim godinama studiranja.
Također želim zahvaliti svim profesorima na Odjelu za matematiku na prenesenom znanju, volji i nesebičnoj pomoći kad god je to bilo potrebno.
Hvala svim kolegama koji su sa mnom dijelili i najbolje i najteže trenutke studiranja i učinili ga posebnim razdobljem u životu.
Veliko hvala mojoj obitelji i prijateljima na ljubavi, bezuvjetnoj podršci i razumijevanju.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

TOPOLOŠKI DIGITALNI PROSTORI

Ivona Grbeša Dragun

Sažetak:
U ovom radu predstavljeni su glavni rezultati teorije topoloških digitalnih prostora. Topološki digitalni prostori su klasa topoloških prostora u kojima se, uz odgovarajuće prilagodbe, povezanost piksela može definirati pomoću topološke povezanosti. U prvom dijelu rada definiramo digitalne prostore, topološke digitalne prostore i Aleksandrovljeve topološke prostore te iskazujemo njihova svojstva, uz poseban naglasak na Khalimskyjeve prostore. Drugi dio rada posvećen je neprekidnim funkcijama na Khalimskyjevom prostoru te se razmatra problem njihove neprekidne proširivosti. Na samom kraju uvodimo pojam graf-povezanih skupova, koji imaju ulogu u dobivanju jednog od najvažnijih rezultata, a to je digitalni analogon Tietzeovog teorema o proširenju.

Ključne riječi:
Aleksandrovljevi topološki prostori, Khalimskyjevi prostori, Khalimskyjev pravac, digitalni pravac, Khalimskyjeva ravnina, digitalna ravnina, graf-povezan skup

Podatci o radu:
79 stranica, 11 slika, 6 literaturnih navoda, napisano na hrvatskom jeziku

Mentor: *doc. dr. sc. Goran Erceg*

Članovi povjerenstva:

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

dr. sc. Dino Peran

mag. math. Domagoj Jelić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *14. rujna 2023.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

TOPOLOGICAL DIGITAL SPACES

Ivona Grbeša Dragun

Abstract:

This thesis presents the main results of the theory of topological digital spaces. Topological digital spaces are a class of topological spaces in which, with appropriate adjustments, the connectivity of pixels can be defined using topological connectedness. In the first part we define digital spaces, topological digital spaces and Alexandrov topological spaces and we state their properties, with special emphasis on Khalimsky spaces. The second part is devoted to continuous functions on the Khalimsky space and it discusses the problem of their continuous extension. Finally, we introduce the concept of graph-connected sets, which play a role in obtaining one of the most important results, the digital analog of the Tietze extension theorem.

Key words:

Alexandrov topological spaces, Khalimsky spaces, Khalimsky line, digital line, Khalimsky plane, digital plane, graph-connected set

Specifications:

79 pages, 11 pictures, 6 references, written in Croatian

Mentor: *Assistant Professor Goran Erceg*

Committee:

Postdoctoral Researcher Dino Peran

Instructor Domagoj Jelić

BASIC DOCUMENTATION CARD

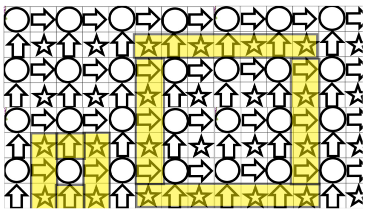
This thesis was approved by a Thesis commettee on *September 14, 2023.*

Uvod

Sljedeći paragraf je iz [5]. Za prikazivanje dvodimenzionalnih ili trodimenzionalnih objekata na računalu često koristimo aproksimacije. Većina točaka euklidske ravnine ili prostora, osim onih s cjelobrojnim koordinatama, ne može se prikazati egzaktno. Kako bismo izbjegli taj problem, razvijena je posebna geometrija za diskretne strukture. Digitalna geometrija omogućuje tretiranje diskretnih objekata jednako precizno kao u euklidskoj geometriji, uz prilagodbu pojmova poput povezanosti i neprekidnosti na diskretne skupove.
Sljedeći paragraf i teorem su iz [6]. Svaka digitalna slika, npr. slika na ekranu televizije ili računala, zapravo je model stvarnog dvodimenzionalnog ili trodimenzionalnog objekta. Takve objekte potrebno je transformirati u konačan skup koji računalo može obraditi, a da se pritom očuvaju osnovna svojstva. Npr. ako je neki podskup ravnine omeđen krivuljom koja ima svojstva Jordanove krivulje, želimo da isto vrijedi i u diskretnom modelu. Jordanov teorem o krivulji poznati je rezultat iz topologije koji, osim u različitim granama matematike, nalazi primjenu i u digitalnoj obradi slika.

Teorem 0.1 (Jordanov teorem o krivulji) *Jednostavno zatvorena krivulja u ravnini dijeli tu ravninu na dva dijela, od kojih je jedan unutrašnji i omeđen, a drugi vanjski i neomeđen i ta krivulja je rub oba navedena područja.*

Sljedeći paragraf (do teorema) je iz [6]. Digitalni Jordanov teorem o krivulji kaže da se skup može reprezentirati svojim rubom, čime se smanjuje dimenzija prikaza. Ovaj teorem se koristi za grupiranje objekata u prostornim strukturama, primjerice u spremanju digitalnih slika, gdje se može pronaći optimalan način pohrane podataka o svakom pikselu. Ako uvećavamo neku fotografiju na ekranu računala, uočavamo da je sastavljena od kvadratića, koji su najmanji elementi digitalne slike i nazivaju se pikseli. Zato prikaz digitalne slike zamišljamo kao pravokutno polje piksela. Matematički ga modeliramo kao podskup od $\mathbb{Z}^2$, a za ambijent uzimamo $\mathbb{Z}^2$ na kojem ćemo uvesti prikladnu topologiju. Taj topološki prostor nazivat ćemo digitalna ravnina.



Slika 1: Polja piksela (Slika preuzeta iz [6])

Sljedeći teorem je iz [6].

Teorem 0.2 (Digitalni Jordanov teorem o krivulji) *Neka je A digitalna jednostavno zatvorena krivulja u digitalnoj ravnini. Tada A dijeli digitalnu ravninu na dvije komponente. A je rub svake komponente ako i samo ako je A zatvoren podskup digitalne ravnine.*

Sljedeći paragraf je iz [6]. Glavna razlika Jordanovog teorema i njegove digitalne verzije je ta da je jednostavno zatvorena krivulja u $\mathbb{R}^2$ uvijek rub komponenti na koje dijeli ravninu, dok to u digitalnoj ravnini općenito ne vrijedi. Vidljivi ekran je potprostor digitalne ravnine, a predstavlja skup piksela koje vidimo u prikazu digitalne slike. Vrijedi da je svako $n \times n$ polje točaka vidljivog ekrana okruženo skupom od $8n$ točaka digitalne ravnine. Kod spremanja digitalne slike, možemo spremiti lokacije svih piksela određene boje ili samo lokacije onih točaka koje okružuju područje te boje. Pohranom samo informacija o "okružujućim" skupovima točaka, čuvamo podatke o cijeloj slici, a već za više od 8 piksela, potrebno je manje prostora za pohranu slike. Kako dimenzija slike raste, postiže se veća ušteda prostora. Korištenjem ovog postupka optimizira se način spremanja informacija o pojedinom pikselu. Ovaj princip možemo poopćiti tako da digitalnu sliku predstavimo kao familiju klasa, gdje svaka klasa sadrži točke iste boje. Svaku od tih klasa reduciramo na okružujući skup točaka koji jedinstveno predstavlja tu klasu. Ovaj postupak rezultira značajnom uštedom prostora kada se koristi u radu sa slikama koje imaju velike skupove piksela iste boje.

Sljedeći paragraf je iz [1]. Osim u digitalnoj obradi slika, digitalna topologija ima primjenu i u medicinskoj dijagnostici. Moguće je implementirati efikasan algoritam koji stvara računalni prikaz određenog tkiva, procjenjuje vrijednost nekog fizikalnog kvantiteta u svakoj točki kubne mreže te ekstrahira rubove tkiva. Takvi algoritmi prilagođeni su površinama s mnogo ploha i omogućuju točnije identificiranje tkiva na snimkama. Primjerice, na CT snimkama kosti apsorbiraju više X-zraka više od drugih tkiva pa ako vrijednost neke točke prelazi određenu granicu, smatramo da se ta točka nalazi u kosti.

Sljedeći dio, do kraja uvoda, je iz [6]. Digitalna topologija je pojam uveden 1979. te područje matematike koje nalazi primjenu u digitalnoj obradi slika i umjetnoj inteligenciji. Svi navedeni primjeri prikazuju važnost topoloških koncepata u područjima za koja se isprva ne bi reklo da imaju utjecaj.

Topološki digitalni prostori su klasa topoloških prostora koji povezuju klasičnu topologiju s digitalnom geometrijom. Radi se o prostorima gdje se, uz određene prilagodbe, povezanost piksela može definirati pomoću klasične topološke povezanosti. Osnovni koncepti topoloških digitalnih prostora, okoline, povezanost i neprekidnost, prilagođeni su diskretnom ambijentu digitalnih prostora tako da očuvaju glavne ideje klasične topologije. Ovaj rad pokriva glavne rezultate te teorije. Prvo poglavlje je uvodnog karaktera i sadrži osnovne topološke pojmove potrebne za razumijevanje glavnog dijela rada. U drugom poglavlju uvodimo pojmove digitalnog prostora, topološkog digitalnog prostora i Aleksandrovljevog topološkog prostora, uz naglasak na posebni slučaj Aleksandrovljevih prostora - Khalimskyjev pravac i ravninu. U trećem poglavlju razmatramo problem neprekidnog proširenja funkcije na Khalimskyjevom prostoru te navodimo nužne i dovoljne uvjete za proširivost takvih funkcija.

Sadržaj

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

Svi pojmovi osim Definicije 1.3, Primjera 1.4, Primjera 1.5, Teorema 1.22, Primjera 1.23, Primjera 2.4 uvedeni su prema [1] i sve tvrdnje navodimo bez dokaza. Definicija 1.46 je iz [3].

Definicija 1.1 *Topološki prostor je par $(X, \mathcal{T})$, koji se sastoji od skupa X i neke množine $\mathcal{T}$ podskupova od X tako da su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

(T1) $\emptyset, X \in \mathcal{T}$;

(T2) Ako su $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$, onda je i $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$;

(T3) Unija svake familije elemenata iz $\mathcal{T}$ je element iz $\mathcal{T}$, tj. ako je $(U_\lambda \colon \lambda \in \Lambda)$ familija elemenata $U_\lambda \in \mathcal{T}$, onda je $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{T}$.

Množinu $\mathcal{T}$ nazivamo topološkom strukturom ili topologijom na skupu X, elemente od $\mathcal{T}$ nazivamo otvorenim skupovima od X, a elemente od X nazivamo točkama.

Uočimo da je uvjet (T2) ekvivalentan uvjetu:

(T2)* Ako su $U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{T}, n \in \mathbb{N}$, onda je i $\bigcap\limits_{i=1}^{n} U_i \in \mathcal{T}$.

Primjer 1.2 *Na svakom skupu X mogu se definirati dvije trivijalne topologije $\mathcal{I}$ i $\mathcal{D}$. $\mathcal{I} = \{\emptyset, X\}$ nazivamo indiskretnom topologijom, a $\mathcal{D} = \mathcal{P}(X)$ nazivamo diskretnom topologijom. $(X, \mathcal{I})$ nazivamo indiskretan topološki prostor, a $(X, \mathcal{D})$ diskretan topološki prostor. Indiskretni prostor ima (najviše) dva otvorena skupa, dok je u diskretnom prostoru svaki podskup od X otvoren.*

Sljedeća definicija iz [1].

Definicija 1.3 *Za proizvoljni cijeli broj $N \geq 0$, proizvoljni $r \in \mathbb{R}$ i proizvoljni $c \in \mathbb{R}^N$, definiramo N-dimenzionalnu kuglu radijusa r sa središtem u c na sljedeći način:*

$$B_{r,c} = \{v \in \mathbb{R}^N \colon \|v - c\| \leq r\}.$$

Sljedeća dva primjera su iz [1].

Primjer 1.4 *Neka je dan skup $\mathbb{R}^N$, gdje je $N \geq 0$. Neka je $\mathcal{S}$ množina podskupova $O \subseteq \mathbb{R}^N$ sa svojstvom da za svaki $v \in O$ postoji pozitivan realan broj r takav da $B_{r,v} \subset O$. $(\mathbb{R}^N, \mathcal{S})$ je tada topološki prostor, a množinu $\mathcal{S}$ nazivamo standardna topologija na $\mathbb{R}^N$.*

Primjer 1.5 *Neka je $X = \{a, b, c, d, e\}$. Množina*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$$

je topologija na X.

Definicija 1.6 *Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na X. Kažemo da je $\mathcal{T}_1$ grublja od $\mathcal{T}_2$ (ili da je $\mathcal{T}_2$ finija od $\mathcal{T}_1$) i pišemo $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$, ako je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.*

Definicija 1.7 *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na X i neka je $\mathcal{B}$ neka podmnožina od $\mathcal{T}$. Kažemo da je $\mathcal{B}$ baza topologije $\mathcal{T}$ ako se svaki otvoren skup $U \in \mathcal{T}$ može prikazati kao unija neke familije elemenata iz $\mathcal{B}$.*

Svaka baza $\mathcal{B}$ topologije $\mathcal{T}$ ima sljedeća dva svojstva:

(B1) $\mathcal{B}$ je pokrivač za X, tj. $X = \bigcup\limits_{B \in \mathcal{B}} B$

(B2) Ako su $B', B'' \in \mathcal{B}$ i $x \in B' \cap B''$, onda postoji $B \in \mathcal{B}$ takav da je $x \in B \subseteq B' \cap B''$.

Vrijedi i neka vrsta obrata.

Teorem 1.8 *Neka je X proizvoljan skup i $\mathcal{B}$ množina podskupova od X sa svojstvima (B1) i (B2). Tada postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na X kojoj je $\mathcal{B}$ baza. Elementi topologije $\mathcal{T}$ su svi oni podskupovi od X koji su unije familija elemenata od $\mathcal{B}$*

Definicija 1.9 *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu X i $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ podmnožina od $\mathcal{T}$. Kažemo da je $\mathcal{P}$ podbaza topologije $\mathcal{T}$, ako je množina $\mathcal{B}$ svih konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{P}$ baza za $\mathcal{T}$.*

Ako je $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ podbaza topologije $\mathcal{T}$, onda je $\mathcal{P}$ nužno pokrivač za X. Vrijedi i neka vrsta obrata.

Teorem 1.10 *Neka je X proizvoljan skup i $\mathcal{P}$ množina podskupova od X. Ako je $\mathcal{P}$ pokrivač za X, onda postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na X kojoj je $\mathcal{P}$ podbaza.*

Definicija 1.11 *Neka je X topološki prostor i $A \subseteq X$. Unija svih otvorenih skupova $U \subseteq X$ koji su sadržani u A naziva se nutrina ili interior skupa A u prostoru X i označava s Int A.*

Definicija 1.12 *Okolinom točke $x_0 \in X$ u prostoru X nazivamo svaki skup $O \subseteq X$ takav da je $x_0 \in$ Int O.*

Definicija 1.13 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i* $Y \subseteq X$ *podskup od* X. *Topološki prostor* $(Y, \mathcal{T}_Y)$, *gdje je* $\mathcal{T}_Y = \{Y \cap U : U \in \mathcal{T}\}$, *naziva se potprostor prostora* $(X, \mathcal{T})$, *a* $\mathcal{T}_Y$ *inducirana (ili relativna) topologija na* Y.

Označimo s $p_\lambda \colon \prod\limits_{\mu \in \Lambda} X_\mu \to X_\lambda$ projekciju iz Kartezijevog produkta na λ-koordinatu X_λ za svaki $\lambda \in \Lambda$.
Tada množina $\mathcal{P} := \{p_\lambda^{-1}(U_\lambda) \colon U_\lambda \in \mathcal{T}_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ sadrži skup $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, pa je pokrivač za $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$. Stoga postoji jedinstvena topologija $\mathcal{T}$ na $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ kojoj je $\mathcal{P}$ podbaza. Bazu topologije $\mathcal{T}$ tvore svi konačni presjeci elemenata iz $\mathcal{P}$, tj. uz $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ i svi skupovi

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) = \{x = (x_\lambda) \in \prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda \colon x_{\lambda_i} \in U_{\lambda_i}, i = 1, \ldots, n\},$$

gdje je $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, konačan podskup od Λ i $U_{\lambda_i} \in \mathcal{T}_{\lambda_i} \setminus \{\emptyset, X_{\lambda_i}\}$, $i = 1, \ldots, n$. Ponekad se za skupove $\bigcap\limits_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i})$ koristi oznaka

$$\bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}) = U_{\lambda_1} \times \cdots \times U_{\lambda_n} \times \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}} X_\lambda.$$

Budući da se i prazan skup smatra konačnim, dogovorno se uzima da je $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ dobiven za poseban slučaj $\emptyset \subseteq \Lambda$.

Definicija 1.14 *Neka je* $(X_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ *proizvoljna familija topoloških prostora* X_λ. *Topologija* $\mathcal{T}$ *na* $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, *kojoj bazu tvore skupovi oblika*

$$\langle U_{\lambda_1}, \ldots, U_{\lambda_n} \rangle := \bigcap_{i=1}^{n} p_{\lambda_i}^{-1}(U_{\lambda_i}),$$

gdje je $U_{\lambda_i} \neq X_{\lambda_i}$ *neprazni otvoreni podskup od* X_{λ_i}, *za svaki* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, *naziva se produktna topologija na* $\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, *a topološki prostor* $(\prod\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda, \mathcal{T})$ *naziva se topološki produkt prostora* $X_\lambda, \lambda \in \Lambda$.

Za konačan skup $\Lambda = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$, bazu produktne topologije na skupu $\prod_{i=1}^{n} X_i$ tvore "kvadri" $\prod_{i=1}^{n} U_i$, gdje su U_i otvoreni u X_i. No ako je $\mathrm{card}\Lambda \geq \aleph_0$, to ne vrijedi. Tada produkt $\prod_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$ nepraznih otvorenih skupova $U_\lambda \subseteq X_\lambda$, $U_\lambda \neq X_\lambda$, ne može biti otvoren u produktnoj topologiji na $\prod_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$, jer ne sadrži nijedan bazni skup.

Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, Y skup i $f \colon X \to Y$ preslikavanje. Skup Y može se na prirodan način snabdjeti topologijom pomoću preslikavanja f. Naime, množina $\mathcal{T}(f) := \{U \subseteq Y \colon f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$ ima svojstva (T1), (T2) i (T3) pa je $\mathcal{T}(f)$ topologija na Y. Posebno je važan slučaj kad je preslikavanje $f \colon X \to Y$ surjekcija.

Definicija 1.15 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, Y skup i $f \colon X \to Y$ surjekcija. Topologiju $\mathcal{T}(f) := \{U \subseteq Y \colon f^{-1}(U) \in \mathcal{T}\}$ na Y nazivamo kvocijentnom (ili identifikacijskom) topologijom (od f).*

Neka je X skup i $\sim$ relacija ekvivalencije na X. Označimo sa $[x] = \{x' \colon x \sim x'\}$, $x \in X$, klasu ekvivalencije elementa x, a sa $X/\sim = \{[x] \colon x \in X\}$ kvocijentni skup. Neka je $q \colon X \to X/\sim$, $q(x) = [x]$, kvocijentno preslikavanje. q je očito surjekcija. Ako je X topološki prostor, onda se kvocijentni skup $X/\sim$ može snabdjeti kvocijentnom topologijom $\mathcal{T}(q)$. Uočimo da su skupovi $[x] \subseteq X$ postali točke u kvocijentnom prostoru $(X/\sim, \mathcal{T}(q))$. Osim toga, vrijedi i da je skup $U \subseteq X/\sim$ otvoren u kvocijentnom prostoru $X/\sim$, ako je skup $\bigcup_{[x] \in U} [x]$ otvoren u X.

