

# Varijante Hermite-Hadamardove nejednakosti

---

**Margaretić, Ivana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:994881>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-28**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU

IVANA MARGARETIĆ

**VARIJANTE  
HERMITE-HADAMARDOVE  
NEJEDNAKOSTI**

DIPLOMSKI RAD

Split, srpanj 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

**VARIJANTE  
HERMITE-HADAMARDOVE  
NEJEDNAKOSTI**

DIPLOMSKI RAD

Studentica:

Ivana Margaretić

Mentor:

izv. prof. dr. sc. Jurica Perić

Split, srpanj 2023.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU  
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD  
**VARIJANTE HERMITE-HADAMARDOVE  
NEJEDNAKOSTI**

Ivana Margaretić

**Sažetak:**

*Ovaj rad istražuje ključni pojam konveksnih funkcija u matematičkoj analizi i optimizaciji, s fokusom na Hermitovu-Hadamardovu nejednakost. Cilj rada je proučiti generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti, procijeniti njihovu preciznost i promjene rezultata u kontekstu različitih vrsta konveksnosti. Također, želi se proširiti primjenjivost Hermitove-Hadamardove nejednakosti na različite klase konveksnih funkcija i istražiti kako različite vrste konveksnosti utječu na tu nejednakost.*

**Ključne riječi:**

*konveksne funkcije, Jensenova nejednakost, Lipschitz-neprekidne funkcije, izotonični linearni funkcionali, izotonični sublinearni funkcionali, Fejérove nejednakosti, log-konveksne funkcije,  $r$ -konveksne funkcije,  $m$ -konveksne funkcije,  $s$ -konveksne funkcije,  $h$ -konveksne funkcije*

**Podatci o radu:**

*69 stranica, 5 slika, 0 tablica, 18 literaturnih navoda, jezik izvornika: hrvatski*

**Mentor:** *izv. prof. dr. sc. Jurica Perić*

**Članovi povjerenstva:**

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

*red. prof. dr. sc. Milica Klaričić Bakula*

*dr. sc. Ana Laštre, pred.*

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *14. srpnja 2023.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS  
**VARIANTS OF HERMITE-HADAMARD  
INEQUALITY**

Ivana Margaretić

**Abstract:**

*This paper explores the key notion of convex functions in mathematical analysis and optimization, with a focus on the Hermit-Hadamard inequality. The aim of the paper is to study the generalizations of the Hermit-Hadamard inequality, evaluate their precision and changes in results in the context of different types of convexity. Additionally, it aims to extend the applicability of the Hermit-Hadamard inequality to various classes of convex functions and investigate how different types of convexity influence this inequality.*

**Key words:**

*convex functions, Jensen's inequality, Lipschitz-continuous functions, isotonic linear functions, isotonic sublinear functions, Fejér inequalities, log-convex functions,  $r$ -convex functions,  $m$ -convex functions,  $s$ -convex functions,  $h$ -convex functions*

**Specifications:**

*69 pages, 5 figures, 0 tables, 18 references, written in Croatian*

**Mentor:** *associate professor Jurica Perić*

**Committee:**

*professor Milica Klaričić Bakula*

*dr.sc. Ana Laštre, lecturer*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

This thesis was approved by a Thesis committee on *July 14, 2023*.

# Uvod

Konveksne funkcije su ključni pojam u matematičkoj analizi i optimizaciji te imaju široku primjenu u raznim područjima kao što ćemo vidjeti u nastavku rada. Posebno su važne u optimizaciji zbog svojstva da je svaki lokalni minimum, tj. maksimum ujedno i globalni minimum, tj. maksimum. To svojstvo omogućuje razvoj efikasnih metoda za optimizaciju pri rješavanju problema. Jedan od najvažnijih alata u proučavanju konveksnih funkcija je Hermitova-Hadamardova nejednakost, koja daje procjenu srednje vrijednosti funkcija definiranih na konveksnim skupovima. Njena važnost leži u širokoj primjeni u različitim granama matematike. Omogućuje nam razumijevanje ponašanje konveksnih funkcija i izvođenje korisnih procjena njihove vrijednosti. U radu ćemo se fokusirati na proučavanje generalizacija Hermitove-Hadamardove nejednakosti te procjenu preciznosti i promjene njenih rezultata u kontekstu različitih vrsta konveksnosti. Generalizacije ove nejednakosti proširuju primjenjivost na različite klase konveksnih funkcija, omogućujući nam da dobijemo preciznije procjene i rezultate u specifičnim okruženjima. Osim toga, istražiti ćemo kako različite vrste konveksnosti utječu na Hermitovu-Hadamardovu nejednakost.



# Sadržaj

Uvod	vii
Sadržaj	viii
<b>1 Konveksne funkcije</b>	<b>1</b>
1.1 Definicija i osnovna svojstva konveksnosti . . . . .	1
<b>2 Hermite-Hadamardova nejednakost</b>	<b>11</b>
2.1 Povijesni kontekst . . . . .	11
2.2 Dokaz Hermite-Hadamardove nejednakosti . . . . .	12
2.3 Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti . . . . .	16
<b>3 Generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti</b>	<b>23</b>
3.1 Izotonični linearni funkcionali . . . . .	26
3.2 Izotonični sublinearni funkcionali . . . . .	33
3.3 Fejérova generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti . . . . .	37
<b>4 Hermite-Hadamardova nejednakost za različite vrste konveksnosti</b>	<b>43</b>
4.1 Log-konveksne funkcije . . . . .	44
4.2 R-konveksne funkcije . . . . .	48
4.3 M-konveksne funkcije . . . . .	51

## TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

4.4	S-konveksne funkcije . . . . .	54
4.5	Modificirane h-konveksne funkcije . . . . .	58
4.6	Lipschitz-neprekidne funkcije . . . . .	61
	<b>Literatura</b>	<b>67</b>

# Poglavlje 1

## Konveksne funkcije

### 1.1 Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

Razumijevanje pojma konveksnosti ključno je za proučavanje Hermite-Hadamardove nejednakosti. Hermite-Hadamardova nejednakost se primjenjuje u numeričkoj analizi, ekonomiji, financijama, itd., gdje se koristi za procjenu vrijednosti integrala i analizu rizika. U nastavku rada navodimo važna svojstva i definicije iz teorije konveksnih funkcija.

