

# Analiza rješenja difuzijske jednadžbe u 2D na primjeru zagrijavanja metala

---

Marušić, Tin

Undergraduate thesis / Završni rad

2023

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:426730>

Rights / Prava: [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-30**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet

**Analiza rješenja difuzijske jednačbe u 2D na  
primjeru zagrijavanja metala**

Završni rad

Tin Marušić

Split, rujan 2023.

Prije svega želim zahvaliti mentorici Bernardi Lovrinčević na velikoj pomoći koju mi je pružila pri pisanju ovog rada te na tome što je uvijek bila susretljiva i dostupna za sva moja pitanja. Zahvaljujem i svim profesorima Fakulteta koji su mi u protekle tri godine prenijeli znanje bez kojeg ovaj rad ne bih mogao napisati. Također želim zahvaliti i autorima svih internetskih alata koji su mi poslužili kako bih ga napisao u što kraćem roku. Za kraj veliko hvala i mojoj obitelji i prijateljima koji su mi oduvijek bili podrška za ostvarivanje svih mojih ciljeva.

## Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet  
Odjel za fiziku  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

### Analiza rješenja difuzijske jednadžbe u 2D na primjeru zagrijavanja metala

Tin Marušić

Sveučilišni prijediplomski studij Fizika

#### Sažetak:

Difuzija topline je prijenos topline između točki različite temperature. Njeno detaljno proučavanje može nam omogućiti optimizaciju termodinamičkih procesa. Difuzija je opisana difuzijskom jednadžbom koju smo u ovome radu riješiti numerički, metodom konačnih razlika. Proučili smo što se događa promjenom koeficijenta difuzije, dimenzija metalne ploče te rubnih i početnih uvjeta. Uz to je pokazano da numerička rješenja imaju jako malu grešku u usporedbi sa analitičkim. Ovaj rad daje dobru podlogu za osnovno shvaćanje procesa difuzije te numeričkih metoda za rješavanje difuzijske jednadžbe. Daljnja istraživanja u ovom području mogla bi uključivati proširenje analize na trodimenzionalne sustave i uključivanje izvora topline kako bi se simulirali stvarni scenariji.

**Ključne riječi:** difuzijska jednadžba, koeficijent difuzije, metoda konačnih razlika, toplina, rubni uvjeti, temperaturni gradijent, termička izolacija

**Rad sadrži:** 27 stranica, 11 slika, 7 tablica, 11 literaturni navod. Izvornik je na hrvatskom jeziku.

**Mentor:** izv. prof. dr. sc. Bernarda Lovrinčević

**Ocjenjivači:** izv. prof. dr. sc. Bernarda Lovrinčević,  
izv. prof. dr. sc. Petar Stipanović,  
doc. dr. sc. Martina Požar

**Rad prihvaćen:** 18. rujna 2023.

Rad je pohranjen u Knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

<b>Basic documentation card</b>
---------------------------------

University of Split  
Faculty of Science  
Department of Physics  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Bachelor thesis

**Analysis of the solution of the diffusion equation in 2D on the example of metal heating**

Tin Marušić

University undergraduate study programme Physics

**Abstract:**

Heat diffusion is the transfer of heat between points at different temperatures. A detailed study of it can enable us to optimize thermodynamic processes. Heat diffusion is described by the diffusion equation, which we numerically solved in this thesis using the finite difference method. We investigated the effects of changing the diffusion coefficient, the dimensions of the metal plate, and the boundary and initial conditions. Additionally, we demonstrated that numerical solutions exhibit minimal errors when compared to analytical solutions. This thesis provides a solid foundation for understanding the heat diffusion process and numerical methods for solving the diffusion equation. Further research in this field could involve extending the analysis to three-dimensional systems and incorporating heat sources to simulate real-world scenarios.

**Keywords:** diffusion equation, diffusion coefficient, finite difference method, heat, boundary conditions, temperature gradient, thermal insulation

**Thesis consists of:** 27 pages, 11 figures, 7 tables, 11 references. Original language: Croatian.

**Supervisor:** Asoc. Prof. Dr. Bernarda Lovrinčević

**Reviewers:** Asoc. Prof. Dr. Bernarda Lovrinčević,  
Asoc. Prof. Dr. Petar Stipanović,  
Assist. Prof. Dr. Martina Požar

**Thesis accepted:** September 18, 2023.

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
1.1	Izvod 1D difuzijske jednadžbe	1
1.2	Poopćenje na više dimenzija	3
<b>2</b>	<b>Numeričke metode</b>	<b>5</b>
2.1	Metoda konačnih razlika	5
2.2	Stabilnost rješenja	8
<b>3</b>	<b>Konstrukcija algoritma</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b>Analitičko rješenje za ravnu ploču</b>	<b>11</b>
<b>5</b>	<b>Usporedba numeričkog i analitičkog rješenja</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Analiza rješenja</b>	<b>18</b>
6.1	Ovisnost o koeficijentu difuzije	18
6.2	Ovisnost o obliku ploče	20
6.3	Ovisnost o početnim i rubnim uvjetima	21
<b>7</b>	<b>Zaključak</b>	<b>26</b>

# 1 Uvod

Difuzija je proces koji proizlazi iz nasumičnog gibanja čestica iz područja više koncentracije u područje niže koncentracije. [1] Difuzijska jednačba opisuje rezultate tog gibanja te ima primjenu u raznim granama znanosti poput biologije, kemijskog inženjerstva, medicine i mnogih drugih. Za naš rad najvažnija će biti primjena u području provođenja topline. U ovome radu ćemo prvo izvesti jednačbu, riješiti je numeričkim metodama te ćemo pomoću tih rješenja proučavati prijenos topline kroz metal. Zagrijavanje metala jedan je od procesa koji ima dubok utjecaj na mikrostrukturne promjene i termičku stabilnost metala. Analiza rješenja difuzijske jednačbe za ovakav proces omogućuje precizno modeliranje distribucije temperature unutar metala tijekom zagrijavanja te pruža vrijedne informacije o brzini širenja topline i vremenu postizanja termičkog ravnotežnog stanja. Poznavajući te informacije moguće je optimizirati industrijske procese što na koncu dovodi do optimalnog ulaganja energije što je u današnje vrijeme iznimno važno.

## 1.1 Izvod 1D difuzijske jednačbe

Za početak razmotrimo jednodimenzionalni problem provođenja topline. Pretpostavimo da imamo homogenu izoliranu šipku tako da se toplina kroz nju prenosi samo uzduž šipke, a ne na okolinu. Ovaj primjer je opisan u literaturnom navodu [2] Ako šipku zagrijemo u jednoj točki toplina će se prenositi s točki više temperature na točke niže temperature. Taj će proces potrajati dok se temperature svih točki ne izjednače te ćemo tada imati šipku na konstantnoj temperaturi. Ako promotrimo infinitezimalni presjek šipke  $dx$ , njegova temperatura će se u vremenskom rasponu  $dt$  promijeniti za  $dT$  zbog prelaska topline  $Q_n$ . Odnos između  $Q_n$  i promjene temperature  $dT$  dan je relacijom:

$$Q_n = m \cdot c \cdot dT \quad (1.1)$$

,gdje je  $m$  masa šipke, a  $c$  specifični toplinski kapacitet materijala od kojeg je izrađena šipka. Budući da se masa može prikazati kao produkt poprečnog presjeka šipke, gustoće te infinitezimalnog presjeka šipke  $dx$ , izraz postaje:

$$Q_n = A \cdot \rho \cdot dx \cdot c \cdot dT \quad (1.2)$$

Budući da se toplina prenosi tijekom vremenskog intervala  $dt$  gornju jednačbu podijelit ćemo sa  $dt$ .

$$\dot{Q}_n = A \cdot \rho \cdot dx \cdot c \cdot \frac{dT}{dt} \quad (1.3)$$

U gornjoj jednačbi smo definirali brzinu protoka topline kao  $\dot{Q}_n = Q_n/dt$ . Jednačba opisuje učinke toplinskoga toka kroz šipku, ali ne i uzrok postojanja toka. Uzrok je, prema Fourierovu zakonu, postojanje temperaturnog gradijenta uzduž šipke. Fourierov zakon u diferencijalnoj

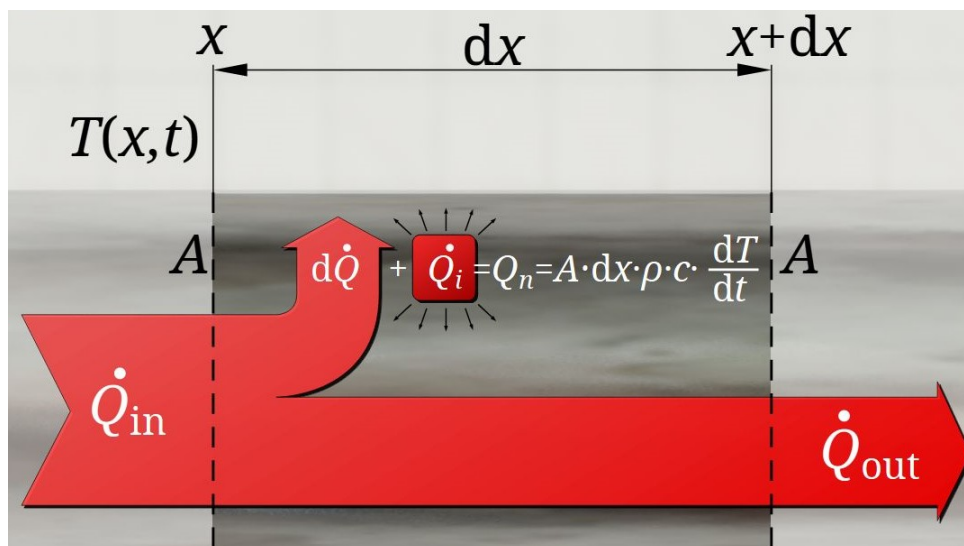
formi glasi:

$$\dot{Q} = -\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx} \quad (1.4)$$

, gdje je  $\lambda$  konstanta termalne provodljivosti materijala. Ovaj zakon očigledno govori da postojanje temperaturnog gradijenta uzrokuje toplinski tok te da su oni međusobno proporcionalni. Također minus u jednačbi označava da će toplina teći od točke s višom temperaturom prema točki s nižom temperaturom. Ukupnu toplinu koja proteče kroz element šipke duljine  $dx$  dobit ćemo kao razliku topline koja izlazi iz tog volumena,  $Q_{out}$  i topline koja u njega ulazi,  $Q_{in}$ . Ta razlika koja ostaje u volumenu se troši na njegovo zagrijavanje.

$$\dot{Q}_n = \dot{Q}_{out} - \dot{Q}_{in} = -d\dot{Q} \quad (1.5)$$

Radi lakšeg razumjevanja, proces prolaska topline kroz volumen šipke  $dV$  je prikazan na slici 1. Ukoliko je izlazna toplina veća od ulazne topline tada će se toplina odvoditi iz volumena te će se temperatura smanjiti. To je razlog zašto smo u jednačbi 1.5 dodali minus sa desne strane.