Definicija 1.16 *Neka je X topološki prostor i $\sim$ relacija ekvivalencije na X. Kvocijentni skup $X/\sim$ s kvocijentnom topologijom $\mathcal{T}(q)$ nazivamo kvocijentnim prostorom od X po relaciji $\sim$.*

Definicija 1.17 *Za topološki prostor X kažemo da je T_0-prostor ako za svaki par različitih točaka $x, y \in X$ bar jedna od njih ima okolinu koja ne sadrži* *onu drugu točku.*

Definicija 1.18 *Za topološki prostor X kažemo da je T_1-prostor ako za svaki par različitih točaka $x, y \in X$ svaka od njih ima okolinu koja ne sadrži onu drugu točku.*

Definicija 1.19 *Za topološki prostor X kažemo da je Hausdorffov ili T_2-prostor ako svake dvije različite točke od X imaju okoline koje su disjunktne.*

Definicija 1.20 *Za topološki prostor X kažemo da je regularan ili T_3-prostor, ako je T_1-prostor i ako svaka točka $x \in X$ i svaki zatvoren skup $A \subseteq X$, $x \notin A$, imaju disjunktne okoline.*

Definicija 1.21 *Za topološki prostor X kažemo da je normalan ili T_4-prostor, ako je T_1-prostor i ako svaki par disjunktnih zatvorenih podskupova $A, B \subseteq X$ ima par disjunktnih okolina.*

Kako bismo bolje objasnili prirodu topoloških prostora, navodimo teorem koji omogućuje konstrukciju novih topoloških prostora iz postojećih. Sljedeći teorem je iz [1].

Teorem 1.22 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, L proizvoljan skup i za svaki $c \in L$ neka je $C_c \subset X$. Definirajmo familiju $\mathcal{K}$ podskupova od L s*

$$K \in \mathcal{K} \iff \bigcup_{c \in K} C_c \in \mathcal{T}. \tag{1.1}$$

Ako za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni $c \in L$ takav da je $x \in C_c$, onda je $(L, \mathcal{K})$ topološki prostor.

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor, L proizvoljan skup i neka za svaki $c \in L$ vrijedi $C_c \subset X$. Neka je definirana familija $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{P}(L)$ takva da

$$K \in \mathcal{K} \iff \bigcup_{c \in K} C_c \in \mathcal{T}.$$

Neka za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni $c \in L$ takav da $x \in C_c$. Tvrdimo da je tako definirana familija $\mathcal{K}$ topologija na L pa zato treba pokazati da vrijede (T1), (T2) i (T3).

(T1) Ako je $K = \emptyset$, onda je $\bigcup\limits_{c \in K} C_c = \bigcup\limits_{c \in \emptyset} C_c = \emptyset \in \mathcal{T}$. Ovime je pokazano da je $\emptyset \in \mathcal{K}$.

Kako po pretpostavci za svaki $x \in X$ postoji $c \in L$ takav da $x \in C_c$, to je $\bigcup\limits_{c \in L} C_c = X \in \mathcal{T}$ pa je zato $L \in \mathcal{K}$.

(T2) Neka je $\mathcal{I}$ konačan podskup od $\mathcal{K}$ i neka je $I = \bigcap\limits_{O \in \mathcal{I}} O$. Da bi pokazali da je $I \in \mathcal{K}$, dovoljno je pokazati da je $\bigcup\limits_{c \in I} C_c$ otvoren skup u $\mathcal{T}$, a to vrijedi zbog

$$\bigcup_{c \in I} C_c = \bigcap_{O \in \mathcal{I}} \left(\bigcup_{c \in O} C_c \right). \tag{1.2}$$

Jednakost 1.2 vrijedi jer c iterira po I, koji je konačan presjek skupova O:

$$\bigcup_{c \in I} C_c = \bigcup_{c \in \bigcap\limits_{O \in \mathcal{I}}} C_c = \bigcup_{c \in O} \left(\bigcap_{O \in \mathcal{I}} C_c \right) = \bigcap_{O \in \mathcal{I}} \left(\bigcup_{c \in O} C_c \right).$$

Desna strana jednakosti 1.2 je konačan presjek otvorenih skupova u topologiji $\mathcal{T}$. ($\bigcup\limits_{c \in O} C_c \in \mathcal{T}$ jer je $O \in \mathcal{K}$.)

(T3) Neka je $\mathcal{I} \subset \mathcal{K}$ i neka je $U = \bigcup\limits_{O \in \mathcal{I}} O$. Trebamo pokazati $U \in \mathcal{K}$, što je ekvivalentno $\bigcup\limits_{c \in U} C_c \in \mathcal{T}$. Kako je $\bigcup\limits_{c \in U} C_c = \bigcup\limits_{O \in \mathcal{I}} (\bigcup\limits_{c \in O} C_c)$ unija otvorenih skupova u topologiji $\mathcal{T}$, što je ponovno otvoren skup u topologiji $\mathcal{T}$. (Vrijedi da je $\bigcup\limits_{c \in O} C_c \in \mathcal{T}$ jer je $O \in \mathcal{K}$.)

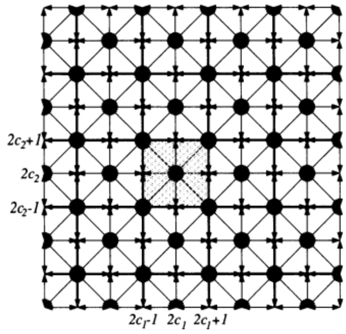
■

Pokažimo na primjeru rezultat ovog teorema. Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 1.23 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor, gdje je* $X = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\}$.

Neka je $L = \{T, B, N\}$. Neka je svakom elementu od L pridružen podskup od X: $C_T = \{a, b\}$, $C_B = \{d, c\}$, $C_N = \{e\}$. Kako je $\mathcal{K} = \{\emptyset, \{T, B\}, L\}$, po Teoremu 1.22 slijedi da je $(L, \mathcal{K})$ topološki prostor.

Teorem 1.22 omogućuje da na $\mathbb{Z}^2$ definiramo topologiju baziranu na standardnoj topologiji na $\mathbb{R}^2$.



Slika 1.1: Topologija na $\mathbb{Z}^2$ definirana pomoću standardne topologije na $\mathbb{R}^2$ (Slika preuzeta iz [1])

Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 1.24 *Svakoj točki $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2$, ovisno o njenim koordinatama, pridružimo podskup C_c od $\mathbb{R}^2$. Ako su c_1 i c_2 oba parni brojevi, onda je*

$$C_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon c_1 - 1 < x_1 < c_1 + 1 \text{ } i \text{ } c_2 - 1 < x_2 < c_2 + 1\} \tag{1.3}$$

otvoreni kvadrat. Ako je c_1 paran, a c_2 neparan, onda je

$$C_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon c_1 - 1 < x_1 < c_1 + 1 \text{ } i \text{ } x_2 = c_2\} \tag{1.4}$$

otvoreni vodoravni interval. Ako je c_1 neparan, a c_2 paran, onda je

$$C_c = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon x_1 = c_1 \text{ } i \text{ } c_2 - 1 < x_2 < c_2 + 1\} \tag{1.5}$$

otvoreni okomiti interval. Ako su c_1 i c_2 oba neparni brojevi, onda je

$$C_c = \{c\}. \tag{1.6}$$

Definirajmo familiju $\mathcal{K}$ podskupova od $\mathbb{Z}^2$ s

$$K \in \mathcal{K} \iff \left(\bigcup_{c \in K} C_c \text{ otvoren skup u standardnoj topologiji na } \mathbb{R}^2 \right) \quad (1.7)$$

Uz ovakvu konstrukciju skupova C_c, ispunjena je pretpostavka da $(\forall x \in \mathbb{R}^2)(\exists! c = (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2)$ *tako da $x \in C_c$ pa je onda po Teoremu 1.22* $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{K})$ *topološki prostor.*

Napomena 1.25 *Važno je istaknuti dio iskaza "postoji jedinstveni $c \in L$ takav da $x \in C_c$". Kad bismo izostavili uvjet da je c jedinstven, tvrdnja Teorema 1.22 više ne bi bila istinita.*

Definicija 1.26 *Neka su X, Y topološki prostori i $f\colon X \to Y$ preslikavanje. Kažemo da je preslikavanje f neprekidno u točki $x_0 \in X$ ako za svaku okolinu V točke $f(x_0)$ u Y postoji okolina U točke x_0 u X takva da je $f(U) \subseteq V$.*

Definicija 1.27 *Neka su X i Y topološki prostori. Kažemo da je preslikavanje $f\colon X \to Y$ neprekidno ako je f neprekidno u svakoj točki $x \in X$.*

Teorem 1.28 (Karakterizacija neprekidnosti) *Neka su X i Y topološki prostori i $f\colon X \to Y$ preslikavanje. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) f je neprekidno preslikavanje.

(ii) Za svaki skup $V \subseteq Y$ otvoren u Y i skup $f^{-1}(V) \subseteq X$ otvoren je u X.

(iii) Za svaki skup $F \subseteq Y$ zatvoren u Y i skup $f^{-1}(F) \subseteq X$ zatvoren je u X.

(iv) Za svaki skup $A \subseteq X$ je $f(Cl\ A) \subseteq Cl\ f(A)$.

Definicija 1.29 *Neka su X i Y topološki prostori i $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Kažemo da je f homeomorfizam ako postoji neprekidno preslikavanje $g\colon Y \to X$ tako da je $gf = id_X$ i $fg = id_Y$.*

Dakle, preslikavanje $f\colon X \to Y$ je homeomorfizam ako i samo ako je f neprekidna bijekcija s neprekidnim inverzom $f^{-1}\colon Y \to X$.

Definicija 1.30 *Kažemo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ povezan (ili topološki povezan ili $\mathcal{T}$-povezan) ako je svako neprekidno preslikavanje $f\colon X \to \{0,1\}$ u diskretni prostor $(\{0,1\}, \mathcal{D})$ nužno konstantno, tj. $f(X) \neq \{0,1\}$.*
U protivnom, tj. ako postoji neprekidna surjekcija $g\colon X \to \{0,1\}$, kažemo da je prostor X nepovezan. Za podskup $A \subseteq X$ kažemo da je (ne)povezan ako je A (ne)povezan kao potprostor od X.

Primjer 1.31 *Neka je $(X, \mathcal{D})$ diskretni prostor s barem dvije različite točke. Tada je X nepovezan. Odaberimo $x_0 \in X$ i definirajmo $f\colon X \to \{0,1\}$ pravilom*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = x_0 \\ 1, & x \neq x_0 \end{cases} \tag{1.8}$$

Preslikavanje f je neprekidna surjekcija pa je X nepovezan.

Primjer 1.32 *Indiskretni prostor $(X, \mathcal{I})$ je povezan. Budući da je X jedini neprazan otvoren skup u indiskretnoj topologiji, svako neprekidno preslikavanje $f\colon X \to \{0,1\}$ je nužno konstantno.*

Teorem 1.33 (Karakterizacija povezanosti) *Neka je X topološki prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) *X je povezan.*

(ii) *Ako je podskup $U \subseteq X$ otvoren i zatvoren, onda je $U = \emptyset$ ili $U = X$.*

(iii) *Ne postoje neprazni otvoreni skupovi $U_1, U_2 \subseteq X$ sa svojstvom $U_1 \cup U_2 = X$ i $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

(iv) Ne postoje neprazni zatvoreni skupovi $F_1, F_2 \subseteq X$ sa svojstvom $F_1 \cup F_2 = X$ i $F_1 \cap F_2 = \emptyset$.

U primjerima u nastavku povezanost ćemo najčešće provjeravati pomoću karakterizacije povezanosti. Neki $A \subseteq X$ bit će povezan ako se ne može rastaviti na dva neprazna disjunktna skupa koristeći otvorene skupove. Drugim riječima, prostor je povezan ako su jedini i otvoreni i zatvoreni skupovi prazan skup i cijeli prostor.

Propozicija 1.34 *Neka je X povezan topološki prostor i $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Tada je i potprostor $f(X) \subseteq Y$ povezan. Ako je dodatno f neprekidna surjekcija, onda je Y povezan.*

Ovaj rezultat posebno je zanimljiv kad na Y uzmemo najfiniju topologiju za koju je f neprekidna.

Definicija 1.35 *Za topološki prostor X kažemo da je potpuno nepovezan ako su njegovi jedini povezani podskupovi jednotočkovni skupovi.*

Teorem 1.36 (Tietzeov teorem) *Neka je X normalan prostor, $A \subseteq X$ zatvoren podskup od X i $f\colon A \to [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada postoji neprekidna funkcija $g\colon X \to [-1, 1]$ koja proširuje f, tj. $g|_A = f$.*

Ovaj teorem smatra se posebnim slučajem sljedećeg općenitijeg teorema. Svojstvo proširivanja neprekidne funkcije u jedinični segment sa zatvorenog podskupa na cijeli prostor u potpunosti karakterizira normalne prostore.

Teorem 1.37 (Tietzeova karakterizacija normalnosti) *Neka je X T_1-prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne:*

(i) X je normalan.

(ii) Za svaki $A \subseteq X$ zatvoren podskup od X i za svaku neprekidnu funkciju $f\colon A \to [0,1] \subseteq \mathbb{R}$ postoji neprekidna funkcija $g\colon X \to [0,1]$ koja proširuje f, tj. $g|_A = f$.

Definicija 1.38 *Put u prostoru X je svako neprekidno preslikavanje $\varphi\colon [0,1] \to X$. Točka $x_0 = \varphi(0)$ naziva se početak puta φ, a točka $x_1 = \varphi(1)$ naziva se krajem puta φ. Još se kaže da put φ povezuje točku x_0 s točkom x_1.*

Definicija 1.39 *Kažemo da je topološki prostor X putovima povezan ako za svaki par točaka $x_0, x_1 \in X$ postoji put φ u X koji povezuje x_0 s x_1.*

Teorem 1.40 *Svaki putovima povezan prostor je povezan.*

Obrat ne vrijedi općenito.

Definicija 1.41 *Kažemo da je familija $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ podskupova A_λ skupa X pokrivač skupa X ako je $X = \bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$. Za pokrivač $\mathcal{A}$ kažemo da je konačan (prebrojiv) ako je Λ konačan (prebrojiv). Ako je $\Lambda' \subseteq \Lambda$ i $X = \bigcup_{\lambda\in\Lambda'} A_\lambda$, onda kažemo da je $\mathcal{A}' = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda')$ potpokrivač od $\mathcal{A}$.*

Definicija 1.42 *Kažemo da je pokrivač $\mathcal{C} = (C_\mu, \mu \in M)$ skupa X profinjenje (usitnjenje) pokrivača $\mathcal{A} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ i pišemo $\mathcal{C} \leq \mathcal{A}$ ako za svaki $\mu \in M$ postoji $\lambda \in \Lambda$ tako da je $C_\mu \subseteq A_\lambda$. Još se kaže da je $\mathcal{C}$ upisan u pokrivač $\mathcal{A}$.*

Definicija 1.43 *Neka je X topološki prostor. Za pokrivač $\mathcal{U} = (U_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ skupa X kažemo da je otvoreni pokrivač prostora X ako je svaki od skupova U_λ, $\lambda \in \Lambda$, otvoren u X.*

Definicija 1.44 *Za topološki prostor X kažemo da je kompaktan (ili sažet) ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X postoji konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{V}$. Za podskup $Y \subseteq X$ kažemo da je kompaktan ako je Y kompaktan kao potprostor od X.*

Teorem 1.45 *Prostor X je kompaktan ako i samo ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ od X postoji konačan potpokrivač.*

Sljedeća definicija je iz [3].

Definicija 1.46 *Na skupu $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ metrika $d_\infty \colon \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ zadana je pravilom:*

$$d_\infty(x, y) = \max\{|x_i - y_i| \colon i = 1, \ldots, N\}$$

za proizvoljne $x, y \in \mathbb{R}^N$.

Poglavlje 2

Topološki digitalni prostori

2.1 Digitalni prostori

Sljedeće tri definicije su iz [1].

Definicija 2.1 *Neka su $u, v \in \mathbb{R}^N$. Skalarni produkt vektora u i v je $u \cdot v = \sum\limits_{n=1}^{N} u_n v_n$, a norma vektora v je $||v|| = \sqrt{v \cdot v}$.*

Definicija 2.2 *Neka je $G \subseteq \mathbb{R}^N$ proizvoljan podskup - nazivat ćemo ga mreža u $\mathbb{R}^N$. Voronoijevo susjedstvo u G proizvoljnog elementa $g \in G$ definiramo kao*

$$N_G(g) = \{x \in \mathbb{R}^N \colon (\forall h \in G)||x - g|| \leq ||x - h||\}.$$

Voronoijevo susjedstvo od g sastoji se od svih točaka koje nisu bliže nijednoj drugoj točki iz G nego što su točki g. $\delta\mathbb{Z}^2$ naziva se kvadratna mreža, a Voronoijeva susjedstva u $\mathbb{R}^2$ nazivaju se pikseli (pixels, skraćeno od picture elements) i interpretiramo ih kao zatvorene jedinične kvadrate sa središtima u točkama iz kvadratne mreže. Piksel pridružen elementu $(c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2$ je

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \colon \max\{|x_1 - c_1|, |x_2 - c_2|\} \leq \frac{1}{2}\}.$$

$\delta\mathbb{Z}^3$ naziva se kubna mreža, a Voronoijeva susjedstva pridružena toj mreži u $\mathbb{R}^3$ nazivaju se vokseli (voxels, skraćeno od volume elements). Voksel pridružen elementu $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{Z}^3$ je zatvorena jedinična kocka

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \colon \max\{|x_1 - c_1|, |x_2 - c_2|, |x_3 - c_3|\} \leq \frac{1}{2}\}.$$

Uvest ćemo nekoliko novih koncepata koje ćemo uglavnom ilustrirati na $\mathbb{Z}^2$, ali iste te ideje imaju primjenu i u višim dimenzijama.
Sljedeća definicija i pojmovi nakon su iz [1].

Definicija 2.3 *Neka je X proizvoljan skup i ρ binarna relacija na X. Ako je $(c, d) \in \rho$, kažemo da je c ρ-susjedan prema d i da je d ρ-susjedan od c, a ako je ρ simetrična relacija, kažemo da su c i d ρ-susjedni.*

Uglavnom ćemo koristiti izraz "susjedstvo" za označavanje simetrične binarne relacije. Na skupu $\mathbb{Z}^N$ često ćemo koristiti dvije binarne relacije, α_N i ω_N, definirane na sljedeći način.
Neka su $c = (c_1, c_2, \ldots, c_N), d = (d_1, d_2, \ldots, d_N) \in \mathbb{Z}^N$ proizvoljne.

$$(c, d) \in \alpha_N \iff (c \neq d \text{ i, za } 1 \leq n \leq N, \mid c_n - d_n \mid \leq 1). \tag{2.1}$$

$$(c, d) \in \omega_N \iff \sum_{n=1}^{N} \mid c_n - d_n \mid = 1. \tag{2.2}$$

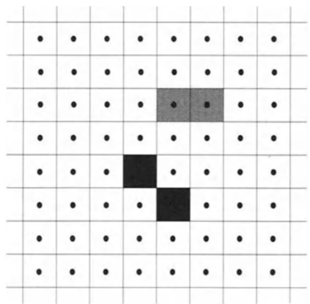
Sljedeća tvrdnja je iz [1].