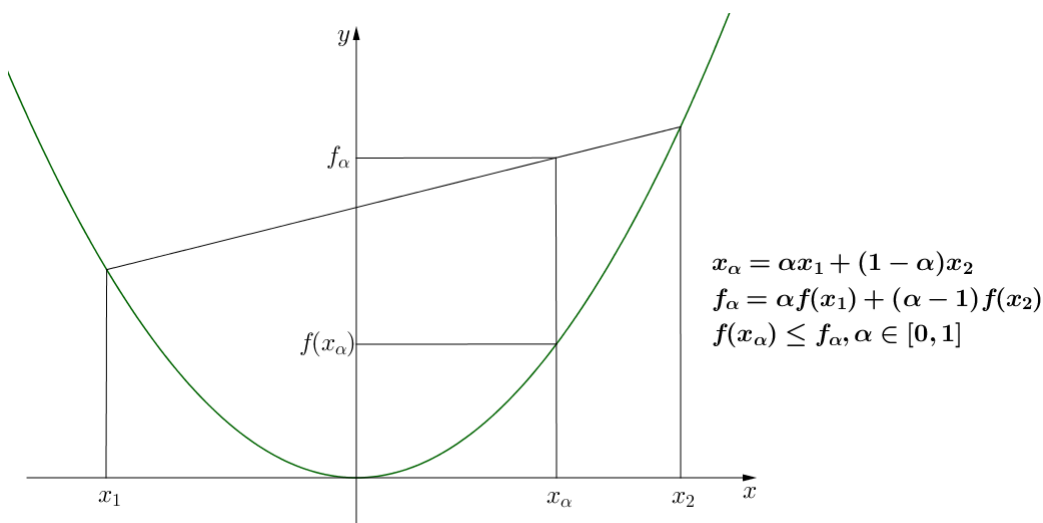
**Definicija 1.1** *Neka je  $I$  interval na  $\mathbb{R}$ . Funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je konveksna ako za svaki  $x_1, x_2 \in I$  i svaki  $\alpha \in [0, 1]$  vrijedi*

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (1 - \alpha)f(x_2). \quad (1.1)$$

*Ako vrijedi obrnuta nejednakost kažemo da je  $f$  konkavna funkcija.*

- Ako u (1.1) vrijedi stroga nejednakost za svaki  $x_1 \neq x_2$  i  $\alpha \in (0, 1)$  onda kažemo da je funkcija  $f$  strogo konveksna
- Ako je funkcija  $-f$  konveksna (odnosno, strogo konveksna) tada je  $f$  konkavna (odnosno, strogo konkavna)

### 1.1. Definicija i osnovna svojstva konveksnosti



Slika 1.1: Konveksna funkcija

Geometrijska interpretacija konveksnosti funkcije  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  govori da se točke na grafu funkcije  $f|_{[x_1, x_2]}$  nalaze ispod ili na dužini čije su krajnje točke  $(x_1, f(x_1))$  i  $(x_2, f(x_2))$ . Kao što možemo vidjeti na Slici 1.1, za svaki  $x_1, x_2 \in I$  i za svaki  $x_\alpha \in [x_1, x_2]$  vrijedi

$$f(x_\alpha) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_\alpha - x_1).$$

Dakle, konveksne funkcije su lokalno, tj. na bilo kojem podintervalu, dominirane afnim funkcijama.

Primijetimo da je  $\frac{x_2 - x_\alpha}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$ . Sada iz konveksnosti funkcije  $f$  za

$$\alpha = \frac{x_2 - x_\alpha}{x_2 - x_1}, \quad 1 - \alpha = \frac{x_\alpha - x_1}{x_2 - x_1}$$

iz (1.1) sljedi

$$f(x_\alpha) \leq \frac{x_2 - x_\alpha}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x_\alpha - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2).$$

U nastavku navedimo neka od osnovnih svojstava konveksnih funkcija. Od sada u radu sa  $I$  označavamo interval na  $\mathbb{R}$ .

### 1.1. Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

**Propozicija 1.2** *Ako su funkcije  $f$  i  $g$  konveksne na  $I$ , tada je funkcija  $f+g$  konveksna na  $I$ .*

**Dokaz.** Koristeći konveksnost funkcija  $f$  i  $g$ , za svaki  $x_1, x_2 \in I$  i  $\alpha \in [0, 1]$  dobivamo

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (\alpha - 1)f(x_2),$$

$$g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha g(x_1) + (\alpha - 1)g(x_2).$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$\begin{aligned} f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) + g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &\leq \\ \alpha f(x_1) + (\alpha - 1)f(x_2) + \alpha g(x_1) + (\alpha - 1)g(x_2), \end{aligned}$$

tj.

$$(f + g)(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha(f + g)(x_1) + (\alpha - 1)(f + g)(x_2).$$

Po definiciji konveksnosti tvrdnja je dokazana. ■

**Propozicija 1.3** *Ako je  $f$  konveksna funkcija na  $I$  i  $\beta$  pozitivan realan broj, tada je  $\beta f$  konveksna na  $I$ .*

**Dokaz.** Koristeći konveksnost funkcije  $f$  za svaki  $x_1, x_2 \in I$  i  $\alpha \in [0, 1]$  dobivamo

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (\alpha - 1)f(x_2).$$

Pomnožimo li prethodnu nejednakost s pozitivnim realnim brojem  $\beta$  slijedi dokaz teorema

$$\beta f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha \beta f(x_1) + (\alpha - 1)\beta f(x_2).$$

■

### 1.1. Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

**Definicija 1.4** Funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je afina funkcija ako je oblika  $f(x) = ax + b$  gdje su  $a, b \in \mathbb{R}$ .

