

# Topološka analiza podataka

---

**Pavić, Tamara**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:718997>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-13**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU

TAMARA PAVIĆ

**TOPOLOŠKA ANALIZA  
PODATAKA**

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

**TOPOLOŠKA ANALIZA  
PODATAKA**

DIPLOMSKI RAD

Student(ica):  
Tamara Pavić

Mentor(ica):  
doc. dr. sc. Vesna Gotovac  
Đogaš

Split, rujan 2023.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU  
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD  
**TOPOLOŠKA ANALIZA PODATAKA**

Tamara Pavić

**Sažetak:**

*Cilj ovog rada je postaviti teorijsku pozadinu topološke analize podataka. U tu svrhu prvo definiramo pojam simplicijalnog kompleksa, na kojem zatim promatramo topologiju naslijeđenu od prostora  $\mathbb{R}^d$ . U drugom poglavlju simplicijalnom kompleksu pridružujemo vektorske prostore  $n$ -lanaca,  $n$ -ciklusa i  $n$ -granica te neke od algebarskih invarijanti tih struktura, Eulerovu karakteristiku i Bettijev broj. Konačno, definiramo i  $n$ -ti homološki vektorski prostor simplicijalnog kompleksa. Nadalje, proučavamo simplicijalna preslikavanja, posebno simplicijalne aproksimacije. Pokazat ćemo kako neprekidno preslikavanje inducira linearni operator u homologiji i da homeomorfizam topoloških prostora povlači izomorfizam pripadajućih homoloških prostora. Zaključak o topologiji i homologiji donijet ćemo teoremima o rekonstrukciji topologije i homologije skupa na temelju uzorka. Naposljetku, uvodimo perzistentu homologiju i perzistentne Bettijeve brojeve koji su relativno otporni na šum u podacima. Rad završavamo vizualizacijama evolucije topoloških značajki dobivenih Vietoris-Ripsovom filtracijom.*

**Ključne riječi:**

*simplicijalni kompleks, Bettijev broj, simplicijalna homologija, perzistentni dijagram*

## TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

### **Podatci o radu:**

*52 stranice, 23 slike, 9 literaturnih navoda, hrvatski jezik*

**Mentor(ica):** *doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš*

### **Članovi povjerenstva:**

*doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš*

*doc. dr. sc. Goran Erceg*

*Marcela Mandarić, mag. math*

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *18. rujna 2023. godine.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS  
**TOPOLOGICAL DATA ANALYSIS**

Tamara Pavić

**Abstract:**

*The aim of this paper is to establish the theoretical foundation for topological data analysis. For this purpose, we first define the concept of a simplicial complex, upon which we observe the topology inherited from the space  $\mathbb{R}^d$ . In the second chapter, we associate vector spaces of  $n$ -chains,  $n$ -cycles and  $n$ -boundaries with the simplicial complex, along with some of the algebraic invariants of these structures, such as Euler's characteristic and the Betti number. Finally, we define the  $n$ -th homology vector space of the simplicial complex. Furthermore, we investigate simplicial mappings, particularly simplicial approximations. We will demonstrate how a continuous mapping induces a linear operator in homology, and how a homeomorphism of topological spaces implies an isomorphism of their corresponding homological spaces. The conclusions on topology and homology will be drawn through the theorems on the reconstruction of the topology and homology of a set based on a sample. Lastly, we introduce persistent homology and persistent Betti numbers, which are relatively robust against noise in data. The paper concludes with visualizations of the evolution of topological features obtained through the Vietoris-Rips filtration.*

**Key words:**

*simplicial complex, Betti number, simplicial homology, persistence diagram*

## BASIC DOCUMENTATION CARD

**Specifications:**

*52 pages, 23 pictures, 9 literary references, Croatian*

**Mentor:** *assistant professor Vesna Gotovac Đogaš*

**Committee:**

*assistant professor Vesna Gotovac Đogaš*

*assistant professor Goran Erceg*

*instructor Marcela Mandarić*

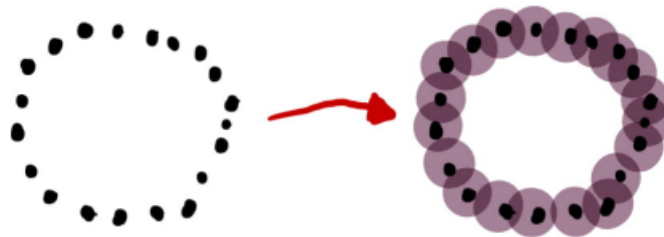
This thesis was approved by a Thesis committee on *18th September, 2023*.

*mami i tati*



# Uvod

Ideja topološke analize podataka (eng. *topological data analysis* (TDA)) jest dodijeliti topološke invarijante podacima. Međutim, podaci se najčešće prikazuju kao diskretni uzorak čija je topologija prilično nezanimljiva. Stoga, moramo transformirati podatke u "kontinuirani" objekt koji će u topološkom smislu biti sličan geometrijskom objektu iz kojeg su podaci uzorkovani. Uzmimo za primjer diskretni skup podatkovnih točaka na donjoj slici 1. Jasno je vidljiva prstenasta struktura podataka i ljudska intuicija nema problema to zaključiti. Topologija sama po sebi ne mjeri ovo "prstenasto" svojstvo, ali pridruživanjem odgovarajućeg radijusa (tj. kugle) svakoj točki, pojavljuje se prsten. Tako dobivena kontinuirana struktura sada je topološki objekt.



Slika 1: Prstenasta struktura pridružena skupu podataka.

Rezultirajuće kontinuirane strukture potrebno je diskretizirati kako bi se obrađivale na računalu, a taj se proces diskretizacije obično provodi pomoću simplicijalnih kompleksa, s kojima započinje sadržaj ovoga rada.

# Sadržaj

Uvod	viii
Sadržaj	ix
<b>1 Simplicijalni kompleksi</b>	<b>1</b>
1.1 Simpleksi . . . . .	1
1.1.1 Osnovni pojmovi . . . . .	2
1.2 Simplicijalni kompleks . . . . .	3
1.2.1 Osnovni pojmovi . . . . .	3
1.3 Apstraktni simplicijalni kompleks . . . . .	4
1.4 Triangulacija . . . . .	6
1.5 Čechov i Vietoris-Ripsov simplicijalni kompleks . . . . .	7
<b>2 Eulerova karakteristika</b>	<b>11</b>
2.1 Bettijev broj i Eulerova karakteristika . . . . .	14
2.2 Simplicijalna homologija . . . . .	18
<b>3 Simplicijalna preslikavanja</b>	<b>20</b>
3.1 Simplicijalne aproksimacije . . . . .	22
<b>4 Homotopija</b>	<b>28</b>
4.1 Teorem o živcu . . . . .	30

<b>5</b>	<b>Relativna homologija</b>	<b>32</b>
5.1	Senzorske mreže . . . . .	34
5.1.1	Problem pokrivača . . . . .	34
<b>6</b>	<b>Zaključak o topologiji i homologiji</b>	<b>37</b>
<b>7</b>	<b>Perzistentni Bettijevi brojevi</b>	<b>41</b>
7.1	Cebove i Vietoris-Ripsove filtracije . . . . .	45
	<b>Zaključak</b>	<b>49</b>
	<b>Literatura</b>	<b>51</b>

# Poglavlje 1

## Simplicijalni kompleksi

U ovom poglavlju obradit ćemo općeniti pojam simplicijalnog kompleksa, a posebno Čechove i Vietoris-Ripsove komplekse.

### 1.1 Simpleksi

**Definicija 1.1** *Kažemo da je skup točaka  $\{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$  **afino nezavisan** ako za svaki skalar  $\{t_i\}_{i=0}^n$ , iz jednakosti*

$$\sum_{i=0}^n t_i = 0, \quad \sum_{i=0}^n t_i p_i = 0,$$

*slijedi  $t_0 = t_1 = \dots = t_n = 0$ .*

**Definicija 1.2** *Neka je  $\{p_0, \dots, p_n\}$  afino nezavisan skup točaka u  $\mathbb{R}^d$ . Kažemo da je  **$n$ -simpleks  $\sigma$  razapet točkama  $p_i$**  skup svih točaka  $x \in \mathbb{R}^d$  oblika*

$$x = \sum_{i=0}^n t_i p_i$$

*gdje je  $\sum_{i=0}^n t_i = 1, t_i \geq 0$  za svaki  $i$ . Simpleks označavamo sa  $S^n[p_0, \dots, p_n]$ .*

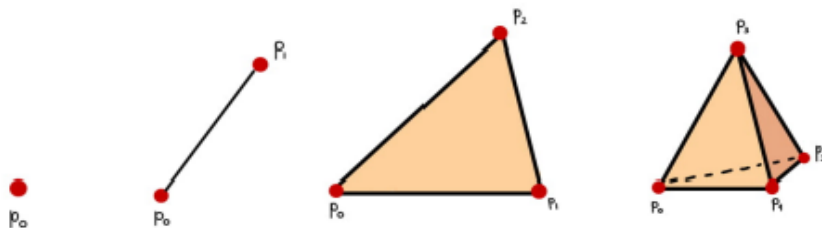
*Točka  $x$  je **konveksna kombinacija** točaka  $p_0, \dots, p_n$ , a jedinstveno određene skalare  $t_i$  nazivamo **baricentričnim koordinatama**.*

## 1.1. Simpleksi

Odmah se primjećuje da je svaka točka 0-simpleks, bilo koje dvije različite točke tvore 1-simpleks (dužina), tri nekolinearne točke tvore 2-simpleks (trokut), četiri nekomplanarne točke tvore 3-simpleks (tetraedar) i tako dalje. Primijetimo da ne može postojati  $n$ -simpleks u  $\mathbb{R}^d$  za  $n > d$ .

### 1.1.1 Osnovni pojmovi

- Točke  $p_0, \dots, p_n$  koje razapinju simpleks  $\sigma$  nazivaju se **vrhovi** simpleksa, a broj  $n$  njegova je **dimenzija**.
- Simpleks je **pravilan** ako su mu svi bridovi jednake duljine. Pravilni simpleks razapet krajnjim točkama jediničnih vektora duž koordinatnih osi u  $\mathbb{R}^{n+1}$  zovemo **standardni  $n$ -simpleks**.
- Po definiciji, svaki podskup od  $\{p_0, \dots, p_n\}$  je opet afino nezavisan pa on sam razapinje jedan simpleks. Svaki simpleks  $\tau$  razapet nekim podskupom od  $p_0, \dots, p_n$  naziva se **stranica** od  $\sigma$ , pišemo  $\tau \subseteq \sigma$ . Ako je  $\tau \subset \sigma$ , tada  $\tau$  zovemo **prava stranica** od  $\sigma$ .
- Unija svih pravih stranica naziva se **rub simpleksa**  $\sigma$ , pišemo  $Bd(\sigma)$ .



Slika 1.1: Primjeri simpleksa dimenzije 0, 1, 2 i 3.

Definicije osnovnih pojmova preuzete su od [3].

## 1.2. Simplicijalni kompleks

# 1.2 Simplicijalni kompleks

**Definicija 1.3** *Simplicijalni kompleks*  $K$  u  $\mathbb{R}^d$  je konačna množina simpleksa iz  $\mathbb{R}^d$  takva da vrijedi:

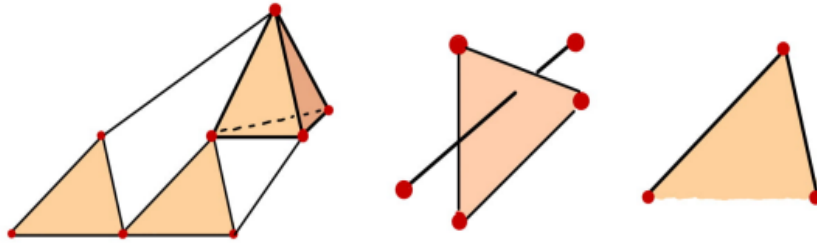
1. stranica svakog simpleksa iz  $K$  je simpleks u  $K$ ,
2. neprazan presjek svaka dva simpleksa iz  $K$  je stranica svakog od njih.

### 1.2.1 Osnovni pojmovi

- **Dimenzija** simplicijalnog kompleksa  $K$  je najveća dimenzija simpleksa u množini  $K$ .
- Ako je  $L \subseteq K$  podmnožina od  $K$  koja sadrži sve stranice svojih elemenata, onda je i  $L$  simplicijalni kompleks kojeg zovemo **potkompleks** kompleksa  $K$ .
- Množina svih simpleksa iz  $K$  kojima je dimenzija najviše  $p$  je potkompleks od  $K$  koji se naziva  **$p$ -skelet** od  $K$ , u oznaci  $K^{(p)}$ . Očito je  $K^{(0)}$  skup vrhova od  $K$ .
- Neka je  $|K| \subseteq \mathbb{R}^d$  unija svih simpleksa iz  $K$ . Neka svaki simpleks ima topologiju naslijeđenu od  $\mathbb{R}^d$ , a neka je na  $|K|$  topologija definirana tako da je podskup od  $A \subseteq |K|$  zatvoren ako i samo ako je  $A \cap \sigma$  zatvoren u  $\sigma$ , za svaki  $\sigma \in K$ . Tako dobiven topološki prostor  $|K|$  naziva se **politop** ili **geometrijska realizacija** od  $K$ . Topološki prostor koji je politop nekog simplicijalnog kompleksa naziva se **poliedar**.

Osnovni pojmovi preuzeti od [3].

### 1.3. Apstraktni simplicijalni kompleks



Slika 1.2: Lijevo: Simplicijalni kompleks dimenzije 3. Sredina: Nije simplicijalni kompleks jer sjecište dvaju simpleksa nije stranica. Desno: Nije simplicijalni kompleks.

## 1.3 Apstraktni simplicijalni kompleks

Sada uvodimo apstraktni opis simplicijalnih kompleksa po kojem su dva simplicijalna kompleksa izomorfna ako i samo ako su njihove geometrijske realizacije izomorfne.

**Definicija 1.4** *Apstraktni simplicijalni kompleks*  $A$  je konačna množina konačnih nepraznih skupova takva da ako je  $\alpha$  element od  $A$ , onda je to i svaki neprazan podskup od  $\alpha$ .