Tvrdnja 1 *Za svaki $N \geq 0$ vrijedi $\omega_N \subset \alpha_N$.*

Dokaz. Neka su $c, d \in \mathbb{Z}^N$ proizvoljni i $(c, d) \in \omega_N$. To znači da je $\sum\limits_{n=1}^{N} \mid c_n - d_n \mid = 1$, odnosno $\mid c_1 - d_1 \mid + \ldots + \mid c_N - d_N \mid = 1$. Kako su svi pribrojnici nenegativni, očito svaki od njih može biti najviše 1, odnosno $\mid c_n - d_n \mid \leq 1, \forall n = 1, \ldots, N$. Uz to, zbog $\sum\limits_{n=1}^{N} \mid c_n - d_n \mid = 1$, c i d se razlikuju barem na jednoj koordinati, tj. $c \neq d$. Iz toga slijedi $(c, d) \in \alpha_N$. ■

$(c, d) \in \alpha_2$ znači da odgovarajući pikseli imaju neprazan presjek, ali nisu identični. $(c, d) \in \omega_2$ znači da odgovarajući pikseli imaju točno jedan zajednički brid. Iz očitih razloga, ω_2 često se naziva i bridna susjednost ili 4-susjednost, a α_2 naziva se bridna-ili-vršna susjednost ili 8-susjednost.
Sljedeći primjer iz [1].

Primjer 2.4 *Na sljedećoj slici, točke kvadratne mreže koje pripadaju tamnijim pikselima su α_2-susjedne, ali nisu ω_2-susjedne. Točke kvadratne mreže koje pripadaju svjetlijim pikselima su i α_2-susjedne i ω_2-susjedne.*



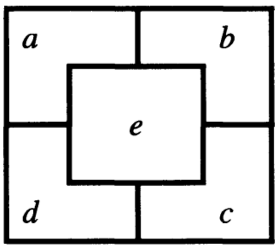
Slika 2.1: Ilustracija α_2-susjednih točaka i ω_2-susjednih točaka u $\mathbb{Z}^2$ iz Primjera 2.4 (Slika preuzeta iz [1])

Sljedeća definicija je iz [5].

Definicija 2.5 *Digitalni prostor je uređeni par (V, π), gdje je V neprazan skup, a π binarna simetrična relacija na V takva da za bilo koja dva elementa x i y iz V postoji konačan niz $\langle x^0, \cdots, x^n \rangle$ elemenata iz V takvih da $x = x^0$, $y = x^n$ i $(x^j, x^{j+1}) \in \pi$ za $j = 0, 1, \ldots, n-1$.*

Sljedeći paragraf je iz [5]. Relacija π često se naziva relacija susjedstva, a $(x, y) \in \pi$ znači da su x i y povezani. Zadnji uvjet iz definicije je da prostor bude povezan pod danom relacijom, odnosno da je V π-povezan. Ova definicija je vrlo općenita; dopušteno je da V bude proizvoljan skup bez ikakvog geometrijskog ograničenja. Dopušteno je i da skup V bude beskonačan i da svaki element bude susjedan sam sebi pa tako (V, V^2) može biti trivijalni primjer digitalnog prostora. Ipak, uglavnom digitalne prostore zamišljamo malo restriktivnije. Kao osnovni primjer možemo uzeti euklidski prostor $\mathbb{R}^N$ i proizvoljnu fiksnu mrežu u tom prostoru, npr. $\mathbb{Z}^N$. V je tada skup Voronoijevih susjedstava svih točaka te mreže, a dva elementa skupa V su u relaciji π ako je njihov presjek $(N-1)$-dimenzionalan. U $\mathbb{R}^2$, dva piksela su u relaciji π ako im je presjek jednodimenzionalan, tj. ako dijele zajednički brid. U $\mathbb{R}^3$, dva voksela su u relaciji π ako im je presjek dvodimenzionalan, tj. ako dijele zajedničku plohu. Iako geometrijska interpretacija nema utjecaja na provođenje dokaza, ipak utječe na terminologiju koju ćemo koristiti. U digitalnom prostoru (V, π), elemente od V nazivat ćemo spelovi (spel kao skraćenica za spatial element). Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 2.6 *Neka je $V = \{a, b, c, d, e\}$ i neka je π relacija susjedstva takva da sadrži uređene parove spelova koji odgovaraju područjima na sljedećoj slici koja dijele zajednički brid. π je očito relacija susjedstva pa je (V, π) digitalni prostor.*



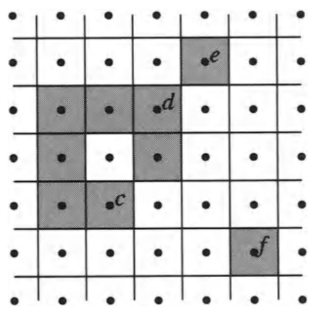
Slika 2.2: Primjer digitalnog prostora (Slika preuzeta iz [1])

Sljedeća definicija je iz [1].

Definicija 2.7 *Neka je (V, π) digitalni prostor. Za neprazan podskup A od V kažemo da je π-povezan podskup ako za proizvoljne $c, d \in A$ vrijedi da je c π-povezan unutar A s d.*

Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 2.8 *Neka je $V = \mathbb{Z}^2$ i neka je A skup svih obojenih piksela na sljedećoj slici. d je ω_2-povezan i α_2-povezan unutar A s c. Također, e je α_2-povezan, ali nije ω_2-povezan unutar A s c ili d. S druge strane, f nije ni ω_2-povezan niti α_2-povezan unutar A s c niti d niti e. Cijeli skup A nije ni ω_2-povezan ni α_2-povezan. Ako iz A uklonimo f, preostali skup je tada α_2-povezan, ali nije ω_2-povezan. Ako još uklonimo i e, preostali skup je tada i ω_2-povezan i α_2-povezan. Označimo B skup svih obojenih piksela bez e i f. Kako je taj skup α_2-povezan i ω_2-povezan, možemo reći da je (B, α_2) digitalni prostor, odnosno da je (B, ω_2) digitalni prostor.*



Slika 2.3: Digitalni prostor iz Primjera 2.8 (Slika preuzeta iz [1])

Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 2.9 *Svaka točka u $\mathbb{Z}^2$ je i ω_2-povezana i α_2-povezana sa svakom drugom točkom u $\mathbb{Z}^2$.*

Sljedeća definicija i dva primjera su iz [1].

Definicija 2.10 *Neka je* (V, π) *digitalni prostor. Simetrična binarna relacija* ρ *na* V *je spel-susjedstvo u digitalnom prostoru ako je* $\pi \subset \rho$.

Ako je (V, π) digitalni prostor i ρ spel-susjedstvo u tom prostoru, onda je i (V, ρ) digitalni prostor.

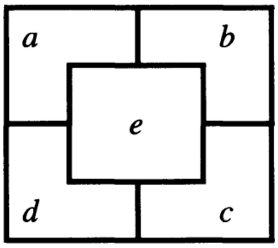
Primjer 2.11 *Trivijalno,* π *i* V^2 *su spel-susjedstva u digitalnom prostoru* (V, π) *(jer je* $\pi \subset \pi$ *i* $\pi \subset V^2$*).*

Primjer 2.12 *Kako su i* $(\mathbb{Z}^2, \omega_2)$ *i* $(\mathbb{Z}^2, \alpha_2)$ *digitalni prostori, a pokazano je* $\omega_2 \subset \alpha_2$*, to znači da je* α_2 *spel-susjedstvo u digitalnom prostoru* $(\mathbb{Z}^2, \omega_2)$.

Pojam topološke povezanosti možemo dovesti u vezu s uvedenim konceptom povezanosti u digitalnim prostorima. Sljedeća definicija i primjer su iz [1].

Definicija 2.13 *Za digitalni prostor* (V, π) *kažemo da je topološki digitalni prostor ako postoji topologija* $\mathcal{T}$ *na* V*, takva da za bilo koji neprazan skup* A *spelova vrijedi:* A *je* π*-povezan ako i samo ako je* A $\mathcal{T}$*-povezan.*

Primjer 2.14 *Neka je dan digitalni prostor iz Primjera 2.6, prikazan na sljedećoj slici. Neka je* $\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, V\}$ *topologija na* V*. Digitalni prostor* (V, π) *je topološki uz ovako definiranu topologiju* $\mathcal{T}$*. Uočimo da jedini neprazni podskupovi od* V *koji nisu* π*-povezani su* $\{a, c\}$ *i* $\{b, d\}$*. Skup* $\{a, c\}$ *može se rastaviti na* $\{a, c\} = \{a\} \cup \{c\}$*, što je disjunktna unija nepraznih otvorenih skupova pa* $\{a, c\}$ *nije* $\mathcal{T}$*-povezan. Skup* $\{b, d\}$ *može se rastaviti na* $\{b, d\} \subset \{a, b, c\} \cup \{a, c, d\}$ *pa zato nije* $\mathcal{T}$*-povezan. Svi ostali neprazni podskupovi od* V *su* $\mathcal{T}$*-povezani i* π*-povezani. Npr.* $\{b, c\}$ *je* $\mathcal{T}$*-povezan jer svi otvoreni skupovi koji sadrže* b *(a to su* $\{a, b, c\}$*,* $\{a, b, c, d\}$ *i* V*) također sadrže i* c*. Da je* (V, π) *topološki digitalni prostor može se pokazati i nekim općenitijim rezultatima iz sljedećeg poglavlja.*



Slika 2.4: Topološki digitalni prostor iz Primjera 2.14 (Slika preuzeta iz [1])

2.2 Aleksandrovljevi topološki prostori

Sljedeća definicija je iz [1].

Definicija 2.15 *Neka je X proizvoljan skup, $\mathcal{T}$ proizvoljna familija podskupova od X (ne mora nužno biti topologija na X). Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Najmanja okolina od x (s obzirom na $\mathcal{T}$) je:*

$$S_{\mathcal{T}}(x) = \bigcap_{x \in O \in \mathcal{T}} O, \tag{2.3}$$

odnosno presjek svih skupova iz $\mathcal{T}$ koji sadrže x.

Očito je $x \in S_{\mathcal{T}}(x)$, jer svaki O koji presijecamo mora sadržavati točku x. Pomoću ovog pojma definirat ćemo inducirano susjedstvo na X.
Sljedeća definicija je iz [1].

Definicija 2.16 *Inducirano susjedstvo $\rho_{\mathcal{T}}$ na X definiramo s:*

$$(x, y) \in \rho_{\mathcal{T}} \iff x \neq y \text{ i (ili } x \in S_{\mathcal{T}}(y) \text{ ili } y \in S_{\mathcal{T}}(x)). \tag{2.4}$$

$\rho_{\mathcal{T}}$ očito je relacija susjedstva (simetrična binarna relacija) na X.
Sljedeća definicija je iz [1].

Definicija 2.17 *Topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ nazivamo Aleksandrovljev topološki prostor ako je za svaki $x \in X$, $S_{\mathcal{T}}(x)$ otvoren skup.*

Sljedeći paragraf je iz [5]. Aleksandrovljevi topološki prostori imaju svojstvo da je proizvoljan presjek otvorenih skupova otvoren skup, što ne vrijedi općenito za topološke prostore. Ekvivalentno tome, u Aleksandrovljevim topološkim prostorima vrijedi da je proizvoljna unija zatvorenih skupova zatvoren skup. Kako ova definicija implicira da je presjek svih okolina točke x ponovno okolina točke x, slijedi da svaka točka ima najmanju okolinu. Vrijedi i obrat, egzistencija najmanje okoline svake točke povlači to da je proizvoljni presjek otvorenih skupova otvoren skup. Aleksandrovljev topološki prostor još se naziva i prostor najmanje okoline.
Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 2.18 *Neka je dan topološki prostor* $(\mathbb{R}^N, \mathcal{S})$*, gdje je* $\mathcal{S}$ *standardna topologija na* $\mathbb{R}^N$*. Za proizvoljnu točku* $x \in \mathbb{R}^N$*,* $S_{\mathcal{S}}(x) = \{x\}$*, što nije otvoren skup pa* $(\mathbb{R}^N, \mathcal{S})$ *nije Aleksandrovljev topološki prostor. Također, vidimo da je inducirano susjedstvo prazna relacija. Naime, za svake dvije različite točke* $x, y \in \mathbb{R}^N$*, njihove najmanje okoline* $S_{\mathcal{S}}(x) = \{x\}$ *i* $S_{\mathcal{S}}(y) = \{y\}$ *su disjunktne pa onda sigurno* $x \notin S_{\mathcal{S}}(y) = \{y\}$ *i* $y \notin S_{\mathcal{S}}(x) = \{x\}$ *pa zato* $(x, y) \notin \rho_{\mathcal{S}}$*.*

Dakle, za euklidske prostore sa standardnom topologijom ovi pojmovi nisu potrebni. Ipak, pokazat ćemo da postoje drugi prostori u kojima nam je uvođenje ovih pojmova korisno.
Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 2.19 *Neka je dan topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *prikazan na Slici 2.2. Najmanje okoline točaka iz* X *su:* $S_{\mathcal{T}}(a) = \{a\}$*,* $S_{\mathcal{T}}(b) = \{a, b, c\}$*,* $S_{\mathcal{T}}(c) = \{c\}$*,* $S_{\mathcal{T}}(d) = \{a, c, d\}$*,* $S_{\mathcal{T}}(e) = X$*, što su sve otvoreni skupovi pa je zato* $(X, \mathcal{T})$ *Aleksandrovljev topološki prostor. Uočimo i da inducirano susjedstvo točno odgovara susjedstvu prikazanom na slici: dva elementa skupa* X *su* $\rho_{\mathcal{T}}$*-susjedna ako i samo ako njihova pridružena područja na slici dijele zajednički* *brid. Provjerimo inducirano susjedstvo za a i b. Vrijedi* $a \neq b$, $a \in S_{\mathcal{T}}(b) = \{a, b, c\}$, $b \notin S_{\mathcal{T}}(a)$ *pa je* $(a, b) \in \rho_{\mathcal{T}}$, *što odgovara slici jer a i b dijele zajednički brid. S druge strane, za točke a i c, koje su različite, vrijedi* $a \notin S_{\mathcal{T}}(c) = \{c\}$ *i* $c \notin S_{\mathcal{T}}(a) = \{a\}$ *pa onda* $(a, c) \notin \rho_{\mathcal{T}}$, *što odgovara tome da a i c nemaju zajednički brid. Slično provjerimo za ostale parove točaka.*

Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 2.20 *Promatrajmo topološki prostor* $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{K})$ *iz Primjera 1.23. Odredimo točkama tog prostora najmanje okoline. Neka je* $c = (c_1, c_2) \in \mathbb{Z}^2$ *proizvoljna. Ako su* c_1 *i* c_2 *obje parne, onda je* $S_{\mathcal{K}}(c) = \{c\}$.
Ako je c_1 *parna, a* c_2 *neparna, onda je*

$$S_{\mathcal{K}}(c) = \{d \in \mathbb{Z}^2 \colon d_1 = c_1,\ c_2 - 1 \leq d_2 \leq c_2 + 1\}. \tag{2.5}$$

Ako je c_1 *neparna, a* c_2 *parna, onda je*

$$S_{\mathcal{K}}(c) = \{d \in \mathbb{Z}^2 \colon c_1 - 1 \leq d_1 \leq c_1 + 1,\ d_2 = c_2\}. \tag{2.6}$$

Ako su c_1 *i* c_2 *obje neparne, onda je*

$$S_{\mathcal{K}}(c) = \{d \in \mathbb{Z}^2 \colon c_1 - 1 \leq d_1 \leq c_1 + 1,\ c_2 - 1 \leq d_2 \leq c_2 + 1\}. \tag{2.7}$$

U svakom od ova četiri slučaja, $S_{\mathcal{K}}(c)$ *je otvoren skup pa je zato* $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{K})$ *Aleksandrovljev topološki prostor.*

2.2.1 Topološka svojstva

Sve tvrdnje i pojmovi iz ove podsekcije su iz [5]. Za Aleksandrovljeve topološke prostore prirodno je zahtijevati da budu T_0-prostori, odnosno da za dvije proizvoljne različite točke postoji otvoren skup koji sadrži jednu od njih, ali ne i drugu. U suprotnom bi te točke s topološkog aspekta bile jednake pa bi ih onda identificirali. S druge strane, separacijski aksiom T_1 je prejak. On zahtijeva da $S_{\mathcal{T}}(x) = \{x\}$ za svaku točku x u prostoru, a u Aleksandrovljevom topološkom prostoru ovo bi značilo da su svi singletoni otvoreni skupovi. Dakle, jedini Aleksandrovljevi topološki prostori za koje vrijedi T_1 separacijski aksiom su diskretni prostori. Uočimo još da T_1-topološki prostori nisu digitalni prostori.

Može se pokazati da postoji veza između Aleksandrovljevih topoloških prostora i parcijalno uređenih skupova. Vrijedi $x \in \mathrm{Cl}(\{y\})$ akko $y \in S_{\mathcal{T}}(x)$.

Definicija 2.21 *Neka je relacija $x \preccurlyeq y$ definirana s $x \in Cl(\{y\})$. Tu relaciju nazivat ćemo Aleksandrovljev uređaj specijalizacije.*

Vrijedi refleksivnost jer je $x \in \mathrm{Cl}(\{x\})$. Neka je $x \preccurlyeq y$ i $y \preccurlyeq z$. Po definiciji relacije to je ekvivalentno $y \in S_{\mathcal{T}}(x)$ i $z \in S_{\mathcal{T}}(y)$. Imamo $z \in S_{\mathcal{T}}(y) = S_{\mathcal{T}}(y) \cap S_{\mathcal{T}}(x)$ pa je $z \in S_{\mathcal{T}}(x)$, odnosno $x \preccurlyeq z$. Time je pokazano da vrijedi tranzitivnost. Neka je $x \preccurlyeq y$ i $y \preccurlyeq x$. To je ekvivalentno $y \in S_{\mathcal{T}}(x)$ i $x \in S_{\mathcal{T}}(y)$ redom. Međutim, taj slučaj je isključen za različite točke u T_0-prostoru, odnosno moguće je jedino ako i samo ako je $x = y$. Time je pokazano da vrijedi antisimetričnost.

Dakle, na proizvoljnom Aleksandrovljevom topološkom prostoru koji je T_0-prostor može se definirati relacija parcijalnog uređaja.

Pokažimo da vrijedi i obratno, tj. da se svaki parcijalno uređen skup $(X, \preccurlyeq)$ može opskrbiti strukturom T_0-prostora definiranjem najmanje okoline točke x na sljedeći način:

$$S_{\mathcal{T}}(x) = \{y \in X : x \preccurlyeq y\} = \{y \in X : x \in \mathrm{Cl}(\{y\})\}.$$

Tvrdimo da je familija $\{S_{\mathcal{T}}(x) : x \in X\}$ baza topologije $\mathcal{T}$. Očito je $\bigcup_{x \in X} S_{\mathcal{T}}(x) = X$. Pretpostavimo $x \in S_{\mathcal{T}}(y) \cap S_{\mathcal{T}}(z)$. Tada je $y \preccurlyeq x$ i $z \preccurlyeq x$. Stoga je $S_{\mathcal{T}}(x) = \{p \in X : x \preccurlyeq p\} \subseteq \{p \in X : y \preccurlyeq p\} = S_{\mathcal{T}}(y)$ i na isti način možemo dobiti $S_{\mathcal{T}}(x) \subseteq S_{\mathcal{T}}(z)$. Dakle, postoji $S_{\mathcal{T}}(x)$, koji je element ove familije, takav da $x \in S_{\mathcal{T}}(x) \subseteq S_{\mathcal{T}}(y) \cap S_{\mathcal{T}}(z)$. Familija najmanjih okolina svih točaka prostora tvori bazu topologije $\mathcal{T}$. Uz tako definiranu bazu topologije, X bi trebao biti T_0-prostor. Naime, kako je relacija parcijalnog uređaja po definiciji antisimetrična, ne može vrijediti i $x \in S_{\mathcal{T}}(y)$ i $y \in S_{\mathcal{T}}(x)$, nego mora biti $x = y$, tj. bar jedna od točaka mora imati okolinu koja ne sadrži onu drugu točku, a to znači da je $(X, \mathcal{T})$ T_0-prostor.