**Propozicija 1.5** Funkcija  $f$  je afina ako i samo ako je konveksna i konkavna.

**Propozicija 1.6** Ako je  $f$  konveksna funkcija i  $g$  afina funkcija na  $I$ , tada je  $f \circ g$  konveksna funkcija na  $I$ .

**Dokaz.** Koristeći konveksnost funkcije  $f$  za svaki  $x_1, x_2 \in I$  i  $\alpha \in [0, 1]$  dobivamo

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (\alpha - 1)f(x_2).$$

Kako je funkcije  $g$  afina, za svaki  $x_1, x_2 \in I$  i  $\alpha \in [0, 1]$  slijedi

$$g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha g(x_1) + (\alpha - 1)g(x_2).$$

Dobivamo

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &= f(g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2)) \\ &= f(\alpha g(x_1) + (\alpha - 1)g(x_2)) \\ &\leq \alpha (f \circ g)(x_1) + (\alpha - 1)(f \circ g)(x_2) \end{aligned}$$

pa je tvrdnja teorema dokazana. ■

**Propozicija 1.7** Ako su funkcije  $f$  i  $g$  konveksne na  $I$  i  $g$  je rastuća, tada je  $g \circ f$  konveksna funkcija na  $I$ .

U sljedećem teoremu dajemo jednu od karakterizacija konveksnih funkcija koju ćemo koristiti u nastavku.

**Teorem 1.8** Neka je funkcija  $f : [a, b] \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  takva da je  $f''$  postoji na  $(a, b)$ . Funkcija  $f$  je konveksna ako i samo ako je  $f'' \geq 0$ . Ako je  $f'' > 0$  onda je  $f$  strogo konveksna.

### 1.1. Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

**Napomena 1.9** Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$  neka su konstante  $m, M$  minimum i maksimum funkcije  $f''$ . Promatranjem funkcija  $\frac{1}{2}Mx^2 - f(x)$  i  $f(x) - \frac{1}{2}mx^2$  vidimo da vrijedi

$$\left(\frac{1}{2}Mx^2 - f(x)\right)'' = M - f''(x) \geq 0$$

$$\left(f(x) - \frac{1}{2}mx^2\right)'' = f''(x) - m \geq 0.$$

Sada iz Teorema 1.8 slijedi da su funkcije  $\frac{1}{2}Mx^2 - f(x)$  i  $f(x) - \frac{1}{2}mx^2$  konveksne. Ovaj primjer će nam također biti koristan u nastavku rada.

Nadalje, promotrimo omeđenost i neprekidnost konveksnih funkcija.

**Propozicija 1.10** Neka je  $f$  definirana na  $I$ . Funkcija  $f$  je konveksna ako i samo ako za svaki kompaktan podinterval  $J \subseteq I$  i za svaku afinu funkciju  $g$ , supremum od  $f + g$  na  $J$  se postiže u rubnim točkama.

Posljedica Propozicije 1.10 je da je konveksna funkcija  $f$  omeđena na svakom kompaktnom podintervalu  $[a, b] \subseteq I$ . Točnije,

$$f(x) \leq M = \max\{f(a), f(b)\}$$

na  $[a, b]$ . Neka je  $x \in [a, b]$  proizvoljan, takav da  $x = \frac{a+b}{2} + t$  za neki  $t$  takav da  $|t| \leq \frac{a-b}{2}$ . Vrijedi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} - t\right),$$

odnosno

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \\ &\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right). \end{aligned}$$

### 1.1. Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

Ako stavimo  $m = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M$ . Vrijedi

$$-f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \geq -M,$$

pa je

$$f(x) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M.$$

Dakle, funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je omeđena funkcija. U nastavku navodimo definiciju Lipschitz-neprekidne funkcije čiju ćemo definiciju i svojstva koristiti u više navrata.

**Definicija 1.11** *Kažemo da je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz<sup>1</sup>-neprekidna ( $L$ -Lipschitz) funkcija s konstantom  $L > 0$  na intervalu  $[a, b]$  ako za svaki  $x, y \in [a, b]$  vrijedi:*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

*Najmanja konstanta  $L$  za koju vrijedi gore navedena nejednakost se zove Lipschitzova konstanta funkcije  $f$  i označava se s  $\|f\|_{Lip}$ .*

**Napomena 1.12** *Svaka Lipschitz-neprekidna funkcija je ujedno i neprekidna funkcija.*

**Teorem 1.13** *Neka je funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna. Tada je  $f$  Lipschitz-neprekidna na svakom intervalu  $[a, b]$  sadržanom u  $I$ .*

**Dokaz.** Neka je  $\epsilon > 0$  takav da su  $a - \epsilon$  i  $b + \epsilon \in I$ . Neka su  $m$  i  $M$  gornja, tj. donja međa funkcije  $f$  na intervalu  $[a - \epsilon, b + \epsilon]$ , tj. neka vrijedi

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a - \epsilon, b + \epsilon].$$

Neka su  $x, y \in [a, b]$  takvi da je  $x \neq y$ . Označimo sa  $z = y + \frac{\epsilon(y-x)}{|y-x|}$ . Sada je  $z \in [a - \epsilon, b + \epsilon]$ . Ako uvedemo oznaku  $\lambda = \frac{\epsilon}{\epsilon + |y-x|}$  imamo

$$y = (1 - \lambda)z + \lambda x.$$

---

<sup>1</sup>Rudolf Lipschitz (1832-1903), njemački matematičar



### 1.1. Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

Koristeći konveksnost funkcije  $f$  dobivamo

$$\begin{aligned} f(y) &\leq (1 - \lambda)f(z) + \lambda f(x) \\ f(y) - f(x) &\leq (1 - \lambda)f(z) + \lambda f(x) - f(x) \\ &= (1 - \lambda)(f(z) - f(x)) \\ &\leq (1 - \lambda)(M - m). \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$f(y) - f(x) \leq (1 - \lambda)(M - m) \leq \frac{M - m}{\epsilon} |y - x|, \forall x \in [a, b].$$

Sada vrijedi da je  $f(y) - f(x) \leq L|y - x|$ , gdje je  $L = \frac{M - m}{\epsilon}$ , pa je tvrdnja teorema dokazana. ■

Obrat prethodnog teorema ne vrijedi, međutim ako je funkcija Lipschitz-neprekidna na cijeloj svojoj domeni, tada je ta funkcija konveksna. Ovo svojstvo vrijedi jer Lipschitz-neprekidnost ograničava brzinu promjene funkcije, čime se osigurava da funkcija ostaje ispod svake svoje sekante.