**Slika 1:** Prijenos topline kroz volumen šipke  $dV$ . (slika preuzeta s <https://www.tec-science.com/thermodynamics/heat/heat-equation-diffusion-equation/> [2])

Uvrštavanjem jednačbe (1.3) u 1.5 dobije se:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{A \cdot \rho \cdot c} \cdot \frac{d\dot{Q}}{dx} \quad (1.6)$$

Nadalje, korištenjem Fourierova zakona iz jednačbe (1.4) možemo se riješiti toplinskog toka te će tako prethodna jednačba ovisiti samo o temperaturi.

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{1}{A \cdot \rho \cdot c} \cdot \frac{d(-\lambda \cdot A \cdot \frac{dT}{dx})}{dx} \quad (1.7)$$



$$\frac{dT}{dt} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \frac{d^2T}{dx^2} \quad (1.8)$$

Iz jednadžbe (1.8) možemo zaključiti da je vremenska promjena temperature u nekoj točki je proporcionalna drugoj derivaciji razdiobe temperature (s obzirom na os  $x$ ), a ona odgovara promjeni temperaturnog gradijenta u razmatranoj točki. Ova jednadžba se naziva jednadžbom širenje topline te opisuje širenje topline za nestacionarno stanje.[2] Budući da temperatura ovisi o položaju i vremenu, matematički ispravno bi bilo obične derivacije u jednadžbi (1.8) zamijeniti parcijalnim.

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \cdot \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.9)$$

Sada možemo pobliže razmotriti faktor proporcionalnosti  $\lambda/\rho \cdot c$ . Očigledno je da će materijali sa većom toplinskom vodljivošću te manjom gustoćom i specifičnim toplinskim kapacitetom imati bržu vremensku promjenu temperature. Budući da su sve te veličine konstante za određeni materijal možemo definirati toplinski koeficijent difuzije  $\alpha$ .

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho \cdot c} \quad (1.10)$$

Ovaj koeficijent predstavlja mjeru brzine promjene temperature s određenom promjenom temperaturnog gradijenta.[2] Time jednadžba (1.9) postaje:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \alpha \cdot \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.11)$$

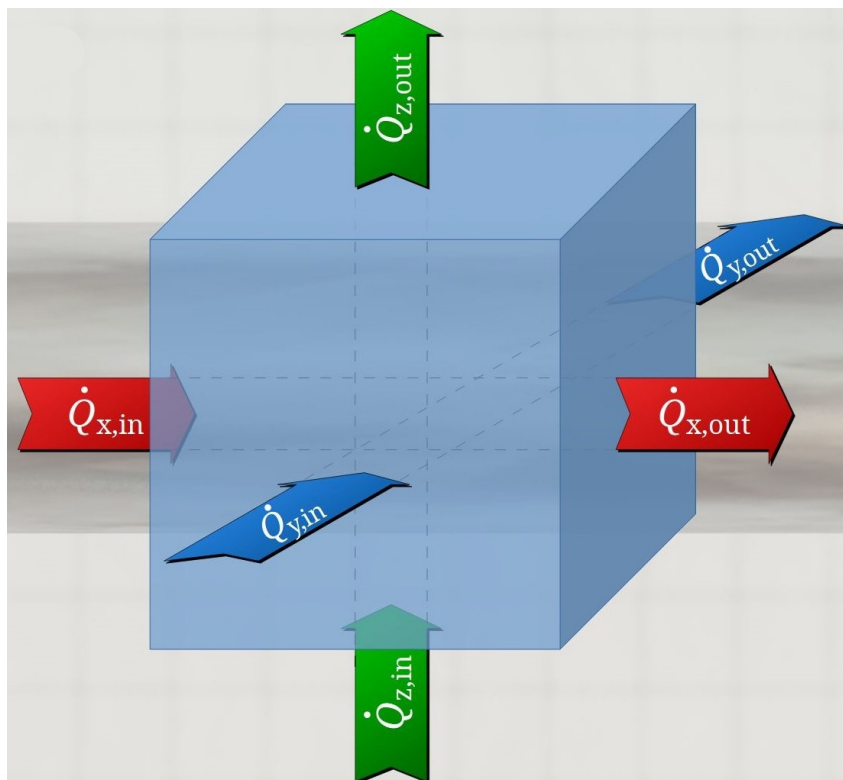
Ova jednadžba nam govori da ukoliko imamo razliku u temperaturama između nekih točaka, stvorit će se toplinski tok što dovodi do izjednačavanja temperature. Slična stvar će se događati ako imamo razliku u koncentracijama. Tada će se stvoriti maseni tok koji će dovesti do izjednačavanja koncentracija. Iz tog razloga difuzijska jednadžba ima isti oblik kao i jednadžba (1.11).

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = D \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.12)$$

U difuzijskoj jednadžbi  $u(x, t)$  označava koncentraciju u nekoj točki  $x$  u trenutku  $t$ , a  $D$  koeficijent difuzije. Budući da obe jednadžbe slijede iste zakone i imaju iste oblike širenje topline se može tumačiti i kao difuzija topline zbog čega ovaj rad analizira rješenja difuzijske jednadžbe.

## 1.2 Poopćenje na više dimenzija

U jednodimenzionalnom slučaju smo promatrali tok topline samo u  $x$  smjeru. Ukoliko imamo višedimenzionalni slučaj provođenja topline, tokove topline ćemo morati promatrati u više smjerova (u dva smjera za 2D, tri za 3D). Objasniti ćemo što se događa kada imamo 3D slučaj te ćemo kasnije taj zaključak lagano pojednostaviti za 2D.



**Slika 2:** Prijenos topline u tri dimenzije kroz volumen šipke  $dV$ . (slika preuzeta s <https://www.tec-science.com/thermodynamics/heat/heat-equation-diffusion-equation/> [2])

Na slici 2 je prikazan element volumena  $dV$  kroz koji protječu tokovi topline u  $x, y$  i  $z$  smjeru. U jednodimenzionalnom slučaju razlika između ulaznog i izlaznog toka topline je utjecala na zagrijavanje volumena. Za 3D slučaj možemo zaključiti da će razlika ulaznog i izlaznog toka, u svakom smjeru, također zagrijavati element volumena. To bi značilo da će ukupna promjena temperature u vremenu biti zbroj doprinosa promjena toplinskog toka u svim smjerovima.

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = D_x \cdot \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial x^2} + D_y \cdot \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial y^2} + D_z \cdot \frac{\partial^2 u(x, y, z, t)}{\partial z^2} \quad (1.13)$$

Oznake  $D_x$ ,  $D_y$  i  $D_z$  odgovaraju koeficijentima difuzije u određenim smjerovima. Ako je materijal izotropan, to znači da svojstva tog materijala nisu usmjerenja i koeficijenti difuzije su jednaki u svim smjerovima. Ova izotropnost olakšava matematički opis procesa difuzije jer omogućava upotrebu Laplaceovog operatora za opisivanje procesa, bez potrebe za razdvajanjem difuzije u pojedinačne smjerove.

$$\frac{\partial u(x, y, z, t)}{\partial t} = D \cdot \Delta u(x, y, z, t) \quad (1.14)$$

Sada je prelazak na 2D oblik jednadžbe trivijalan. Ako imamo toplinski tok u dva smjera, recimo  $x$  i  $y$ , imat ćemo i samo dva doprinosa koja uzrokuju promjenu temperature. Zbog

toga jednačbe (1.13) u 2D ima oblik:

$$\frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} = D_x \cdot \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} + D_y \cdot \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial y^2} \quad (1.15)$$

## 2 Numeričke metode

Parcijalne diferencijalne jednačbe (PDJ) definiraju ponašanje neke funkcije  $u$  koja ovisi o dvije ili više nezavisnih varijabli i sadrži forme koje uključuju parcijalne derivacije, samu funkciju  $u$  i varijable o kojima funkcija ovisi.[3] U fizici parcijalne diferencijalne jednačbe opisuju dinamičke procese i evoluciju sustava. Jedan od primjera takvih jednačbi je i difuzijska jednačba, ali i mnoge druge poput valne, Laplaceove i Schrodingerove jednačbe. Osnovna podjela PDJ je na linearne, kvazilinearne i nelinearne. Linearne PDJ su one jednačbe za koje koeficijenti uz derivacije ovise samo o nezavisnim varijablama  $x_1, x_2, \dots, x_n$ , a ne o samoj funkciji  $u$  ili njenim derivacijama. Kvazilinearna PDJ je ona za koju se parcijalne derivacije najvišeg reda u jednačbi pojavljuju linearno s koeficijentima koji su funkcije nezavisnih varijabli, same funkcije i njenih parcijalnih derivacija nižeg reda. Sve ostale PDJ nazivamo nelinearnim PDJ.[3] Primjer linearne PDJ je difuzijska jednačba. Budući da analitičko rješenje za ovu jednačbu često nije moguće pronaći, koristimo numeričke metode za dobivanje približnog rješenja. Postoje razne numeričke metode za rješavanje difuzijske jednačbe, ali mi ćemo se fokusirati na metodu konačnih razlika. Metoda konačnih razlika omogućava diskretizaciju prostora i vremena te pruža pristupačan okvir za konstrukciju numeričkog modela. Ova metoda omogućuje konkretno prilagođavanje različitim geometrijama i rubnim uvjetima, što je posebno važno u složenim problemima poput difuzije. Analizom osnovnih koncepta i primjera numeričkih simulacija, istražiti ću kako metoda konačnih razlika donosi korisne uvide u razumijevanje difuzijskih procesa u 2D prostoru.