Budući da u Aleksandrovljevom topološkom prostoru za otvorene i zatvorene skupove vrijede isti aksiomi, imamo potpunu simetriju. Zbog toga u ovom kontekstu otvorene skupove možemo zvati zatvorenima i obrnuto. Tako dobivamo novi Aleksandrovljev topološki prostor koji nazivamo dual. Kako je ovo preimenovanje isto kao zamjena uloga $S_{\mathcal{T}}(x)$ i $\mathrm{Cl}(x)$, u terminima relacije uređaja to odgovara zamjeni uređaja, odnosno uređaj $x \preccurlyeq' y$ odgovara točno $y \preccurlyeq x$.

Definicija 2.22 *Pretpostavimo da je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Ako postoji baza $\mathcal{U}$ tog topološkog prostora takva da za bilo koju drugu bazu $\mathcal{V}$ vrijedi $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$, onda kažemo da je $\mathcal{U}$ najmanja baza.*

Često se u literaturi koristi i naziv jedinstvena najmanja baza.

Lako se pokaže da ako je $(X, \mathcal{T})$ Aleksandrovljev topološki prostor, onda taj prostor ima najmanju bazu i to je $\mathcal{U} = \{S_{\mathcal{T}}(x) \colon x \in X\}$. Neka je $\mathcal{V}$ druga baza za X i neka je $x \in X$. Kako je X Aleksandrovljev topološki prostor, slijedi da je $S_{\mathcal{T}}(x) = \bigcap\limits_{x \in V \in \mathcal{V}} V$ otvoren. Tada postoji $V_x \in \mathcal{V}$ takav da $x \in V_x \subset S_{\mathcal{T}}(x) = \bigcap\limits_{x \in V \in \mathcal{V}} V$. No onda po definiciji $S_{\mathcal{T}}(x) = V_x$ pa je $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

Ipak, egzistencija jedinstvene najmanje baze nije dovoljna da bi prostor bio Aleksandrovljev. Neka je dan skup $X = [0, 1\rangle$ i topologija $\mathcal{T} = \{[0, \frac{1}{n}\rangle \colon n \in \mathbb{N}\}$. Jasno je da je $\mathcal{T}$ jedinstvena najmanja baza, ali za točku 0 presjek svih otvorenih okolina je $\{0\}$, što nije otvoren skup pa ovaj topološki prostor nije

Aleksandrovljev.

Jasno je da je potprostor Aleksandrovljevog topološkog prostora ponovno Aleksandrovljev topološki prostor.

Propozicija 2.23 *Neka su X i Y Aleksandrovljevi topološki prostori s najmanjim bazama $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ redom. Tada vrijedi:*

1. *Ako je X potprostor od Y, onda je $\mathcal{U} = \{V \cap X : V \in \mathcal{V}\}$.*
2. *$X \times Y$ je Aleksandrovljev topološki prostor s najmanjom bazom $\mathcal{U} \times \mathcal{V} = \{U \times V : U \in \mathcal{U}, V \in \mathcal{V}\}$.*

2.3 Topologija u digitalnim prostorima

Sljedeća lema je iz [1].

Lema 2.24 *Za proizvoljni Aleksandrovljev topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ i proizvoljni podskup $A \subseteq X$ vrijedi: A je $\mathcal{T}$-povezan ako i samo ako je A $\rho_{\mathcal{T}}$-povezan.*

Dokaz. $\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $A \subseteq X$ proizvoljan i $\rho_{\mathcal{T}}$-povezan.Pokazat ćemo da, ako postoje otvoreni skupovi U_1 i U_2 takvi da $U_1 \cap A \neq \emptyset$, $U_2 \cap A \neq \emptyset$ i $A \subset U_1 \cup U_2$, onda $U_1 \cap U_2 \cap A \neq \emptyset$ (što po definiciji znači da je A $\mathcal{T}$-povezan).Neka je $x \in U_1 \cap A$ i $y \in U_2 \cap A$. Zbog $\rho_{\mathcal{T}}$-povezanosti od A, postoji $\rho_{\mathcal{T}}$-put $\langle x = x^{(0)}, \cdots, x^{(K)} = y \rangle$ unutar A između x i y. Kako je po pretpostavci $A \subset U_1 \cup U_2$, postoji neki $k \in \{1, \ldots, K\}$, takav da $x^{(k-1)} \in U_1$, $x^{(k)} \in U_2$. Zbog $(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \in \rho_{\mathcal{T}}$, po definiciji te relacije ili je $x^{(k-1)} \in S_{\mathcal{T}}(x^{(k)})$ ili je $x^{(k)} \in S_{\mathcal{T}}(x^{(k-1)})$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $x^{(k)} \in S_{\mathcal{T}}(x^{(k-1)})$. Kako je U_1 otvoren skup koji sadrži točku $x^{(k-1)}$, on je jedan od skupova koje presijecamo da dobijemo $S_{\mathcal{T}}(x^{(k-1)})$ pa zato $S_{\mathcal{T}}(x^{(k-1)}) \subset U_1$, odnosno $x^{(k)} \in S_{\mathcal{T}}(x^{(k-1)}) \subset U_1$, pa je onda $x^{(k)} \in U_1 \cap U_2 \cap A$. Dakle, dobili smo $U_1 \cap U_2 \cap A \neq \emptyset$ pa je A $\mathcal{T}$-povezan.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da A nije $\rho_{\mathcal{T}}$-povezan. Pokažimo da A nije $\mathcal{T}$-povezan. Zbog pretpostavke da A nije $\rho_{\mathcal{T}}$-povezan, postoje $x, y \in A$ takve da nema $\rho_{\mathcal{T}}$-puta u A koji ih povezuje. Označimo s C skup svih elemenata od A koji su $\rho_{\mathcal{T}}$-povezani s x u A, a označimo s D skup svih ostalih elemenata od A. Nadalje, označimo $U_1 = \bigcup\limits_{c \in C} S_{\mathcal{T}}(c)$ i $U_2 = \bigcup\limits_{d \in D} S_{\mathcal{T}}(d)$. U_1 i U_2 su otvoreni (jer su unije otvorenih skupova) i $A \subset U_1 \cup U_2$. Zbog $x \in U_1 \cap A$ i $y \in U_2 \cap A$ respektivno, vrijedi $U_1 \cap A \neq \emptyset$ i $U_2 \cap A \neq \emptyset$. Preostaje dokazati $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, da postoji $z \in U_1 \cap U_2 \cap A$. Budući da je $A = C \cup D$, vrijedi ili $z \in C$ ili $z \in D$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $z \in D$. (Za $z \in C$ dokaz se provodi analogno.) Zbog $z \in U_2 = \bigcup\limits_{d \in D} S_{\mathcal{T}}(d)$, postoji $d \in D$ takav da $z \in S_{\mathcal{T}}(d)$. Nadalje, $z \neq d$ (zbog $C \cap D = \emptyset$) i $z \in S_{\mathcal{T}}(d)$, pa po (2.4) slijedi

$$(z, d) \in \rho_{\mathcal{T}}. \tag{2.8}$$

Zbog $z \in U_1$, mora postojati $c \in C$ takav da $z \in S_{\mathcal{T}}(c)$, odnosno $(c, z) \in \rho_{\mathcal{T}}$. Pritom vrijedi i da je $c \in C$ $\rho_{\mathcal{T}}$-povezana s x, odnosno $(x, c) \in \rho_{\mathcal{T}}$. Iz to dvoje slijedi da

$$\text{postoji } \rho_{\mathcal{T}}\text{-put od } x \text{ do } z. \tag{2.9}$$

Iz (2.8) i (2.9) slijedi da postoji $\rho_{\mathcal{T}}$-put od x do d. To je u kontradikciji s činjenicom $d \in D$ (odnosno da je d točka koja nije putem povezana s x). Dakle, pretpostavka $\exists z \in U_1 \cap U_2 \cap A$ dovela nas je do kontradikcije pa možemo zaključiti $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$. Iz prethodne konstrukcije imamo $C \subset U_1$, $D \subset U_2$, $A \subset U_1 \cup U_2$ i vrijedi $U_1 \cap U_2 \cap A = \emptyset$, a to znači da A nije $\mathcal{T}$-povezan. ■

Iz Primjera 2.19 vidimo da je topološki prostor $(X, \mathcal{T})$ $\rho_{\mathcal{T}}$-povezan i Aleksandrovljev, a iz Primjera 2.20 da je topološki prostor $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{K})$ $\rho_{\mathcal{K}}$-povezan i

Aleksandrovljev. Koristeći Lemu 2.24 možemo dodatno zaključiti da je X $\mathcal{T}$-povezan i da je $\mathbb{Z}^2$ $\mathcal{K}$-povezan.
Sljedeći teorem je iz [1].

Teorem 2.25 *Za proizvoljni Aleksandrovljev topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$*, gdje je* $X \neq \emptyset$*,* $(X, \rho_{\mathcal{T}})$ *je topološki digitalni prostor ako i samo ako je* X $\mathcal{T}$*-povezan.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ proizvoljan Aleksandrovljev topološki prostor. Na njemu sigurno imamo relaciju $\rho_{\mathcal{T}}$ induciranu topologijom $\mathcal{T}$. Po definiciji, $(X, \rho_{\mathcal{T}})$ je digitalni prostor ako i samo ako je X $\rho_{\mathcal{T}}$-povezan. Po Lemi 2.24 ovo se može dogoditi ako i samo ako je X $\mathcal{T}$-povezan. Po istoj toj lemi, ako je taj uvjet ispunjen, onda je $(X, \rho_{\mathcal{T}})$ nužno topološki digitalni prostor. ■

Koristeći Teorem 2.25, možemo zaključiti da su digitalni prostori $(X, \mathcal{T})$ iz Primjera 2.19 i $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{K})$ iz Primjera 2.20 ujedno i topološki prostori. Da bi dodatno iskoristili Teorem 2.25 kako bi pokazali da su određeni digitalni prostori također i topološki, sužavamo naš pristup određenom načinu specificiranja familija podskupova.
Sljedeća lema je iz [1].

Lema 2.26 *Za proizvoljni skup* X *i proizvoljnu* $x \in X$*, neka je* $B(x) \subseteq X$ *skup koji sadrži* x*. Neka su skup* X*,* $x \in X$ *i* $B(x) \subseteq X$ *proizvoljni. Neka je* $\mathcal{T}$ *definirana kao familija onih podskupova* O *od* X *za koje vrijedi sljedeće:* $(\forall x \in O)(B(x) \subset O)$*. Tada je* $(X, \mathcal{T})$ *Aleksandrovljev topološki prostor i za svaku* $x \in X$ *vrijedi* $B(x) \subset S_{\mathcal{T}}(x)$*.*

Dokaz. Neka je $\mathcal{T}$ familija podskupova od X definirana kao u iskazu. Pokažimo prvo da je $(X, \mathcal{T})$ Aleksandrovljev topološki prostor. Za $\emptyset$ trivijalno vrijedi da $(\forall x \in \emptyset)B(x) \subset \emptyset$ pa je zato $\emptyset \in \mathcal{T}$. Za X vrijedi $(\forall x \in X)B(x) \subset X$ pa je zato $X \in \mathcal{T}$.

Neka je dana unija otvorenih skupova i x proizvoljni element te unije. Tada po definiciji unije, x je element barem jednog otvorenog skupa iz te unije, označimo ga O. Dakle, vrijedi $x \in O$ pa je onda $B(x) \subset O$. Kako je O podskup unije otvorenih skupova kojoj x pripada, to pokazuje da je ta unija otvoren skup.

Neka je x element presjeka (ne nužno konačne) podfamilije od $\mathcal{T}$. Tada je $B(x) \subset O$ za svaki otvoreni skup O u podfamiliji, što povlači da je $B(x)$ podskup presjeka ovih otvorenih skupova. Ovime je pokazano da je taj presjek otvoren skup pa slijedi da je $(X, \mathcal{T})$ Aleksandrovljev topološki prostor. Također, iz definicije najmanje okoline (2.3), slijedi i da je $B(x)$ podskup otvorenog skupa $S_{\mathcal{T}}(x)$, čime je dokazana druga tvrdnja iz iskaza. ■

Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 2.27 *Kao ilustrativni primjer, uzmimo $X = \{a, b, c, d, e\}$ i neka je $B(a) = \{a\}$, $B(b) = \{a, b, c\}$, $B(c) = \{c\}$, $B(d) = \{a, c, d\}$, $B(e) = \{b, d, e\}$. Lako je uočiti da metodom za definiranje otvorenih skupova iz prethodne leme dobivamo*

$$\mathcal{T} = \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}, \{a, c, d\}, \{a, b, c, d\}, X\},$$

što je upravo topologija pridružena Slici 2.2, čime smo ponovno pokazali da je $(X, \mathcal{T})$ Aleksandrovljev topološki prostor. Uočimo da $B(e)$ nije otvoren skup budući da bilo koji otvoreni skup koji sadrži b mora sadržavati i cijeli $B(b)$. Točnije, $S_{\mathcal{T}}(e) = X$, što pokazuje da se inkluzija $B(c) \subset S_{\mathcal{T}}(c)$ na kraju iskaza prethodne leme ne može zamijeniti jednakošću.

Da bi iskoristili Teorem 2.25 kako bi pokazali da su neki zanimljiviji digitalni prostori ujedno topološki, uvodimo novi koncept. Sljedeća definicija je iz [1].

Definicija 2.28 *Za proizvoljni skup X, preslikavanje $B \colon X \to \mathcal{P}(X)$ je bazno preslikavanje na X, ako $(\forall x \in X) x \in B(x)$ i $B(x) = \bigcup_{y \in B(x)} B(y)$.*

Sljedeća dva teorema su iz [1].

Teorem 2.29 *Digitalni prostor* (V, π) *je topološki ako postoji bazno preslikavanje* B *na* V *takvo da* $(\forall c, d \in V)$ *vrijedi*

$$(c, d) \in \pi \iff c \neq d \text{ i ili } c \in B(d) \text{ ili } d \in B(c). \tag{2.10}$$

Dokaz. Neka je (V, π) digitalni prostor i $B\colon V \to \mathcal{P}(V)$ bazno preslikavanje. Koristeći B, definirajmo $\mathcal{T}$ kao u iskazu Leme 2.26. Po toj Lemi, $(V, \mathcal{T})$ je Aleksandrovljev topološki prostor i $(\forall c \in V)(B(c) \subset S_{\mathcal{T}}(c))$. Kako je B bazno preslikavanje, to znači $B(c) = \bigcup\limits_{d \in B(c)} B(d)$, odnosno za svaki $d \in B(c)$ vrijedi $B(d) \subset B(c)$, što po definiciji ove topologije povlači da je $B(c)$ otvoren pa je $B(c) = S_{\mathcal{T}}(c)$. Ako usporedimo (2.4) s (2.10), dobivamo da je $\rho_{\mathcal{T}} = \pi$. Po definiciji digitalnog prostora, V je π-povezan, a po Lemi 2.24 to je ekvivalentno tome da je V $\mathcal{T}$-povezan. Po Teoremu 2.25, to je ekvivalentno tome da je (V, π) topološki digitalni prostor. ■

Teorem 2.30 *Za svaki nenegativni cijeli broj* N *digitalni prostor* $(\mathbb{Z}^N, \omega_N)$ *je topološki.*

Dokaz. Neka je $N \geq 0$ proizvoljan. Za svaki $x \in \mathbb{Z}^N$ definirajmo skup

$$B(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{ako je } \sum\limits_{n=1}^{N} x_n \text{ paran} \\ \{x\} \cup \{y | (x, y) \in \omega_N\}, & \text{inače.} \end{cases} \tag{2.11}$$

Da bi dva spela (elementa $\mathbb{Z}^N$) bili ω_N-susjedni, jednome od njih suma komponenti mora biti parna, a drugome neparna pa je stoga B bazno preslikavanje na $\mathbb{Z}^N$ i vrijedi (2.10), pri čemu ω_N zamjenjuje π. No to znači da su ispunjeni uvjeti Teorema 2.29 pa je onda $(\mathbb{Z}^N, \omega_N)$ topološki digitalni prostor. ■

Definirat ćemo Khalimskyjevo susjedstvo na $\mathbb{Z}^N$ za proizvoljni $N \geq 1$, ali prije toga uvest ćemo koncept koji će nam biti koristan i kasnije. Sljedeća definicija i primjer su iz [1].

Definicija 2.31 *Neka je X proizvoljan skup i ρ binarna relacija na X. ρ je konačna binarna relacija na X ako za svaki $x \in X$ skup $\{y \in X : (x, y) \in \rho\}$ konačan.*

Primjer 2.32 *Iz definicija je jasno da su ω_2 i α_2 konačne binarne relacije na $\mathbb{Z}^2$.*

Sljedeća definicija i primjer su iz [1].

Definicija 2.33 *Digitalni prostor (V, π) je konačan digitalni prostor ako je π konačna binarna relacija na V.*

Primjer 2.34 *$(\mathbb{Z}^2, \omega_2)$ i $(\mathbb{Z}^2, \alpha_2)$ su konačni digitalni prostori.*

Važno je napomenuti da osnovni rezultati o digitalnim prostorima ne zahtijevaju da prostor bude konačan. Pretpostavka o konačnosti digitalnog prostora uglavnom je važna kad se pokazuje konačnost nekog drugog objekta ili kad algoritam mora završiti u konačno mnogo koraka. Sljedeća definicija i tvrdnja su iz [1].

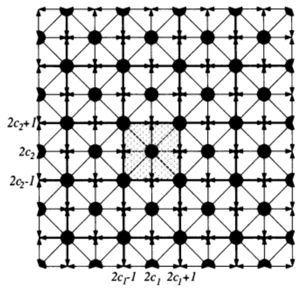
Definicija 2.35 *Za proizvoljni $N \geq 0$, binarna relacija ρ na $\mathbb{Z}^N$ je lokalna ako je $\rho \subset \alpha_N$.*

Kako je α_N konačna relacija na $\mathbb{Z}^N$, $N \geq 0$, svaka lokalna relacija na $\mathbb{Z}^N$ također je konačna.
Sljedeća definicija je iz [1].

Definicija 2.36 *Za proizvoljni $N \geq 0$, Khalimskyjevo susjedstvo κ_N je lokalna relacija susjedstva na $\mathbb{Z}^N$ karakterizirana s: $(x, y) \in \kappa_N$ ako i samo ako je ili x_n neparan za sve n takve da $|x_n - y_n| = 1$ ili x_n paran za sve n takve da $|x_n - y_n| = 1$.*

Uočimo da lokalnost ove relacije povlači $x \neq y$. Sljedeći primjer je iz [1].