Posljedica prethodnog teorema je sljedeći rezultat.

**Propozicija 1.14** *Konveksna funkcija definirana na otvorenom intervalu je neprekidna.*

Kako je svaka konveksna funkcija na zatvorenom intervalu neprekidna, osim eventualno u krajnjim točkama, slijedi da je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  integrabilna. Sljedeći rezultat nam govori da se svaka konveksna funkcija  $f$  definirana na  $[a, b]$  može modificirati u krajnjim točkama kako bi postala neprekidno konveksna na cijeloj domeni.

**Teorem 1.15** *Neka je funkcija  $f : [a, b] \subseteq I \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna i neka je  $f$  monotona ili postoji točka  $c \in (a, b)$  takva da je  $f|_{[a, c]}$  monotono padajuća*

### 1.1. Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

i  $f|_{[c,b]}$  monotono rastuća. Tada za takvu funkciju  $f$  postoje limesi  $f(a_+)$  i  $f(b_-)$  i funkcija

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a_+) & , x = a \\ f(x) & , x \in (a, b) \\ f(b_-) & , x = b \end{cases}$$

je neprekidna i konveksna.

U nastavku navodimo još neke važne nejednakosti za konveksne funkcije čije ćemo generalizacije koristiti. Prvo dajemo definiciju J-konveksnosti.

**Definicija 1.16** Funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  je J - konveksna (konveksna u Jensenovom smislu) na intervalu  $(a, b) \subseteq I$  ako za svaki  $x_1, x_2 \in (a, b)$  vrijedi

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Ako vrijedi obrnuta nejednakost kažemo da je  $f$  J-konkavna (konkavna u Jensenovom smislu) na intervalu  $(a, b) \subseteq I$ .

- Ako u (1.16) vrijedi stroga nejednakost za svaki  $x_1 \neq x_2$  onda kažemo da je funkcija  $f$  strogo J-konveksna
- Ako u (1.16) vrijedi obrnuta stroga nejednakost za svaki  $x_1 \neq x_2$  onda kažemo da je funkcija  $f$  strogo J-konkavna

Bitna razlika između J-konveksnih i konveksnih funkcija je u neprekidnosti na intervalu na kojem se pojam definira. Dok konveksne funkcije moraju biti neprekidne na otvorenom intervalu, J-konveksne funkcije to ne moraju biti. Drugim riječima, postoji mogućnost da postoje J-konveksne funkcije koje nisu konveksne, jer ne zadovoljavaju uvjet neprekidnosti na cijelom, otvorenom intervalu.

### 1.1. Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

U nastavku navodimo jedan od najvažnijih rezultata za konveksne funkcije koji ima brojne primjene u matematici i statistici. Ime je dobio po danskom matematičaru Jensenu.<sup>2</sup>

**Teorem 1.17 (Jensenova nejednakost)** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Neka su  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$ ,  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  nenegativna  $n$ -torka i  $P_n := \sum_{i=1}^n p_i > 0$ . Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i). \quad (1.2)$$

**Dokaz.** Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije po  $n$ .

**Baza indukcije:** Za  $n = 2$  nejednakost (1.2) proizlazi iz definicije konveksnosti.

**Pretpostavka indukcije:** Pretpostavimo da nejednakost (1.2) vrijedi za svaki  $2 \leq k \leq n - 1$ , tj.

$$f\left(\frac{1}{P_k} \sum_{i=1}^k p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_k} \sum_{i=1}^k p_i f(x_i),$$

gdje je  $P_k = \sum_{i=1}^k p_i$ .

**Korak indukcije:** Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za  $n$  točaka. Neka je  $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$ . Koristeći konveksnost funkcije  $f$ , a zatim pretpostavku

---

<sup>2</sup>Johan Ludvig William Valdemar Jensen (1902-1913), danski matematičar

### 1.1. Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

matematičke indukcije dobivamo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) &= f\left(\frac{p_n}{P_n} x_n + \frac{P_{n-1}}{P_n} \cdot \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) \\ &\leq \frac{p_n}{P_n} f(x_n) + \frac{P_{n-1}}{P_n} \cdot f\left(\frac{1}{P_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right) \\ &\leq \frac{p_n}{P_n} f(x_n) + \frac{P_{n-1}}{P_n} \cdot \frac{1}{P_{n-1}} \sum_{i=1}^{n-1} p_i f(x_i) \\ &= \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdnja teorema je dokazana. ■

Primijetimo da se nejednakost (1.2) za  $n = 2$  svodi na definiciju J-konveksnosti.

Usko vezano uz Jensenovu nejednakost su njene konverzije. Jednu od najvažnijih su dokazali Lah i Ribarič 1971. godine.

**Teorem 1.18 (Lah-Ribaričeva nejednakost)** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija i  $[m, M] \in I$  takvi da  $-\infty < m < M < \infty$ . Neka je  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  nenegativna  $n$ -torka takva da je  $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$  i  $P_n \neq 0$ . Neka je  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  uređena  $n$ -torka elemenata iz  $[m, M]^n$  i  $\bar{x} = \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i$ . Tada vrijedi*

$$\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i) \leq \frac{M - \bar{x}}{M - m} f(m) + \frac{\bar{x} - m}{M - m} f(M).$$

## Poglavlje 2

# Hermite-Hadamardova nejednakost

### 2.1 Povijesni kontekst

Hermite-Hadamardova nejednakost prvi put se pojavljuje pred kraj 19. stoljeća zahvaljujući Charlesu Hermiteu<sup>1</sup>. Njegova zapažanja objavljena su u matematičkom časopisu *Mathesis* gdje navodi:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

ili

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx > \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

ovisno o tome je li funkcija  $f$  koja je definirana na intervalu  $[a, b]$  konveksna ili konkavna.