### 2.1 Metoda konačnih razlika

Jedan od najjednostavnijih načina rješavanja PDJ je metoda konačnih razlika. U toj metodi derivacije funkcija se aproksimiraju konačnim razlikama. Na taj način umjesto diferencijalnih jednačbi, rješava se sustav algebarskih jednačbi. Na definiranoj domeni postavi se mjera čvorova gdje se računa vrijednost funkcije.[4] Definicija derivacije u točki  $x_0$  glasi:

$$\frac{d\phi}{dx}(x) \Big|_{x=x_0} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\phi(x_0 + h) - \phi(x_0)}{h} \quad (2.1)$$

Numerički ne možemo postaviti  $h$  tako da teži u nulu, ali možemo odabirom dovoljno malog  $h$  dobro aproksimirati derivaciju. Iako se ta aproksimacija čini pregruba, može se pokazati

razvojem u Taylorov red da daje jako dobre rezultate.

$$\phi'(x) \approx \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} \quad (2.2)$$

Ovaj izraz se naziva derivacijom unaprijed. Vrijede forme koje su numerički ekvivalentne[3]:

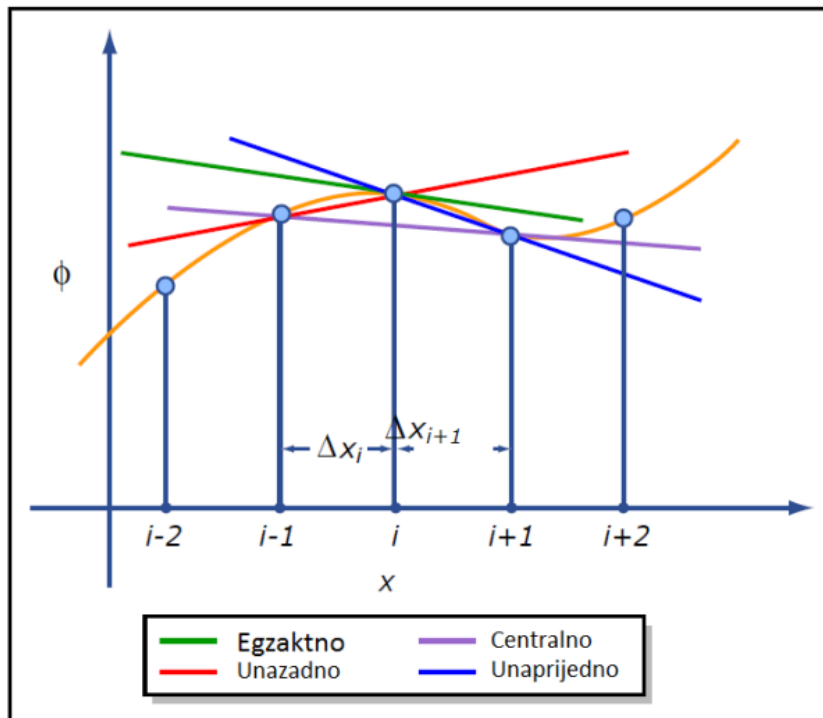
- Derivacija unazad:

$$\phi'(x) \approx \frac{\phi(x) - \phi(x-h)}{h} \quad (2.3)$$

- Središnja derivacija:

$$\phi'(x) \approx \frac{\phi(x+h) - \phi(x-h)}{2h} \quad (2.4)$$

Da bi bilo intuitivno jasno što svaka od ovih derivacija predstavlja, dodana je slika 3 koja prikazuje grafički prikaz koncepta. Očito je da izbor derivacije koju ćemo koristiti u računu ovisi o obliku funkcije koju želimo derivirati ili o određenom dijelu funkcije. Važno je naglasiti da bi se teoretska greška smanjila s odabirom manjeg koraka  $h$ , no u stvarnosti to nije uvijek slučaj. Prilikom računanja, sva računala rade s greškom zaokruživanja prilikom dijeljenja pa bi daljnje smanjenje koraka samo povećalo tu grešku. Iz tog razloga, ključno je odabrati optimalan korak  $h$  kako bi se osigurala najveća moguća točnost.



**Slika 3:** Usporedba rezultata numeričkih derivacija sa egzaktnim rješenjem (slika preuzeta iz Krešimir Duvnjak: Analiza i usporedba numeričkih metoda pri rješavanju biharmonijske jednačbe [4])

Derivaciju drugog reda koju nećemo detaljno objašnjavati, nego ćemo izraz za nju preuzeti iz literature.[3]

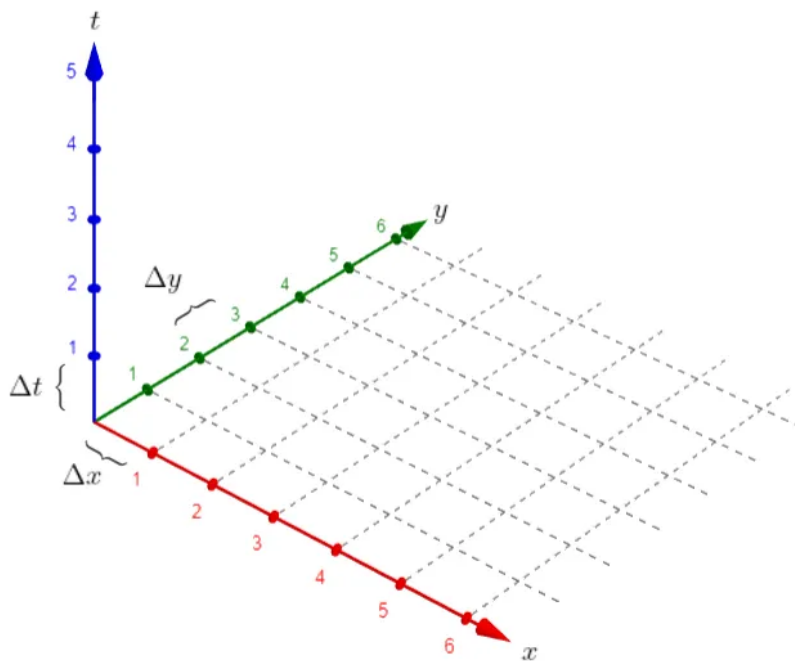
$$\ddot{f}(x) = \frac{f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h)}{h^2} \quad (2.5)$$

Nakon što smo detaljno objasnili numeričke derivacije, prijeći ćemo na konkretno rješavanje difuzijske jednačbe korištenjem metode konačnih razlika. Ova metoda nudi tri različita pristupa: eksplicitni, implicitni i Crank-Nicolsonov. U ovom radu koristit ćemo eksplicitni pristup koji se temelji na primjeni derivacija unaprijed. Prvo, provodimo diskretizaciju prostorne domene i vremenskog intervala  $x$ ,  $y$  i  $t$ , kako je ilustrirano na slici 4. Uvođenjem koraka  $\Delta x$ ,  $\Delta y$  i  $\Delta t$ , krećemo se kroz prostor i vrijeme koristeći indekse  $i, j$  i  $k$ . Ovako diskretizirana domena omogućava numeričku analizu difuzijske jednačbe. Definiramo jednačbe:

$$x = i\Delta x \quad (2.6)$$

$$y = j\Delta y \quad (2.7)$$

$$z = k\Delta z \quad (2.8)$$



**Slika 4:** Diskretizacija prostora ( $x$  i  $y$  koordinate) i vremena ( $t$  koordinata) za rješavanje 2d difuzijske jednačbe (slika preuzeta s <https://levelup.gitconnected.com/solving-2d-heat-equation-numerically-using-python-3334004aa01a> [5])

Sada korištenjem jednadžbi (2.2) i (2.5) možemo difuzijsku jednadžbu izraziti preko numeričkih aproksimacija za derivacije.

$$\frac{u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k}{\Delta t} = D_x \frac{u_{i+1,j}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k}{\Delta x^2} + D_y \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{\Delta y^2} \quad (2.9)$$

Pretpostavimo li da je materijal izotropan ( $D_x = D_y$ ) te odaberemo li da su koraci  $\Delta x$  i  $\Delta y$  jednaki ova jednadžba postaje dosta jednostavnija.

$$u_{i,j}^{k+1} = \alpha(u_{i+1,j}^k - 4u_{i,j}^k + u_{i-1,j}^k + u_{i,j+1}^k + u_{i,j-1}^k) + u_{i,j}^k \quad (2.10)$$

gdje je:

$$\alpha = D \frac{\Delta t}{\Delta x^2} \quad (2.11)$$

Jednadžba (2.10) je pogodnog oblika za računalnu obradu te samim time i za dobivanje rješenja difuzijske jednadžbe. Možemo primjetiti da je vrijednost funkcije  $u_{i,j}^{k+1}$  definirana je sa 6 prostornih točaka  $i + 1, i, i - 1, j + 1, j$  i  $j - 1$  u vremenskom koraku  $k$ . Ako je zadana funkcija  $f(x, y)$  kao početni uvjet prvi korak rješavanja je pridruživanje početne vrijednosti za  $t = 0$ :

$$u_{i,j}^0 = f(x_i, y_j) \quad (2.12)$$

Nakon što odredimo vrijednost funkcije  $u$  za sve točke u trenutku  $t = 0$  korištenjem jednadžbe (2.10) možemo odrediti vrijednost funkcije  $u$  u svim budućim trenucima. Metoda se naziva eksplicitna budući da se svaki sljedeći vremenski korak računa direktno iz vrijednosti funkcije  $u$  vremenskog prethodnog koraka.[3]

## 2.2 Stabilnost rješenja

Stabilnost rješenja znači da numerički algoritam ne bi trebao uzrokovati eksplozivno rastuće ili oscilirajuće vrijednosti tijekom vremena. U suprotnom, nestabilno rješenje može značajno narušiti točnost i pouzdanost numeričkog modela. Osiguranje stabilnosti u eksplicitnoj shemi u 2D prostoru je dano Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) uvjetom. Ovaj uvjet postavlja ograničenja na veličinu koraka vremena, prostornih koraka i difuzijskog koeficijenta. Nećemo detaljno izvoditi taj uvjet niti ga dokazivati nego ćemo ga samo preuzeti iz literature.[6]

$$2 \cdot \max(D) < \frac{\Delta x^2 + \Delta y^2}{\Delta t} \quad (2.13)$$

$\max(D)$  označava maksimalnu vrijednost koeficijenta difuzije ukoliko on nije konstantan.

### 3 Konstrukcija algoritma

Za numeričko rješavanje ove jednačbe koristit ćemo Python uz upotrebu biblioteka Numpy i Matplotlib. Prvi korak je definiranje prostornih i vremenskih intervala na kojima ćemo provoditi analizu. Konkretno trebamo odabrati intervale  $[x_0, x_n]$  i  $[y_0, y_n]$  za prostor te interval  $[t_0, t]$  za vrijeme. Također bitno je odabrati broj koraka za oba prostorna intervala kako bismo diskretizirali prostor. Ove informacije nam omogućuju izračun koraka  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ . Korak  $\Delta t$  ćemo sami definirati. Osim toga ključno je definirati vrijednost koeficijenta difuzije označenu s  $D$ .