Primjer 2.37 *U Primjeru 2.20 pokazali smo da je* $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{K})$ *Aleksandrovljev topološki prostor, uz topologiju definiranu s* (1.3) - (1.6)*. Dodatno, iz sljedeće slike može se vidjeti da je inducirano susjedstvo* $\rho_{\mathcal{K}}$ *točno jednako Khalimskyjevom susjedstvu na* $\mathbb{Z}^2$*. Khalimskyjeva susjedstva na slici označena su linijama sa strelicama. Osam strelica koje završavaju u istoj točki označene su krugom.*



Slika 2.5: Khalimskyjevo susjedstvo na $\mathbb{Z}^2$ (Slika preuzeta iz [1])

Osim kao u Primjeru 2.20, $\mathbb{Z}^2$ može se opskrbiti Khalimskyjevom topologijom $\mathcal{K}$ na način opisan u sljedećem poglavlju. Općenito, Khalimskyjeva topologija može se uvesti na skupu $\mathbb{Z}^N$, za proizvoljni $N \geq 0$. Sljedeća tri teorema su iz [1].

Teorem 2.38 *Za svaki* $N \geq 0$*,* κ_N *je spel-susjedstvo u digitalnom prostoru* $(\mathbb{Z}^N, \omega_N)$*.*

Dokaz. Da bi pokazali da je κ_N spel-susjedstvo, moramo provjeriti da je κ_N simetrična binarna relacija i da $\omega_N \subset \kappa_N$. Simetrija slijedi iz činjenice da je x_n neparan za sve n gdje je $|x_n - y_n| = 1$ ako i samo ako je y_n paran za sve n gdje je $|y_n - x_n| = 1$. Preostaje pokazati $\omega_N \subset \kappa_N$. Neka je $(x, y) \in \omega_N$. To znači $\sum\limits_{n=1}^{N} |x_n - y_n| = 1$, odnosno x i y razlikuju se na točno jednoj koordinati i razlika na toj koordinati je 1 pa slijedi $(x, y) \in \kappa_N$. ∎

Teorem 2.39 *Za svaki $N \geq 0$, digitalni prostor $(\mathbb{Z}^N, \kappa_N)$ je topološki.*

Dokaz. Za svaki $x \in \mathbb{Z}^N$ definiramo skup

$$B(x) = \{y\colon (y_n = x_n \text{ , ako je } x_n \text{ paran }) \text{ i } (|y_n - x_n| \leq 1 \text{ , ako je } x_n \text{ neparan })\}. \tag{2.12}$$

Pokažimo da je s B iz (2.12) definirano bazno preslikavanje na $\mathbb{Z}^N$. Očito je $x \in B(x)$ jer na onim koordinatama gdje je x_n paran, bit će $x_n = x_n$, a tamo gdje je x_n neparan, bit će $|x_n - x_n| = 0 \leq 1$. Neka su x, y, z spelovi takvi da $y \in B(x)$ i $z \in B(y)$. Moramo dokazati da je $z \in B(x)$.
Kako je $y \in B(y)$, za y mora vrijediti: $y_n = x_n$ ako je x_n paran i $|y_n - x_n| \leq 1$ ako je x_n neparan.
Kako je $z \in B(y)$, za z mora vrijediti: $z_n = y_n$ ako je y_n paran i $|z_n - y_n| \leq 1$ ako je y_n neparan.
Ako je x_n paran, onda je $y_n = x_n$ i $z_n = y_n = x_n$ pa $z \in B(x)$.
Ako je x_n neparan i $y_n = x_n$, onda je $|z_n - x_n| = |z_n - y_n| \leq 1$ pa $z \in B(x)$.
Ako je x_n neparan i $|y_n - x_n| = 1$, onda je y_n paran pa $z_n = y_n$ i $|z_n - x_n| = 1 \leq 1$ pa je onda $z \in B(x)$.
U sva tri slučaja dobijemo $z \in B(x)$.
Pokažimo da ako je ρ definiran s (2.10) i s B kao u (2.12), onda je $\rho = \kappa_N$.
Pretpostavimo $(x, y) \in \rho$. Tada je $x \neq y$ i ili je $x \in B(y)$ ili je $y \in B(x)$. U prvom slučaju, prema (2.12), x_n i y_n ili su jednaki ili se razlikuju za najviše 1. Ako su različiti, onda iz konstrukcije skupa $B(y)$ vidimo da je y_n neparan, odnosno x_n je paran pa je $(x, y) \in \kappa_N$. U drugom slučaju, x_n i y_n ili su isti ili se razlikuju za najviše 1. Ako su različiti, x_n mora biti neparan pa je taj y_n paran pa $(x, y) \in \kappa_N$. U oba slučaja, $(x, y) \in \kappa_N$.
Pretpostavimo $(x, y) \in \kappa_N$. κ_N je lokalna relacija pa iz toga zaključujemo da ako je $|x_n - y_n| \neq 1$, onda $|x_n - y_n| = 0$. Iz (2.12) vidimo sljedeće: ako je x_n neparan, onda je y_n paran za sve n gdje je $|x_n - y_n| = 1$ pa $y \in B(x)$,

odnosno ako je x_n paran, onda je y_n neparan za sve n gdje je $|x_n - y_n| = 1$ pa $x \in B(y)$. U svakom slučaju, $(x, y) \in \rho$.

Pokazali smo da je ovakav B bazno preslikavanje na $\mathbb{Z}^N$ i da vrijedi (2.10) za κ_N umjesto π. Sada po Teoremu 2.29 slijedi da je $(\mathbb{Z}^N, \kappa_N)$ topološki digitalni prostor. ■

Dosadašnjim rezultatima opisali smo dvije beskonačne familije topoloških digitalnih prostora: $((\mathbb{Z}^N, \omega_N) \colon N \geq 0)$ i $((\mathbb{Z}^N, \kappa_N) \colon N \geq 0)$. Nažalost, ove dvije familije obuhvaćaju gotovo sve zanimljive primjere digitalnih prostora koji su ujedno i topološki. To možemo zaključiti pomoću sljedećeg teorema koji kaže da brojni digitalni prostori nisu topološki prostori.

Teorem 2.40 *Ako je digitalni prostor (V, π) takav da V sadrži različite elemente $c^1, c^2, c^3, d^1, d^2, d^3$ takve da*

$$(c^i, c^j) \in \pi \ , \ \textit{ako } i \neq j \tag{2.13}$$

i

$$(c^i, d^i) \in \pi \ , \ \textit{ali } (c^i, d^j) \notin \pi \ \textit{ako } i \neq j, \tag{2.14}$$

onda (V, π) nije topološki prostor.

Dokaz. Neka je $\mathcal{T}$ bilo koja topologija na V za koju je svaki $\mathcal{T}$-povezan skup spelova ujedno i π-povezan. Stvaranjem različitih pretpostavki o (V, π), kojima ćemo iscrpiti sve moguće slučajeve, stvorit ćemo π-povezane skupove spelova koji nisu $\mathcal{T}$-povezani. Označimo $C := \{c^1, c^2, c^3\}$.

Prvo pretpostavimo da za $i = 1, 2, 3$ postoji otvoren skup O_i koji ne sadrži c^i i takav da $O_i \cap C \neq \emptyset$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti $c^2 \in O_3$. Iz definicije skupa imamo $c^3 \notin O_3$. Ako $c^3 \in O_2$, onda je skup $\{c^2, c^3\}$ π-povezan, ali nije $\mathcal{T}$-povezan jer se može rastaviti $\{c^2, c^3\} = O_2 \cup O_3$. Ako $c^3 \notin O_2$, a znamo i $c^2 \notin O_2$, onda preostaje $c^1 \in O_2$ i $O_2 \cap C = \{c^1\}$.

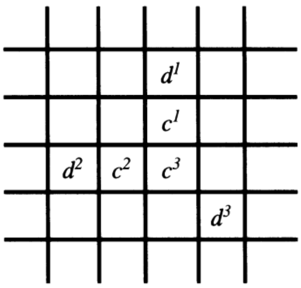
Sada je skup $(O_1 \cap C) \cup \{c^1\}$ π-povezan, ali nije $\mathcal{T}$-povezan (jer se može rastaviti na $O_1 \cup O_2$).

Za alternativni slučaj, bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da kad god otvoren skup ima neprazan presjek s C, onda sadrži c^3. Kako nijedan od skupova $\{c^1, d^2\}$ i $\{c^2, d^1\}$ nije π-povezan, po definiciji topologije $\mathcal{T}$, nisu ni $\mathcal{T}$-povezani. Ovo znači da postoje otvoreni skupovi U_1 i U_2 takvi da $c_1 \in U_1$, $d_2 \notin U_1$, $c^2 \in U_2$, $d^1 \notin U_2$. Ako ne vrijedi $C \subset U_1$ ni $C \subset U_2$, onda je $\{c^1, c^2\}$ π-povezan skup koji nije $\mathcal{T}$-povezan (jer se može rastaviti na $\{c^1, c^2\} = U_1 \cup U_2$).

Ako je $C \subset U_1$ (slično se pokaže i za $C \subset U_2$), onda uzimamo da postoji otvoren skup W takav da $c^3 \notin W$ i $d^2 \in W$ (jer $\{c^3, d^2\}$ nije π-povezan). Naša pretpostavka o c^3 povlači da $W \cap C = \emptyset$. Iz toga slijedi da je $\{c^2, d^2\}$ π-povezan skup koji nije $\mathcal{T}$-povezan (jer se može rastaviti na $\{c^2, d^2\} = U_1 \cup W$).

■

Koristeći Teorem 2.40 i uz pomoć sljedeće slike, može se provjeriti da digitalni prostor $(\mathbb{Z}^2, \alpha_2)$ nije topološki.



Slika 2.6: Po Teoremu 2.40, digitalni prostor $(\mathbb{Z}^2, \alpha_2)$ nije topološki. (Slika preuzeta iz [1])

Sljedeći paragraf je iz [1]. Uz rezultate prethodnog teorema, zaključak je da ne možemo, bez ozbiljnog gubitka općenite primjenjivosti, ugraditi našu teoriju u onu teoriju gdje se povezanost skupa spelova definira kao topološka povezanost s obzirom na neku topologiju (u klasičnom smislu). Iz ovog razloga, ne možemo očekivati da se naša teorija digitalnih prostora može potpuno izvesti iz utvrđenih rezultata klasične topologije.

2.4 Khalimskyjev pravac

Svi pojmovi i tvrdnje u ovoj sekciji uvedeni su prema [5]. Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ surjektivno preslikavanje. Ako opskrbimo $\mathbb{Z}$ najfinijom topologijom takvom da f bude neprekidno, onda je $\mathbb{Z}$ povezan. Naravno, postoji više surjektivnih preslikavanja iz $\mathbb{R}$ u $\mathbb{Z}$. Prirodno je zamišljati $\mathbb{Z}$ kao aproksimaciju pravca realnih brojeva i u skladu s tim zamišljati i preslikavanja. S topološkog aspekta, to je isto kao da se ograničimo samo na promatranje rastućih surjekcija. Ako je f rastuća surjekcija, onda je $f^{-1}(\{n\})$ interval, za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Ako označimo rubove intervala s a_n i b_n, onda je

$$\langle a_n, b_n \rangle \subset f^{-1}(\{n\}) \subset [a_n, b_n].$$

Možemo uzeti $a_n = n - \frac{1}{2}$, $b_n = n + \frac{1}{2}$, što neće promijeniti topologiju. Tada f možemo shvatiti kao aproksimaciju realnog pravca cijelim brojevima, budući da je $f(x)$ definiran kao cijeli broj najbliže broju x, osim ako se x nalazi točno između dva cijela broja. Za $x = n + \frac{1}{2}$ možemo izabrati ili $f(x) = n$ ili $f(x) = n + 1$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$. Ako izaberemo $f(x) = n$, za svaki $n \in \mathbb{Z}$, onda se topologija na $\mathbb{Z}$, dobivena pomoću Propozicije 1.34, naziva desna topologija na $\mathbb{Z}$. Ako izaberemo $f(x) = n + 1$, za svaki $n \in \mathbb{Z}$, dobivena topologija naziva se lijeva topologija na $\mathbb{Z}$.

Ako umjesto toga za svaki broj koji se nalazi točno između dva cijela broja definiramo da je njegova najbolja aproksimacija paran broj, dobili bi zanimljivu rezultirajuću topologiju. Praslika $f^{-1}(\{n\})$, za paran broj n, je segment $[n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2}]$ pa je $\{n\}$ zatvoren. Praslika $f^{-1}(\{n\})$, za neparan broj n, je otvoreni interval $\langle n - \frac{1}{2}, n + \frac{1}{2} \rangle$ pa je $\{n\}$ otvoren. Ovu topologiju uveo je Efim Khalimsky i stoga je po njemu nazvana Khalimskyjeva topologija. Skup $\mathbb{Z}$ uz ovu topologiju naziva se Khalimskyjev pravac ili digitalni pravac. Taj topološki prostor označavat ćemo $(\mathbb{Z}, \mathcal{K})$.

Očito je da je Khalimskyjev pravac povezan prostor i lako se pokaže da je za svaki $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$ nepovezan. Ovo je poželjno svojstvo, budući da isto vrijedi i za pravac realnih brojeva uz standardnu euklidsku topologiju.

Tvrdnja 2 *Khalimskyjev pravac* $(\mathbb{Z}, \mathcal{K})$ *je povezan prostor i za svaki* $n \in \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \setminus \{n\}$ *uz relativnu topologiju je nepovezan prostor.*

Dokaz. Iz prethodne konstrukcije prostora $(\mathbb{Z}, \mathcal{K})$ imamo da je $\mathbb{R}$ uz standardnu topologiju povezan prostor i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ neprekidna rastuća surjekcija pa je $\mathbb{Z}$ povezan kao neprekidna slika povezanog prostora. Neka je $n \in \mathbb{Z}$ proizvoljan.

1° n paran

Tada je $\mathbb{Z} \setminus \{n\} = \Big(\bigcup\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \text{ paran} \\ k<n}} \{k-1, k, k+1\} \Big) \bigcup \Big(\bigcup\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \text{ paran} \\ k>n}} \{k-1, k, k+1\} \Big)$ disjunktna netrivijalna unija otvorenih skupova u relativnoj topologiji.

2° n neparan

Tada je $\mathbb{Z} \setminus \{n\} = \Big(\bigcup\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \text{ paran} \\ k<n-1}} \{k-1, k, k+1\} \bigcup \{n-2, n-1\} \Big) \bigcup$ $\Big(\bigcup\limits_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ k \text{ paran} \\ k>n+1}} \{k-1, k, k+1\} \bigcup \{n+1, n+2\} \Big)$ disjunktna netrivijalna unija otvorenih skupova u relativnoj topologiji.

■

Khalimskyjeva topologija i njen dual, gdje je zamijenjena uloga otvorenih i zatvorenih skupova (odnosno neparnih i parnih brojeva), obje su alternirajuće, u smislu da je svako druga točka otvoren skup i svaka druga točka je zatvoren skup. Jasno je da su to jedine dvije moguće alternirajuće topologije na $\mathbb{Z}$. Također, singletoni s dva susjedna cijela broja ne mogu biti oba otvoreni ili oba zatvoreni, jer broj koji je njihovo polovište mora pripadati točno jednoj od te dvije praslike. Ova razmatranja dovode do sljedeće propozicije.

Propozicija 2.41 *Jedine topologije na $\mathbb{Z}$ definirane neprekidnim rastućim surjekcijama $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$, tako da je komplement svake točke nepovezan skup, su Khalimskyjeva topologija i njen dual.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, da postoji topologija na $\mathbb{Z}$ koja nije alternirajuća i da je generirana s f. Tada postoji točka m takva da $\{m\}$ nije ni otvoren ni zatvoren skup.

Pretpostavimo da je praslika te točke $f^{-1}(\{m\}) = [m - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}\rangle$. Pretpostavimo da U i V tvore rastav od $\mathbb{Z} \setminus \{m\}$. To znači da postoje otvoreni skupovi U' i V' u $\mathbb{Z}$ takvi da $U = U' \setminus \{m\}$ i $V = V' \setminus \{m\}$. Pretpostavimo još $m + 1 \in V$. Tada, budući da je V' otvoren, $\{m, m - 1\} \subset V'$ pa je onda $m - 1 \in V$. Pretpostavimo $m \in U'$. Uz istu argumentaciju dobivamo $m - 1 \in U'$ pa je onda $m - 1 \in U$. Ovo je u kontradikciji s tim da su U i V disjunktni. Dakle, $m \notin U'$. Slijedi da su U' i V' disjunktni. No onda U' i V' tvore rastav od $\mathbb{Z}$, a to je kontradikcija jer je $\mathbb{Z}$ povezan. ■

Khalimskyjev pravac je Aleksandrovljev topološki prostor. Budući da sve neparne točke tvore otvorene skupove, $S_{\mathcal{K}}(\{2k + 1\}) = \{2k + 1\}$, dok je najmanja okolina parnih točaka $S_{\mathcal{K}}(\{2k\}) = \{2k-1, 2k, 2k+1\}$. Neka je $A \subseteq \mathbb{Z}$. Točku $m \in A$ nazivamo rubna točka ako $\{m - 1, m + 1\}$ nije sadržan u A. Iz ovog odmah slijedi da je skup otvoren ako i samo ako su sve rubne točke neparni brojevi, a skup je zatvoren ako i samo ako su sve rubne točke parni brojevi.

Khalimskyjev interval ili digitalni interval je interval $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ uz relativnu topologiju koju nasljeđuje od Khalimskyjevog pravca. To je povezan prostor, a uklanjanjem bilo koje točke segmenta osim a i b, dobiveni prostor je nepovezan.

Khalimskyjeva kružnica ili digitalna kružnica je kvocijentni prostor $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ Khalimskyjevog pravca za neki parni cijeli broj $m \geq 2$. (Ako je

m neparan, kvocijentni prostor ima indiskretnu topologiju.) Khalimskyjeva kružnica je konačan i kompaktan prostor i za $m \geq 4$ ima lokalnu strukturu Khalimskyjevog pravca. Lako se vidi da je komplement bilo koje točke Khalimskyjeve kružnice homeomorfan Khalimskyjevom intervalu.

2.5 Khalimskyjev n-prostor

Svi pojmovi i tvrdnje iz ove podsekcije su iz [5].

Definicija 2.42 *Khalimskyjeva ravnina ili digitalna ravnina* $(\mathbb{Z}^2, \mathcal{K})$ *je topološki produkt dva Khalimskyjeva pravca. Općenito, Khalimskyjev n-prostor je topološki produkt* $(\mathbb{Z}^n, \mathcal{K})$*, gdje je* $\mathcal{K}$ *produktna topologija na* $\mathbb{Z}^n$*.*

Definicija 2.43 *Za topološki prostor kažemo da je* $T_{1/2}$*-prostor ako je svaki singleton ili otvoren ili zatvoren.*

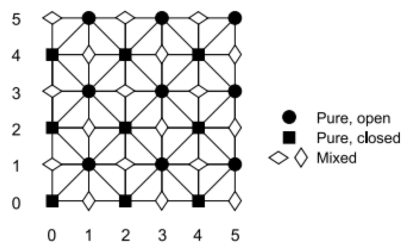
Očito su Khalimskyjev interval i Khalimskyjev pravac $T_{1/2}$-prostori. Ipak, produkt dva $T_{1/2}$-prostora ne mora biti $T_{1/2}$-prostor. Khalimskyjev n-prostor nije $T_{1/2}$-prostor za $n \geq 2$. Ovo vrijedi zbog mješovitih točaka (definiranih u nastavku), koje nisu ni otvorene ni zatvorene. Objasnimo detaljnije strukturu Khalimskyjeve ravnine.