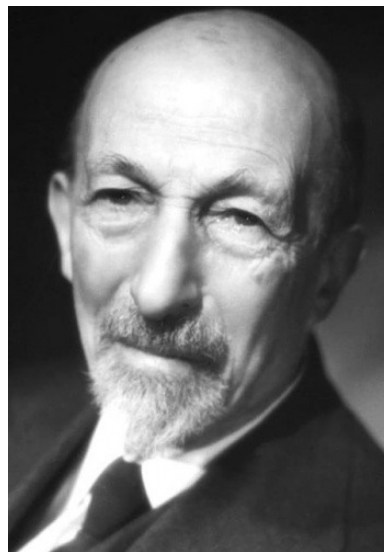
---

<sup>1</sup>Charles Hermite (1822-1901), francuski matematičar

## 2.2. Dokaz Hermite-Hadamardove nejednakosti



Slika 2.1: Charles Hermite



Slika 2.2: Jacques Hadamard

Iako se kasnije ispostavila jako važnom, nejednakost se dugo nije pojavljivala u matematičkoj literaturi pa je greškom pripisana Jacquesu Hadamardu<sup>2</sup> koji je proveo njezin dokaz ne znajući za Hermiteovo otkriće. U čast velikog doprinosa obojice matematičara nejednakost je dobila ime Hermite-Hadamardova nejednakost te se od tada koristi u mnogim granama matematike, fizike, statistike i drugim područjima. Postala je jedna od ključnih nejednakosti u teoriji konveksnih funkcija.

## 2.2 Dokaz Hermite-Hadamardove nejednakosti

Hermite-Hadamardova nejednakost daje gornju i donju granicu procjene srednje vrijednosti konveksne funkcije na nekom zatvorenom intervalu, što je ključno za analizu i aproksimaciju same funkcije.

---

<sup>2</sup>Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), francuski matematičar

## 2.2. Dokaz Hermite-Hadamardove nejednakosti

**Teorem 2.1 (Hermite-Hadamardova nejednakost)** *Neka je  $f$  konveksna funkcija definirana na intervalu  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ , gdje je  $a < b$ . Tada vrijedi:*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad (2.1)$$

**Dokaz.** Prvo ćemo dokazati da vrijedi desna strana nejednakosti, tj.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \quad (2.2)$$

Za proizvoljan  $x \in [a, b]$  postoji  $t \in [0, 1]$  takav da vrijedi  $x = (1-t)a + tb$ .

Nakon uvođenja supstitucije  $x = (1-t)a + tb$  slijedi

$$dx = (b-a)dt$$

$$x = a \rightarrow t = 0$$

$$x = b \rightarrow t = 1.$$

Sada za integral vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{b-a} \int_0^1 f((1-t)a + tb)(b-a) dt \\ &= \int_0^1 f((1-t)a + tb) dt. \end{aligned}$$

Koristeći konveksnost funkcije  $f$  i linearnost integrala dobivamo  $f((1-t)a + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$  pa slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f((1-t)a + tb) dt &\leq f(a) \int_0^1 (1-t) dt + f(b) \int_0^1 t dt \\ &= f(a) \left(t - \frac{t^2}{2}\right) \Big|_0^1 + f(b) \left(\frac{t^2}{2}\right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

## 2.2. Dokaz Hermite-Hadamardove nejednakosti

Time smo dokazali (2.2). Sada ćemo dokazati da vrijedi lijeva strana Hermite-Hadamardove nejednakosti, tj.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (2.3)$$

Prvo zapišimo integral na sljedeći način

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \frac{1}{b-a} \left( \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right). \quad (2.4)$$

Nakon uvođenja supstitucije  $x = a + \frac{t(b-a)}{2}$  za prvi izraz u zagradi slijedi

$$\begin{aligned} dx &= \frac{b-a}{2} dt \\ x = a &\rightarrow t = 0 \\ x = \frac{a+b}{2} &\rightarrow t = 1. \end{aligned}$$

Sada za prvi izraz u zagradi iz (2.4) vrijedi

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx = \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dt. \quad (2.5)$$

Nakon uvođenja supstitucije  $x = b - \frac{t(b-a)}{2}$  za drugi izraz u zagradi slijedi

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{b-a}{2} dt \\ x = \frac{a+b}{2} &\rightarrow t = 1 \\ x = b &\rightarrow t = 0. \end{aligned}$$

Sada za drugi izraz u zagradi iz (2.4) vrijedi

$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx &= -\frac{b-a}{2} \int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \\ &= \frac{b-a}{2} \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt. \end{aligned} \quad (2.6)$$



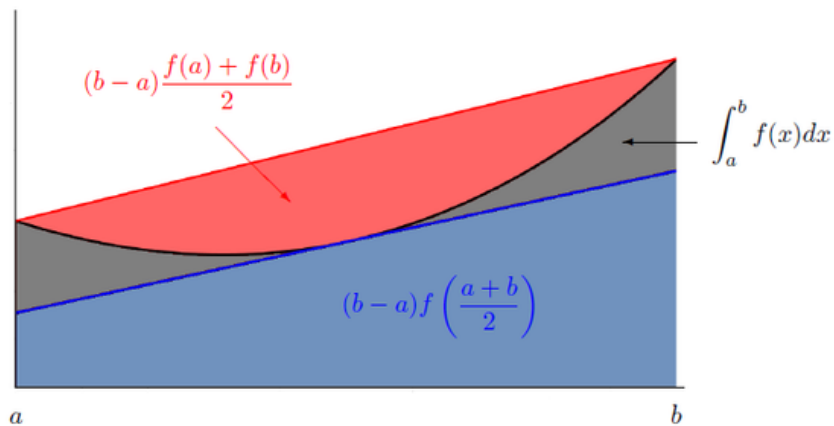
## 2.2. Dokaz Hermite-Hadamardove nejednakosti