---

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3 from matplotlib.animation import FuncAnimation
4
5 # Definiramo početne parametre
6 D = 0.001 #Koeficijent difuzije
7 Lx = 0.5 #Duljina ploce u x smjeru
8 Ly = 0.5 #Duljina ploce u y smjeru
9 nx = 100 # broj koraka u x smjeru
10 ny = 100 # broj koraka u y smjeru
11 dt = 0.005 # vremenski korak
12 tf = 5 # konacno vrijeme
13
14 #izracun prostornih koraka
15 dx = Lx/nx
16 dy = Ly/ny
17 alpha = D*dt/dx**2 #pokrata
```

---

Nakon što izračunamo vrijednosti za  $\Delta x$  i  $\Delta y$ , odmah ćemo provjeriti zadovoljavaju li uvjet stabilnosti rješenja, definiran jednačbom (2.13). Ukoliko uvjet nije zadovoljen postaviti ćemo program da se prekine i ispiše upozorenje.

---

```
1 r = D*(dt*dx**2+dt*dy**2) / (dx**2*dy**2)
2 if (r > 0.5):
3     raise TypeError('Nestabilno rjesenje')
4 else:
5     print(f"dx: {dx} \n dy: {dy}")
```

---

Da bismo započeli rješavanje ove jednačbe moramo postaviti odgovarajuće rubne i početne uvjete. U ovom slučaju koristit ćemo Dirichletove rubne uvjete, što znači da će temperature na rubovima ostati konstantne tijekom cijelog vremenskog intervala. Kako bismo pojednostavili stvar postaviti ćemo početne uvjete koji ne ovise o koordinatama  $x$  i  $y$ , već će biti konstantni

na cijeloj površini ploče. Osim toga definirat ćemo trodimenzionalni niz  $T$  koji će služiti za pohranu temperatura u svakoj iteraciji  $i$  u svakoj točki prostora.

---

```
1 # Rubni uvjeti
2 def rubni(x,y):
3     return 0
4 #Pocetni uvjet
5 def pocetni(x,y):
6     return 50
7
8 #3D niz za pohranu podataka
9 T = np.zeros((nx,ny,int(tf/dt)))
10
11 # postavljanje pocetnih uvjeta
12 for i in range(0,nx-1):
13     for j in range(1,ny-1):
14         T[i,j,0] = pocetni(j,i)
15
16 #postavljanje rubnih uvjeta
17 for i in range(0,nx):
18     T[i,0,0]=rubni(i,0)
19     T[i,ny-1,0]=rubni(i,ny-1)
20 for i in range(0,ny):
21     T[0,i,0]=rubni(0,i)
22     T[nx-1,i,0]=rubni(nx-1,i)
```

---

Nakon što smo postavili rubne i početne uvjete, možemo preći na glavni dio programa, a to je algoritam za primjenu jednačbe (2.10). Ovaj dio programa je vrlo jednostavan jer koristimo eksplinitni pristup u numeričkom računanju. Temelji se na činjenici da temperatura u trenutku  $k + 1$  ovisi samo o temperaturama u trenutku  $k$ . Algoritam funkcionira na sljedeći način: Za svaki vremenski trenutak  $k$  iteriramo kroz sve točke na površini i izračunavamo temperaturnu iteraciju za svaku točku koristeći jednačbu (2.10). Rezultate tih iteracija pohranjujemo u niz  $T$ . Nakon što prođemo kroz sve točke prelazimo na sljedeći vremenski korak i ponavljamo isti postupak. Ovaj proces se ponavlja sve dok ne dosegemo konačno vrijeme  $t$ .

---