Definicija 2.44 *Točka* $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ *je otvorena ako su joj obje koordinate neparne, a zatvorena ako su joj obje koordinate parne. Takve točke nazivamo čiste točke. Točke s jednom neparnom i jednom parnom koordinatom nisu ni zatvorene ni otvorene i nazivamo ih mješovite točke.*

Ova definicija prirodno se proširuje u prostorima viših dimenzija.

Definicija 2.45 *Točku* $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ *nazivamo čista točka ako su joj sve koordinate iste parnosti. U suprotnom, točku nazivamo mješovita točka.*

Dio Khalimskyjeve ravnine prikazan je na sljedećoj slici, pri čemu linija između dvije točke znači da su te točke povezane.



Slika 2.7: Dio Khalimskyjeve ravnine (Slika preuzeta iz [5])

Dijagonala koja se sastoji od čistih točaka smatra se potprostorom ravnine i homeomorfna je Khalimskyjevom pravcu, dok dijagonala koja se sastoji od mješovitih točaka ima diskretnu topologiju.

Još jedan način za opisati Khalimskyjevu ravninu je pomoću podbaze. Neka je $A_2 = \{x \in \mathbb{Z}^2 \colon ||x||_\infty \leq 1\} = \{(0,0), \pm(0,1), \pm(1,0), \pm(1,1), \pm(-1,1)\}$ najmanja okolina zatvorene točke $(0,0)$. Množina svih translatiranih skupova $\{A_2 + (c_1, c_2) \colon c_1, c_2 \in 2\mathbb{Z}\}$ je pokrivač za $\mathbb{Z}^2$ pa stoga tvori podbazu jedinstvene topologije na $\mathbb{Z}^2$. Ta topologija je Khalimskyjeva topologija $\mathcal{K}$ na $\mathbb{Z}^2$. Baza te topologije je množina svih konačnih presjeka elemenata podbaze. Općenito, topologija na Khalimskyjevom n-prostoru može se konstruirati na sličan način iz skupova $A_n = \{x \in \mathbb{Z}^n \colon ||x||_\infty \leq 1\}$.

Poglavlje 3

Neprekidne funkcije na topološkim digitalnim prostorima

3.1 Neprekidne funkcije

U nastavku ćemo promatrati $\mathbb{Z}^n$ uz Khalimskyjevu topologiju, osim ako nije naglašeno drugačije. Sljedeća definicija iz [3].

Definicija 3.1 *Neka su (X, d_X) i (Y, d_Y) metrički prostori i $f\colon X \to Y$ funkcija. Funkcija f ima Lipschitzovo svojstvo ako postoji $\lambda \geq 0$ takav da za sve $x, x' \in X$ vrijedi $d_Y(f(x), f(x')) \leq \lambda d_X(x, x')$.*

Sljedeća diskusija je iz [5]. Zbog takvog ambijenta, zanimaju nas svojstva neprekidnih funkcija iz $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{Z}$. Takve funkcije nužno imaju Lipschitzovo svojstvo s Lipschitzovom konstantom 1. Za takve funkcije kažemo da su Lip-1. Da bi pokazali to svojstvo, pretpostavimo suprotno, tj. da postoje $n, n+1 \in \mathbb{Z}$ takvi da $|f(n+1) - f(n)| \geq 2$. Tada $f(\{n, n+1\})$ nije povezan

skup, a $\{n, n+1\}$ je povezan, a to je u kontradikciji s neprekidnošću funkcije f.
Samo Lip-1 svojstvo nije dovoljno za okarakterizirati neprekidne funkcije $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. Pretpostavimo dodatno da je $x \in \mathbb{Z}$ paran, a $f(x) \in \mathbb{Z}$ neparan. Tada je $U = f(\{x\})$ otvoren skup. Ovo povlači da je $V = f^{-1}(U)$ otvoren skup, odnosno da je najmanja okolina $S_{\mathcal{K}}(\{x\}) = \{x-1, x, x+1\}$ sadržana u V, odnosno $f(x-1) = f(x) = f(x+1)$. Slična argumentacija primijeni se za slučaj kad je x neparan, a $f(x)$ paran.
Pretpostavimo $x \in \mathbb{Z}$ neparan, a $f(x)$ paran. Kako je $f(x)$ paran, to je $V := \{f(x)\}$ zatvoren. Zbog neprekidnosti od f, $U := f^{-1}(V)$ je zatvoren i $x \in U$, odnosno $\{x\} \subset U$. No kako je $\{x\}$ otvoren, to ne može biti jednako U, koji je zatvoren. Minimalno proširenje (u smislu inkluzije) od $\{x\}$ do zatvorenog skupa je $U = \{x-1, x, x+1\}$. Sada je $U = f^{-1}(V) = \{x-1, x, x+1\}$, odnosno $\{x-1, x, x+1\} = f^{-1}(\{f(x)\})$ pa je $f(x \pm 1) = f(x)$.
Definirajmo binarnu relaciju na $\mathbb{Z}$.
Sljedeća definicija i lema su iz [5].

Definicija 3.2 *Za $a, b \in \mathbb{Z}$ kažemo da $a \sim b$ ako je $a - b$ paran broj, odnosno ako su a i b iste parnosti.*

Ako za bilo koji $x \in \mathbb{Z}$ vrijedi $f(x) \not\sim x$, onda f mora biti konstantna na skupu $\{x-1, x, x+1\}$.

Lema 3.3 *Funkcija $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ je neprekidna ako i samo ako*

1. *f je Lip-1*
2. *za svaki paran x, $f(x) \not\sim x$ povlači $f(x \pm 1) = f(x)$.*

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$ Ovaj smjer očito vrijedi prema diskusiji prije leme.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $A = \{y-1, y, y+1\}$, gdje je y proizvoljni element podbaze i paran broj. Moramo pokazati da je $f^{-1}(A)$ otvoren skup. Ako je $x \in f^{-1}(A)$ neparan, onda je $\{x\}$ okolina od x. Ako je $x \in f^{-1}(A)$ paran, onda imamo dva slučaja.

1° Ako je $f(x)$ neparan, onda drugi uvjet iz iskaza povlači $f(x \pm 1) = f(x)$ pa je $\{x-1, x, x+1\} \subset f^{-1}(A)$ okolina od x.

2° Ako je $f(x)$ paran, onda je $f(x) = y$, a Lip-1 svojstvo povlači $|f(x \pm 1) - y| \leq 1$ pa je ponovno $\{x-1, x, x+1\} \subset f^{-1}(A)$ okolina od x.

Dakle, u svakom od slučajeva dobivamo da je f neprekidna. ■

Sljedeći dio teksta do propozicije je iz [5].

Napomena 3.4 *Uočimo da u drugom uvjetu iz iskaza umjesto parnih brojeva x, možemo promatrati i samo neparne brojeve. Ako zamijenimo uvjet tako da promatramo samo neparne brojeve, uzmimo proizvoljan paran x i pretpostavimo da je $f(x)$ neparan. Zbog Lip-1 svojstva vrijedi $|f(x) - f(x-1)| \leq 1$, što povlači $f(x-1) = f(x)$ ili $f(x-1) = f(x) \pm 1$. Međutim, drugi slučaj znači $x-1 \not\sim f(x-1)$, a po pretpostavljenom uvjetu za neparne brojeve slijedi $f(x) = f(x-1) = f(x) \pm 1$, što je kontradikcija. Dakle, $f(x-1) = f(x)$ i slično se dobije $f(x+1) = f(x)$, a to je upravo uvjet originalne leme.*

Iz ove leme slijedi da će neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ biti Lip-1 uz izbor metrike d_∞ na $\mathbb{Z}^2$. Npr., ako je $f(0,0) = 0$, onda $f(1,0)$ može biti jedino $-1, 0$ ili 1. Onda slijedi $f(1,1) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, a provjerom uvjeta parnosti isključujemo slučajeve $f(1,1) = \pm 2$. Ovaj rezultat vrijedi u bilo kojoj dimenziji.

Sljedeća propozicija je iz [5].

Propozicija 3.5 *Neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ je Lip-1 s obzirom na metriku d_∞ na $\mathbb{Z}^n$, za svaki $n \in \mathbb{N}$.*

Dokaz. Provodimo dokaz matematičkom indukcijom po dimenziji n. Prvo ćemo dokazati tvrdnju za točke koje su od x udaljene 1, što povlači općeniti slučaj.

- Baza indukcije:

  Neka je $f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ neprekidna. Po Lemi 3.3 slijedi da je f Lip-1.

- Pretpostavka indukcije:

  Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$, odnosno da je svaka neprekidna funkcija $f\colon \mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{Z}$ i Lip-1.

- Korak indukcije:

  Neka je $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ neprekidna. Neka je $x = (x', x_n) \in \mathbb{Z}^n$, $x' \in \mathbb{Z}^{n-1}$, $x_n \in \mathbb{Z}$. Pretpostavimo $f(x) = 0$. Dokaz provodimo u dva slučaja, ovisno o parnosti x_n.

  1° x_n neparan

  Tada vrijedi $f(x + (0, \dots, 0, 1)) = f(x', x_n + 1) = 0$.

  f je neprekidna pa je i $f|_{\{x'\}\times\mathbb{Z}}\colon \{x'\} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ neprekidna. Definirajmo $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(y) = f|_{\{x'\}\times\mathbb{Z}}(x', y)$, koja je također neprekidna. Sad imamo $g(x_n) = f(x', x_n) = 0$, odnosno $x_n \not\nearrow g(x_n)$ pa po Lemi 3.3 slijedi $g(x_n \pm 1) = g(x_n)$, tj. $f(x + (0, \dots, 0, 1)) = 0$.

  Također vrijedi $f(x + (1, \dots, 1, 0)) \leq 1$.

  f je neprekidna pa je i $f|_{\mathbb{Z}^{n-1}\times\{x_n\}}\colon \mathbb{Z}^{n-1} \times \{x_n\} \to \mathbb{Z}$ neprekidna. Definirajmo $g\colon \mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{Z}$, $g(x') = f|_{\mathbb{Z}^{n-1}\times\{x_n\}}(x', x_n)$, koja je također neprekidna. Po pretpostavci indukcije g je Lip-1, što znači

  $|g(x' + (1, \dots, 1)) - g(x')| \leq 1 \cdot d_\infty(x', x' + (1, \dots, 1))$, tj.

  $|g(x' + (1, \dots, 1)) - 0| \leq 1$ pa vrijedi $|f(x + (1, \dots, 1, 0))| \leq 1$.

  Pokažimo još da vrijedi $f(x + (1, \dots, 1, 1)) \leq 1$.

  Označimo $\overline{x} := x + (0, \dots, 0, 1)$,

$y := \overline{x} + (1, \dots, 1, 0) = (x' + (1, \dots, 1), x_n + 1)$. f je neprekidna pa je i $f|_{\mathbb{Z}^{n-1} \times \{x_n+1\}} \colon \mathbb{Z}^{n-1} \times \{x_n + 1\} \to \mathbb{Z}$ neprekidna. Definirajmo $g \colon \mathbb{Z}^{n-1} \to \mathbb{Z}$, $g(x') = f|_{\mathbb{Z}^{n-1} \times \{x_n+1\}}(x', x_n + 1)$, koja je također neprekidna. Po pretpostavci indukcije g je Lip-1, što znači $|g(x' + (1, \dots, 1)) - g(x')| \leq 1 \cdot d_\infty(x', x' + (1, \dots, 1))$, tj. $|f(y)| \leq 1$. Sad za točke x i y imamo $d_\infty(x, y) = 1$ i $d_\infty(f(x), f(y)) \leq d_\infty(f(x), f(\overline{x})) + d_\infty(f(\overline{x}), f(y)) \leq 0 + 1$, odnosno $d_\infty(f(x), f(y)) \leq 1$.

2° x_n paran

Pretpostavimo i $f(x + (1, \dots, 1, 0)) = f(x' + (1, \dots, 1), x_n) = 1$. Pokažimo da tada vrijedi $f(x + (1, \dots, 1, 1)) = 1$. Označimo $\overline{x} := x + (1, \dots, 1, 0)$, $y := \overline{x} + (0, \dots, 0, 1) = (x' + (1, \dots, 1), x_n + 1)$. f je neprekidna pa je i $f|_{\{x'+(1,\dots,1)\} \times \mathbb{Z}} \colon \{x' + (1, \dots, 1)\} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ neprekidna. Definirajmo $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(y) = f(x' + (1, \dots, 1), y)$, koja je također neprekidna. Budući da je $g(x_n) = f(x' + (1, \dots, 1), x_n) = f(\overline{x}) = 1$, imamo $x_n \not\nearrow g(x_n)$ pa po Lemi 3.3 slijedi $g(x_n \pm 1) = g(x_n)$, odnosno $f(y) = 1$.

U 1° i 2° dokazano je da f može promijeniti vrijednost najviše za 1 ako se od točke x udaljimo za 1 s obzirom na metriku d_∞. To povlači i Lip-1 svojstvo za točke koje su međusobno udaljene barem 2. Neka su $x, y \in \mathbb{Z}^n$ i $d_\infty(x, y) = m$, $m \geq 2$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji $k \in \{1, \dots, n\}$ takav da $|x_k - y_k| = m$, a za $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k\}$ je $x_l = y_l$. Definirajmo niz od $m + 1$ točaka:

$$a^0 := x = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n),$$

$$a^1 := a^0 + (0, \dots, 1, \dots, 0) = (x_1, \dots, x_k + 1, \dots, x_n),$$

$$a^2 := a^1 + (0, \ldots, 1, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_k + 2, \ldots, x_n),$$
$$\vdots$$
$$a^m := y = a^{m-1} + (0, \ldots, 1, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_k + m, \ldots, x_n).$$

Vrijedi $d_\infty(a^i, a^{i+1}) = 1,\ i = 0, \ldots, m-1$ pa primijenimo prethodno dokazano Lip-1 svojstvo:

$$d_\infty(f(x), f(a^1)) \leq 1 \cdot d_\infty(x, a^1) = 1,$$
$$d_\infty(f(a^1), f(a^2)) \leq 1 \cdot d_\infty(a^1, a^2) = 1,$$
$$\vdots$$
$$d_\infty(f(a^{m-1}), f(y)) \leq 1 \cdot d_\infty(a^{m-1}, y) = 1.$$

Sada je

$$d_\infty(f(x), f(y)) \leq d_\infty(f(x), f(a^1)) + d_\infty(f(a^1), f(a^2)) + \ldots + d_\infty(f(a^{m-1}, f(y)),$$

odnosno

$$d_\infty(f(x), f(y)) \leq m = d_\infty(x, y).$$

■

Napomena 3.6 *Treba naglasiti da uz izbor neke druge metrike, npr. d_2, na $\mathbb{Z}^n$ navedeni rezultat općenito ne vrijedi.*

Sljedeće dvije definicije i primjer su iz [2].

Definicija 3.7 *Neka je $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ i neka je $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ proizvoljna točka domene. Za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ kažemo da je f neprekidna po varijabli x_i u točki a ako je funkcija $x_i \mapsto f(a_1, a_2, \ldots, a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \ldots, a_n)$ neprekidna u $x_i = a_i$.*

Definicija 3.8 *Kažemo da je f separabilno neprekidna u točki a ako je f neprekidna po varijabli x_i u točki a, za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$. Kažemo da je f separabilno neprekidna ako je separabilno neprekidna u svakoj točki domene.*

Primjer 3.9 *Neka je $X = \{(0,0)\} \cup \{x \in \mathbb{Z}^2 \colon |x_1| = |x_2| = 1\}$. Skup $X \subset \mathbb{Z}^2$ povezan je s obzirom na Khalimskyjevu topologiju $\mathcal{K}$. Svaka funkcija $f \colon X \to \mathbb{Z}$ je separabilno neprekidna, a nijedna od njih nije neprekidna.*

Separabilna neprekidnost funkcije $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definira se analogno, uz dodatan zahtjev da je domena otvoren skup. U nastavku navodimo poznati primjer iz matematičke analize kako bi dodatno ilustrirali da separabilna neprekidnost ne povlači neprekidnost.

Primjer 3.10 *Neka je $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

Ne postoji limes funkcije $f|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ u točki $(0,0)$ pa je f prekidna u $(0,0)$. Funkcija f je separabilno neprekidna u $(0,0)$.

Iz navedenih primjera jasno je da separabilna neprekidnost općenito ne povlači neprekidnost. Sljedeći teorem je iz [5].

Teorem 3.11 *$f \colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ je neprekidna ako i samo ako je separabilno neprekidna.*

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je f neprekidna. Tada su očito u svakoj točki $x \in \mathbb{Z}^n$ sve restrikcije na svaku od koordinata neprekidne, a to znači da je f separabilno neprekidna.

$\boxed{\Leftarrow}$ Za pokazati ovu tvrdnju, dovoljno je provjeriti da je praslika elementa $A = \{y-1, y, y+1\}$ podbaze, za paran y, otvorena. Pretpostavimo da $x \in f^{-1}(A)$. Pokazat ćemo da $S_{\mathcal{K}}(x) \subset f^{-1}(A)$. Lako se provjeri da je

$$S_{\mathcal{K}}(x) = \left\{ z \in \mathbb{Z}^n : \begin{array}{ll} |x_i - z_i| \leq 1, & \text{ako } x_i \text{ paran} \\ z_i = x_i, & \text{ako } x_i \text{ neparan} \end{array} \right\}. \tag{3.1}$$

Neka je $z \in S_{\mathcal{K}}(x)$ proizvoljan i $I = \{i_0, \ldots, i_k\}$ skup koordinata na kojima $|x_i - z_i| = 1$. Neka je $x^0, \ldots, x^k$ niz točaka u $\mathbb{Z}^n$ tako da vrijedi $x^0 = x$, $x^k = z$ i

$$x^{j+1} = x^j + (0, 0, \ldots, 0, \pm 1, 0, \ldots, 0)$$

za $j \in \{0, \ldots, k-1\}$ tako da je x^{j+1} jedan korak bliža točki z nego x^j u smjeru i_j-te koordinate.

Ako je $f(x)$ neparan, onda iz separabilne neprekidnosti i Leme 3.3 slijedi $f(x^{j+1}) = f(x^j)$. Posebno, $f(z) = f(x)$ pa je onda $z \in f^{-1}(A)$.

Ako je $f(x)$ paran, onda se može dogoditi $f(x^{j+1}) = f(x^j) \pm 1$ za neku j-tu točku iz niza. No onda je $f(x^{j+1})$ neparan i f mora biti konstantna na ostalim elementima niza. Tada je $f(z) \in A$ i, u ovom slučaju, $z \in f^{-1}(A)$.

■

Sljedeća tvrdnja je iz [5].