Primjenom rezultata (2.5) i (2.6) u (2.4) i ponovnom primjenom svojstva konveksnosti funkcije  $f$  dobivamo

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) dt + \int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) dt \right] \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[ f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right) \right] dt \\
 &\geq \int_0^1 f\left[\frac{1}{2}\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)\right] dt \\
 &= \int_0^1 f\left[\frac{2a + 2b + t(b-a) - t(b-a)}{4}\right] dt \\
 &= \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right) dt \\
 &= f\left(\frac{a+b}{2}\right).
 \end{aligned}$$

Time smo dokazali (2.3) pa i (2.1). ■

Hermite-Hadamardova nejednakost ukazuje da je procjena srednje vrijednosti konveksne funkcije  $f$  definirane na  $[a, b]$  manja ili jednaka od prosjeka vrijednosti funkcije  $f$  u krajnjim točkama intervala  $[a, b]$ , tj. veća ili jednaka vrijednosti funkcije  $f$  u srednjoj točki intervala  $[a, b]$ .



Slika 2.3: Hermite-Hadamardova nejednakost

### 2.3. Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

Hermite-Hadamardovu nejednakost također možemo geometrijski interpretirati preko usporedbe površina trapezoida na istom intervalu, kao što je prikazano na Slici 2.3. Naime, površina ispod grafa funkcije  $f$  manja je ili jednaka od površine trapezoida omeđenog sa  $x$ -osi, pravcima  $x = a$ ,  $x = b$  i pravcem koji prolazi kroz točke  $(a, f(a))$  i  $(b, f(b))$  te veća ili jednaka od površine trapezoida ograničenog sa  $x$ -osi, pravcima  $x = a$ ,  $x = b$  i tangentom na graf funkcije  $f$  u točki  $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$ . Površine trapezoida su jednake ako je funkcija  $f$  afina, tj. postiže se jednakost sa obje strane Hermite-Hadamardove nejednakosti .

## 2.3 Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

Sad ćemo navesti rezultate koji nas i inače zanimaju kod raznih nejednakosti Hermite-Hadamardovog tipa. Zanimljivo je primijetiti da je prva nejednakost u (2.1) jača od druge nejednakosti. Taj rezultat zovemo Hammer-Bullenova nejednakost.

**Teorem 2.2 (Hammer-Bullenova nejednakost)** *Neka je funkcija  $f$  konveksna na intervalu  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ . Tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \quad (2.7)$$

**Dokaz.** Primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti (2.1) na interval  $[a, \frac{a+b}{2}]$  dobivamo:

$$\frac{1}{\frac{a+b}{2} - a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx \leq \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) \right]. \quad (2.8)$$

### 2.3. Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

Sada primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti na interval  $[\frac{a+b}{2}, b]$  dobivamo:

$$\frac{1}{b - \frac{a+b}{2}} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \leq \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right]. \quad (2.9)$$

Zbrajanjem nejednakosti (2.8) i (2.9) slijedi

$$\begin{aligned} \frac{2}{b-a} \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \frac{2}{b-a} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx &\leq \frac{1}{2} \left[ 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a) + f(b) \right] \\ \frac{2}{b-a} \left( \int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right) &\leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{1}{2} [f(a) + f(b)] \\ \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x) dx &\leq f\left(\frac{a+b}{2}\right) + \frac{f(a) + f(b)}{2} \\ \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

■

Prethodni teorem nam govori da donja međa (srednja točka intervala  $[a, b]$ ) daje bolju aproksimaciju srednje vrijednosti funkcije  $f$  od gornje međe (trapezna formula). Osim procjene je li preciznija lijeva ili desna strana nejednakosti, zanima nas i procjena preciznosti lijeve, tj. desne strane nejednakosti. Jednu od procjena preciznosti lijeve i desne strane pomoću minimuma i maksimuma funkcije  $f''$  nam daje sljedeći rezultat.

**Teorem 2.3** *Neka je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \in C^2$ . Neka su  $m$  i  $M$  minimum tj. maksimum funkcije  $f''$ . Tada vrijedi*

$$m \frac{(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq M \frac{(b-a)^2}{24} \quad (2.10)$$

i

$$m \frac{(b-a)^2}{12} \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (2.11)$$

**Dokaz.** Označimo s  $g_1(x) = f(x) - \frac{m}{2}x^2$  i s  $g_2(x) = \frac{M}{2}x^2 - f(x)$ . Sada po Napomeni 1.9 slijedi da su funkcije  $g_1$  i  $g_2$  konveksne pa na njih možemo

### 2.3. Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

primijeniti Hermite-Hadamardovu nejednakost.

$$\begin{aligned}
 g_1\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b g_1(x) dx \leq \frac{g_1(a) + g_1(b)}{2} \\
 f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{m}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(f(x) - \frac{m}{2}x^2\right) dx \leq \frac{f(a) - \frac{m}{2}a^2 + f(b) - \frac{m}{2}b^2}{2} \\
 f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{m(a+b)^2}{8} &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(f(x) - \frac{m}{2}x^2\right) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} + \frac{m(a^2 + b^2)}{4}.
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

Analogno, zbog konveksnosti funkcije  $g_2$  dobivamo

$$\frac{M(a+b)^2}{8} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(\frac{M}{2}x^2 - f(x)\right) dx \leq \frac{M(a^2 + b^2)}{4} - \frac{f(a) + f(b)}{2}. \tag{2.13}$$

Sada promatramo prvu nejednakost u (2.12), pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
 f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{m(a+b)^2}{8} &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{m}{2}x^2 dx \\
 \frac{m}{2(b-a)} \int_a^b x^2 dx - \frac{m(a+b)^2}{8} &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
 \frac{m(b^3 - a^3)}{6(b-a)} - \frac{m(a+b)^2}{8} &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
 \frac{m(b-a)(b^2 + ab + a^2)}{6(b-a)} - \frac{m(a+b)^2}{8} &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
 m \frac{(b-a)^2}{24} &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right).
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Sad ćemo promatrati prvu nejednakost u (2.13). Vrijedi:

$$\begin{aligned}
 \frac{M}{2(b-a)} \int_a^b x^2 dx - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &\geq \frac{M(a^2 + b^2)}{8} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \\
 f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx &\geq \frac{M(a^2 + b^2)}{8} - \frac{M(b^3 - a^3)}{6(b-a)} \Big| \cdot (-1) \\
 \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq M \frac{(b-a)^2}{24}.
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Iz (2.14) i (2.15) slijedi (2.10). Analogno iz druge nejednakosti iz (2.12) i (2.13) dobivamo (2.11) te je dokaz gotov. ■