```
1 for t in range (0,int(tf/dt)-1):
2     for i in range(1,(nx-1)):
3         for j in range (1,(ny-1)):
4             T[i,j,t+1] = alpha*(T[i+1,j,t] - 4*T[i,j,t] + T[i-1,j,t] +
                    T[i,j+1,t] + T[i,j-1,t] ) + T[i,j,t]
```

---



Time smo izračunali rješenja difuzijske jednačbe za ovaj slučaj. Budući da imamo pohranjene sve rezultate možemo ih grafički prikazati. Međutim to ćemo učiniti u kasnijem odjeljku rada kada budemo analizirali dobivena rješenja.

## 4 Analitičko rješenje za ravnu ploču

Kako smo već ranije spomenuli, difuzijska jednačba često predstavlja izazov za analitičko rješavanje i u većini slučajeva nema analitičkog rješenja. Međutim u nekim jednostavnim situacijama moguće je pronaći analitičko rješenje. U ovom radu ćemo se fokusirati na najjednostavniji slučaj, a to je difuzijska jednačba na ravnoj ploči s Dirichletovim rubnim uvjetima. Za rješavanje koristit ćemo metodu separacije varijabli i u tu svrhu tražimo rješenje u obliku:

$$u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t). \quad (4.1)$$

Uvrštavanjem ovog rješenja u jednačbu (1.15) dobivamo

$$X(x)Y(y)T'(t) = D[X''(x)Y(y)T(t) + X(x)Y''(y)T(t)] / : D \cdot X(x)Y(y)T(t) \quad (4.2)$$

$$\frac{T'(t)}{D \cdot T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} + \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (4.3)$$

Budući da u jednačbi (4.3) ovisi o samo jednoj koordinati možemo napisati da imamo jednačbu oblika

$$f(t) - g(x) - h(y) = 0 \quad (4.4)$$

Jedini način da ova jednačba bude točna je da svaka funkcija bude konstantna jer u suprotnom ako se  $f(t)$  promjeni, a funkcije  $g(x)$  i  $h(y)$  držimo na istom  $x$  odnosno  $y$  ova jednačba ne bi vrijedila.[7] Iz tog razloga jednačbu (4.3) možemo rastaviti na 3 zasebne.

$$X''(x) - B \cdot X(x) = 0 \quad (4.5)$$

$$Y''(y) - C \cdot Y(y) = 0 \quad (4.6)$$

$$T'(t) - (B + C) \cdot D \cdot T(t) = 0 \quad (4.7)$$

$B$  je konstanta koja odgovara vrijednosti funkcije  $X''(x)/X(x)$ , a  $C$  je konstanta koja odgovara vrijednosti funkcije  $Y''(y)/Y(y)$ . Prvo ćemo riješiti jednačbu (4.10). Za početak postavimo rubne uvjete:

$$X(0) = 0 \quad (4.8)$$

$$X(a) = 0 \quad (4.9)$$

, gdje je  $a$  duljina ploče u  $x$  smjeru. Budući da ne znamo predznak konstante  $B$  morat ćemo istražiti sve opcije (možda je  $B = 0$ ). [7] U prvom slučaju ćemo odabrati da je  $B = \mu^2 > 0$ . Taj uvjet daje jednačbu

$$X''(x) - \mu^2 \cdot X(x) = 0 \quad (4.10)$$

sa karakteristični polinomom

$$\lambda^2 = \mu^2 \Rightarrow \lambda = \pm\mu. \quad (4.11)$$

Nultočke karakterističnog polinoma imaju istu vrijednost, ali različit predznak zbog čega opće rješenje ima oblik:

$$X(x) = C_1 e^{\mu x} + C_2 e^{-\mu x} \quad (4.12)$$

Uvrstimo rubne uvjete u ovu jednačbu:

$$X(0) = C_1 + C_2 = 0 \Rightarrow C_1 = -C_2 \quad (4.13)$$

$$X(a) = C_1(e^{\mu a} - e^{-\mu a}) = 0 \quad (4.14)$$

Budući da  $a \neq 0$  jedino rješenje je  $C_1 = 0$  što je trivijalno rješenje. Za drugi slučaj odaberimo da je  $B = \mu^2 = 0$ . Uz taj uvjet dobivamo jednačbu oblika  $X''(x) = 0$ . Očito je da je rješenje ove jednačbe oblika:

$$X(x) = C_1 x + C_2 \quad (4.15)$$

Očigledno uvrštavanjem prvog rubnog uvjeta dobivamo  $C_2 = 0$ , a uvrštavanjem drugog  $C_1 = 0$  što su trivijalna rješenja. Još nam preostaje riješiti jednačbu u trećem slučaju  $B = -\mu^2 < 0$ .

$$X''(x) + \mu^2 X(x) = 0 \quad (4.16)$$

Nultočke karakterističnog polinoma su  $\lambda = \pm i\mu$  što bi značilo da je opće rješenje jednačbe (4.16) oblika:

$$X(x) = C_1 \cos(\mu x) + C_2 \sin(\mu x). \quad (4.17)$$

Uvrstimo rubne uvjete

$$X(0) = C_1 \cos(0) + C_2 \sin(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0 \quad (4.18)$$

$$X(a) = C_2 \sin(\mu a) = 0 \quad (4.19)$$

Netrivijalno rješenje koje zadovoljava ovu jednačbu je  $\mu = m\pi/a$ . Opće rješenje jednačbe (4.10) glasi:

$$X(x) = C \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \quad (4.20)$$

Jednačba (4.6) je identičnog oblika kao i (4.10) te će zbog toga i rješenje biti istog oblika. Jedina razlika je što drugi rubni uvjet za jednačbu (4.6) glasi  $Y(b) = 0$  zbog čega trebamo

zamjeniti  $a$  sa  $b$  u nazivniku argumenta sinusa.

$$Y(y) = C \sin\left(\frac{n\pi}{b}x\right) \quad (4.21)$$

Vrijednosti konstanti  $B$  i  $C$  su:

$$B = -\frac{m^2\pi^2}{a^2} \quad (4.22)$$

$$C = -\frac{n^2\pi^2}{b^2} \quad (4.23)$$

Još nam preostaje riješiti jednačbu 4.7. Nju ćemo podijeliti sa  $T(t)$  i integrirati te time dobivamo rješenje.

$$\ln(T(t)) = D(B + C)t + A_1 \quad (4.24)$$

$A_1$  je konstanta integracije. Uvrstimo iznose konstanti  $B$  i  $C$  te se riješimo funkcije ln.

$$T(t) = A \cdot \exp\left(-D\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)t\right) \quad (4.25)$$

Prema jednačbi (4.1) rješenje je:

$$u(x, y, t) = A_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp\left(-D\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)t\right) \quad (4.26)$$

Ova metoda dala nam je beskonačan skup rješenja (po jedno za svaki  $n$  i  $m$ ), dok ni jedno od njih samo po sebi ne zadovoljava rubne uvjete moguće ih je kombinirati da bi ih zadovoljili.[7] Kao što smo rekli, difuzijska jednačba je linearna zbog čega će linearna kombinacija rješenja prikazanih jednačbom (4.26) dati opće rješenje koje zadovoljava rubne uvjete.

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \exp\left(-D\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)t\right) \quad (4.27)$$

Još nam preostaje pronaći iznos konstante  $A_{nm}$ . Za početak definirajmo funkciju početnih uvjeta.

$$u(x, y, 0) = f(x, y) \quad (4.28)$$

Postavimo  $t = 0$  u jednačbi (4.27).

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) = f(x, y) \quad (4.29)$$

Da bismo odredili konstantu  $A_{nm}$  primjenit ćemo Fourierov trik.[7] Postupak se sastoji od toga da pomnožimo jednačbu(4.29) sa  $\sin\left(\frac{m'\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{b}y\right)$ , gdje su  $m'$  i  $n'$  pozitivni cijeli brojevi

te integriramo od 0 do  $a$  po  $x$  i od 0 do  $b$  po  $y$ .

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{nm} \int_0^a \int_0^b \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m'\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{b}y\right) dx dy \\ = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m'\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n'\pi}{b}y\right) dx dy \end{aligned} \quad (4.30)$$

Ovaj integral je riješen u literaturnom navodu [7]. Njegovo općenito rješenje je:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m'\pi}{a}x\right) dx = 0, m \neq m'; \frac{a}{2}, m = m' \quad (4.31)$$

Uvrštavanjem ovog rješenja u prethodnu jednačbu riješit ćemo se sume te dobiti iznos konstante  $A_{nm}$ .

$$A_{nm} \cdot \frac{a}{2} \frac{b}{2} = \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy \quad (4.32)$$

$$A_{nm} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy \quad (4.33)$$

Ovo je općenito rješenje difuzijske jednačbe za ravnu ploču sa Dirichletovim rubnim uvjetima. Konstruirajmo sada jedno konkretno rješenje koje ćemo usporediti sa numeričkim rješenjem. Zbog jednostavnosti odaberimo kvadratnu ploču duljine stranice 0.5 m te postavimo da je temperatura jednaka na cijeloj ploči i neka iznosi 50 °C. Uvrstimo te uvjete u jednačbu 4.33 te izračunajmo iznos konstante  $A_{nm}$ .

$$A_{nm} = 16 \cdot 50 \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b}y\right) dx dy \quad (4.34)$$

Općenito vrijedi:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{m\pi}{a}x\right) dx = \frac{1}{2m\pi} (1 - \cos(m\pi)) \quad (4.35)$$

Uvrstimo li to u jednačbu (4.34) dobivamo vrijednost konstante:

$$A_{nm} = 16 \cdot 50 \frac{1}{4mn\pi^2} (1 - \cos(m\pi))(1 - \cos(n\pi)) \quad (4.36)$$

Uvrstimo li to u jednačbu (4.27) dobivamo opće rješenje za ovaj slučaj.

$$\begin{aligned} u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 \cdot 50}{mn\pi^2} (1 - \cos(m\pi))(1 - \cos(n\pi)) \sin(2m\pi x) \sin(2n\pi y) \\ \cdot \exp(-4D\pi^2 (m^2 + n^2) t) \end{aligned} \quad (4.37)$$

## 5 Usporedba numeričkog i analitičkog rješenja

Da bismo dobili iznose funkcije  $u(x, y, t)$  u određenim točkama koristit ćemo numeričke metode za aproksimaciju sume jer su originalne sume beskonačne. Kako bismo odabrali gornje granice suma morat ćemo uzeti u obzir kompromis između točnosti i vremena izračuna. Veća granica za sumu donosi veću točnost, ali povećati će vrijeme izračuna. Da bismo mogli procijeniti točnost za odabranu granicu promatrat ćemo vrijednost funkcije u trenutku  $t = 0$  kada bi na cijeloj ploči temperatura trebala biti  $50\text{ }^\circ\text{C}$ . To ćemo učiniti za nekoliko točaka na ploči, a rezultati su prikazani u tablici 1.

$x$ [m]	$y$ [m]	$T$ [ $^\circ\text{C}$ ]	Pogreška [%]	$t$ [s]
0.1	0.1	49.784	-0.43	0.975
0.2	0.2	49.866	-0.268	0.972
0.4	0.3	49.825	-0.35	0.963
0.5	0.5	$7.95 \cdot 10^{-26}$	$\approx 0$	0.955

**Tablica 1:** Analitičkih rezultata difuzije na ravnoj ploči za gornju granicu sume  $n = m = 500$

Vrijeme smo mjerili pomoću funkcije *time* iz biblioteke *time*, a pogrešku smo računali po formuli

$$\sigma = \frac{T - T_0}{T_0} \cdot 100 \quad (5.1)$$

$T_0$  predstavlja temperaturu u početnom trenutku i iznosi  $50^\circ\text{C}$ . Iz rezultata možemo zaključiti da za sve točke dobivamo približno jednaku pogrešku i vrijeme trajanja izračuna. Zbog toga ćemo u idućem koraku promatrati točnost u samo jednoj točki. Očekivano za rubne uvjete smo dobili odličan rezultat budući da kada uvrstimo rubne točke u jednačbu (4.37) vrijednosti funkcija sinus će biti nula što će rezultirati time da cijelo rješenje bude nula. Mi smo za rubni uvjet dobili neku vrijednost što je rezultat numeričke pogreške. Ipak ta pogreška je reda  $10^{-26}$  iz čega možemo zaključiti da su numeričke pogreške u ovom izračunu minimalne. Usporedba pogrešaka za različite odabire granica  $n$  i  $m$  su prikazane u tablici 2.

$n=m$	$T$ [ $^\circ\text{C}$ ]	Pogreška[%]	$t$ [s]
200	49.460	-1.080	0.139
500	49.784	-0.432	0.975
1000	49.891	-0.218	3.811
1500	49.927	-0.146	8.888
2000	49.946	-0.108	15.324
5000	49.978	-0.044	49.989
10000	49.989	-0.022	453.921