Elemente od  $A$  nazivamo **simpleksima** i **dimenzija** od  $\alpha \in A$  je jednaka  $\dim \alpha = |\alpha| - 1$ . Kao i prije, dimenzija od  $A$  dana je s  $\dim A = \max_{\alpha \in A} \dim \alpha$ . Kažemo da je  $B \subseteq A$  **potkompleks** od  $A$  ako je  $B$  apstraktni simplicijalni kompleks. Unija svih jednotočkovnih elemenata od  $A$  je **skup vrhova**  $V_A$  od  $A$ . Kažemo da su dva simplicijalna kompleksa  $A$  i  $B$  **izomorfna** ako postoji bijekcija  $f : V_A \rightarrow V_B$  koja zadovoljava  $\{a_0, \dots, a_n\} \in A$  ako i samo ako  $\{f(a_0), \dots, f(a_n)\} \in B$ .

### 1.3. Apstraktni simplicijalni kompleks

Simplicijalni kompleks  $K$  definira apstraktni simplicijalni kompleks  $A$  tako da svakom simpleksu u  $K$  pridružimo vrhove koji ga razapinju. Kažemo da je  $A$  **vršna shema** od  $K$ .

**Primjer 1.5** *1-simpleks kojeg čine dvije različite točke  $p_0$  i  $p_1$  ima vršnu shemu  $A = \{\{p_0\}, \{p_1\}, \{p_0, p_1\}\}$ .*

$$\dim \{p_0\} = 1 - 1 = 0, \dim \{p_1\} = 0, \dim \{p_0, p_1\} = 2 - 1 = 1$$

$$\dim A = \max \{0, 1\} = 1$$

Ako je  $A$  vršna shema od  $K$ , tada kažemo da je  $K$  **geometrijska realizacija** od  $A$ . Uočimo da se svaki apstraktni simplicijalni kompleks s  $d+1$  vrhova može geometrijski realizirati kao potkompleks proizvoljnog  $d$ -simpleksa u  $\mathbb{R}^d$ .

**Definicija 1.6** *Kažemo da je konačan skup  $P \subset \mathbb{R}^d$  u **općem položaju** ako je svaki njegov podskup s najviše  $d+1$  točaka afino nezavisan.*

**Lema 1.7** *Apstraktni simplicijalni kompleks  $A$  dimenzije  $\dim A = d$  ima geometrijsku realizaciju u prostoru  $\mathbb{R}^{2d+1}$ .*

**Dokaz.** Neka je  $h : V_A \rightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$  proizvoljno preslikavanje tako da je  $h(V_A)$  u općem položaju. Svaki simpleks  $\alpha \in A$  ima najviše  $d+1$  vrhova, pa je slika skupa njegovih vrhova afino nezavisan skup. Označimo taj skup sa  $h(\alpha)$ , a pripadajući simpleks sa  $\sigma_\alpha$ . Preostaje pokazati da je presjek proizvoljna dva simpleksa stranica oba simpleksa.

Neka su  $\alpha$  i  $\beta$  proizvoljni simpleksi. Uočimo da je  $|\alpha \cup \beta| \leq 2(d+1)$ , pa  $h(\alpha) \cup h(\beta)$  tvori afino nezavisan skup. Slijedi da se svaka točka  $x \in \sigma_\alpha \cap \sigma_\beta$  može jedinstveno prikazati kao konveksna kombinacija vrhova iz  $h(\alpha) \cup h(\beta)$ . Stoga, baricentrične koordinate točke  $x$  mogu biti različite od nule samo za  $t_i \in h(\alpha \cap \beta)$ . Zaključujemo da je  $x \in \sigma_{\alpha \cap \beta}$ . ■



## 1.4. Triangulacija

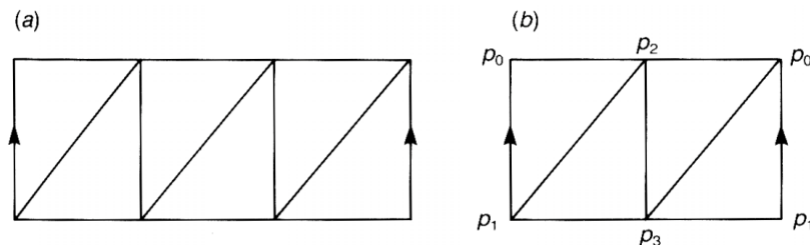
# 1.4 Triangulacija

**Definicija 1.8** Kažemo da je topološki prostor  $X$  **triangulabilan** ako postoji simplicijalni kompleks  $K$  čiji je pripadajući topološki prostor  $|K|$  homeomorfan  $X$ . Svaki homeomorfizam  $h : |K| \rightarrow X$  je **triangulacija**.

**Napomena 1.9** Podsjetimo se definicije homeomorfizma (preuzeto iz [8]). Neka su  $X$  i  $Y$  topološki prostori i  $f : X \rightarrow Y$  neprekidno preslikavanje. Kažemo da je  $f$  **homeomorfizam** ako postoji neprekidno preslikavanje  $g : Y \rightarrow X$  tako da je  $g \circ f = id_X$  i  $f \circ g = id_Y$ .

Očito je preslikavanje  $f : X \rightarrow Y$  homeomorfizam ako i samo ako je  $f$  neprekidna bijekcija s neprekidnim inverzom  $f^{-1} : Y \rightarrow X$ .

Kažemo da su prostori  $X$  i  $Y$  **homeomorfni** ako postoji barem jedan homeomorfizam  $f : X \rightarrow Y$ .



Slika 1.3: Slika a) primjer je triangulacije cilindra, međutim b) nije.

**Primjer 1.10** Na slici 1.3a) vidimo primjer triangulacije cilindra. Iako na prvi pogled primjer 1.3b) izgleda kao jednostavniji primjer triangulacije cilindra, on to nije. Naime, simpleksi  $\sigma = S^2[p_0, p_1, p_2]$  i  $\sigma' = S^2[p_2, p_3, p_0]$  imaju presjek  $\sigma \cap \sigma' = S^0[p_0] \cup S^0[p_2]$ , što nije ni prazan skup ni simpleks.

Slika i primjer preuzeti sa [6].

## 1.5. Čechov i Vietoris-Ripsov simplicijalni kompleks

# 1.5 Čechov i Vietoris-Ripsov simplicijalni kompleks

Sada ćemo upoznati dva najčešće korištena simplicijalna kompleksa u topološkoj analizi podataka.

U nastavku neka je  $P = \{p_0, \dots, p_n\} \subset \mathbb{R}^d$  i neka  $B_r(p) := \{x' \in \mathbb{R}^d : \|x - x'\| \leq r\}$  označava zatvorenu kuglu radijusa  $r$  sa središtem  $p$ .

**Definicija 1.11** *Čechov kompleks od  $P$  radijusa  $r$  je simplicijalni kompleks oblika*

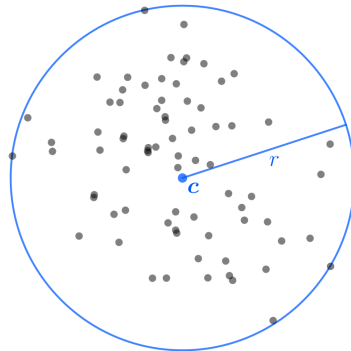
$$Cech_r(P) = \{\sigma \subseteq P : \bigcap_{p \in \sigma} B_r(p) \neq \emptyset\}.$$

Sljedeći teorem pokazuje da u definiciji Čechovog kompleksa ne moramo razmatrati presjek svih mogućih kugli, sve dok je dimenzija mala.

**Teorem 1.12 (Hellyjev teorem)** *Neka je  $F$  konačna množina zatvorenih i konveksnih skupova u  $\mathbb{R}^d$ . Ako je presjek proizvoljnih  $d + 1$  skupova iz  $F$  neprazan, tada cijela množina ima neprazan presjek.*

Dakle, ako je  $P \subset \mathbb{R}^3$ , tada će računanje svih četverostrukih presjeka biti dovoljno za određivanje kompleksa  $Cech_r(P)$ . Nadalje, primjećujemo da vrijedi  $\sigma \in Cech_r(P)$  ako i samo ako postoji kugla radijusa  $r$  koja sadrži cijeli skup  $\sigma$ . Jedinstvena najmanja zatvorena kugla koja sadrži cijeli skup  $\sigma \subseteq P$  naziva se **minimalna zatvarajuća kugla**.

## 1.5. Čechov i Vietoris-Ripsov simplicijalni kompleks

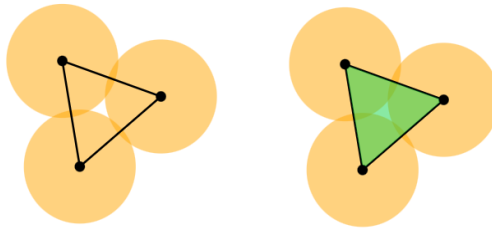


Slika 1.4: Minimalna zatvarajuća kugla. Slika preuzeta sa [5].

Prije sljedeće definicije, prisjetimo se da je **dijametar** skupa  $\sigma \subseteq P$  definiran s  $\text{diam}(\sigma) = \max_{p_i, p_j \in \sigma} \|p_i - p_j\|$ .

**Definicija 1.13** *Vietoris-Rips kompleks od  $P$  radijusa  $r$  je simplicijalni kompleks oblika*

$$VR_r(P) = \{\sigma \subseteq P : \text{diam}(\sigma) \leq 2r\}.$$



Slika 1.5: Razlika između Čechovog i Vietoris-Ripsovog simplicijalnog kompleksa na primjeru s tri vrha. Slika izgenerirana korištenjem alata [9].

Lako se pokaže da vrijedi  $\text{Čech}_r(P) \subseteq VR_r(P) \subseteq \text{Čech}_{2r}(P)$ . Međutim, gornja nejednakost može se znatno postrožiti, što pokazuju sljedeći teorem i korolar.

### 1.5. Čechov i Vietoris-Ripsov simplicijalni kompleks

**Teorem 1.14 (Jungov teorem)** *Neka je  $Q \subseteq \mathbb{R}^d$  konačan skup. Tada je  $Q$  sadržan u zatvorenoj kugli radijusa  $r \leq \delta \cdot \text{diam}(Q)$ , gdje je  $\delta = \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}$ .*

**Dokaz.** Dokaz matematičkom indukcijom.

Uočimo da je tvrdnja istinita za  $d = 1$ .

Da bismo dokazali rezultat za proizvoljnu dimenziju  $d$ , dovoljno je razmotriti slučaj gdje je  $|Q| = d + 1$  i gdje je  $Q$  afino nezavisan skup. Doista, ako  $Q$  nije afino nezavisan ili je  $|Q| < d + 1$ , tada se  $Q$  može smjestiti u prostor  $\mathbb{R}^{d-1}$  nekom izometrijskom transformacijom. Rezultat tada slijedi iz pretpostavke indukcije.

Za  $|Q| > d + 1$  primjećujemo da je Jungov teorem ekvivalentan tvrdnji da je

$$\bigcap_{q \in Q} B_{\delta \cdot \text{diam}(Q)}(q) \neq \emptyset.$$

Prema Hellyjevom teoremu 1.12 dovoljno je provjeriti da je presjek neprazan za podskupove od  $Q$  koji sadrže  $d + 1$  točku.

Pretpostavimo da minimalna zatvarajuća kugla skupa  $Q$  ima središte  $z$  i radijus  $r$ . Uočimo da je središte  $z$  sadržano u simpleksu  $\sigma$  razapetom točkama iz  $Q$ . Da nije tako, tada bi postojala točka  $q \in Q$ , takva da su  $z$  i  $q$  odvojeni  $(d - 1)$ -dimenzionalnom ravninom razapetom točkama skupa  $Q \setminus \{q\}$ . Ortogonalna projekcija točke  $z$  na tu ravninu bila bi bliža svim točkama od  $Q$ , što je u kontradikciji s činjenicom da minimalna zatvarajuća kugla ima središte  $z$ . Dakle,  $z$  se može jedinstveno prikazati kao konveksna kombinacija točaka  $\{q_1, \dots, q_n\} = Q$  na sljedeći način

$$z = \sum_{i=1}^{d+1} t_i q_i, \quad \sum_{i=1}^{d+1} t_i = 1, \quad t_i \geq 0.$$

Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $z = 0$ . Za fiksni  $k, 1 \leq k \leq d + 1$

### 1.5. Čechov i Vietoris-Ripsov simplicijalni kompleks

dobivamo

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1, i \neq k}^{d+1} t_i \|q_i - q_k\|^2 &= \sum_{i=1}^{d+1} t_i \|q_i - q_k\|^2 \\
 &= \sum_{i=1}^{d+1} t_i \|q_i\|^2 - 2q_k \sum_{i=1}^{d+1} t_i q_i + \|q_k\|^2 \sum_{i=1}^{d+1} t_i \\
 &= r^2 - 0 + r^2 = 2r^2
 \end{aligned}$$

Sumiramo li po  $k$ ,  $1 \leq k \leq d+1$ , dobivamo

$$\begin{aligned}
 (d+1) \cdot (2r^2) &= \sum_{k=1}^{d+1} \sum_{i=1, i \neq k}^{d+1} t_i \|q_i - q_k\|^2 \leq \sum_{k=1}^{d+1} \sum_{i=1, i \neq k}^{d+1} t_i (\text{diam}(Q))^2 \\
 &= \sum_{k=1}^{d+1} (1 - t_k) (\text{diam}(Q))^2 = d (\text{diam}(Q))^2.
 \end{aligned}$$

Slijedi

$$r \leq \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}} \cdot \text{diam}(Q)$$

. ■

**Korolar 1.15**  $Cech_r(P) \subseteq VR_r(P) \subseteq Cech_{2\delta r}(P)$ , gdje je  $2\delta = 2\sqrt{\frac{d}{2(d+1)}} = \sqrt{\frac{2d}{d+1}}$ .