### 2.3. Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

Sada ćemo navesti još jednu procjenu Hermite-Hadamardove nejednakosti. U ovom slučaju će nam trebati pojam Lipschitz-neprekidnih funkcija. Ako pogledamo graf Lipschitz-neprekidne funkcije, primijetit ćemo da ona ne može imati previše strmih nagiba jer su oni ograničeni konstantom  $L$ . Razlika između vrijednosti funkcije u bilo kojim dvama točkama  $x$  i  $y$  na njezinom grafu ne može biti veća od  $L$  puta razlike između samih točaka. To nam omogućuje da preciznije analiziramo i razumijemo ponašanje funkcije. Koristeći svojstvo Lipschitz-neprekidnosti dobivamo dodatne procjene preciznosti lijeve i desne strane.

**Teorem 2.4** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subset \mathbb{R}$   $L$ -Lipschitz funkcija na  $I$  i neka su  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$ . Tada vrijedi*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{L}{4}(b-a)$$

i

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{L}{3}(b-a).$$

**Dokaz.** Neka je  $t \in [0, 1]$ . Tada za svaki  $a, b \in I$  vrijedi

$$\begin{aligned} & |tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b)| \\ &= |t(f(a) - f(ta + (1-t)b)) + (1-t)(f(b) - f(ta + (1-t)b))| \\ &\leq t|f(a) - f(ta + (1-t)b)| + (1-t)|f(b) - f(ta + (1-t)b)| \quad (2.16) \\ &\leq tL|a - (ta + (1-t)b)| + (1-t)L|b - (ta + (1-t)b)| \\ &= 2t(1-t)L|b-a|. \end{aligned}$$

Ako definiramo  $t = \frac{1}{2}$  vrijedi

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{L}{2}|b-a|.$$

### 2.3. Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

Dodatno, ako zamijenimo  $a$  sa  $ta + (1-t)b$  i  $b$  sa  $(1-t)a + tb$  dobit ćemo

$$\begin{aligned} & \left| \frac{f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{L|2t-1|}{2} |b-a|, \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

Integriranjem obje strane nejednakosti po  $t \in [0, 1]$  slijedi

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt + \int_0^1 f((1-t)a + tb) dt \right] - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \\ & \leq \frac{L|b-a|}{2} \int_0^1 |2t-1| dt. \end{aligned}$$

Iz

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt &= \int_0^1 f((1-t)a + tb) dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

i

$$\int_0^1 |2t-1| dt = \frac{1}{2}$$

slijedi

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{L}{4} (b-a).$$

Iz (3.1) je

$$|tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta + (1-t)b)| \leq 2t(1-t)L(b-a), \forall t \in [0, 1].$$

Integriranjem nejednakosti po  $t \in [0, 1]$  slijedi

$$\begin{aligned} & \left| f(a) \int_0^1 t dt + f(b) \int_0^1 (1-t) dt - \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \right| \\ & \leq 2L(b-a) \int_0^1 t(1-t) dt. \end{aligned}$$

Iz

$$\int_0^1 t dt = \int_0^1 (1-t) dt = \frac{1}{2}$$

### 2.3. Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

i

$$\int_0^1 t(1-t) dt = \frac{1}{6}$$

slijedi

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{L}{3}(b-a).$$

■

U nastavku dajemo korolar prethodnog teorema koji govori o preciznosti Hermite-Hadamardove nejednakosti za diferencijabilne, konveksne funkcije.

**Korolar 2.5** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  diferencijabilna, konveksna funkcija na  $I$  i  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$ . Neka je  $M := \sup_{[a,b]} |f'(t)| < \infty$ . Tada vrijede sljedeće nejednakosti*

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M}{4}(b-a)$$

i

$$0 \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{M}{3}(b-a).$$

Primijetimo da je prethodni korolar profinjnjenje Hammer-Bullenove nejednakosti (Teorem 2.2). Za kraj navodimo dvije poznate nejednakosti vezane uz Lipschitz-neprekidne funkcije.

**Tvrđnja 1** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  Lipschitz-neprekidna funkcija i*

$$\|f\|_{Lip} := \sup \left\{ \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| ; x \neq y \right\} = L < \infty.$$

*Tada vrijedi:*

- nejednakost Ostrowskog<sup>3</sup>

$$\left| f(x) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \left[ \frac{1}{4} + \left( \frac{x - \frac{a+b}{2}}{b-a} \right)^2 \right] L(b-a)$$

<sup>3</sup>Alexander Ostrowski (1893-1968), ukrajinski matematičar

### 2.3. Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

- *nejednakost Iyengara*<sup>4</sup>

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{L(b-a)}{4} - \frac{1}{4L(b-a)} (f(b) - f(a))^2$$

Zbog važnosti i široke primjene rezultata te dobre preciznosti Hermite-Hadamardove nejednakosti javila se potreba za njezinim generalizacijama.

---

<sup>4</sup>Kombur Sesa Iyengar (1899-1944), indijski matematičar



## Poglavlje 3

### Generalizacija

### Hermite-Hadamardove nejednakosti

U nastavku rada dajemo neke važne generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti. Govorit ćemo o generalizacijama nejednakosti uzimajući u obzir specifične karakteristike funkcija i domena na kojima se primjenjuju. Generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti omogućuje njenu širu primjenu i jačanje originalne nejednakosti. Postoji mnogo vrsta generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti od kojih svaka obuhvaća određene klase funkcija. Važno je istaknuti da ove generalizacije ne samo da proširuju originalnu nejednakost, već mogu dovesti i do novih.