**Tablica 2:** Usporedba analitičkih rezultata u ovisnosti o gornjoj granici sume

Kao što smo predviđali povećanje gornje granice sume poboljšava točnost. U idealnom slučaju, s neograničenim resursima, postigli bismo gotovo savršene rezultate. Međutim, u ovom radu, zadovoljit ćemo se pogreškom od 0.15% i postaviti gornju granicu sume na 1500. Sljedeći korak je izračun numeričkih rješenja za isti problem. Izradit ćemo više rješenja koristeći različite vremenske i prostorne korake. Dobivene rezultate usporedit ćemo s analitičkim rješenjem te izračunati pogreške. Na temelju tih pogrešaka odabrat ćemo idealne vremenske i prostorne korake za naš daljnji rad. S obzirom na simetriju ploče pretpostavljamo da će pogreška biti ista za točke koje su jednako udaljene od rubova po  $x$  i  $y$  koordinatama. Stoga ćemo odabrati 3 točke na različitim udaljenostima od rubova kako bismo usporedili rezultate u više vremenskih trenutaka  $t$ . Prva točka bit će udaljena 0.1 metara od rubova po  $x$  i  $y$  koordinatama, druga točka će biti udaljena 0.2 metra od rubova po  $x$  i  $y$  koordinatama, dok će treća točka biti udaljena 0.25 metara od ruba po  $x$  i 0.1 metara od ruba po  $y$  koordinati. Prostorni korak koji smo odabrali bit će prilično velik i iznositi će 0.05 metara, dok će vremenski korak iznositi 0.01 sekundu. Dobiveni rezultati koristeći ove korake nalaze se u tablici 3. U tablici  $\sigma$  označava pogrešku koja je izračunata prema sljedećoj formuli:

$$\sigma = \frac{T(x, y, t)_{\text{numeriki}} - T(x, y, t)_{\text{analiticki}}}{T(x, y, t)_{\text{analiticki}}} \cdot 100 \quad (5.2)$$

Vrijednosti analitičkih rješenja u svim točkama nalaze se u tablici 4. Ovaj izračun je napravljen za srebrnu ploču zbog čega koeficijent difuzije iznosi  $1.66 \cdot 10^{-4} \text{m}^2/\text{s}$ . [8]

$t[\text{s}]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	44.02	-11.95
2	39.03	-21.93
4	31.37	-36.5
7	23.72	-48.72
10	18.8	-55.32

(a) Točka (0.1,0.1)

$t[\text{s}]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	0
2	49.97	-0.06
4	49.79	-0.42
7	49.13	-0.73
10	48.04	-3.82

(b) Točka (0.2,0.2)

$t[\text{s}]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	46.91	-6.16
2	44.17	-11.64
4	39.66	-20.31
7	34.41	-28.46
10	30.50	-33.80

(c) Točka (0.25,0.1)

**Tablica 3:** Pogreške numeričkog računa za vrijednost vremenskog koraka od 0.01 s i prostornog od 0.05 m

Očekivano, za veliki vremenski i prostorni korak smo dobili jako loša rješenja. Iz dobivenih možemo zaključiti da se difuzija događa prebrzo zbog velikih prostornih koraka što posljedično dovodi do grubljih aproksimacija derivacije u eksplicitnoj metodi.

$t[s]$	$T[^\circ\text{C}]$
1	50
2	49.99
4	49.40
7	46.27
10	42.08

(a) Točka (0.1,0.1)

$t[s]$	$T[^\circ\text{C}]$
1	50
2	50
4	50
7	50
10	49.95

(b) Točka (0.2,0.2)

$t[s]$	$T[^\circ\text{C}]$
1	50
2	49.99
4	49.70
7	48.10
10	45.87

(c) Točka (0.25,0.1)

**Tablica 4:** Analitička rješenja za tri točke u kojima smo uspoređivali rješenje

Pokušajmo doći do točnijih rješenja smanjenjem vremenskog koraka za 10 puta, a prostornog za 5 puta čime ćemo dobiti bolje aproksimacije derivacija. Dobiveni rezultati se nalaze u tablici 5.

$t[s]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	0
2	49.91	-0.16
4	48.51	-1.79
7	43.89	-5.14
10	38.81	-7.77

(a) Točka (0.1,0.1)

$t[s]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	0
2	50	0
4	50	0
7	49.99	-0.02
10	49.88	-0.12

(b) Točka (0.2,0.2)

$t[s]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	0
2	49.95	-0.07
4	49.25	-0.90
7	46.85	-2.60
10	44.05	-3.97

(c) Točka (0.25,0.1)

**Tablica 5:** Pogreške numeričkog računa za vrijednost vremenskog koraka od 0.001 s i prostornog od 0.01 m

Rezultati su prihvatljivi te za prvih 10 sekundi difuzije daju pogrešku manju od 10%. Izračun svih ovih vrijednosti je trajao približno 41 sekundu što daje prostora za daljnje smanjenje koraka te poboljšanje rješenja. Sljedeći izračun smo radili za dvostruko manje korake te smo dobili pogreške koje su prikazane u tablici 6.

$t[s]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	0
2	49.99	0
4	49.37	-0.06
7	46.24	-0.06
10	42.06	-0.05

(a) Točka (0.1,0.1)

$t[s]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	0
2	50	0
4	50	0
7	49.99	-0.02
10	49.93	-0.05

(b) Točka (0.2,0.2)

$t[s]$	$T[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	0
2	49.99	0
4	49.54	-0.34
7	47.56	-1.15
10	45.03	-1.83

(c) Točka (0.25,0.1)

**Tablica 6:** Pogreške numeričkog računa za vrijednost vremenskog koraka od 0.0005 s i prostornog od 0.005 m za srebrnu ploču

Sve pogreške su iznosile manje od 2% što su izvrsni rezultati za naš algoritam. Trajanje izvršavanja koda iznosilo je oko pet i pol minuta što je u potpunosti prihvatljivo. Izračunat ćemo još jedno rješenje koristeći iste korake, ali s različitim koeficijentom difuzije za tri različite točke. Usporedit ćemo ta rješenja s analitičkim rješenjem kako bismo se uvjerali da točnost ne

ovisi značajno o koeficijentu difuzije. Neka ovaj put ploča bude od čelika sa 1% ugljika čiji koeficijent difuzije iznosi  $1.17 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$ . [8] Dobiveni rezultati prikazani su u tablici 7 gdje  $T_n$  označava numeričko rješenje, a  $T_a$  analitičko.

$t[\text{s}]$	$T_n[^\circ\text{C}]$	$T_a[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	50	0
5	49.88	49.99	-0.21
10	48.77	49.55	-1.58
15	46.82	48.36	-3.20
20	44.65	46.77	-4.55

(a) Točka (0.25,0.04)

$t[\text{s}]$	$T_n[^\circ\text{C}]$	$T_a[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	50	0
5	50	50	0
10	49.97	50	-0.05
15	49.80	49.93	-0.27
20	49.40	49.72	-0.65

(b) Točka (0.25,0.06)

$t[\text{s}]$	$T_n[^\circ\text{C}]$	$T_a[^\circ\text{C}]$	$\sigma[\%]$
1	50	50	0
5	49.99	50	-0.01
10	49.79	49.95	-0.32
15	49.11	49.62	-1.03
20	48.05	48.696	-1.85

(c) Točka (0.1,0.5)

**Tablica 7:** Pogreške numeričkog računa za vrijednost vremenskog koraka od 0.0005 s i prostornog od 0.005 m za čeličnu ploču.

Iz tablice primjećujemo da su pogreške ostale u sličnom rasponu čak i nakon što smo promijenili koeficijent difuzije i točke na kojima promatramo temperaturu. Pogreške se kretale u rasponu do 2% tijekom prvih 10 sekundi i do 5% tijekom dvadeset sekundi difuzije. Ovaj rezultat je iznimno zadovoljavajuć za naš rad pa ćemo ove korake koristiti u daljnjoj analizi rješenja jednačbe.

## 6 Analiza rješenja

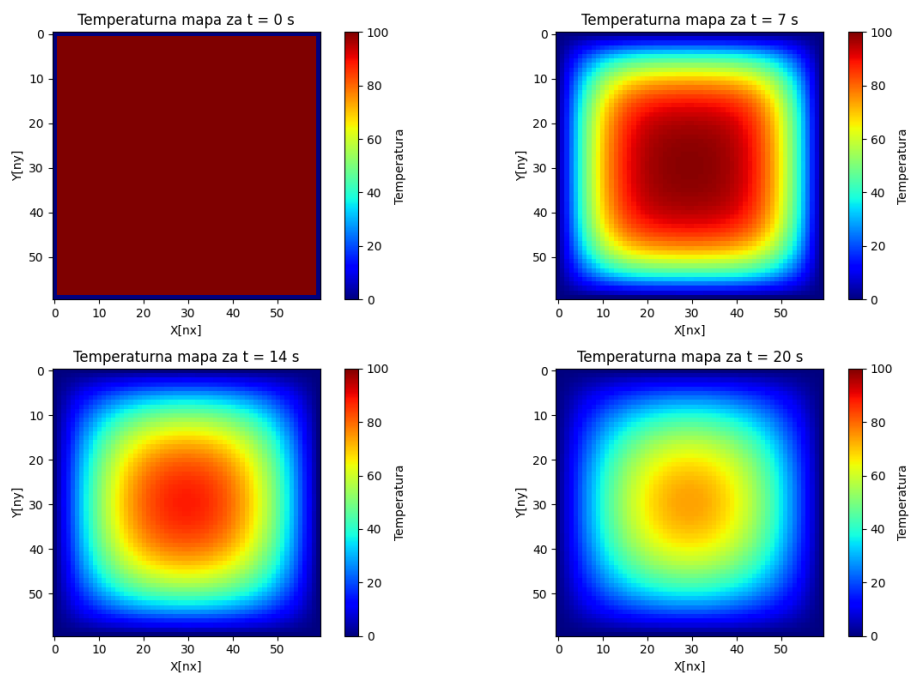
U ovom odjeljku analizirat ćemo kako različite vrijednosti početnih uvjeta, rubnih uvjeta, veličine ploče i koeficijenta difuzije utječu na tijek difuzije. Na temelju dobivenih podataka izvest ćemo zaključke o prirodni procesa difuzije i razumijevanju njegove osnovne dinamike.

### 6.1 Ovisnost o koeficijentu difuzije

Usporedimo brzinu difuzije za dvije ploče od različitih materijala. Neka jedna bude srebrna, a druga čelična. Koeficijenti difuzije za srebro i čelik su navedeni ranije u radu. Uzeti ćemo da su obe ploče kvadratne, duljine stranice 0.3 m te ćemo promatrati difuziju u prvih 20 sekundi. U početnom trenutku cijele ploče ćemo postaviti na temperaturu  $100^\circ\text{C}$ , a rubove ćemo držati

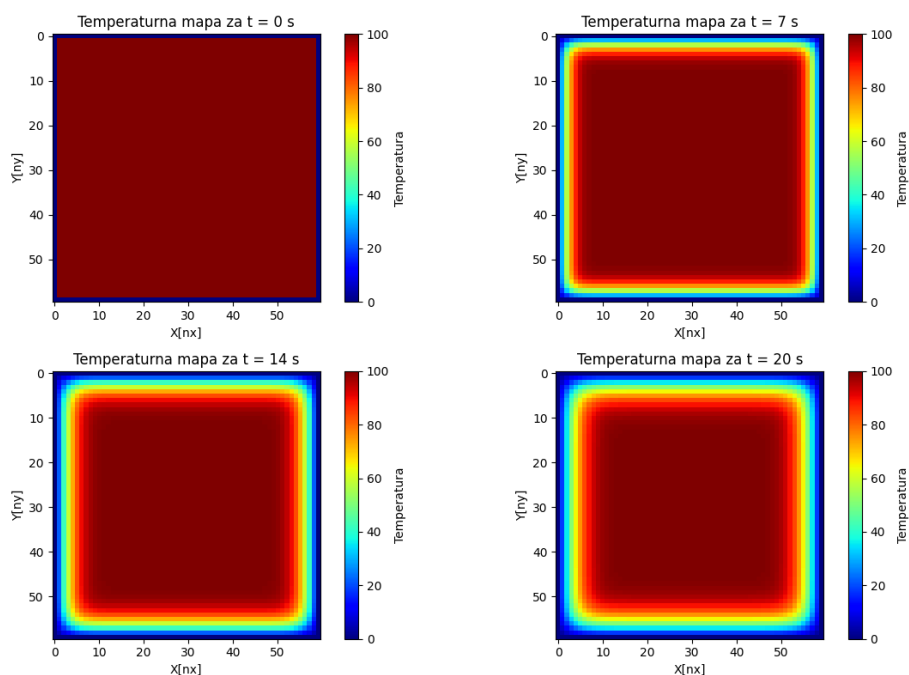


na 0°C tokom svih 20 s. Rezultati dobiveni za srebrenu ploču nalaze se na slici 5, gdje  $n_x$  i  $n_y$  označava broj točaka na osima u kojima smo računali temperaturu.



Slika 5: Difuzija topline na srebrnoj ploči koeficijenta difuzije  $1.66 \cdot 10^{-4} m^2/s$ .

Potpuno isti postupak smo napravili za čeličnu ploču te dobili, ali smo dobili poprilično različit rezultat. Taj rezultat je prikazan na slici 6.



Slika 6: Difuzija topline na čeličnoj ploči koeficijenta difuzije  $1.17 \cdot 10^{-5} m^2/s$ .

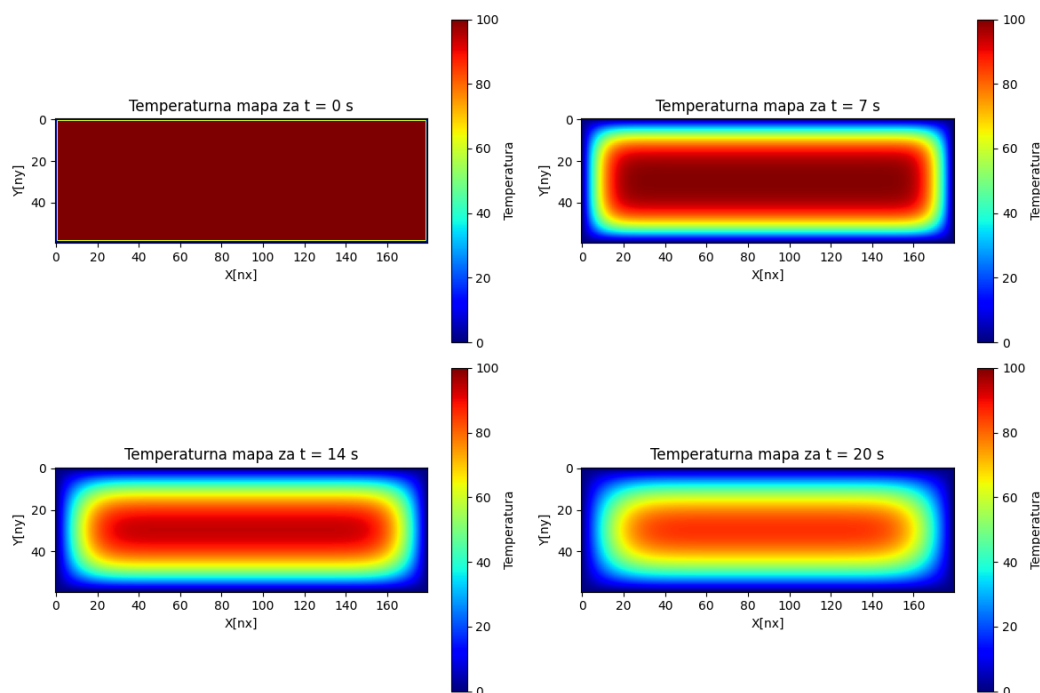
Očigledno proces difuzije je dosta brži na ploči sa većim koeficijentom difuzije. Taj rezultat je u skladu sa prvim Fickovim zakonom koji glasi:

$$J = -D \frac{\partial C}{\partial t} \quad (6.1)$$

, gdje je  $J$  brzina odvijanja procesa difuzije ili brzina prijenosa mase,  $D$  je koeficijent difuzije, a zadnji član predstavlja gradijent koncentracije.[9] U našem slučaju, brzina difuzije ( $J$ ) predstavlja toplinski tok dok će član sa parcijalnim derivacijama predstavljati gradijent temperature. Početni gradijent temperature bio je isti u našim prethodnim primjerima pa će brzina difuzije biti proporcionalna koeficijentu difuzije. Kako je koeficijent difuzije srebra približno 14 puta veći od koeficijenta difuzije čelika, u početku će brzina difuzije srebra biti otprilike 14 puta veća od difuzije čelika. Tijekom vremena ta razlika će se smanjivati zbog bržeg smanjenja gradijenta temperature srebra, ali će i dalje ostati značajna. Analizom rezultata difuzije srebra prikazanih na slici 5, uočavamo smanjenje brzine difuzije kako vrijeme prolazi što je posljedica smanjenja gradijenta temperature. Ovaj numerički pristup omogućuje nam eksperimentalno potvrđivanje fizikalne točnosti Fickovog zakona difuzije.

## 6.2 Ovisnost o obliku ploče

Uzmimo iste početne uvjete kao i u prethodnom primjeru za srebrenu ploču. Jedina promjena je što ćemo oblik ploče promijeniti tako da jedna stranica bude duljine 0.3 m, a druga 0.9 metara. Dobiveni rezultati prikazani su na slici 7.



**Slika 7:** Difuzija topline na srebrenoj pravokutnoj ploči koeficijenta difuzije  $1.66 \cdot 10^{-4} m^2/s$ .

Usporedimo li ovo rješenje sa slikom 5 možemo doći do zanimljivog zaključka. Geometrija ploče u ovome slučaju praktički nije utjecala na rezultate tokom prvih 20 sekundi. Uzrok tome možemo pronaći u tome što na obe ploče, u tom vremenskom rasponu, je prisutan sličan temperaturni gradijent. Ipak sa slike 5 vidimo da je nakon 20 s središte ploče palo ispod početne temperature što bi značilo da se temperaturni gradijent počinje smanjivati. Za pravokutnu ploču to nije slučaj te središte nakon 20 sekundi zadržava visoku temperaturu. Iz svega toga zaključujemo da geometrija ploče ne utječe značajno na proces difuzije u ovom slučaju, nego razlike koje uočavamo su posljedica toga da pravokutna ploča ima veću površinu, a samim time i više topline u početnom trenutku. Značajan utjecaj geometrije ploče bi se mogao uočiti ako je geometrija takva da će se stvarati različiti temperaturni gradijenti tokom vremena. Međutim, postojanje različitih temperaturnih gradijenata je češće posljedica nehomogenih početnih uvjeta.

### 6.3 Ovisnost o početnim i rubnim uvjetima

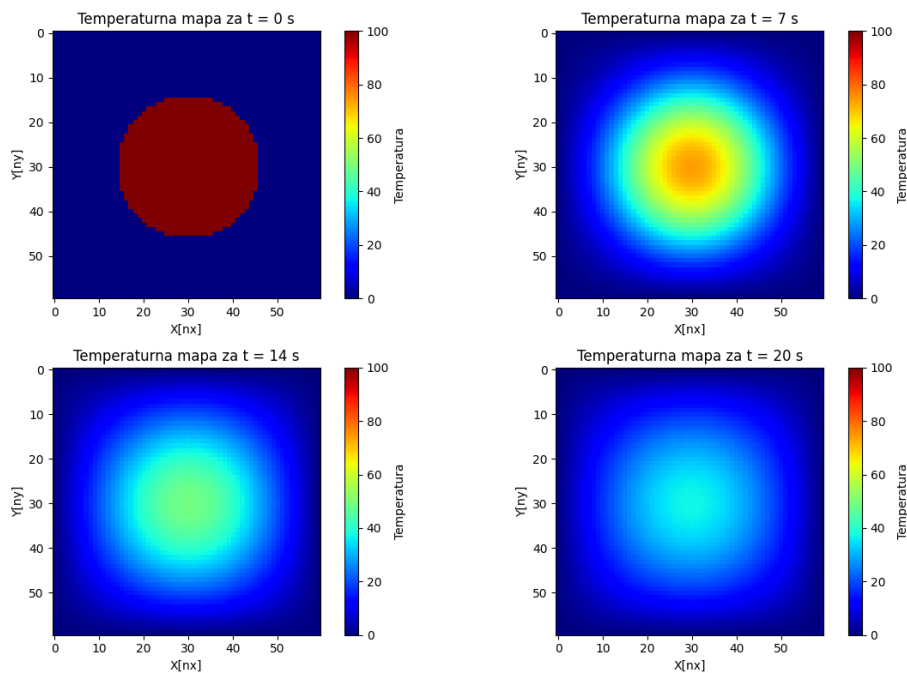
Kako smo već ranije naveli početni i rubni uvjeti daju jedinstvenost rješenja difuzijske jednačbe. Mi ćemo u ovom odjeljku promotriti nekoliko njih te doći do zaključaka kako utječu na rješenja. Za početak postavimo početne uvjete tako da krug u središtu ploče bude na temperaturi 100 °C, a ostatak ploče neka bude na 0°C.

---