## Poglavlje 2

# Eulerova karakteristika

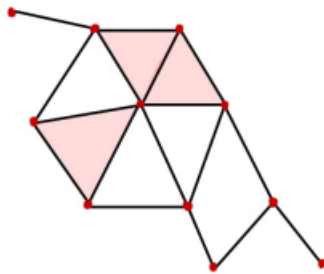
Diferenciranje topoloških prostora složen je problem, tj. odluka jesu li dva simplicijalna kompleksa homeomorfna pitanje je na koje se ne može jasno odgovoriti. Grubo govoreći, to znači da ne postoji algoritam koji kao ulaz prima dva simplicijalna kompleksa i vraća istinu ako i samo ako su oni homeomorfni. Stoga, da bi se pokazalo da dva prostora nisu homeomorfna, često je korisnije pokazati da se prostori razlikuju pod nekim alatom koji je neosjetljiv na homeomorfizam (ili druge oblike ekvivalencije). Algebarska topologija nudi jedan takav pristup: algebarske invarijante, kao što je npr. homologija, vežu se s topološkim prostorima. Iako dobivene homološke invarijante može biti teško protumačiti, vidjet ćemo da za niskodimenzionalne simplicijalne komplekse invarijante imaju jasnu interpretaciju u smislu povezanosti i prepoznavanja oblika. To će ilustrirati sljedeća topološka invarijanta, Eulerova karakteristika.

**Napomena 2.1** *Relacija "biti homeomorfan" ima svojstva relacije ekvivalencije na klasi svih topoloških prostora. Svako svojstvo prostora koje je zajedničko svim međusobno homeomorfnim prostorima naziva se **topološko svojstvo** ili **topološka invarijanta**. Preuzeto iz [8].*

**Definicija 2.2** Neka je  $K$  simplicijalni kompleks i neka  $K_i$  označava broj  $i$ -simpleksa u  $K$ . **Eulerova karakteristika** simplicijalnog kompleksa  $K$  je broj

$$\chi(K) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i K_i.$$

Promatrajući neke poznate topološke prostore, pokušajmo vidjeti što predstavlja Eulerova karakteristika.



Slika 2.1: Planarni simplicijalni kompleks je onaj čiji vrhovi i bridovi čine planaran graf. Kažemo da je graf planaran ako se može nacrtati u ravnini tako da mu se bridovi sijeku samo u vrhovima.

**Primjer 2.3** Promotrimo planarni simplicijalni kompleks sa Slike 2.1. Eulerova karakteristika danog simplicijalnog kompleksa je

$$\chi = \text{broj vrhova} - \text{broj bridova} + \text{broj stranica} = 11 - 17 + 3 = -3.$$

Vidimo da je apsolutna Eulerova karakteristika  $|\chi|$  za jedan manja od broja "rupa" u grafu. Lako se provjeri da isti odnos vrijedi i za druge planarne simplicijalne komplekse. To nije slučajnost, također se lako pokaže da za svaki povezani planarni graf (tj. pripadajući simplicijalni kompleks) vrijedi sljedeće:

$$2 = \text{broj vrhova} - \text{broj bridova} + \text{broj stranica}.$$

Broj stranica može se zbrajati na sljedeći način:

$$\text{broj stranica} = \text{broj trokuta} + \text{broj "rupa"} + 1(\text{neomeđena komponenta}).$$

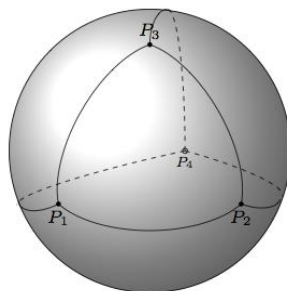
Uvrštavanjem jedne jednakosti u drugu, dobijemo

$$1 - \text{broj "rupa"} = \text{broj vrhova} - \text{broj bridova} + \text{broj trokuta} = \chi$$

**Primjer 2.4** *Pravilni tetraedar i pravilni ikosaedar su dva od ukupno pet pravilnih poliedara. Oba su triangulacije sfere i njihove Eulerove karakteristike su jednake po iznosu:*

$$\chi(\text{tetrahedron}) = 4 - 6 + 4 = 2$$

$$\chi(\text{icosahedron}) = 12 - 30 + 20 = 2.$$

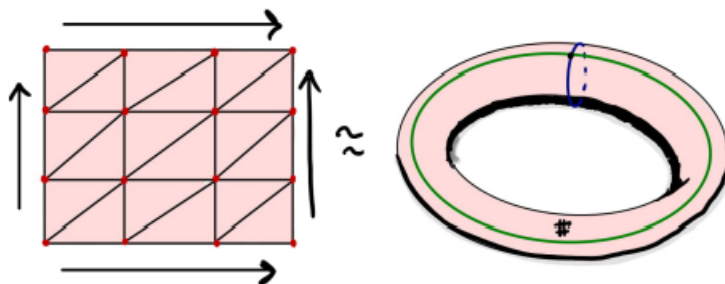


Slika 2.2: Triangulacija sfere na primjeru tetraedra. Slika preuzeta sa [7].

*S druge strane, torus ima triangulaciju prikazanu kao na slici 2.3. Eulerova karakteristika torusa jednaka je  $\chi(\text{torus}) = 9 - 27 + 18 = 0$ .*



## 2.1. Bettijev broj i Eulerova karakteristika



Slika 2.3: Triangulacija torusa.

Kako je Eulerova karakteristika topološka invarijanta, iz Primjera 2.4 možemo zaključiti da sfera i torus nisu homeomorfni.

## 2.1 Bettijev broj i Eulerova karakteristika

Ukratko ponovimo konstrukciju slobodnog vektorskog prostora na konačnom skupu. Neka je  $S$  konačan skup i  $\mathbf{k}$  proizvoljno polje. Definiramo **slobodni  $\mathbf{k}$ -vektorski prostor generiran skupom  $S$**  kao vektorski prostor  $F(S)$  čiji su elementi linearne kombinacije  $\sum_{s_i \in S} a_i s_i$ , gdje je  $a_i \in \mathbf{k}$ ,  $s_i \in S$ . Aditivna operacija definirana je na sljedeći način:

$$\sum_{s_i \in S} a_i s_i + \sum_{s_i \in S} b_i s_i = \sum_{s_i \in S} (a_i + b_i) s_i,$$

gdje je  $a_i + b_i \in \mathbf{k}$ . Elementi skupa  $S$  čine kanonsku bazu dobivenog  $k$ -vektorskog prostora.

**Primjer 2.5** Neka je  $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$  polje i  $S = \{a, b, c\}$  konačan skup. Tada je  $F(S)$  3-dimenzionalan vektorski prostor s elementima  $\{0, a, b, c, a + b, b + c, a + c, a + b + c\}$  i bazom  $\{a, b, c\}$ . Aditivna operacija:  $(a + b) + (a + c) = (2a) + b + c = b + c$ .

## 2.1. Bettijev broj i Eulerova karakteristika

**Primjer 2.6** *Ako pak stavimo  $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_3$  i  $S = \{a, b\}$ , onda imamo*

$$F(S) = \{0, a, b, 2a, 2b, a + 2b, 2a + b, 2a + 2b\}.$$

Vidimo da je vektorski prostor  $F(S)$  dimenzije  $|S|$  i kardinalnosti  $|S|^{|k|}$ .

Konstruirajmo sada familiju topoloških invarijanti koje mjere "povezanost" u danoj dimenziji. Motivacija konstrukcije ove familije je preciznija interpretacija Eulerove karakteristike. Pretpostavimo da je  $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_2$ .

**Definicija 2.7** *Neka je  $n \geq 0$  i  $K$  simplicijalni kompleks. Slobodni  $\mathbb{Z}_2$ -vektorski prostor generiran  $n$ -simpleksima od  $K$  zovemo **vektorski prostor  $n$ -lanaca u  $K$** , u oznaci  $C_n(K)$ .*

Definiranjem granice  $n$ -simpleksa kao zbroja njegovih  $(n - 1)$ -dimenzionalnih stranica, dobivamo linearni operator  $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$ . Nadalje, za simpleks  $S^n[p_0, \dots, p_n]$ , neka  $S^{n-1}[p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n]$  označava  $(n - 1)$ -simpleks dobiven izostavljanjem vrha  $p_i$ .

**Definicija 2.8** *Linearni operator  $\partial_n : C_n(K) \rightarrow C_{n-1}(K)$  definiran s*

$$\partial_n(S^n[p_0, \dots, p_n]) = \sum_{i=0}^n S^{n-1}[p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n]$$

*zovemo **granični operator**.*

Sljedeća lema pokazuje da granica nema granicu.

**Lema 2.9**  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ , za svaki  $n \geq 0$ .

## 2.1. Bettijev broj i Eulerova karakteristika

**Dokaz.** Dovoljno je pokazati da je  $\partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) = 0$  za  $(n+1)$ -simpleks  $\sigma = S^{n+1}[p_0, \dots, p_{n+1}]$ .

$$\begin{aligned} \partial_n \circ \partial_{n+1}(\sigma) &= \partial_n \left( \sum_{i=0}^{n+1} S^n[p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n] \right) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \partial_n(S^n[p_0, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_n]) \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} \sum_{j=0, j \neq i}^{n+1} S^{n-1}[p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{n+1}]. \end{aligned}$$

Za  $i \neq j$  vidimo da se  $(n-1)$ -simpleks  $S^{n-1}[p_0, \dots, \hat{p}_j, \dots, \hat{p}_i, \dots, p_{n+1}]$  pojavljuje točno dvaput u sumi. Kako je po pretpostavci polje  $\mathbf{k} = \mathbb{Z}_2$ , tvrdnja slijedi.

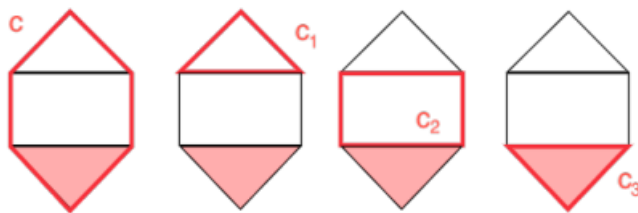
■

**Definicija 2.10** Kažemo da je  $c \in C_n(K)$  ***n*-ciklus** ako je  $\partial_n(c) = 0$ . Pridruženi vektorski prostor *n*-ciklusa označavamo sa  $Z_n(K) = \text{Ker}(\partial_n) = \{c \in C_n(K) : \partial_n(c) = 0\}$ .

Kažemo da je  $c$  ***n*-granica** ako je  $c$  u slici od  $\partial_{n+1}$ , tj. ako je  $c = \partial_{n+1}(d)$  za neki  $(n+1)$ -lanac  $d$ . Pridruženi vektorski prostor *n*-granica označavamo s  $B_n(K) = \text{Im}(\partial_{n+1}) = \{\partial_{n+1}(d) : d \in C_{n+1}(K)\}$ .

**Primjer 2.11** Razmotrimo simplicijalni kompleks sa Slike 2.4. Primijetimo da se ciklus  $c$  može prikazati kao linearna kombinacija ciklusa  $c_1, c_2$  i  $c_3$ , tj.  $c = c_1 + c_2 + c_3$ . Lako se vidi da  $\{c_1, c_2, c_3\}$  čine bazu od  $Z_1(K)$ ; bilo koja "rupa" u simplicijalnom kompleksu može se izraziti kao linearna kombinacija tih ciklusa. Također, vidimo da je  $\partial_2(d) = c_3$ , gdje je  $d$  trokut kojemu  $c_3$  čini rub. Slijedi  $B_1(K) = \{c_3\}$ , pa je  $\dim B_1(K) = 1$ . Broj "praznih rupa" je stoga  $\dim Z_1(K) - \dim B_1(K) = 3 - 1 = 2$ .

## 2.1. Bettijev broj i Eulerova karakteristika



Slika 2.4: Ciklus  $c$  suma je tri preostala ciklusa.

U prethodnom primjeru vidjeli smo motivaciju za sljedeću definiciju.

**Definicija 2.12**  $N$ -ti **Bettijev broj** od  $K$ , u oznaci  $\beta_n(K)$ , definiramo s  $\beta_n(K) := \dim Z_n(K) - \dim B_n(K)$ .

Za simplicijalne komplekse u  $\mathbb{R}^3$  Bettijev brojeve interpretiramo na sljedeći način:  $\beta_1$  je broj ciklusa, a  $\beta_2$  je broj šupljina.

**Primjer 2.13** Kao što se vidi na Slici 2.3, za torus vrijedi  $\beta_1 = 2$  i  $\beta_2 = 1$ .

**Definicija 2.14** Kažemo da je simplicijalni kompleks  $K$  **putovima povezan** ako postoji put između svaka dva vrha iz  $K$ .

**Lema 2.15** Broj  $\beta_0(K)$  jednak je broju putovima povezanih komponenti u  $|K|$ .

**Dokaz.** Primijetimo da je  $Z_0(K) = C_0(K)$ . Poredajmo putovima povezane komponente iz  $|K|$  od 1 do  $u$  i neka je  $\{p_1^i, \dots, p_{i_m}^i\}$  skup vrhova koji pripadaju  $i$ -toj komponenti. Baza prostora  $Z_0(K)$  je dana s  $\cup_{i=1}^u \{p_1^i, p_2^i + p_1^i, \dots, p_{i_m}^i + p_1^i\}$ . Putovima povezanost implicira da ne može postojati 1-lanac  $c$  čija je granica sadržana u  $\{p_1^1, \dots, p_1^u\}$ . Slijedi  $\dim Z_0(K) - \dim B_0(K) = u$ . ■

**Teorem 2.16 (Euler-Poincarova formula)** Za simplicijalni kompleks  $K$  vrijedi

$$\chi(K) = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i(K).$$

## 2.2. Simplicijalna homologija

**Dokaz.** Sjetimo se iz linearne algebre da za linearni operator  $T : V \rightarrow W$  vrijedi  $\dim V = \dim \text{Ker}(T) + \dim \text{Im}(T)$ . Dakle, vrijedi  $K_i = \dim C_i(K) = \dim Z_i(K) + \dim B_{i-1}(K)$ . Uzmemo li  $B_{-1}(K) = 0$ , dobivamo sljedeće:

$$\begin{aligned} \chi(K) &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i K_i = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\dim Z_i(K) + \dim B_{i-1}(K)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i (\dim Z_i(K) - \dim B_i(K)) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i(K) \end{aligned}$$

■

**Primjer 2.17** *Neka se simplicijalni kompleks  $K$  sastoji od stranica 2-simpleksa razapetog točkama  $\{1, 2, 3\}$ . Predstavljanjem matrica  $\partial_1$  i  $\partial_2$  u njihovim standardnim bazama, dobivamo*

$$\partial_2 = \begin{matrix} & & & 123 \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} & & & \begin{matrix} 12 \\ 13 \\ 23 \end{matrix} \end{matrix}$$

$$\partial_1 = \begin{matrix} & 12 & 13 & 23 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \sim \text{transformacije} & \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

*Zaključujemo da je  $\dim B_1(K) = 1$  i  $\dim Z_1(K) = 1$ , pa je  $\beta_1(K) = 1 - 1 = 0$ .*

## 2.2 Simplicijalna homologija

Suvremeni pristup definiranju Bettijevih brojeva jest u kontekstu vektorskih prostora. Stoga, krenimo s definicijom takvog vektorskog prostora.