Tvrdnja 3 *Preslikavanje između dva Aleksandrovljeva topološka prostora je neprekidno ako i samo ako je rastuće s obzirom na uređaj specijalizacije.*

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka su $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Aleksandrovljevi topološki prostori i $f\colon X \to Y$ neprekidno preslikavanje. Neka su $x, z \in X$ takvi da $x \preccurlyeq z$. To znači da $x \in Cl(\{z\})$, odnosno $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}_X}(x)$. Treba dokazati $f(x) \preccurlyeq f(z)$, odnosno $f(z) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}_Y}(f(x))$. Pretpostavimo suprotno, da $f(x) \not\preccurlyeq f(z)$, odnosno $f(z) \notin$

$\mathcal{S}_{\mathcal{T}_Y}(f(x))$. Kako je f neprekidna, za svaku okolinu od $f(x)$, pa posebno i za najmanju okolinu $\mathcal{S}_{\mathcal{T}_Y}(f(x))$, postoji okolina od x koja se preslika u nju. Zbog minimalnosti (po inkluziji), to je $\mathcal{S}_{\mathcal{T}_X}(x)$ pa je $f(\mathcal{S}_{\mathcal{T}_X}(x)) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{T}_Y}(f(x))$. Pretpostavka $x \preccurlyeq z$ znači da $z \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}_X}(x)$, tj. $f(z) \in f(\mathcal{S}_{\mathcal{T}_X}(x)) \subseteq \mathcal{S}_{\mathcal{T}_Y}(f(x))$. Dobije se $f(z) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}_Y}(f(x))$, što je kontradikcija s pretpostavkom pa mora vrijediti $f(x) \preccurlyeq f(z)$, a to znači da je f rastuća s obzirom na $\preccurlyeq$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka su $(X, \mathcal{T}_X)$ i $(Y, \mathcal{T}_Y)$ Aleksandrovljevi topološki prostori i $f\colon X \to Y$ rastuća s obzirom na Aleksandrovljev uređaj specijalizacije $\preccurlyeq$. Treba dokazati da je f neprekidna. Pretpostavimo suprotno, da f ima prekid i označimo $x \in X$ točku prekida. Za $f(x) \in Y$ postoji okolina $V \in \mathcal{T}_Y$ takva da za svaku okolinu U od x vrijedi $f(U) \nsubseteq V$. Posebno, i za najmanju okolinu $\mathcal{S}_{\mathcal{T}_X}(x)$ od x vrijedi $f(\mathcal{S}_{\mathcal{T}_X}(x)) \nsubseteq V$. To znači da postoji $y \in Y$ takva da $y \in f(\mathcal{S}_{\mathcal{T}_X}(x))$ i $y \notin V$, odnosno $f^{-1}(y) \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}_X}(x)$, što je ekvivalentno s $x \in Cl(\{f^{-1}(y)\})$, tj. $x \preccurlyeq f^{-1}(y)$. Kako je f po pretpostavci rastuća, vrijedi $f(x) \preccurlyeq f(f^{-1}(y))$, tj. $f(x) \preccurlyeq y$. To je ekvivalentno s $f(x) \in Cl(\{y\})$, odnosno $y \in \mathcal{S}_{\mathcal{T}_Y}(\{f(x)\}) \subseteq V$ pa dobivamo $y \in V$, a to je kontradikcija. Dakle, pretpostavka o prekidnosti funkcije f dovodi do kontradikcije, čime je dokazano da je f neprekidna. ■

Napomena 3.12 *Zbog ovog svojstva, teorija uređenih skupova može se iskoristiti u proučavanju neprekidnih funkcija. Moguće je formulirati dokaze o neprekidnim funkcijama u terminima relacija uređaja.*

3.2 Proširenja neprekidnih funkcija

Svi pojmovi i tvrdnje iz ove sekcije (tj. do kraja rada) su iz [5]. Nastavno na dosadašnje tvrdnje o neprekidnim funkcijama iz $\mathbb{Z}^n$ u $\mathbb{Z}$, prirodno je zapitati se pod kojim je uvjetima moguće proširenje takvih funkcija. Točnije, ako je $f\colon A \to \mathbb{Z}$ neprekidna funkcija definirana na podskupu $A \subset \mathbb{Z}^n$ s induciranom topologijom, kad je moguće proširiti tu funkciju do neprekidne funkcije $g\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ na cijelom $\mathbb{Z}^n$ tako da $g|_A = f$? Proširenje, općenito, ovisi o samoj funkciji. Očito je nužno da funkcija bude globalno Lip-1, no nije i dovoljno, što pokazuje jednodimenzionalni primjer.
Neprekidne funkcije definirane na Khalimskyjevom prostoru s vrijednostima u $\mathbb{R}$ nisu posebno zanimljive jer su jedino konstantne funkcije neprekidne. No ako zamijenimo realni interval digitalnim intervalom, odnosno Khalimskyjevim intervalom, postavlja se isto pitanje. Tietzeov teorem ne vrijedi u ovom ambijentu, točnije, zatvorenost domene nije ni dovoljan ni nužan uvjet. Ispostavit će se da proširenje neprekidne funkcije ovisi o povezanosti domene. U ovom poglavlju prvo ćemo navesti uvjet koji je ekvivalentan neprekidnosti u $\mathbb{Z}^n$ i koji se može koristiti kao provjera može li se neprekidna funkcija definirana na podskupu proširiti. U dokazu je korištena metoda kojom se može konstruirati proširenje. Te rezultate iskoristit ćemo da klasificiramo podskupove digitalne ravnine tako da svaka neprekidna funkcija definirana na takvom skupu ima proširenje na cijelu ravninu. Taj rezultat je digitalni analogon Tietzeovog teorema o proširenju.

3.2.1 Funkcije koje su jako Lip-1

Za početak navedimo uvjete koji moraju vrijediti da bi funkcija definirana na podskupu Khalimskyjevog pravca imala proširenje.

Definicija 3.13 *Neka je $A \subset \mathbb{Z}$. Praznina od A je uređeni par cijelih brojeva $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ takav da $q \geq p+2$ i $[p,q] \cap A = \{p,q\}$.*

Primjer 3.14 *Skup $\{n \in \mathbb{Z} \colon |n| > 1\}$ ima točno jednu prazninu i to $(-2,2)$.*

Propozicija 3.15 *Neka je $A \subset \mathbb{Z}$ i $f \colon A \to \mathbb{Z}$ neprekidna. Tada f ima neprekidno proširenje ako i samo ako za svaku prazninu (p,q) od A vrijedi jedan od sljedećih uvjeta:*

1. $|f(q) - f(p)| < q - p$
2. $|f(q) - f(p)| = q - p$ *i* $p \sim f(p)$.

Dokaz.

$\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $f \colon A \to \mathbb{Z}$ neprekidna funkcija koja ima neprekidno proširenje $g \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ i neka je (p,q) proizvoljna praznina od A. Prema Lemi 3.3 funkcija g je neprekidna i za svaki $x \in \mathbb{Z}$ takav da $x \not\sim g(x)$ $g(x \pm 1) = g(x)$. Kako je g Lip-1, za točke $p, q \in A$ vrijedi $|g(q) - g(p)| \leq q - p$, odnosno $|f(q) - f(p)| \leq q - p$, a to znači ili $|f(q) - f(p)| < q - p$ ili $|f(q) - f(p)| = q - p$. Preostaje pokazati da, ako je $|f(q) - f(p)| = q - p$, onda mora vrijediti $p \sim f(p)$. Prepostavimo suprotno, da je $p \not\sim f(p)$. Tada po Lemi 3.3 za proširenje mora vrijediti $g(p+1) = g(p) = f(p)$. Sad nam do q ostaje još $q - (p+1) = q - p - 1$ točaka u kojima proširenje g, zbog Lip-1 svojstva, može promijeniti vrijednost najviše za 1, odnosno sveukupno najviše $q - p - 1$. Tada bi vrijedilo $|f(q) - f(p)| = |f(q) - g(p+1)| \leq q - p - 1 < q - p$, što je u kontradikciji s pretpostavkom $|f(q) - f(p)| = q - p$. Dakle, mora vrijediti $p \sim f(p)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je $f \colon A \to \mathbb{Z}$ neprekidna funkcija takva da za svaku prazninu (p,q) na A vrijedi $|f(q) - f(p)| < q - p$ ili $|f(q) - f(p)| = q - p$ i $p \sim f(p)$. Treba

pokazati da postoji neprekidno proširenje $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.
Konstruiramo proširenje na točkama iz $\mathbb{Z} \setminus A$. Ako je $x \in \mathbb{Z} \setminus A$, $x \notin \langle p, q \rangle$ i $x < a$, za svaki $a \in A$, onda $g(x) = minA$, ako taj minimum postoji. Ako $x \in \mathbb{Z} \setminus A$, $x \notin \langle p, q \rangle$ i $x > a$, za svaki $a \in A$, onda $g(x) = maxA$, ako taj maksimum postoji. Neka je (p, q) proizvoljna praznina u A i $x \in \langle p, q \rangle$. Ako u nekom koraku dođemo do para točaka koje ne tvore prazninu, odn. $(q-1, q)$, onda je vrijednost $g(q-1)$ jedinstveno određena i to je zadnji korak konstrukcije proširenja. U suprotnom, konstrukciju provodimo po sljedećim slučajevima.

1° $|f(q) - f(p)| < q - p$

Definirajmo točku $p_2 := q - 1 - |f(q) - f(p)|$ i definirajmo proširenje na svim točkama od p do (uključivo) p_2: $g(i) = f(p)$, $i = p + 1, \ldots, p_2$. Sada za točke p_2 i q vrijedi

$$|g(q) - g(p_2)| = |f(q) - f(p)| = q - p_2 - 1 < q - p_2.$$

Ako $p_2 \not\sim g(p_2)$, onda definiramo $g(p_2 + 1) := g(p_2)$ pa slijedi $p_2 + 1 \sim g(p_2 + 1)$ i sad smo u slučaju 2 iz iskaza.
Ako $p_2 \sim g(p_2)$, onda $g(p_2 + 1)$ općenito nije jedinstveno određeno.
Posebno, ako je $|f(q) - f(p)| = q - p - 1$, proširenje je jedinstveno određeno. Tada je $p_2 = p$. Ako su p_2 i q susjedne točke, onda je $g(p_2) = g(q-1)$ jedinstveno određena. Ako je (p_2, q) praznina, moguća su dva podslučaja.

1.1° $p_2 \not\sim g(p_2)$

Slijedi $g(p_2 + 1) = g(p_2)$ i imamo $|g(q) - g(p_2 + 1)| = |g(q) - g(p_2)| = |f(q) - f(p)| = q - (p_2 + 1)$ pa ostatak konstrukcije provodimo po drugom slučaju iz iskaza.

1.2° $p_2 \sim g(p_2)$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo $f(p) < f(q)$. Ne smijemo definirati $g(p_2+1) = g(p_2)$ jer bi dobili $|g(q)-g(p_2+1)| = q-(p_2+1)$ i $p_2+1 \not\sim g(p_2+1)$, a takve praznine nemamo po pretpostavci iz iskaza. Ne smijemo ni definirati $g(p_2+1) = g(p_2) - 1$ jer tada za p_2 i q neće vrijediti Lip-1 svojstvo. Preostaje $g(p_2+1) = g(p_2)+1$. Ako je (p_2+1, q) nova praznina, onda je ona takva da $|g(q)-g(p_2+1)| = q-(p_2+1)-1$ pa smo ponovno u ovom posebnom slučaju. (Za $f(q) < f(p)$ konstruirali bi proširenje s $g(p_2+1) = g(p_2) - 1$.)

2° $|f(q) - f(p)| = q - p$ i $p \sim f(p)$

Očito vrijedi $q \sim f(q)$. Ne smijemo definirati $g(p+1) = f(p)$. Ako $p+1$ i q tvore prazninu, onda $(p+1, q)$ nova praznina i $q-p = |f(q)-f(p)| = |g(q)-g(p+1)| \leq q-p-1$, što je kontradikcija. Ako $p+1$ i q ne tvore prazninu, onda su susjedne točke (udaljene 1) čije su slike udaljene barem 2, što je kontradikcija s Lip-1. Dakle, $g(p+1)$ mora biti $f(p)-1$ ili $f(p)+1$.

2.1° $f(p) < f(q)$

Tada je $g(p+1) = f(p)+1$ jedinstveno određeno i po istom ovom podslučaju nastavljamo konstrukciju na $\langle p+1, q\rangle$ i dobivamo g koja je na tom intervalu strogo rastuća.

2.2° $f(p) > f(q)$

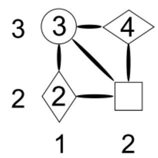
Tada je $g(p+1) = f(p)-1$ jedinstveno određeno i po istom ovom podslučaju nastavljamo konstrukciju na $\langle p+1, q\rangle$ i dobivamo g koja je na tom intervalu strogo padajuća.

■

Napomena 3.16 *Proširenje na $\langle p, q\rangle$, ako postoji, jedinstveno je ako vrijedi $|f(q) - f(p)| \geq q - p - 1$, dok u suprotnom proširenje nije jedinstveno.*

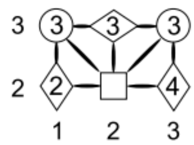
U Khalimskyjevoj ravnini uvjeti su nešto kompliciraniji. Kao što smo spomenuli, mješovite dijagonale opskrbljene su diskretnom topologijom pa je zato svaka funkcija na mješovitoj dijagonali neprekidna. Većina tih funkcija nisu Lip-1 pa se zato ne mogu proširiti.

Mješovita dijagonala očito je potpuno nepovezan prostor, no ni povezanost skupa A nije dovoljna da bi neprekidna funkcija na A bila proširiva. Npr. ako je skup A u obliku potkove kao na sljedećoj slici, taj skup je povezan, a funkcija f može biti neprekidna na A, a da pritom nije globalno Lip-1.



Slika 3.1: Neprekidna funkcija definirana na povezanom podskupu od $\mathbb{Z}^2$ koja nije (globalno) Lip-1 (Slika preuzeta iz [5])

S druge strane, iz jednodimenzionalnog slučaja u prethodnoj propoziciji vidi se da globalno Lip-1 svojstvo nije dovoljan uvjet. Dodatno, čak ni povezanost skupa A i f globalno Lip-1 nije dovoljan uvjet.



Slika 3.2: Neprekidna funkcija definirana na povezanom podskupu od $\mathbb{Z}^2$ koja je globalno Lip-1 ali nije proširiva (Slika preuzeta iz [5])

Postoji nužan uvjet za proširivost funkcije koji nije ispunjen ni u jednom od ovih primjera. Zato prvo definiramo novi pojam.

Definicija 3.17 *Neka je $A \subset \mathbb{Z}^n$ i $f\colon A \to \mathbb{Z}$ neprekidna. Neka su $x, y \in A$ različite točke. Ako je ispunjen jedan od sljedećih uvjeta za neki $i = 1, 2, \ldots, n$,*

1. $|f(x) - f(y)| < |x_i - y_i|$ *ili*
2. $|f(x) - f(y)| = |x_i - y_i|$ *i* $x_i \sim f(x)$,

kažemo da je funkcija jako Lip-1 s obzirom na (točke) x i y. Ako je funkcija jako Lip-1 s obzirom na svake dvije različite točke u A, onda kažemo da je f jako Lip-1.

Napomena 3.18 *Ako je drugi uvjet ispunjen za neku koordinatu i točaka x i y, onda slijedi i $y_i \sim f(y)$, zbog čega je relacija simetrična.*

Intuitivno, pojam da je funkcija f jako Lip-1 s obzirom na x i y možemo zamišljati kao da su x i y dovoljno udaljene u smjeru jedne koordinate da bi se funkcija neprekidno promijenila iz $f(x)$ u $f(y)$ u tom smjeru. Uz ovu definiciju moguće je jednostavno preformulirati iskaz Propozicije 3.15. Dakle, neprekidna funkcija $f\colon A \to \mathbb{Z}$ je neprekidno proširiva ako i samo ako je f jako Lip-1. U nastavku ćemo pokazati da to vrijedi i općenito.

Propozicija 3.19 *Ako je $f\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ neprekidna, onda je f jako Lip-1.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, odnosno da f nije jako Lip-1. To znači da postoje različite točke $x, y \in \mathbb{Z}^n$ takve da f nije jako Lip-1 s obzirom na x i y. Definirajmo $d := |f(x) - f(y)|$.
Budući da $x \neq y$, jasno je da $d > 0$. Neka je J indeksni skup za (konačan)

skup indeksa takav da $|x_i - y_i| = d$, ali $x_i \not\sim f(x)$. Neka je $k = |J|$. Definirajmo $x^0 = x$ i za svaki $i_j \in J$, $j = 1, 2, \dots, k$, neka je $x^j \in \mathbb{Z}^n$ točka jedan korak bliža točki y u smjeru i_j-te koordinate,

$$x^{j+1} = x^j + (0, 0, \dots, 0, \pm 1, 0, \dots, 0)$$

gdje je koordinata s ± 1 određena s i_j, a predznak je određen smjerom prema y. Ako je $J = \emptyset$, onda je definiran samo x^0. Uočimo da je za svaki $j = 1, 2, \dots, k$, $f(x^{j+1}) = f(x^j)$. Ovo vrijedi jer iz konstrukcije $f(x^j) \not\sim x^j_{i_j}$ i f je nužno separabilno neprekidna. Dakle, $f(x^k) = f(x)$. Također, za sve $i = 1, 2, \dots, n$ vrijedi $|x^k_i - y_i| < d = |f(x^k) - f(y)|$. No to je u kontradikciji s činjenicom da f mora biti Lip-1 s ozbirom na metriku d_∞. Dakle, f je jako Lip-1. ■

Za pokazati obrat potrebne su nam sljedeće dvije leme.

Lema 3.20 *Neka su $x, y \in \mathbb{Z}^n$ različite točke i $f\colon \{x, y\} \to \mathbb{Z}$ funkcija koja je jako Lip-1. Tada je moguće, za proizvoljnu točku $p \in \mathbb{Z}^n$, proširiti funkciju do $F\colon \{x, y, p\} \to \mathbb{Z}$ tako da F i dalje bude Lip-1.*

Dokaz. Neka je i indeks koordinate za koju je ispunjen jedan od uvjeta iz definicije jako Lip-1 funkcije. Tada postoji neprekidna funkcija $g\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ tako da $g(x_i) = f(x)$ i $g(y_i) = f(y)$ po Propoziciji 3.15. Definirajmo $h\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ s $h(z) = g(z_i)$. Očito h ispunjava uvjet za jako Lip-1 svojstvo u smjeru i-te koordinate za svaki par točaka pa je stoga h jako Lip-1. Iz konstrukcije dobivamo da $h(x) = g(x_i) = f(x)$ i slično $h(y) = f(y)$. Restrikcija funkcije h na skup $\{x, y, p\}$ je tražena funkcija. ■

Lema 3.21 *Neka je $A \subset \mathbb{Z}^n$ i $f\colon A \to \mathbb{Z}$ jako Lip-1 funkcija. Tada se f može proširiti na cijeli $\mathbb{Z}^n$ tako da proširenje i dalje bude Lip-1 funkcija.*

Dokaz. Ako je $A = \emptyset$ ili $A = \mathbb{Z}^n$, onda tvrdnja trivijalno vrijedi pa ne moramo razmatrati ove slučajeve.

Pokažimo prvo da u bilo kojoj točki u kojoj f nije definirana možemo dodefinirati f tako da nova funkcija idalje bude jako Lip-1.

Neka je $p \in \mathbb{Z}^n$ proizvoljna točka koja nije iz A. Za svaki $x \in A$ moguće je proširiti f do f^x definirane na $A \cup \{p\}$ tako da nova funkcija bude jako Lip-1 s obzirom na x i p, tako da dopustimo $f^x(p) = f(x)$. Jasno je da postoji minimalna vrijednost (označimo a^x) i maksimalna vrijednost (označimo b^x) koju $f^x(p)$ može postići ako je idalje jako Lip-1 s obzirom na x. Očito je da $f^x(p)$ također može postići svaku vrijednost između a^x i b^x. Stoga je skup svih mogućih vrijednosti interval $[a^x, b^x] \cap \mathbb{Z}$.