```
1 def pocetni(x, y):
2     r = np.sqrt(pow(x-0.15/dx, 2)+pow(y-0.15/dy, 2))
3     if r < 0.08/dx:
4         return 100
5     else:
6         return 0
```

---

Vrijednosti  $x$  i  $y$  koordinata skalirali smo prostornim korakom radi jednostavnosti pohrane rezultata u nizu. Rubne uvjete zadržali smo istim kao u prethodnim primjerima. Rješenje koje smo dobili prikazano je na slici 8 i prilično je slično prethodnim rješenjima. Toplina se i dalje širi u smjeru gradijenta, a brzina širenja s vremenom opada. Međutim, možemo primijetiti sa slika da je dio topline napustio ploču, budući da rubove održavamo na konstantnoj temperaturi. Pogledajmo što bi se dogodilo da je ploča izolirana, odnosno da toplina ne napušta ploču.



**Slika 8:** Difuzija topline na srebrnoj ploči sa vrućim krugom u sredini

Da bismo postigli termičku izoliranost ploče, potrebno je promijeniti rubne uvjete. Ako želimo da toplina ne napušta ploču gradijent temperature na rubovima mora biti 0. Neumannovi rubni uvjeti definirani su preko gradijenta na rubovima i mogu se izraziti sljedećim formulama:

$$\frac{\partial u(0, y, t)}{\partial x} = f(y, t) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u(a, y, t)}{\partial x} = h(y, t) \quad (6.2)$$

, za  $x$  os te

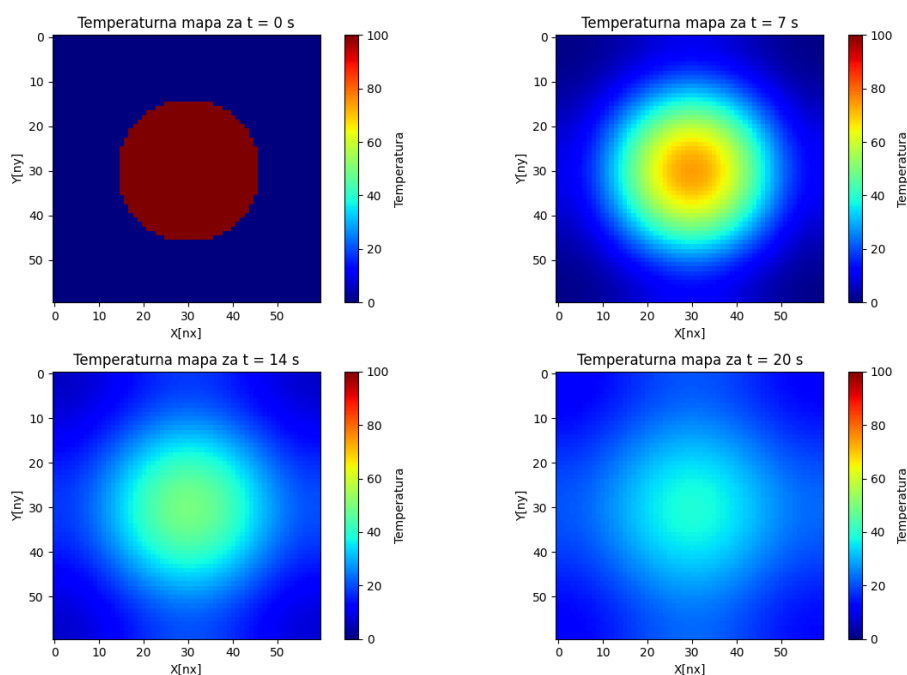
$$\frac{\partial u(x, 0, t)}{\partial y} = g(x, t) \quad \text{i} \quad \frac{\partial u(x, b, t)}{\partial y} = l(x, t) \quad (6.3)$$

, za  $y$  os. Kod problema provođenja topline ploče, ovi uvjeti nam govore da se preko njegova ruba prenosi određena količina topline u ovisnosti o vremenu. Ako je  $f = h = g = l = 0$ , tada su rubovi toplinski izoliran, tj. nema izmjene topline preko tog ruba.[10]