## 2.2. Simplicijalna homologija

**Definicija 2.18** *Kvocijentni prostor  $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$  nazivamo  $n$ -ti homološki vektorski prostor simplicijalnog kompleksa  $K$ .*

Općenito, za vektorski prostor  $V$  i njegov potprostor  $L$  vrijedi da je dimenzija kvocijentnog prostora  $V/L$  jednaka  $\dim V/L = \dim V - \dim L$ . Dakle, iz definicije slijedi da je  $\beta_n(K) = \dim H_n(K)$ . Elementi od  $H_n$  nazivaju se **homološke klase**, u oznaci  $[z]$ ,  $z \in \text{Ker}(\partial_n)$ , a za dva ciklusa koja pripadaju istoj klasi kažemo da su **homologni**.

**Lema 2.19** *Neka su  $W$  i  $V \subseteq W$  dva konačnodimenzionalna vektorska prostora (nad nekim poljem). Baza  $\mathcal{B}'$  prostora  $V$  može se nadopuniti do baze  $\mathcal{B}$  prostora  $W$ . Nadalje,  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$  je baza kvocijentnog prostora  $W/V$ .*

Prethodna lema daje nam algoritam za pronalazak baze prostora  $H_n(K)$ : prvo je potrebno pronaći bazu  $\mathcal{B}'$  prostora  $B_n(K)$  pa je zatim proširiti na bazu  $\mathcal{B}$  prostora  $Z_n(K)$ . Tada je  $\mathcal{B} \setminus \mathcal{B}'$  baza prostora  $H_n(K)$ . Međutim, čak i za prilično male simplicijalne komplekse taj izračun može biti vrlo složen.

**Primjer 2.20** *Vratimo se simplicijalnom kompleksu prikazanom na slici 2.4. Vektorski prostor  $H_0(K)$  generiran je klasom  $[p_i]$  za bilo koji vrh  $p_i$ . Nadalje,  $H_i(K) = 0$  za svaki  $i > 1$ . Već smo vidjeli da vrijedi  $B_1(K) = \{c_3\}$ . Stoga,  $\{[c_1], [c_2]\}$  je baza prostora  $H_1(K) \cong \mathbb{Z}_2^2$ .*

## Poglavlje 3

# Simplicijalna preslikavanja

**Definicija 3.1** Neka su  $K$  i  $L$  apstraktni simplicijalni kompleksi čiji su skupovi vrhova  $V_K$  i  $V_L$ , redom. **Simplicijalno preslikavanje**  $f : K \rightarrow L$  je preslikavanje takvo da za svaki simpleks razapet skupom točaka  $\{p_0, \dots, p_n\}$  u  $K$ , njegova slika  $\{f(p_0), \dots, f(p_n)\}$  je simpleks u  $L$ .

Simplicijalno preslikavanje iz prethodne definicije inducira linearni operator za sve dimenzije  $n$  na sljedeći način:

$$f_{\#} : C_n(K) \rightarrow C_n(L), \quad f_{\#}(\sigma) = \begin{cases} f(\sigma) & , \text{ ako je } \dim f(\sigma) = \dim \sigma \\ 0 & , \text{ inače.} \end{cases}$$

**Primjer 3.2** Neka je  $K$  2-simpleks definiran vrhovima  $\{a, b, c\}$  i neka je  $L = K = \{a, b, c\}$ . Tada je preslikavanje  $f : K \rightarrow L$  definirano s  $f(a) = a, f(b) = f(c) = b$  simplicijalno preslikavanje. Slijedi da je  $f_{\#} : C_2(K) \rightarrow C_2(L)$  nul-preslikavanje, a  $f_{\#} : C_1(K) \rightarrow C_1(L)$  ima matrični prikaz

$$\begin{array}{ccc} & ab & ac & bc \\ ab & \left( \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ ac & & & \\ bc & & & \end{array}$$

**Lema 3.3** *Vrijedi*

$$\begin{array}{ccc} C_n(K) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(K) \\ f_{\#} \downarrow & & \downarrow f_{\#} \\ C_n(L) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(L) \end{array}$$

To jest,  $f_{\#} \circ \partial_n = \partial_n \circ f_{\#}$ .

**Dokaz.** Dovoljno je pokazati da tvrdnja vrijedi za simpleks  $\sigma = S^n[p_0, \dots, p_n]$ .

**Prvi slučaj:**  $\dim f(\sigma) = \dim \sigma$ . Sada imamo

$$\begin{aligned} f_{\#}(\partial_n(\sigma)) &= \sum_{i=0}^n f_{\#}(S^{n-1}[p_0, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_n]) \\ &= \sum_{i=0}^n S^{n-1}[f(p_0), \dots, \widehat{f(p_i)}, \dots, f(p_n)] = \partial_n(f_{\#}(\sigma)). \end{aligned}$$

**Drugi slučaj:**  $\dim f(\sigma) \leq \dim \sigma - 2$ . Očito je  $\partial_n(f_{\#}(\sigma)) = 0$ . Nadalje, iz pretpostavke slijedi  $\dim S^{n-1}[f(p_0), \dots, \widehat{f(p_i)}, \dots, f(p_n)] \leq \dim \sigma - 2$ , pa imamo

$$f_{\#}(\partial_n(\sigma)) = \sum_{i=0}^n f_{\#}(S^{n-1}[p_0, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_n]) = \sum_{i=0}^n 0 = 0.$$

**Treći slučaj:**  $\dim f(\sigma) = \dim \sigma - 1$ . Očito je  $\partial_n(f_{\#}(\sigma)) = 0$ . Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je  $f(p_0) = f(p_1)$ .

Tada je

$$\dim S^{n-1}[f(p_0), \dots, \widehat{f(p_i)}, \dots, f(p_n)] \leq \dim \sigma - 2, \text{ za svaki } i, 2 \leq i \leq n.$$

Slijedi

$$\begin{aligned} f_{\#}(\partial_n(\sigma)) &= \sum_{i=0}^n f_{\#}(S^{n-1}[p_0, \dots, \widehat{p_i}, \dots, p_n]) \\ &= f_{\#}(S^{n-1}[p_1, \dots, p_n]) + f_{\#}(S^n[p_0, \dots, p_n]) = 0. \end{aligned}$$

■



### 3.1. Simplicijalne aproksimacije

**Korolar 3.4** *Simplicijalno preslikavanje  $f : K \rightarrow L$  inducira linearni operator  $f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$  definiran s  $f_*([c]) = [f_{\#}(c)]$ .*

**Dokaz.** Kako je  $H_n(K) = Z_n(K)/B_n(K)$  i  $H_n(L) = Z_n(L)/B_n(L)$ , dovoljno je pokazati da vrijedi  $f_{\#}(Z_n(K)) \subseteq Z_n(L)$  i  $f_{\#}(B_n(K)) \subseteq B_n(L)$ . Pretpostavimo da je  $\partial_n(c) = 0$  za  $c \in C_n(K)$ . Tada po Lemi 3.3 vrijedi  $\partial_n(f_{\#}(c)) = f_{\#}(\partial_n(c)) = 0$ . Zaključujemo da je  $f_{\#}(c) \in Z_n(L)$ . Sada pretpostavimo da je  $c = \partial_{n+1}(d)$  za neki  $d \in C_{n+1}(K)$ . Tada je  $f_{\#}(c) = f_{\#}(\partial_{n+1}(d)) = \partial_{n+1}(f_{\#}(d))$ . Dakle,  $f_{\#}(c) \in B_n(L)$ . ■

## 3.1 Simplicijalne aproksimacije

Kako bismo dalje u radu koristili homološke vektorske prostore, moramo dokazati da homeomorfizam topoloških prostora  $|K|$  i  $|L|$  povlači izomorfizam homoloških vektorskih prostora  $H_n(K)$  i  $H_n(L)$ . Potpuni dokaz ove tvrdnje nije jednostavan pa nećemo detaljno raspravljati o dokazu. Cilj ovog poglavlja je prikazati kako neprekidno preslikavanje  $h : |K| \rightarrow |L|$  inducira preslikavanje  $h_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$  u homologiji.

**Napomena 3.5** *Za geometrijske simplicijalne komplekse  $K$  i  $L$  definiramo **simplicijalno preslikavanje**  $f : K \rightarrow L$  kao preslikavanje  $f : K^{(0)} \rightarrow L^{(0)}$  takvo da ako je simpleks  $\sigma$  razapet točkama  $p_0, \dots, p_n$  tada je simpleks razapet točkama  $f(p_0), \dots, f(p_n)$  sadržan u  $L$ . Podsjetimo se da se svakom geometrijskom simplicijalnom kompleksu  $K$  može pridružiti apstraktni simplicijalni kompleks koji je njegova vršna shema. Na taj način simplicijalno preslikavanje geometrijskih simplicijalnih kompleksa inducira simplicijalno preslikavanje apstraktnih simplicijalnih kompleksa. Stoga, simplicijalno preslikavanje geometrijskih simplicijalnih kompleksa  $f : K \rightarrow L$  inducira preslikavanje  $f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$  u homologiji.*

### 3.1. Simplicijalne aproksimacije

Simplicijalno preslikavanje  $f : K \rightarrow L$  inducira neprekidno preslikavanje  $|f| : |K| \rightarrow |L|$  definirano s

$$|f| \left( \sum_{i=0}^n t_i p_i \right) = \sum_{i=0}^n t_i f(p_i) \quad \text{gdje je} \quad \sum_{i=0}^n t_i = 1, \quad 0 \leq t_i \leq 1.$$

Sada ćemo vidjeti kako se preslikavanje  $h_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$  može pridružiti bilo kojem neprekidnom preslikavanju  $h : |K| \rightarrow |L|$ .

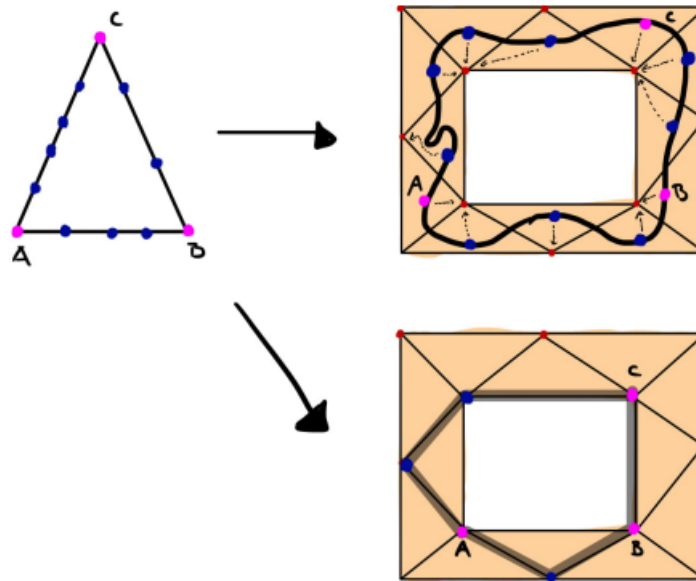
**Definicija 3.6** *Neka su  $K$  i  $L$  simplicijalni kompleksi i neka je  $h : |K| \rightarrow |L|$ . Kažemo da je  $f : K \rightarrow L$  **simplicijalna aproksimacija** za  $h$  ako za svaki  $x \in |K|$  vrijedi da se  $|f|(x)$  nalazi u najmanjem simpleksu koji sadrži  $h(x)$ .*

Sljedeći teorem objašnjava važnost simplicijalnih aproksimacija.

**Teorem 3.7** *Ako su  $f_1, f_2 : K \rightarrow L$  simplicijalne aproksimacije za preslikavanje  $h : |K| \rightarrow |L|$ , tada je  $f_{1,*} = f_{2,*} : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$ .*

Možemo zaključiti da za svako neprekidno preslikavanje  $h$  koje dopušta simplicijalnu aproksimaciju  $f$ , imamo dobro definirano preslikavanje  $f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$  u homologiji. Međutim, ne dopuštaju sva neprekidna preslikavanja simplicijalne aproksimacije.

### 3.1. Simplicijalne aproksimacije



Slika 3.1: Simplicijalna aproksimacija

**Primjer 3.8** *Neka je  $K$  triangulacija trokuta prikazana na slici 3.1. i neka je  $L$  triangulacija ispunjenog pravokutnika s rupom u obliku pravokutnika (na istoj slici). Krivulja u  $|L|$  prikazuje sliku  $h(|K|)$ , gdje je  $h$  neprekidno preslikavanje. Vidimo da  $h$  dopušta simplicijalnu aproksimaciju  $f : K \rightarrow L$  dobivenu pridruživanjem odgovarajućih vrhova od  $L$  slikama vrhova od  $K$  (na slici označeno strelicama). Primijetimo da ako bi triangulacija trokuta bila  $\{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}\}$ , tada preslikavanje  $h$  ne bi dopuštalo simplicijalnu aproksimaciju.*

Prethodni primjer pokazuje da za zadane  $K$  i  $L$  te neprekidno preslikavanje  $h : |K| \rightarrow |L|$ , ne mora postojati simplicijalna aproksimacija  $f : K \rightarrow L$  preslikavanja  $h$ . Međutim, izgleda kao da je moguće podijeliti simplekse u  $K$  da budu dovoljno mali tako da slikama njegovih vrhova možemo pridružiti vrhove od  $L$  na način koji daje dobro definiranu simplicijalnu aproksimaciju. Ova ideja daje nam motiv za sljedeću definiciju.