Definirajmo
$$R = \bigcap_{x \in A} [a^x, b^x] \cap \mathbb{Z}.$$
Ako je $R = \emptyset$, onda postoje x i y tako da $b^x < a^y$. Ovo znači da je nemoguće proširiti f u točki p tako da bude jako Lip-1 s obzirom na x i y. No to se ne može dogoditi prema prethodnoj lemi. Dakle, R ne može biti prazan.

Definirajmo $\tilde{f}(p)$ tako da bude najmanji cijeli broj u R, a $\tilde{f}(x) = f(x)$ za $x \in A$. Tada je $\tilde{f} \colon A \cup \{p\} \to \mathbb{Z}$ i dalje jako Lip-1.

Sada možemo iskoristiti ovaj rezultat kako bi rekurzivno definirali proširenje. Ako je A^C konačan, onda je to jednostavno - samo proširimo funkciju konačno mnogo puta koristeći prethodni rezultat. U suprotnom, neka je $(x_j)_{j \in \mathbb{Z}_+}$ indeksacija točaka u $\mathbb{Z}^n \setminus A$. Definirajmo $f_0 := f$ i za $n = 1, 2, \ldots$ neka je
$$f_{n+1} \colon A \cup \bigcup_{j=1}^{n+1} \{x_j\} \to \mathbb{Z}$$

proširenje od f_n u točki x_{n+1}. Konačno, definirajmo $g\colon \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}$ s

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{ako } x \in A \\ f_n(x) & \text{ako } x = x_n. \end{cases}$$

g je definirana na cijelom $\mathbb{Z}^n$ i restrikcija od g na A je funkcija f koja je jako Lip-1 pa je ona traženo proširenje. ■

Propozicija 3.22 *Neka je $A \subset \mathbb{Z}^n$ i $f\colon A \to \mathbb{Z}$ jako Lip-1 funkcija. Tada je f neprekidna.*

Dokaz. Kako po prethodnoj lemi uvijek možemo proširiti f na cijeli $\mathbb{Z}^n$ i restrikcija neprekidne funkcije je neprekidna funkcija, dovoljno je promatrati slučaj $A = \mathbb{Z}^n$. No iz definicije jako Lip-1 funkcije i iz karakterizacije neprekidne funkcije iz $\mathbb{Z}$ u $\mathbb{Z}$ jasno je da je takva funkcija separabilno neprekidna, a onda i neprekidna. ■ Navedimo glavni rezultat ovog poglavlja.

Teorem 3.23 (Neprekidna proširenja) *Neka je $A \subset \mathbb{Z}^n$ i $f\colon A \to \mathbb{Z}$ proizvoljna neprekidna funkcija. Tada se f može proširiti do neprekidne funkcije na cijelom $\mathbb{Z}^n$ ako i samo ako je f jako Lip-1.*

Dokaz. Nužnost slijedi iz Propozicije 3.19. Za dokazati dovoljnost, prvo koristimo Lemu 3.21 da bi pronašli jako Lip-1 proširenje na cijeli $\mathbb{Z}^n$, a zatim po prethodnoj propoziciji slijedi da je to proširenje neprekidno. ■

3.2.2 Graf-povezani skupovi

U ovom poglavlju uvest ćemo posebnu klasu povezanih skupova u $\mathbb{Z}^2$ koju ćemo nazivati graf-povezani skupovi. Pokazat ćemo da neprekidna funkcija definirana na takvom skupu uvijek ima neprekidno proširenje na cijeli $\mathbb{Z}^2$. Vrijedi i obrat - ako svaka neprekidna funkcija definirana na nekoj fiksnoj domeni ima neprekidno proširenje, onda je ta domena graf-povezan skup. Da bismo definirali graf-povezane skupove, prvo trebamo pronaći način za manipulirati mješovitim dijagonalama, budući da ne postoji graf koji povezuje dvije točke s iste mješovite dijagonale, što ćemo dokazati kasnije. Neka je sgn: $\mathbb{R} \to \{-1, 0, 1\}$ signum funkcija definirana s $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$ za $x \neq 0$ i $\text{sgn}(0) = 0$.

Definicija 3.24 *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}^2$ različite točke koje se nalaze na istoj mješovitoj dijagonali. Tada se sljedeći skup točaka*

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(a, b) = \{&(a_1, a_2 + sgn(b_2 - a_2)), (a_1 + sgn(b_1 - a_1), a_2), \\ &(b_1, b_2 + sgn(a_2 - b_2)), (b_1 + sgn(a_1 - b_1), b_2)\} \end{aligned}$$

naziva skup spojnih točaka od a i b.

Skup $\mathcal{C}(a, b)$ sastoji se od dvije točke ako je $||a - b||_\infty = 1$, dok u suprotnom sadrži četiri točke.

Primjer 3.25 *Ako je $a = (0, 1)$ i $b = (4, 5)$, onda*

$$\mathcal{C}(a, b) = \{(0, 2), (1, 1), (4, 4), (3, 5)\}.$$

Definicija 3.26 *Neka je I Khalimskyjev interval. Skup G nazivamo Khalimskyjev graf ako je G graf neprekidne funkcije $\varphi\colon I \to \mathbb{Z}$, odnosno*

$$G = \{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{Z}^2 \colon x \in I\} \tag{3.2}$$

ili

$$G = \{(\varphi(x), x) \in \mathbb{Z}^2 \colon x \in I\}. \tag{3.3}$$

Neka su $a = (a_1, a_2), b = (b_1, b_2) \in \mathbb{Z}^2$ proizvoljne. Za G kažemo da je graf koji povezuje a i b ako vrijedi i $\varphi(a_1) = a_2$ i $\varphi(b_1) = b_2$ (ako je graf tipa (3.2)) ili $\varphi(a_2) = a_1$ i $\varphi(b_2) = b_1$ (ako je graf tipa (3.3)).

Propozicija 3.27 *Neka su $a, b \in \mathbb{Z}^2$ različite točke. Tada postoji graf koji povezuje a i b ako i samo ako se a i b ne nalaze na istoj mješovitoj dijagonali.*

Dokaz. Pretpostavimo prvo da se a i b nalaze na istoj mješovitoj dijagonali i da $a_1 < b_1$ i $a_2 < b_2$. Kako je a mješovita točka, graf ne može napraviti dijagonalni korak u a - mora napraviti korak udesno ili gore. No ako napravi korak gore, onda u nekom trenutku kasnije mora napraviti korak udesno, ili obrnuto. To nije dopušteno u grafu.

Pretpostavimo zatim da se a i b ne nalaze na istoj mješovitoj dijagonali. Ako je a čista točka, onda možemo raditi dijagonalne korake prema b sve dok jedna koordinata ne postane jednaka odgovarajućoj koordinati od b. Tada napravimo korak okomito ili vodoravno dok ne dosegnemo b. Na taj način konstruirali smo graf.

Ako je a mješovita točka, onda po pretpostavci b nije na istoj dijagonali kao a pa možemo napraviti jedan korak vodoravno ili okomito prema b. Tada ćemo se nalaziti u čistoj točki, odakle možemo iskoristiti prethodnu konstrukciju.

■

Uočimo da ako se a i b nalaze na istoj čistoj dijagonali, graf koji ih povezuje jedinstven je između a i b. Taj graf mora se sastojati od dijagonalnih točaka.

Definicija 3.28 *Skup $A \subset \mathbb{Z}^2$ je graf-povezan ako za svake dvije različite točke a, b vrijedi jedno od sljedećeg:*

1. *A sadrži Khalimskyjev graf koji povezuje a i b*
2. *a i b nalaze se na istoj mješovitoj dijagonali i $\mathcal{C}(a, b) \subset A$.*

Graf-povezan skup očito je povezan. Sljedeći primjeri pokazuju da povezani skupovi nisu općenito graf-povezani.

Primjer 3.29 *Neka su* $f_i\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $i = 1, 2, 3, 4$ *neprekidne i pretpostavimo da za svaki* $n \in \mathbb{Z}$ *vrijedi* $f_1(n) \leq f_2(n)$ *i* $f_3(n) \leq f_4(n)$. *Tada je skup*

$$\{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 \colon f_1(x_1) \leq x_2 \leq f_2(x_1) \ i \ f_3(x_2) \leq x_1 \leq f_4(x_2)\}$$

graf-povezan.

Primjer 3.30 *Svaka čista dijagonala u* $\mathbb{Z}^2$ *je graf-povezan skup. Nijedna mješovita dijagonala u* $\mathbb{Z}^2$ *nije graf-povezan skup. Točnije, svaka mješovita dijagonala ima diskretnu topologiju i sastoji se od izoliranih točaka.*

Primjer 3.31 *Skup* $A = \{x \in \mathbb{Z}^2 \colon ||x||_\infty = 1\}$ *nije graf-povezan. Naime, ne postoji graf koji povezuje točke* $(-1, 0)$ *i* $(1, 0)$. *Međutim, skup* $A + (1, 0)$ *je graf-povezan. Dakle, translatirani graf-povezan skup ne mora biti graf-povezan i obrnuto. Oba skupa su povezani pa ovaj primjer pokazuje da graf-povezani skupovi tvore pravi podskup povezanih skupova.*

Teorem 3.32 *Neka je* $A \subset \mathbb{Z}^2$. *Neka se svaka neprekidna funkcija* $f\colon A \to \mathbb{Z}$ *može proširiti do neprekidne funkcije definirane na* $\mathbb{Z}^2$. *Tada je* A *graf-povezan skup.*

Dokaz. Pokazat ćemo da ako A nije graf-povezan, onda postoji neprekidna funkcija $f\colon A \to \mathbb{Z}$ koja nije jako Lip-1 i stoga nema neprekidno proširenje. Razmatrat ćemo dva moguća slučaja.
Slučaj 1: Postoje točke $a, b \in A$ koje nisu povezane grafom. Pretpostavimo da $a_1 \leq b_1$, $a_2 \leq b_2$ i da $b_1 - a_1 \geq b_2 - a_2$. Slijedi da se bilo koji graf između a i b može opisati kao slika $(x, \phi(x))$ intervala $[a_1, b_1] \cap \mathbb{Z}$. Graf možemo zamišljati kao putovanje od točke a do točke b. Ako se nalazimo u čistoj točki, možemo se kretati u tri smjera: dijagonalno gore/desno, dolje/desno ili vodoravno desno. Ako se, s druge strane, nalazimo u mješovitoj točki, možemo se kretati samo udesno. Kako trebamo dosegnuti b, postoji još jedno ograničenje:

ne smijemo prelaziti čiste dijagonale $\{(b_1 - n, b_2 \pm n) \colon n = 0, 1, 2, \ldots\}$ (ako je b čista točka) ili $\{(b_1 - n - 1, b_2 \pm n) \colon n = 0, 1, 2, \ldots\}$ (ako je b mješovita točka). Zapravo, ako dosegnemo jednu od stražnjih dijagonala, jedini način za doći do b putem grafa je slijediti dijagonalu prema b (i onda napraviti korak udesno ako je b mješovita točka).

Počnimo iz točke a i pokušajmo putovati grafom unutar A do točke b. Po pretpostavci to nije moguće - dosegnut ćemo točku c iz koje više nije moguće nastaviti. Postoje tri mogućnosti. U svakom od sljedeća tri podslučaja konstruirat ćemo neproširivu funkciju f.

Slučaj 1.1: c je čista točka i $A \cap M = \emptyset$, gdje je

$$M = \{(c_1 + 1, c_2), (c_1 + 1, c_2 \pm 1)\}.$$

Ako je c zatvorena točka, definirajmo $g \colon \mathbb{Z}^2 \setminus M \to \mathbb{Z}$ s:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako } x = c \\ 1 & \text{ako } x = (c_1, c_2 \pm 1) \\ x_1 - c_1 + 2 & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je c otvorena točka, definirat ćemo g tako da prethodnoj funkciji dodamo 1 u svakom od dijelova.

Lako se provjeri da je g neprekidna pa je i restrikcija $g|_A = f$ također neprekidna. No zbog $|f(b) - f(c)| = b_1 - c_1 + 2 = ||b - c||_\infty + 2$, f nije Lip-1 pa nije proširiva.

Slučaj 1.2: c je mješovita točka i $(c_1 + 1, c_2) \notin A$. Ako je c_1 neparan, definirajmo $g \colon \mathbb{Z}^2 \setminus \{c_1 + 1, c_2)\} \to \mathbb{Z}$ s:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako } x = c \\ x_1 - c_1 + 1 & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je c_1 paran, definiramo g tako da prethodnoj funkciji dodamo 1.
g je neprekidna pa je i restrikcija $g|_A = f$ neprekidna. Vrijedi $|f(b) - f(c)| = b_1 - c_1 + 1 = ||b - c||_\infty + 1$ pa f nije proširiva.
Slučaj 1.3: Dosegnuli smo stražnju dijagonalu i (ovisno o tome koja je točno dijagonala) točka $(c_1 + 1, c_2 + 1)$ ili $(c_1 + 1, c_2 - 1)$ nije u A. Promatrajmo prvi slučaj, kad $(c_1 + 1, c_2 + 1) \notin A$. Tada je ili $b = (c_1 + n, c_2 + n)$, $n \geq 2$ (b je čista točka) ili $b = (c_1 + n + 1, c_2 + n)$, $n \geq 2$ (b je mješovita točka). U oba slučaja i ako je c zatvorena točka, definiramo $g\colon \mathbb{Z}^2 \setminus \{(c_1 + 1, c_2 + 1)\} \to \mathbb{Z}$ s:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako } x_1 \leq c_1 \text{ i } x_2 \leq c_2 \\ 1 & \text{ako } x_1 = c_1 + 1 \text{ i } x_2 \leq c_2 \\ 1 & \text{ako } x_2 = c_2 + 1 \text{ i } x_1 \leq c_1 \\ 2 + \min(x_1 - c_1, x_2 - c_2) & \text{ako } x_1 > c_1 \text{ i } x_2 > c_2 \\ 2 & \text{inače.} \end{cases}$$

Kao i dosad, ako je c otvorena točka, ovoj funkciji trebamo dodati 1 da bi dobili neprekidnu funkciju.
Neka je $f = g|_A$ restrikcija. Ako je b mješovita točka, onda za neki cijeli broj $n \geq 2$ vrijedi

$$|f(c) - f(b)| = f(b) = 2 + \min\{b_1 - c_1, b_2 - c_2\} = 2 + n = ||c - b||_\infty + 1$$

pa f nije Lip-1. S druge strane, ako je b čista točka, onda $f(b) = ||c - b||_\infty + 2$ pa ni u ovom slučaju f nije Lip-1.
Slučaj 2: Za a i b na istoj mješovitoj dijagonali nedostaje spojna točka. Radi jednostavnosti, pretpostavimo da su lokacije točaka a i b iste kao u Slučaju 1. Pretpostavimo još da je $(a_1 + 1, a_2)$ točka koja nedostaje u A. Ako je a_1

neparan, definirajmo $g\colon \mathbb{Z}^2 \setminus \{(a_1+1, a_2)\} \to \mathbb{Z}$ s:

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{ako } x = a \\ x_2 - a_2 + 1 & \text{inače.} \end{cases}$$

Ako je a_1 paran, ovako definiranoj funkciji g dodamo 1. Dobivena funkcija g je neprekidna pa je i njena restrikcija $f = g|_A$ neprekidna. Također, vrijedi $|f(a) - f(b)| = ||a-b||_\infty + 1$ pa f ponovno nije proširiva. ■

Teorem 3.33 (Digitalni analogon Tietzeovog teorema) *Neka je A graf-povezan skup u $\mathbb{Z}^2$ i neka je $f\colon A \to \mathbb{Z}$ neprekidna funkcija. Tada se f može proširiti do neprekidne funkcije g na cijelom $\mathbb{Z}^2$. Nadalje, g se može izabrati tako da ima istu sliku kao f.*

Dokaz. Pokažimo prvo da je f jako Lip-1. Neka su $a, b \in A$ različite točke i pretpostavimo da se a i b ne nalaze na istoj mješovitoj dijagonali. Pretpostavimo da $|a_1 - b_1| \geq |a_2 - b_2|$ i da $a_1 < b_1$. Neka je $I = [a_1, b_1] \cap \mathbb{Z}$ i $\varphi\colon I \to \mathbb{Z}$ neprekidna funkcija takva da $a = (a_1, \varphi(a_1))$ i $b = (b_1, \varphi(b_1))$ i da je graf $\{(x, \varphi(x)) \in \mathbb{Z}^2 \colon x \in I\}$ sadržan u A. Egzistencija od φ slijedi iz graf-povezanosti skupa A i Propozicije 3.27. No onda je $\xi\colon I \to \mathbb{Z}$, $x \mapsto f(x, \varphi(x))$ neprekidna. Po Propoziciji 3.19 ξ je jako Lip-1, a kako vrijedi $\xi(a_1) = f(a)$ i $\xi(b_1) = f(b)$ i $||a-b||_\infty = b_1 - a_1$, slijedi da je f jako Lip-1 s obzirom na a i b.

Pretpostavimo da se a i b nalaze na istoj mješovitoj dijagonali i da $a_1 < b_1$ i $a_2 < b_2$. Tada su spojne točke $a + (1,0)$ i $a + (0,1)$ uključene u A. Sada je a po pretpostavci mješovita točka pa stoga f mora postići vrijednost $f(a)$ u jednoj od ovih točaka - označimo tu točku c. Iz prethodnog slučaja slijedi da je f jako Lip-1 s obzirom na c i b. No c je jedan korak bliže točki b nego točka a u smjeru jedne koordinate, a kako je $f(c) = f(a)$, zaključujemo da

je f jako Lip-1 s obzirom na a i b.
Pokazali smo da je f jako Lip-1 i po Teoremu o neprekidnim proširenjima, f je proširiva na cijeli $\mathbb{Z}^2$.
Dokažimo sad tvrdnju o slici. U procesu proširenja funkcije jasno je da uvijek možemo proširiti funkciju u točki x tako da

$$f(x) \in [\min_{p \in A} f(p), \max_{p \in A} f(p)] \cap \mathbb{Z}.$$

(Pretpostavka je da ovako postupamo u svakoj točki tako da ne promijenimo minimum i maksimum u proširenju.) No kako je A graf-povezan skup, a f mora biti Lip-1 prema grafovima, slika je već ovaj interval pa možemo zaključiti da proširenje čuva sliku. ■
Sljedeći korolar može poslužiti kao kriterij za provjeru je li dana funkcija proširiva.

Korolar 3.34 *Neka je $A \subset \mathbb{Z}^2$ i $f\colon A \to \mathbb{Z}$ funkcija. Neka je $G \subset \mathbb{Z}^2$ graf-povezan skup takav da je $A \subset G$. Tada se f može proširiti do neprekidne funkcije na cijelom $\mathbb{Z}^2$ ako i samo ako se f može proširiti do neprekidne funkcije na G.*

Ako je f definirana na relativno velikom skupu i ako odmah znamo da je f neprekidna na tom skupu, onda je često lakše provjeriti proširivost od f na nešto manjem, graf-povezanom skupu, nego provjeravati uvjet Teorema o neprekidnim proširenjima.

Literatura

[1] G.T. Herman, *Geometry of Digital Spaces*, Birkhäuser Boston, MA, 1998.

[2] C. O. Kiselman, *Digital Geometry and Mathematical Morphology, Lecture Notes, Spring Semester*, 2004.

[3] N. Koceić Bilan, *Osnove matematičke analize, Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu*, 2020.

[4] V. Matijević, *Uvod u opću topologiju, Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu*, 2020.

[5] E. Melin, *Connectedness and continuity in digital spaces with Khalimsky topology*, 2003.

[6] I. Slamić, R. Gašparić, *Jordanov teorem i primjene u digitalnoj obradi slika*, Osječki matematički list, 2019.