```

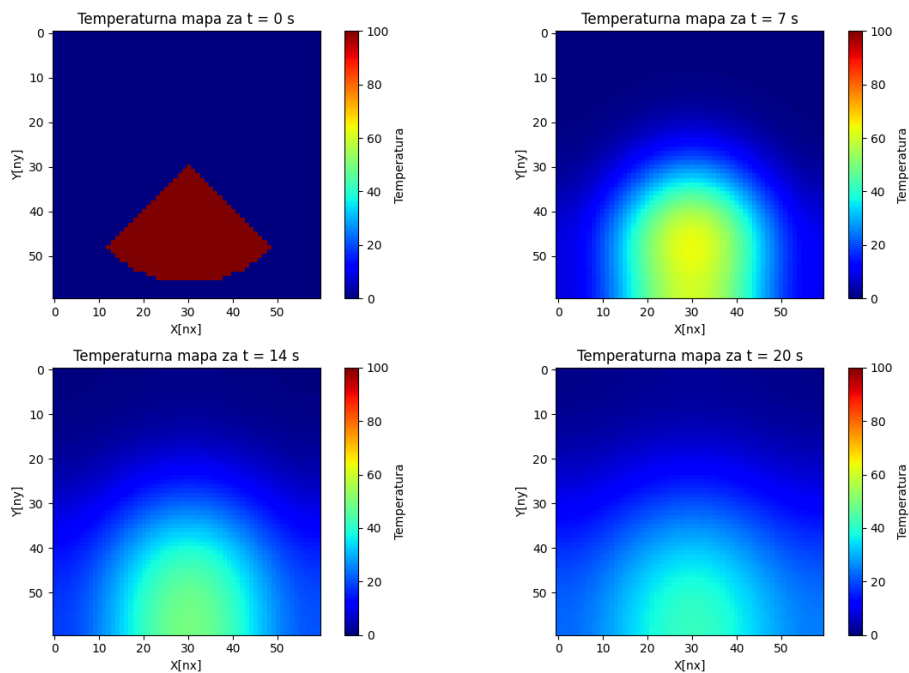
1  def rubni_neumann(x, y, t, T):
2      if x!= 0 and x!= nx -1:
3          if y == 0:
4              return T[x, 1, t]
5          else:
6              return T[x, y-1, t]
7      else:
8          if x == 0:
9              return T[x+1, y, t]
10         else:
11             return T[x-1, y, t]
```

Mi smo algoritam malo pojednostaviti tako što smo "prepisali" temperature od točki pored ruba te tako postigli da gradijent bude 0. Rubne uvjete je potrebno postaviti nakon svake iteracije budući da u početnom trenutku ne znamo kako će se odvijati difuzija topline. Ovaj algoritam je moguće prilagoditi moženjem temperature u točkama pored ruba da bi se postiglo da gradijent bude konstantan, ali da ne bude jednak nuli nego nekoj vrijednosti koja odgovara našem problemu. Rješenja za prijašnji problem sa Neumannovim rubnim uvjetima prikazano je na slici 9.



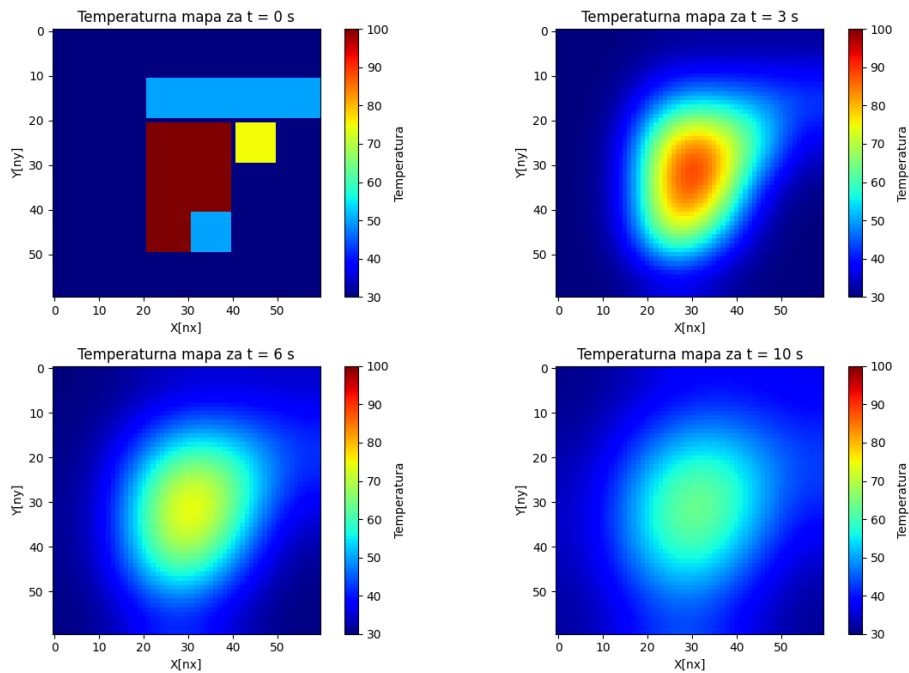
**Slika 9:** Difuzija topline na srebrenoj ploči sa vrućim krugom u sredini te Neumannovim rubnim uvjetima

Usporedimo li ovo rješenje sa prijašnjim vidljiv je utjecaj izoliranosti ploče. Dok je na ploči sa Dirichletovim uvjetima gradijent temperature još uvijek očit, na ploči sa Neumannovim uvjetima gradijent je skoro nestao te se toplina ravnomjerno rasporedila po ploči. Oba rješenja se slažu sa očekivanjima te svako zasebno predstavlja jedan od pristupa koji ima svoje primjene ovisno o potrebama i karakteristikama sustava u kojem se provodi analiza širenja topline. Promotrimo još nekoliko slučajeva gdje ćemo promijeniti početne uvjete, ali ćemo zadržati Neumannove rubne uvjete. Budući da je krug simetrično tijelo, promotrimo u idućem slučaju lik sa manjom simetrijom. Neka to bude kružni isječak od 45 stupnjeva. Zbog smanjene simetrije u ovom slučaju gradijenti topline neće biti ravnomjerno raspoređeni po ploči te će se zbog toga toplina širiti neravnomjernom brzinom. Rješenje je prikazano na slici 10.



**Slika 10:** Difuzija topline na srebrenoj ploči sa vrućim kružnim isječkom na dnu ploče te Neumannovim rubnim uvjetima

Za kraj promotrimo i slučaj proizvoljnih početnih uvjeta bez ikakve simetrije kakav je prikazan na slici 11. U ovom slučaju gradijenti temperature na početku su nepravilni i ne slijede jasne simetrične obrasce. Tijekom vremena toplina će se širiti po ploči, ali bez ikakvih predvidljivih obrazaca ili jednostavnih matematičkih pravila.



**Slika 11:** Difuzija topline na srebrenoj ploči sa nesimetričnim početnim uvjetima te Neumannovim rubnim uvjetima

U ovakvim slučajevima analitičko rješenje bi bilo gotovo nemoguće pronaći jer je početne uvjete teško prikazati nekom matematičkom funkcijom te je iz tog razloga ovo pravi primjer zašto se u realnim slučajevima difuzijska jednačba rješava numerički. Većina realnih procesa neće imati izraženu simetriju te će više sličiti ovome primjeru nego prijašnjim. Iz tog razloga numeričko rješavanje difuzijske jednačbe ima veoma važnu ulogu u znanstvenim istraživanjima, ali i u razvoju industrije.

Nakon svega možemo zaključiti da promjena početnih i rubnih uvjeta može značajno utjecati na fiziku procesa difuzije. Promjena početnih uvjeta mijenja raspored gradjenata temperature na ploči, a promjena rubnih uvjeta utječe na to koliko će se topline zadržati na ploči te kojom će brzinom topline napuštati ili dolaziti na ploču. Ploča sa Neumannovim rubnim uvjetima imat će konstantnu brzinu dok će ploča sa Dirichletovim uvjetima maksimalnu brzinu imati na početku difuzije te će se s vremenom smanjivati. Moguće je i kombinirati ova dva uvjeta te se time dobije Robinov rubni uvjet koji nećemo objašnjavati u ovom radu. Odabir dobrih početnih i rubnih uvjeta nužan je kako bi se dobilo ispravno rješenje za fizikalni problem koji promatramo.

Za probleme širenja topline grafički prikaz je važan da bi se lakše vizualiziralo što se događa na ploči. Zbog toga smo tokom rada dodavali slike ploče u različitim trenucima. Ipak, proces difuzije se puno bolje može promatrati korištenjem animacijama širenja topline. Iz tog razloga je dodan literaturni navod [11] gdje su prikazane animacije nekih procesa koje smo ranije u radu spomenuli. Također tamo se nalazi i kompletan kod koji je korišten pri izračunu rješenja te se može detaljno proučiti.

## 7 Zaključak

Difuzijska jednačba je analitički teško rješiva u većini slučajeva. Zbog toga smo je riješili numerički, eksplicitnom shemom. Uz to smo izračunali analitičko rješenje kako bismo mogli procijeniti koliki vremenski i prostorni korak trebamo odabrati da bi naše rješenje dalo zadovoljavajuće rezultate. Na kraju smo proučili rješenja za nekoliko slučajeva da bi shvatili fizikalnu pozadinu procesa difuzije.

Difuzija topline je proces koji nastaje kada postoji temperaturni gradijent na ploči. On zajedno sa koeficijentom difuzije topline određuje brzinu toka topline kroz ploču, što je pokazano jednim od primjera. Važnu ulogu u rješavanju jednačbe daju početni i rubni uvjeti koji daju jedinstvenost rješenju. Početni uvjeti definiraju raspodjelu temperature u početnom trenutku te se na taj način definira postojanje temperaturnih gradijenata te se određuje smjer difuzije. Rubni uvjeti definiraju ponašanje prijenosa topline na rubovima ploče. Mi smo u ovome radu proučili dva, Dirichletov i Neumannov. Dirichletov uvjet održava rubove na konstantnoj temperaturi dok Neumannov održava stalnu vrijednost temperaturnog gradijenta na rubovima ploče. Proučili smo i slučaj kada početni uvjeti nemaju nikakve simetrije te se uvjerali da je tada difuzija jako nepredvidljiva te da je jedini način rješavanja onaj numerički.

U ovom radu smo pokazali da je točnost numeričkih metoda približna analitičkom rješenju. Osobno smatram da je ovaj rad dao dobar uvid u proces difuzije te rješavanja difuzijske jednačbe. Iako je ovakvo rješenje teško primjenjivo na neki realan sustav, može biti dobra osnova za daljnji rad. Poopćenjem ovog rješenja na 3D sustav te dodavanjem izvora topline mogli bi se proučavati realni sustavi te bi se takvo rješenje moglo primjeniti za optimizaciju termodinamičkih i mehaničkih uređaja.



## 8 Literatura

- [1] Brittanica, diffusion  
URL: <https://www.britannica.com/science/diffusion> (6.9.2023.)
- [2] tec-science, Derivation of heat equation (diffusion equation)  
URL:  
<https://www.tec-science.com/thermodynamics/heat/heat-equation-diffusion-equation/>  
(18.8.2023.)
- [3] Larisa Zoranić: Matematičke metode fizike III, Bilješke s predavanja , 2022/2023
- [4] Krešimir Duvnjak: Analiza i usporedba numeričkih metoda pri rješavanju biharmonijske jednačbe, Diplomski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Sveučilište u Zagrebu, 2016.
- [5] G. Nervadof, Solving 2D Heat Equation Numerically using Python  
URL: <https://levelup.gitconnected.com/solving-2d-heat-equation-numerically-using-python-3334004aa01a> (19.8.2023.)
- [6] Jordan Lee: Stability of Finite Difference Schemes on the Diffusion Equation with Discontinuous Coefficients, Department of Mathematics, Massachusetts Institute of Technology, 2017.
- [7] David J. Griffiths: Introduction to Electrodynamics, 4th Ed., Pearson Education, USA, 2013.
- [8] Engineers Edge, Thermal diffusivity table  
URL:  
[https://www.engineersedge.com/heat\\_transfer/thermal\\_diffusivity\\_table\\_13953.htm](https://www.engineersedge.com/heat_transfer/thermal_diffusivity_table_13953.htm)  
(9.9.2023.)
- [9] Milena Branković: Difuzija supstance u vazduhu – analitičko i numeričko rešavanje, Diplomski rad, Prirodno-matematički fakultet, Univerzitet u Novom Sadu, 2010.
- [10] Ena Pribisalić:Jednodimenzionalno provođenje topline, Završni rad, Odjel za matematiku, Sveučilište Josipa Jurja Strossmayera u Osijeku, 2017.
- [11] Tin Marušić, Heat-equation\_2d  
URL: [https://github.com/tin-marusic/Heat-equation\\_2d](https://github.com/tin-marusic/Heat-equation_2d) (18.9.2023.)