### 3.1. Simplicijalne aproksimacije

**Definicija 3.9** *Kažemo da je simplicijalni kompleks  $K'$  **razdioba** simplicijalnog kompleksa  $K$  ako je  $|K'| = |K|$  i svaki simpleks u  $K'$  je sadržan u nekom simpleksu od  $K$ .*

**Teorem 3.10** *Neka je  $K'$  razdioba od  $K$  i  $g : K' \rightarrow K$  simplicijalna aproksimacija identitete  $id_{|K|} : |K| \rightarrow |K|$ . Tada je  $g_* : H_n(K') \rightarrow H_n(K)$  izomorfizam.*

Jedan način razdiobe simplicijalnog kompleksa  $K$  je **baricentrična razdioba**. Neka je  $\sigma \in K$  simpleks u  $\mathbb{R}^k$  razapet točkama  $\{p_0, \dots, p_n\}$ . **Težište (baricentar) simpleksa  $\sigma$**  je

$$\hat{\sigma} = \frac{1}{n+1}(p_0 + \dots + p_n).$$

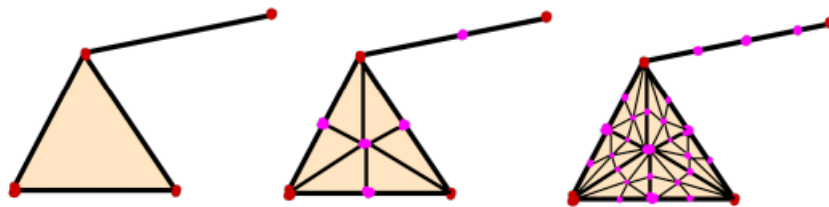
**Prvom baricentričnom razdiobom** simpleksa  $K$  nazivamo simplicijalni kompleks  $Sd(K)$  koji se sastoji od svih simpleksa razapetih točkama  $\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_r$  gdje je  $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \dots \subset \sigma_r$  niz različitih simpleksa u  $K$ . Očito je  $\{\hat{\sigma} : \sigma \in K\}$  skup vrhova prve baricentrične razdiobe  $Sd(K)$ .

Za  $j > 1$ , definiramo  **$j$ -tu baricentričnu razdiobu**  $Sd^j(K)$  kao baricentričnu razdiobu simplicijalnog kompleksa  $Sd^{j-1}(K)$ .

$Sd(K)$  je simplicijalni kompleks i vrijedi  $|Sd(K)| = |K|$ .

**Primjer 3.11** *Slika 3.2 prikazuje simplicijalni kompleks  $K$  s prve dvije baricentrične razdiobe  $Sd(K)$  i  $Sd^2(K)$ . Uočimo da svako preslikavanje  $f : Sd(K)^0 \rightarrow K^0$  koje vrhu  $\hat{\sigma}$  pridružuje bilo koji vrh simpleksa  $\sigma$  definira simplicijalno preslikavanje.*

### 3.1. Simplicijalne aproksimacije



Slika 3.2: Simplicijalni kompleks i njegove prve dvije baricentrične razdiobe.

**Teorem 3.12 (Teorem simplicijalne aproksimacije)** *Neka su  $K$  i  $L$  simplicijalni kompleksi i  $h : |K| \rightarrow |L|$  neprekidno preslikavanje. Tada postoji  $j \in \mathbb{N}$  takav da preslikavanje  $h$  dopušta simplicijalnu aproksimaciju  $f : Sd^j(K) \rightarrow L$ .*

Zajedno s Teoremom 3.7, Teorem 3.12 pokazuje da postoji  $j \in \mathbb{N}$  takav da neprekidno preslikavanje  $h : |K| \rightarrow |L|$  inducira preslikavanje  $f_* : H_n(Sd^j(K)) \rightarrow H_n(L)$ . Da bismo dovršili konstrukciju inducirano preslikavanja u homologiji, potrebna nam je sljedeća lema.

**Lema 3.13** *Neka je  $f : Sd(K)^0 \rightarrow K^0$  preslikavanje koje vrhu  $\hat{\sigma}$  pridružuje bilo koji vrh simpleksa  $\sigma$ . Tada je  $f$  simplicijalno preslikavanje i aproksimacija identitete  $id_{|K|} : |K| \rightarrow |K|$ .*

Sada možemo neprekidnom preslikavanju  $h : |K| \rightarrow |L|$  pridružiti preslikavanje u homologiji. Odaberimo razdiobu  $K'$  od  $K$  te simplicijalna preslikavanja  $g : K' \rightarrow K$  i  $f : K' \rightarrow L$  koja aproksimiraju identitetu  $id_{|K|}$  i preslikavanje  $h$ , redom. Takvi  $f$ ,  $g$  i  $K'$  sigurno postoje prema Teoremu 3.12 i Lemi 3.13. Ovo daje sljedeći odnos vektorskih prostora i linearnih operatora:

$$H_n(K) \xleftarrow{g_*} K' \xrightarrow{f_*} H_n(L)$$

### 3.1. Simplicijalne aproksimacije

Iz Teorema 3.10 slijedi da je preslikavanje  $g_* : H_n(K') \rightarrow H_n(K)$  izomorfizam, pa tako dobivamo traženo preslikavanje u homologiji:

$$h_* := f_* \circ (g_*)^{-1} : H_n(K) \rightarrow H_n(L). \quad (3.1)$$

Završimo ovo poglavlje zaključkom da je homologija topološka invarijanta.

**Korolar 3.14** *Ako je preslikavanje  $h : |K| \rightarrow |L|$  homeomorfizam, tada je preslikavanje  $h_*$  (definirano u 3.1) izomorfizam.*

**Dokaz.** Kako je  $h : |K| \rightarrow |L|$  homeomorfizam, tada slijedi

$$id_{H_n(K)} = (id_{|K|})_* = (h^{-1} \circ h)_* = (h^{-1})_* \circ h_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K)$$

$$id_{H_n(L)} = (id_{|L|})_* = (h \circ h^{-1})_* = h_* \circ (h^{-1})_* : H_n(L) \rightarrow H_n(L)$$

Dakle,  $h_*$  je izomorfizam. ■

## Poglavlje 4

# Homotopija

U prošlom poglavlju vidjeli smo kako neprekidno preslikavanje  $h : |K| \rightarrow |L|$  inducira linearni operator u homologiji, te da je to preslikavanje izomorfizam ako je  $h$  homeomorfizam. Sada ćemo vidjeti slabiji uvjet za  $h$  tako da inducirano preslikavanje bude izomorfizam.

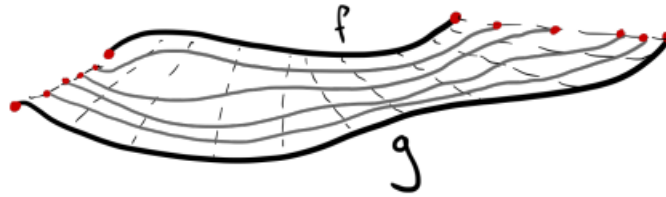
**Definicija 4.1** *Neka su  $X$  i  $Y$  topološki prostori. **Homotopija** iz  $X$  u  $Y$  je bilo koje neprekidno preslikavanje  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$ .*

**Definicija 4.2** *Neka su  $f, g : X \rightarrow Y$  neprekidna preslikavanja. **Homotopija između  $f$  i  $g$**  je neprekidno preslikavanje  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  takvo da je  $F(x, 0) = f(x)$  i  $F(x, 1) = g(x)$ , za svaki  $x \in X$ .*

**Definicija 4.3** *Kažemo da su preslikavanja  $f$  i  $g$  **homotopna** ako postoji homotopija između  $f$  i  $g$ . Označavamo  $f \simeq g$ .*

**Napomena 4.4** *Relacija homotopnosti je relacija ekvivalencije na skupu neprekidnih preslikavanja iz  $X$  u  $Y$ .*

**Primjer 4.5** *Na Slici 4 vidimo primjer dva homotopna preslikavanja  $f, g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^d$ .*



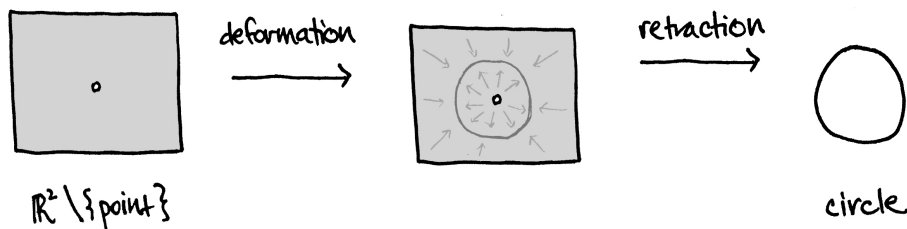
Slika 4.1: Homotopna preslikavanja  $f$  i  $g$ .

**Primjer 4.6** Preslikavanja  $f, g : [0, 1] \rightarrow \{0, 1\}$  definirana s  $f(x) = 0$  i  $g(x) = 1$ , za svaki  $x \in [0, 1]$ , nisu homotopna.

Međutim, trebat će nam stroža verzija homotopije. Neka su  $A \subseteq X$  i  $B \subseteq Y$ . **Preslikavanje parova**  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  je preslikavanje  $f : X \rightarrow Y$  takvo da je  $f(A) \subseteq B$ . **Homotopija parova** između  $f$  i  $g$ ,  $f, g : (X, A) \rightarrow (Y, B)$ , je homotopija  $F : X \times [0, 1] \rightarrow Y$  između  $f$  i  $g$  takva da je  $F_t(A) \subseteq B$  za sve  $t \in [0, 1]$ .

**Definicija 4.7** Kažemo da su prostori  $(X, A)$  i  $(Y, B)$  **homotopni ekvivalentni** ako postoje preslikavanja  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  i  $g : (Y, B) \rightarrow (X, A)$  tako da je  $g \circ f \simeq id_{(X,A)}$  i  $f \circ g \simeq id_{(Y,B)}$ . Označavamo  $(X, A) \simeq (Y, B)$  i preslikavanje  $f$  zovemo **homotopna ekvivalencija**.

Ako je  $i : (Y, B) \hookrightarrow (X, A)$  inkluzija potprostora i  $r : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  preslikavanje tako da je  $r \circ i = id_{(Y,B)}$  i  $i \circ r \simeq id_{(X,A)}$ , tada  $(Y, B)$  zovemo **deformacijsko povlačenje** (eng. deformation retract) prostora  $(X, A)$ .



Slika 4.2: Kružnica je deformacija prostora  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .



#### 4.1. Teorem o živcu

Interes za homotopnim preslikavanjima proizlazi iz sljedećeg teorema.

**Teorem 4.8** *Ako vrijedi  $f \simeq g : |K| \rightarrow |L|$ , tada je  $f_* = g_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$ .*

**Teorem 4.9** *Neka je preslikavanje  $f : |K| \rightarrow |L|$  homotopna ekvivalencija. Tada je  $h_* : H_n(K) \rightarrow H_n(L)$  izomorfizam.*

**Dokaz.** Kako su je  $f$  homotopna ekvivalencija, postoji preslikavanje  $g : |L| \rightarrow |K|$  tako da je  $g \circ f \simeq id_{|K|}$  i  $f \circ g \simeq id_{|L|}$ . Slijedi

$$id_{H_n(K)} = (id_{|K|})_* = (g \circ f)_* = g_* \circ f_* : H_n(K) \rightarrow H_n(K)$$

$$id_{H_n(L)} = (id_{|L|})_* = (f \circ g)_* = f_* \circ g_* : H_n(L) \rightarrow H_n(L).$$

Stoga,  $h_*$  je izomorfizam. ■

## 4.1 Teorem o živcu

Poseban primjer homotopne ekvivalencije je *Teorem o živcu*.

Neka je  $\mathcal{F}$  konačna familija zatvorenih i konveksnih skupova u euklidskom prostoru. Definiramo **živac** od  $\mathcal{F}$  kao apstraktni simplicijalni kompleks

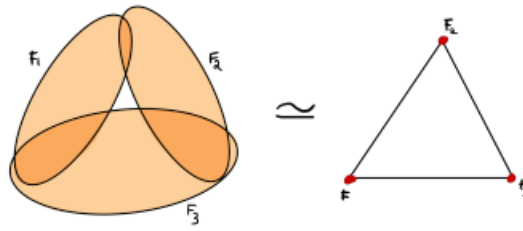
$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) := \{\mathcal{G} \subseteq \mathcal{F} : \bigcap_{F_i \in \mathcal{G}} F_i \neq \emptyset\}.$$

**Primjer 4.10** *Neka je  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, F_3\}$  sa Slike 4.3. Tada je*

$$\mathcal{N}(\mathcal{F}) = \{\{F_1\}, \{F_2\}, \{F_3\}, \{F_1, F_2\}, \{F_2, F_3\}, \{F_1, F_3\}\}$$

*što je izomorfno granici 2-simpleksa.*

#### 4.1. Teorem o živcu



Slika 4.3: Živac (desno) pridružen familiji skupova (lijevo).

#### Teorem 4.11 (Teorem o živcu)

1. Neka je  $\mathcal{F} = \{F_1, \dots, F_m\}$  familija zatvorenih i konveksnih skupova u Euklidskom prostoru. Tada je

$$\bigcup_{F_i \in \mathcal{F}} F_i \simeq |\mathcal{N}(\mathcal{F})|.$$

2. Neka je  $\mathcal{F}$  definiran kao gore i neka je  $\mathcal{F}' = \{F'_1, \dots, F'_m\}$  familija zatvorenih i konveksnih skupova takva da je  $F_i \subseteq F'_i$ , za svaki  $i$ . Označimo s  $j$  inkluziju  $\bigcup_{F_i \in \mathcal{F}} F_i \hookrightarrow \bigcup_{F'_i \in \mathcal{F}'} F'_i$  i neka je  $\sigma : \mathcal{N}(\mathcal{F}) \rightarrow \mathcal{N}(\mathcal{F}')$  simplicijalno preslikavanje koje preslikava  $F_i$  u  $F'_i$ . Vrijedi sljedeći komutativni dijagram

$$\begin{array}{ccc} H_n(\bigcup_{F_i \in \mathcal{F}} F_i) & \xrightarrow{j_*} & H_n(\bigcup_{F'_i \in \mathcal{F}'} F'_i) \\ \cong \downarrow & & \downarrow \cong \\ H_n(\mathcal{N}(\mathcal{F})) & \xrightarrow{\sigma_*} & H_n(\mathcal{N}(\mathcal{F}')) \end{array}$$

## Poglavlje 5

# Relativna homologija

Neka je  $K_0 \subseteq K$  potkompleks. Definiramo **relativni vektorski prostor  $n$ -lanaca** kao kvocijentni prostor  $C_n(K, K_0) = C_n(K)/C_n(K_0)$ .

Kako je  $\partial_n(C_n(K_0)) \subseteq C_{n-1}(K_0)$ , možemo definirati granični operator

$$\partial_n : C_n(K, K_0) \rightarrow C_{n-1}(K, K_0)$$

takav da je  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ .

Sada imamo i **relativni  $n$ -ti homološki vektorski prostor**

$$H_n(K, K_0) = Z_n(K, K_0)/B_n(K, K_0) := \text{Ker}(\partial_n)/\text{Im}(\partial_{n+1}).$$

**Primjer 5.1** *Neka je  $K$  simplicijalni kompleks dobiven od 2-simpleksa i svih njegovih stranica. Neka je  $K_0$  njegov 1-skelet. Slijedi:*

$$\dim C_2(K) = 1 \qquad \dim C_2(K_0) = 0$$

$$\dim C_1(K) = 3 \qquad \dim C_1(K_0) = 3$$

$$\dim C_0(K) = 3 \qquad \dim C_0(K_0) = 3$$

Vidimo da je  $H_2(K, K_0) \cong \mathbb{Z}_2$  i  $H_1(K, K_0) = H_0(K, K_0) = 0$ .

Prethodni primjer može se generalizirati za bilo koji  $n$ -simpleks. Neka je  $K$   $n$ -simpleks sa svim njegovim stranicama, a  $K_0$  njegov  $(n - 1)$ -skelet. Tada je  $H_n(K, K_0) \cong \mathbb{Z}_2$  i svi ostali homolški vektorski prostori su trivijalni.

**Definicija 5.2** *Neka su  $A \subseteq X$  i  $B \subseteq Y$ . Kažemo da je preslikavanje  $f : (X, A) \rightarrow (Y, B)$  **preslikavanje parova** ako je  $f : X \rightarrow Y$  preslikavanje takvo da je  $f(A) \subseteq B$ .*

Primijetimo da ako je preslikavanje  $f : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$  simplicijalno preslikavanje parova, tada je  $f_{\#}(C_n(K_0)) \subseteq C_n(L_0)$ . Stoga je inducirano preslikavanje  $f_{\#} : C_n(K, K_0) \rightarrow C_n(L, L_0)$ , definirano s  $f_{\#}([c]) = [f(c)]$ , dobro definirano. Nadalje, iz Leme 3.3 slijedi

$$\partial_n \circ f_{\#}([c]) = [\partial_n \circ f_{\#}(c)] = [f_{\#} \circ \partial_n(c)] = f_{\#} \circ \partial_n([c]).$$

Kao u dokazu Korolara 3.4, simplicijalno preslikavanje parova  $f : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$  inducira preslikavanje u relativnoj homologiji

$$f_* : H_n(K, K_0) \rightarrow H_n(L, L_0).$$

Sada ćemo navesti teorem o linearnom operatoru koji će nam služiti u sljedećem odjeljku.

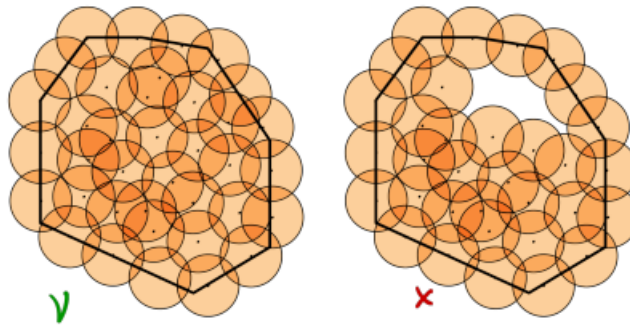
**Teorem 5.3** *Neka je  $K_0 \subseteq K$ . Tada je linearni operator  $\delta_* : H_n(K, K_0) \rightarrow H_{n-1}(K_0)$ ,  $\delta_*([c]) = [\partial_n(c)]$  dobro definiran i ako je preslikavanje  $f : (K, K_0) \rightarrow (L, L_0)$  simplicijalno preslikavanje parova, tada vrijedi sljedeće:*

$$\begin{array}{ccc} H_n(K, K_0) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-1}(K_0) \\ f_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_n(L, L_0) & \xrightarrow{\delta_*} & H_{n-1}(L_0). \end{array}$$

## 5.1. Senzorske mreže

# 5.1 Senzorske mreže

Pogledajmo sada na primjeru gdje relativna homologija može biti korisna.



### 5.1.1 Problem pokrivača

Problem je sljedeći: pretpostavimo da je  $X$  konačan skup čvorova sadržanih u domeni  $D \subset \mathbb{R}^2$ , gdje svaki čvor može primiti i emitirati informacije te pokriti područje zadanog radijusa. Pokriva li unija kugli nekog radijusa  $r$  domenu  $D$ ? Na gornjoj ilustraciji vidimo da je odgovor "da" u lijevom slučaju, a "ne" u desnom slučaju. Pod pretpostavkom da je lokacija svakog čvora poznata, to je trivijalan zadatak. Zanima nas odgovor na to pitanje pod pretpostavkom da ne znamo točnu lokaciju čvorova, već samo koji su čvorovi blizu jedan drugome.

Radit ćemo pod sljedećim pretpostavkama:

- Čvorovi emitiraju svoje jedinstvene ID brojeve. Svaki čvor može otkriti identitet bilo kojeg čvora unutar radijusa emitiranja  $r_b$
- Čvorovi imaju kugle radijusa  $r_c \geq r_b/\sqrt{3}$ .

### 5.1. Senzorske mreže

- Čvorovi leže u kompaktnoj i povezanoj domeni  $D \subset \mathbb{R}^2$  čija je granica  $\partial D$  povezana i po dijelovima linearna, skup čvorova na granici zovemo granični čvorovi i označavamo  $X_f$ .
- Svaki granični čvor  $x \in X_f$  zna ID svojih susjeda na granici  $\partial D$  i oba susjeda leže unutar udaljenosti  $r_b$  od  $x$ .

Radi jednostavnosti koristimo oznake  $R := \text{VR}_{r_b/2}(X)$  i  $F := \text{VR}_{r_b/2}(X_f)$ , gdje je  $F$  1-dimenzionalni ciklus koji sadrži granične čvorove, tj.  $\partial D$  je jedna geometrijska realizacija od  $F$ . Također, prisjetimo se iz Teorema 5.3 da postoji dobro definiran linearni operator  $\delta_* : H_2(R, F) \rightarrow H_1(F)$ .

**Napomena 5.4** *U sljedećem teoremu spominje se pojam pokrivača pa ponovimo definiciju (preuzeto iz [8]).*

Neka je  $\mathcal{S} = (A_\lambda, \lambda \in \Lambda)$  familija podskupova  $A_\lambda$  skupa  $X$  i  $Y \subseteq X$ . Kažemo da je  $\mathcal{S}$  **pokrivač** za  $Y$ , ako je  $Y \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ . Posebno,  $\mathcal{S}$  je pokrivač za  $X$ , ako je  $X = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ .

**Teorem 5.5** *Ako postoji  $[\alpha] \in H_2(R, F)$  tako da je  $0 \neq \delta_*([\alpha]) = [\partial_2(\alpha)] \in H_1(F)$ , tada je unija  $U = \bigcup_{x \in X} B_{r_c}(x)$  pokrivač za  $D$ .*

**Dokaz.** Neka je  $z : |R| \rightarrow \mathbb{R}^2$  preslikavanje koje vrhu  $v_i \in |R|$  pridruži odgovarajući čvor u ravnini i koje se linearno proširuje na sve višedimenzionalne simplekse na sljedeći način:  $z(\sum_{i=0}^n t_i v_i) = \sum_{i=0}^n t_i z(v_i)$ .

Uočimo da je  $z(|R|) \subseteq U$ . Doista, neka je  $Q$  skup čvorova koji čine simpleks  $\tau$  u  $R$ , tj.  $\text{diam}(Q) \leq r_b$ . Tada je prema Teoremu 1.14 presjek  $\bigcap_{x \in Q} B_{r_b/\sqrt{3}}(x)$  neprazan. Sada se lako vidi da je bilo koja točka u  $z(\tau)$  udaljena najviše  $r_b/\sqrt{3}$  od točke u  $Q$ , i stoga

$$z(\tau) \subseteq \bigcup_{x \in Q} B_{r_b/\sqrt{3}}(x) \subseteq \bigcup_{x \in Q} B_{r_c}(x) \subseteq U.$$

### 5.1. Senzorske mreže

Kako ovo vrijedi za svaki simpleks  $\tau$ , slijedi  $z(|R|) \subseteq U$ .

Iz Teorema 5.3 imamo sljedeći komutativni dijagram:

$$\begin{array}{ccc} H_2(R, F) & \xrightarrow{\delta_*} & H_1(F) \\ z_* \downarrow & & \downarrow f_* \\ H_2(\mathbb{R}^2, \partial D) & \xrightarrow{\delta_*} & H_1(\partial D) \end{array}$$

Posebno vrijedi  $z_*([a]) = z_* \circ \delta_*([a]) \neq 0$ .

Pretpostavimo da postoji točka  $p \in D$  koja nije sadržana u uniji  $U$ . Tada za preslikavanje  $z$  vrijedi sljedeći dijagram

$$\begin{array}{ccc} (|R|, |F|) & \xrightarrow{z} & (\mathbb{R}^2, \partial D) \\ z \downarrow & & \uparrow \\ (U, \partial D) & \hookrightarrow & (\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}, \partial D) \end{array}$$

Primjenom homologije dobiva se sljedeći komutativni dijagram vektorskih prostora

$$\begin{array}{ccc} H_2(R, F) & \xrightarrow{z_*} & H_2(\mathbb{R}^2, \partial D) \\ z_* \downarrow & & \uparrow \\ H_2(U, \partial D) & \hookrightarrow & H_2(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}, \partial D) \end{array}$$

Uočimo da je  $(\mathbb{R}^2 \setminus \{p\}, \partial D) \simeq (D \setminus \{p\}, \partial D) \simeq (\partial D, \partial D)$  i stoga

$$H_2(D \setminus \{p\}, \partial D) \cong H_2(\partial D, \partial D) = 0.$$

To je u kontradikciji s  $z_*([a]) \neq 0$ . Dakle,  $D \subseteq U$ . ■

**Korolar 5.6** *Neka je  $\alpha$  definirana kao u Teoremu 5.5. Restrikcija unije  $U$  na čvorove  $x \in X$  koji čine  $\alpha$  pokrivač je za  $D$ .*

## Poglavlje 6

# Zaključak o topologiji i homologiji

Neka je  $K \subseteq \mathbb{R}^d$  kompaktan skup i  $P$  skup točaka koje leže "blizu"  $K$ . Zanima nas može li se iz skupa  $P$  rekonstruirati topologija skupa  $K$ . Navest ćemo jedan teorem koji potvrdno odgovara na to pitanje pod prilično jakim pretpostavkama o skupu  $K$ .

Za skupove  $K$  i  $P$  definirane kao gore te  $x \in \mathbb{R}^d$ , definiramo

$$d_K(x) = \min_{y \in K} \|x - y\|, \quad d_P(x) = \min_{y \in P} \|x - y\|,$$

gdje je norma standardna 2-norma.

Za dani  $x \in \mathbb{R}^d$  definiramo

$$\Pi_K(x) = \{y \in K : d_K(x) = \|x - y\|\}.$$

Uočimo da je  $|\Pi_K(x)| \geq 1$ , za svaki  $x$ .

### Definicija 6.1

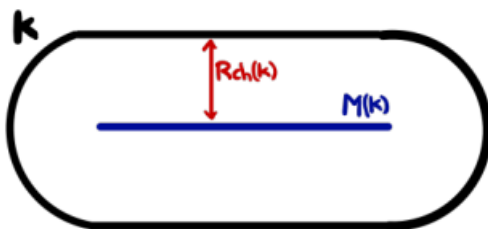
**Središnja os** skupa  $K$  je skup  $M(K) := \{x : |\Pi_K(x)| \geq 2\}$ .



**Doseg** skupa  $K$  definiramo s

$$Rch(K) := \min_{y \in K} d(y, \overline{M(K)})$$

gdje je  $\overline{M(K)}$  zatvarač središnje osi  $M(K)$ .



Slika 6.1: Središnja os i doseg skupa.

**Definicija 6.2 Hausdorffova udaljenost** dvaju nepraznih skupova  $X, Y \subseteq \mathbb{R}^d$  definirana je s

$$d_H(X, Y) := \max \left\{ \sup_{x \in X} \inf_{y \in Y} \|x - y\|, \sup_{y \in Y} \inf_{x \in X} \|y - x\| \right\}.$$

Za dana preslikavanja  $d_K, d_P : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  i radijus  $r$ , imamo sljedeće podskupove prostora  $\mathbb{R}^d$ :

$$K_r := d_K^{-1}(\langle -\infty, r \rangle), \quad P_r := d_P^{-1}(\langle -\infty, r \rangle) = \bigcup_{p \in P} B_r(p).$$

**Teorem 6.3 (Nioygi, Smale, Weinberger)** Neka je  $K$  kompaktna mnogostrukost prostora  $\mathbb{R}^d$  s pozitivnim dosegom. Neka je  $P$  skup točaka takav da vrijedi  $d_H(K, P) = \epsilon < \sqrt{\frac{3}{20}} Rch(K)$ . Tada za svaki  $r \in \langle 2\epsilon, \sqrt{\frac{3}{5}} Rch(K) \rangle$ , skup  $P_r$  može se deformacijski povući na  $K$ .

**Napomena 6.4** *Topološka mnogostrukost* dimenzije  $n$  je topološki prostor sa svojstvom da svaka točka ima otvorenu okolinu koja je homeomorfna  $\mathbb{R}^n$ .

Teorem 6.3 tvrdi da se topologija prostora  $K$  može rekonstruirati, ali pod prilično jakim pretpostavkama.

Sada nastavljamo s dokazom da se homologija (ne nužno kompaktnog) skupa može rekonstruirati iz *perzistentne homologije* dovoljno dobrog uzorka.

**Teorem 6.5** *Neka su  $K \subseteq \mathbb{R}^d$ ,  $P \subseteq \mathbb{R}^d$  konačni skupovi i  $\epsilon, \delta > 0$  tako da je*

1.  $K \subseteq P_\delta$  (*gustoća uzorkovanja*)
2.  $P \subseteq K_\epsilon$  (*greška uzorkovanja: točke ne moraju ležati u  $K$* )
3. inkluzija  $K \hookrightarrow K_{\delta+\epsilon}$  inducira izomorfizam  $H_n(K) \xrightarrow{\cong} H_n(K_{\delta+\epsilon})$
4. inkluzija  $K_{\delta+\epsilon} \hookrightarrow K_{2(\epsilon+\delta)}$  inducira monomorfizam  $H_n(K_{\delta+\epsilon}) \hookrightarrow H_n(K_{2(\epsilon+\delta)})$ .

Tada je  $H_n(K) \cong \text{Im}(H_n(P_\delta) \rightarrow H_n(P_{2\delta+\epsilon}))$ .

**Dokaz.** Pretpostavke 1. i 2. daju sljedeći komutativni dijagram inkluzija

$$\begin{array}{ccccc}
 K & \hookrightarrow & K_{\delta+\epsilon} & \hookrightarrow & K_{2(\delta+\epsilon)} \\
 \downarrow & \nearrow & \downarrow & \nearrow & \\
 P_\delta & \hookrightarrow & P_{2\delta+\epsilon} & & 
 \end{array}$$

što inducira sljedeći komutativni dijagram u homologiji

$$\begin{array}{ccccc}
 H_n(K) & \xrightarrow{\cong} & H_n(K_{\delta+\epsilon}) & \xrightarrow{\text{mono}} & H_n(K_{2(\delta+\epsilon)}) \\
 \downarrow & \nearrow a & \downarrow b & \nearrow & \\
 H_n(P_\delta) & \longrightarrow & H_n(P_{2\delta+\epsilon}) & & 
 \end{array}$$

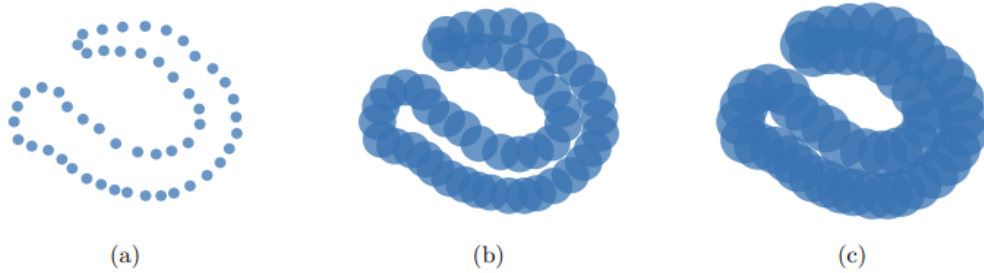
Kako je  $H_n(K) \rightarrow H_n(K_{\delta+\epsilon})$  izomorfizam, to preslikavanje  $a$  mora biti surjekcija. Isto tako, preslikavanje  $b$  mora biti monomorfizam.

Zaključujemo da vrijedi

$$H_n(K) \cong H_n(K_{\delta+\epsilon}) \cong \text{Im}(b) = \text{Im}(b \circ a) = \text{Im}(H_n(P_\delta) \rightarrow H_n(P_{2\delta+\epsilon})).$$

■

Slika 6.2 prikazuje točkasti uzorak koji ne uspijeva rekonstruirati prave dimenzije homologije za bilo koji radijus  $r$ .



Slika 6.2: Ne postoji dovoljno dobar radijus  $s$  kojim se jasno ističe rupa okružena točkama iz uzorka. S druge strane, perzistentna homologija bi otkrila ovo svojstvo.

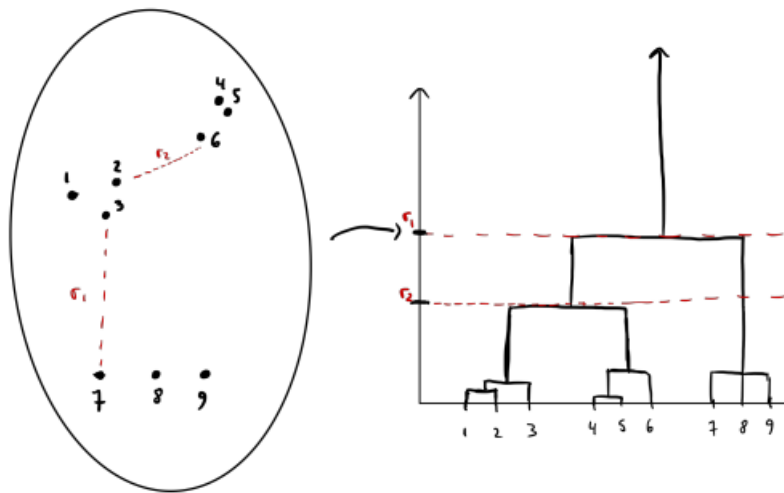
# Poglavlje 7

## Perzistentni Bettijevi brojevi

Za skup točaka  $P \subseteq \mathbb{R}^d$ , Bettijev broj  $\beta_i(P_r)$  vrlo je promjenjiv u odnosu na radijus  $r$ , što znači da mala perturbacija skupa  $P$  može rezultirati potpuno različitim Bettijevim brojem. Nadalje, iako postoji "pravi" radijus  $r$  za dovoljno dobar uzorak dovoljno lijepog prostora (Teorem 6.3), prilagođavanje parametra nije baš praktično (Slika 6.2).

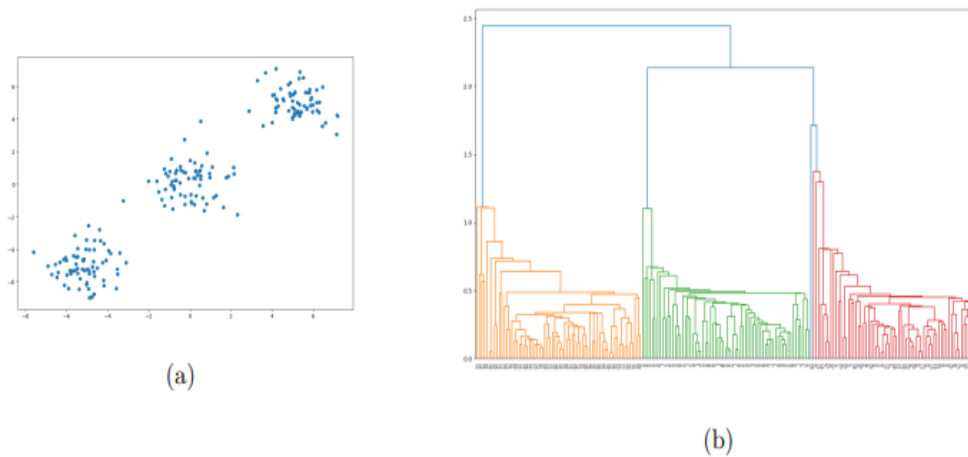
Kao što sugeriraju Teorem 6.5 i Slika 6.2, ovi se problemi mogu riješiti promatranjem podataka s obzirom na različite radijuse. Vidjet ćemo da su rezultirajuće invarijante stabilne u odnosu na perturbacije podataka. Razmotrimo najprije  $\beta_0$ , tj. komponente povezanosti. Koristit ćemo statistički alat koji se zove **dendrogram**. Dendrogram je dijagram u obliku stabla koji prati evoluciju komponenti povezanosti ovisno o promjeni radijusa  $r$ .

**Primjer 7.1** *Neka je  $P = \{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6, p_7, p_8, p_9\}$  skup točaka sa Slike 7.1. Kada je radijus  $r$  dovoljno mali,  $P_r$  se sastoji od 9 komponenti povezanosti. Za nešto veći  $r$  nastaju 3 komponente povezanosti koje se na kraju povezuju u jednu najveću komponentu. Pripadajući dendrogram prikazan je na istoj slici.*



Slika 7.1: Skup točaka s pripadajućim dendrogramom.

**Primjer 7.2** Slika 7.2 prikazuje skup točaka u ravnini zajedno s pripadajućim dendrogramom. Dendrogram sugerira postojanje tri grupe.



Slika 7.2: a) Skup podataka. b) Pripadajući dendrogram.

**Definicija 7.3** *Filtracija simplicijalnog kompleksa*  $K$  je familija potkompleksa  $\{K_i \subseteq K : i = 0, \dots, m\}$  takva da je

$$K_0 \subseteq K_1 \subseteq \dots \subseteq K_m = K.$$

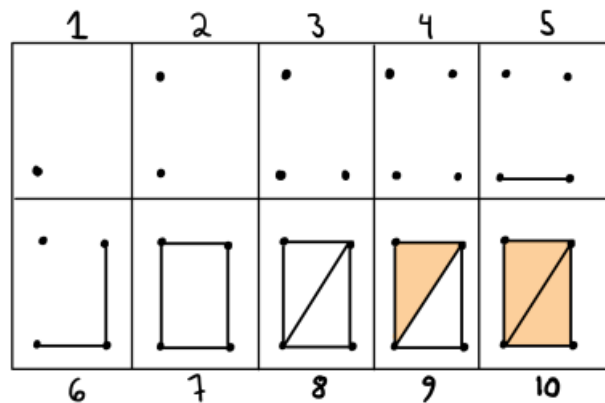
Primjenom simplicijalne homologije na filtraciju kompleksa  $K$  dobijemo sljedeća inducirana preslikavanja u homologiji

$$f_*^{i,j} : H_n(K_i) \rightarrow H_n(K_j)$$

za svaki  $i \leq j$ . Pripadajući **prezistentni  $n$ -ti Bettijevi brojevi** definirani su sa

$$\beta_n^{i,j} = \dim \text{Im} (f_*^{i,j}).$$

**Primjer 7.4** *Promotrimo filtraciju sa Slike 7.3. Neki od prezistentnih Bettijevih brojeva su sljedeći:  $\beta_0^{1,2} = 1$ ,  $\beta_0^{2,4} = 2$ ,  $\beta_0^{2,5} = 2$ ,  $\beta_0^{2,6} = 2$ ,  $\beta_0^{2,7} = 1$ ,  $\beta_1^{7,8} = 1$ ,  $\beta_1^{7,9} = 1$ ,  $\beta_1^{8,9} = 1$  i  $\beta_1^{7,10} = 0$ .*



Slika 7.3: Filtracija simplicijalnog kompleksa.

Neka je  $0 \neq [c] \in H_n(K_i)$ . Kažemo da je klasa  $[c]$  **rođena** u  $K_i$  ako vrijedi  $[c] \notin \text{Im}(f_*^{i-1,i})$ . Ako je  $[c]$  rođena u  $K_i$ , kažemo da **umire** u  $K_j$  ako

se stopi sa starijom klasom u prijelazu iz  $K_{j-1}$  u  $K_j$ . Tada vrijedi  $f_*^{i,j-1}([c]) \notin \text{Im}(f_*^{i-1,j-1})$ , ali  $f_*^{i,j}([c]) \in \text{Im}(f_*^{i-1,j})$ .

**Primjer 7.5** (Nastavak Primjera 7.4) Vidimo da postoji klasa  $[c] \in H_1(K_7)$  rođena u  $K_7$  koja umire u  $K_{10}$ . Isto tako, postoje dvije klase rođene u  $K_8$  koje obje umiru u  $K_9$ . Jedna od njih se popuni, a druga se stopi sa starijom klasom. Ovo je "pravilo starijeg": prednost ima klasa s najranijim vremenom rođenja.

Kako bismo pratili evoluciju homoloških klasa tijekom filtracije simplicijalnog kompleksa, uvodimo sljedeće brojeve:

$$\mu_n^{i,j} = (\beta_n^{i,j-1} - \beta_n^{i,j}) - (\beta_n^{i-1,j-1} - \beta_n^{i-1,j}), \quad \mu_n^{i,\infty} = \beta_n^{i,m} - \beta_n^{i-1,m}.$$

Broj  $\mu_n^{i,j}$  označava broj linearno nezavisnih homoloških klasa dimenzije  $n$ , rođenih u vremenu  $i$  te koje umiru u vremenu  $j$ . Također vrijedi

$$\mu_n^{i,j} = \dim \left( \left( \text{Im}(f_*^{i,j-1}) \cap \text{Ker}(f_*^{j-1,j}) \right) \setminus \left( \text{Im}(f_*^{i-1,j-1}) \cap \text{Ker}(f_*^{j-1,j}) \right) \right).$$

Isto tako,  $\mu_n^{i,\infty}$  označava broj linearno nezavisnih homoloških klasa rođenih u vremenu  $i$  koje nikada ne umiru.

Uočimo da je

$$\dim H_n(K) = \sum_{i=0}^m \mu_n^{i,m}.$$

Brojevi  $\mu_n^{i,j}$  obično se vizualiziraju na sljedeće načine:

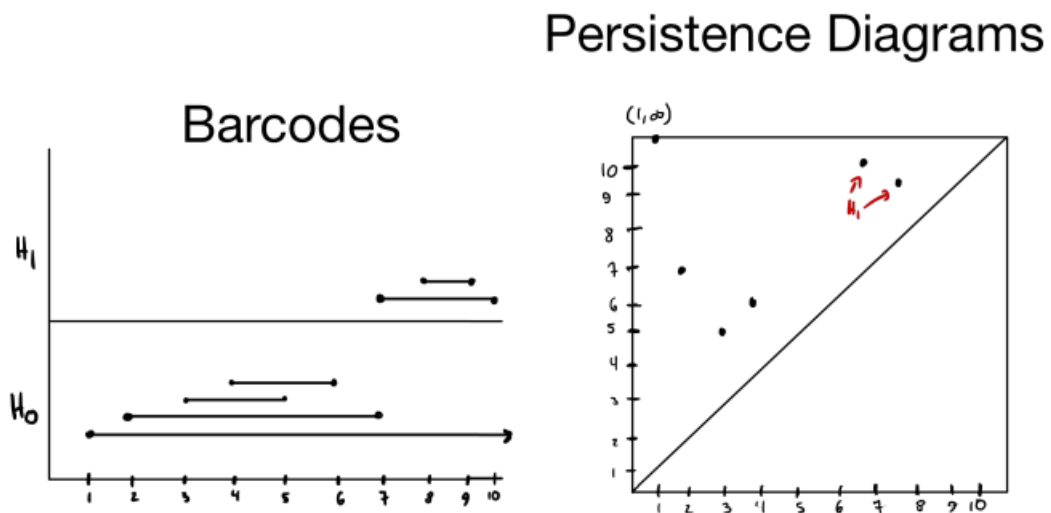
- **barkod dijagram dimenzije  $n$**  - svaki  $\mu_n^{i,j} \neq 0$  interpretira se kao interval  $[i, j)$  koji predstavlja vrijeme života homološke klase
- **perzistentni dijagram dimenzije  $n$**  - za svaki  $\mu_n^{i,j} \neq 0$  na dijagramu se iscrtava točka  $(i, j)$

## 7.1. Čechove i Vietoris-Ripsove filtracije

**Primjer 7.6** (Nastavak Primjera 7.5) Vidimo da su jedini nenegativni  $\mu_n^{i,j}$  sljedeći:

$$\mu_0^{1,\infty} = 1, \quad \mu_0^{2,7} = 1, \quad \mu_0^{3,5} = 1, \quad \mu_0^{4,6} = 1, \quad \mu_1^{7,10} = 1, \quad \mu_1^{8,9} = 1.$$

Pripadajući barkod i perzistentni dijagram vidimo na sljedećoj slici.



Slika 7.4: Barkod i perzistentni dijagram Primjera 7.4.

## 7.1 Čechove i Vietoris-Ripsove filtracije

### Čechova filtracija

Neka je  $P \subset \mathbb{R}^d$ . Tada po Teoremu o živcu (Teorem 4.11) vrijedi sljedeći komutativni dijagram vektorskih prostora i linearnih operatora

$$\begin{array}{ccccccccc}
 H_n(P_{r_0}) & \longrightarrow & H_n(P_{r_1}) & \longrightarrow & H_n(P_{r_2}) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_n(P_{r_m}) \\
 \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
 H_n(\text{Cech}_{r_0}(P)) & \longrightarrow & H_n(\text{Cech}_{r_1}(P)) & \longrightarrow & H_n(\text{Cech}_{r_2}(P)) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow & H_n(\text{Cech}_{r_m}(P))
 \end{array}$$



### 7.1. Cechove i Vietoris-Ripsove filtracije

Nije teško dokazati da se perzistentni Bettijski brojevi za prvi i drugi redak u prethodnom dijagramu podudaraju, pa barkod i perzistentni dijagram Cechove filtracije imaju jasnu geometrijsku interpretaciju: oni bilježi evoluciju "rupa" formiranih od kugla dobivenih povećavanjem radijusa  $r$  oko točaka u skupu  $P$ .

### Vietoris-Ripsova filtracija

Za dani parametar  $r$ , ne mora vrijediti  $VR_r(P) \simeq P_r$ , stoga može biti nejasno kako interpretirati perzistente Bettijske brojeve pripadajuće filtracije

$$VR_{r_0}(P) \hookrightarrow VR_{r_1}(P) \hookrightarrow VR_{r_2}(P) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow VR_{r_m}(P).$$

Međutim, po Korolaru 1.15 vrijede sljedeće inkluzije

$$\text{Cech}_r(P) \subseteq VR_r(P) \subseteq \text{Cech}_{2\delta r}(P) \subseteq VR_{2\delta r}(P), \quad \delta = \sqrt{\frac{d}{2(d+1)}}.$$

Primjenom homologije dobivamo sljedeći komutativni dijagram vektorskih prostora:

$$\begin{array}{ccc} H_n(\text{Cech}_r(P)) & \hookrightarrow & H_n(\text{Cech}_{2\delta r}(P)) \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ H_n(VR_r(P)) & \hookrightarrow & H_n(VR_{2\delta r}(P)) \end{array}$$

Ovaj dijagram pokazuje da svaka klasa u  $H_n(VR_r(P))$  kojoj je slika ne-nul u  $H_n(VR_{2\delta r}(P))$ , mora imati ne-nul sliku u  $H_n(\text{Cech}_{2\delta r}(P))$ . Ovo je svojstvo bitno da bi bili sigurni da na ovaj način reprezentiramo pravu topološku značajku prostora  $P_{2\delta r}$ . Slično, svaka klasa u  $H_n(\text{Cech}_r(P))$  koja ima ne-nul sliku u  $H_n(\text{Cech}_{2\delta r}(P))$  mora imati ne-nul sliku i u  $H_n(VR_r(P))$ . To bi značilo da dovoljno dugi intervali u barkod dijagramu Cechove filtracije induciraju interval u barkod dijagramu Vietoris-Ripsove filtracije, i obrnuto,

### 7.1. Čechove i Vietoris-Ripsove filtracije

svaki dovoljno dug interval u barkod dijagramu Vietoris-Ripsove filtracije odgovara pravoj geometrijskoj značajki.

Uz ovaj očiti nedostatak Vietoris-Ripsovih kompleksa, možemo se zapitati zašto ga uopće razmatrati. Postoje prvenstveno dva razloga za to:

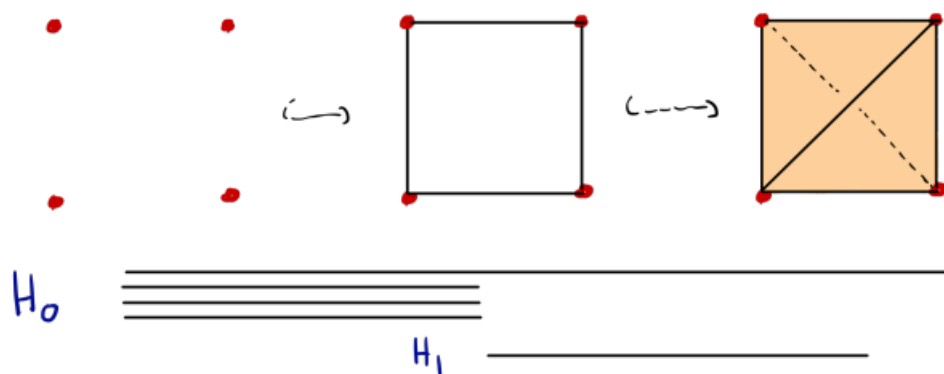
- Za konstrukciju Čechovog kompleksa potrebne su koordinate točaka u  $\mathbb{R}^d$ , dok su za Vietoris-Ripsov kompleks potrebne isključivo udaljenosti parova točaka.
- Rad s Vietoris-Ripsovim kompleksom omogućuje implementaciju određenih heuristika koje u praksi daju značajna ubrzanja.

**Primjer 7.7** *Svaki konačnodimenzionalni metrički prostor ima pridruženu Vietoris-Ripsovu filtraciju. Uzmimo kao primjer metrički prostor koji se sastoji od točaka  $\{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  i ima pridruženu matricu udaljenosti*

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

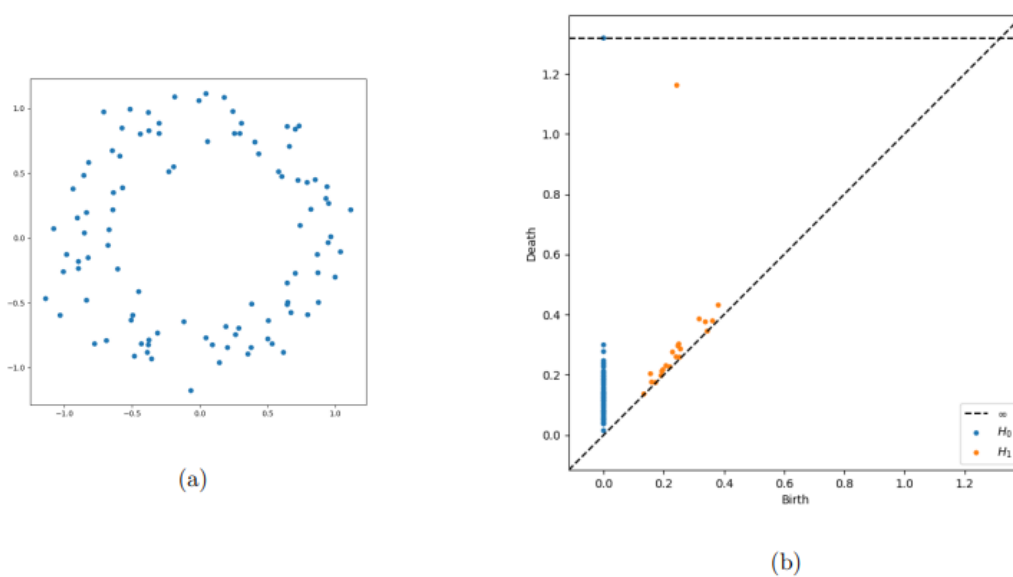
*Imamo filtraciju  $VR_0(P) \subseteq VR_{1/2}(P) \subseteq VR_1(P)$ . Na Slici 7.5 možemo vidjeti vizualizaciju te filtracije.*

### 7.1. Čechove i Vietoris-Ripsove filtracije



Slika 7.5: Vietoris-Ripsova filtracija s pridruženim barkod dijagramom.

**Primjer 7.8** Slika 7.6 prikazuje perzistentni dijagram Vietoris-Ripsove filtracije povezane sa skupom točaka u ravnini.



Slika 7.6: (a) Skup točaka. (b) Perzistentni dijagram dimenzija 0 i 1 pripadajuće Vietoris-Ripsove filtracije.

# Zaključak

Topološka analiza podataka (TDA) područje je koje kombinira koncepte topologije s podtakovnom znanošću. Cilj joj je izvući značajne spoznaje iz složenih i visokodimenzionalnih podataka fokusirajući se na oblik i strukturu podataka umjesto samo na pojedinačne podatke. Topologija proučava svojstva prostora koja se ne mijenjaju pod neprekidnim preslikavanjima. TDA primjenjuje topološke koncepte za analizu podataka, promatrajući podatke kao topološki prostor u kojem su točke povezane različitim odnosima.

Srž TDA je koncept perzistente homologije. Ova tehnika pretvara podatke u topološki prostor konstruiranjem simplicijalnih kompleksa. Perzistentna homologija zatim analizira evoluciju topoloških karakteristika u ovisnosti o izboru različitih parametara pri konstrukciji prostora kako bi otkrila temeljnu strukturu podataka.

TDA ima razne prednosti. Otporna je na šum u podacima jer se fokusira na perzistente topološke karakteristike koje su stabilne u odnosu na izbor različitih parametara pri izgradnji topološkog prostora. Također, može pomoći smanjiti visokodimenzionalne podatke u nižedimenzionalnu reprezentaciju a da se pritom očuvaju bitne topološke informacije. TDA može otkriti skrivene grupe, praznine i druge topološke karakteristike koje se možda ne vide u tradicionalnim metodama analize podataka.

TDA se primjenjuje u raznim područjima poput biologije (analiza struk-

tura proteina i genetskih podataka), strojnog učenja (poboljšanje ekstrakcije značajki i obrade podataka), analize slika (prepoznavanje oblika i struktura na slikama), itd.

Možemo zaključiti da je TDA moćan pristup otkrivanju skrivenih struktura u složenim skupovima podataka. Koriste se topološki koncepti za postizanje jedinstvene perspektive na podatke, što je posebno vrijedno u područjima gdje tradicionalne metode analize podataka mogu zakazati.

# Literatura

- [1] Botnan M.B. (2022) *Topological Data Analysis*. Vrije Universiteit, Amsterdam. Dostupno na: [https://www.few.vu.nl/~botnan/lecture\\_notes.pdf](https://www.few.vu.nl/~botnan/lecture_notes.pdf) [06.05.2023.]
- [2] Carlsson G. (2009) *Topology and Data*. Department of Mathematics, Stanford University, Stanford, California. Dostupno na: <https://www.ams.org/journals/bull/2009-46-02/S0273-0979-09-01249-X/S0273-0979-09-01249-X.pdf> [06.05.2023.]
- [3] Ungar Š. (2016) *Uvod u algebarsku topologiju*. Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb. Dostupno na: <http://www.mathos.unios.hr/topologija/UAT.pdf> [15.05.2023.]
- [4] Ungar Š. (2016) *Algebarska topologija*. Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb. Dostupno na: <https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/AT/AT5-hand.pdf> [15.05.2023.]
- [5] Bauckhage C. (2019) *A minimum enclosing ball in  $\mathbb{R}^2$* . Dostupno na: [https://www.researchgate.net/figure/a-minimum-enclosing-ball-in-R2\\_fig1\\_331152293](https://www.researchgate.net/figure/a-minimum-enclosing-ball-in-R2_fig1_331152293) [09.06.2023.]
- [6] *Simplex Triangulation of Cylinder and Mobius Strip* (2017) Dostupno na: <https://math.stackexchange.com/q/2529034> [09.06.2023.]

## Literatura

- [7] Blanco-Silva F. (2010) *Triangulation of compact surfaces*. Dostupno na: <http://blancosilva.github.io/course-material/2010/10/27/triangulation-of-compact-surfaces.html> [09.06.2023.]
- [8] Matijević V., *Uvod u opću topologiju*. Split: Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet.
- [9] Saul N. (2018) *Čech complex playground*. Dostupno na: <https://sauln.github.io/blog/nerve-playground/> [27.5.2023.]