Slijedi rezultat koji predstavlja generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti dobivenu razmatranjem općenitijeg oblika gornje i donje granice nejednakosti. Teorem će nam dodatno poslužiti u nastavku rada za generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti na izotonične linearne funkcionalne i kod generalizacija Fejérovog tipa.

**Teorem 3.1** *Neka su  $p, q$  pozitivni realni brojevi i  $[a, b] \subseteq I$ . Za neprekidnu konveksnu funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  i za  $A = \frac{pa+qb}{p+q}$  vrijedi*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{2y} \int_{A-y}^{A+y} f(x) dx \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$$

ako i samo ako je

$$0 < y \leq \frac{b-a}{p+q} \min\{p, q\}.$$

Primijetimo, za  $p = q = 1$  i  $y = \frac{b-a}{2}$  prethodna nejednakost postaje Hermite-Hadamardova nejednakost. Vrijedi,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2\frac{b-a}{2}} \int_{\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}} f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \\ f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Pod uvjetima kao u prethodnom teoremu Hermite-Hadamardova nejednakost daje sljedeće profinjenje Teorema 3.1.

**Korolar 3.2** *Neka su  $p, q$  pozitivni realni brojevi i  $[a, b] \subseteq I$ . Za neprekidnu konveksnu funkciju  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < y \leq \frac{b-a}{p+q} \min\{p, q\}$  i za  $A = \frac{pa+qb}{p+q}$  vrijedi*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{2y} \int_{A-y}^{A+y} f(x) dx \leq \frac{1}{2}[f(A-y)+f(A+y)] \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}. \quad (3.1)$$

**Dokaz.** Neka je  $0 < y \leq \frac{b-a}{p+q} \min\{p, q\}$ . Za pozitivne realne brojeve  $p$  i  $q$  vrijedi  $0 < p \leq q$  ili  $0 < q < p$ . Ako je  $0 < p \leq q$  tada vrijedi

$$\begin{aligned} y &\leq \frac{b-a}{p+q}p \\ y(p+q) &\leq p(b-a) \\ pa+qb &\leq pb+qb-yp-yq \\ pa+qb &\leq (b-y)(p+q) \\ \frac{pa+qb}{p+q} &\leq b-y \\ A+y &\leq b. \end{aligned}$$

Analogno ako je  $0 < q < p$  vrijedi

$$a \leq A-y.$$

Iz  $a \leq A-y < A+y \leq b$  slijedi da je funkcija  $f$  definirana na  $[A-y, A+y]$ . Primjenimo li Hermite-Hadamardovu nejednakost na funkciju  $f$  i zamijenimo li  $a$  i  $b$  iz Teorema 2.1 sa  $A-y$  i  $A+y$  dobivamo

$$\begin{aligned} f\left(\frac{A-y+A+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{A+y-A-y} \int_{A-y}^{A+y} f(x) dx \leq \frac{f(A-y)+f(A+y)}{2} \\ f(A) &\leq \frac{1}{2y} \int_{A-y}^{A+y} f(x) dx \leq \frac{1}{2} [f(A-y)+f(A+y)]. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ako imamo  $x_1 < x_2 < x_3$ ,  $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$  tada koristeći konveksnost funkcije  $f$  imamo

$$f(x_2) \leq \frac{x_3-x_2}{x_3-x_1} f(x_1) + \frac{x_2-x_1}{x_3-x_1} f(x_3).$$

Dakle za  $x_1 = a$  i  $x_3 = b$  dobivamo

$$f(A-y) \leq \frac{b-(A-y)}{b-a} f(a) + \frac{A-y-a}{b-a} f(b) \tag{3.3}$$

i

$$f(A+y) \leq \frac{b-(A+y)}{b-a} f(a) + \frac{A+y-a}{b-a} f(b). \tag{3.4}$$

### 3.1. Izotonični linearni funkcionali

Uvrštavanjem (3.3) i (3.4) u (3.2) dobivamo

$$\begin{aligned} f(A) &\leq \frac{1}{2y} \int_{A-y}^{A+y} f(x) dx \leq \frac{1}{2} [f(A-y) + f(A+y)] \\ &\leq \frac{1}{2} \left[ \frac{2(b-A)}{b-a} f(a) + \frac{2(A-a)}{b-a} f(b) \right] \\ &= \frac{b - \frac{pa+qb}{p+q}}{b-a} f(a) + \frac{\frac{pa+qb}{p+q} - a}{b-a} f(b) \\ &= \frac{pf(a) + qf(b)}{p+q}. \end{aligned}$$

■

## 3.1 Izotonični linearni funkcionali

U ovom poglavlju govorit ćemo o izotoničnim linearnim i sublinearnim funkcionalima te postepeno navoditi tvrdnje koje će nas dovesti do generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti na iste.

**Definicija 3.3** *Neka je  $E$  neprazan skup i  $L$  vektorski prostor funkcija  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  sa svojstvima:*

(L1)  $\alpha f + \beta g \in L, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in L$  (zatvorenost na zbrajanje i množenje skalarom)

(L2) *Ako je  $f(t) = 1$  za svaki  $t \in E$  onda je  $f \in L$ , tj.  $\mathbf{1} \in L$  (posjedovanje jedinice)*

*Funkcija  $A : L \rightarrow \mathbb{R}$  je izotoničan linearni funkcional ako zadovoljava svojstva:*

(A1)  $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \forall f, g \in L$

(A2)  $A(f) \geq 0, \forall f \in L$  takav da je  $f(t) \geq 0$  na  $E$

### 3.1. Izotonični linearni funkcionali

$$(A3) \quad 0 \leq f \leq g \rightarrow A(f) \leq A(g)$$

**Definicija 3.4** *Izotoničan linearni funkcional  $A : L \rightarrow \mathbb{R}$  je izotoničan normalizirani linearni funkcional na  $L$  ako vrijedi  $A(\mathbf{1}) = 1$ .*

Za nastavak rada trebat će nam Jessenova nejednakost, to je jedna od najpoznatijih generalizacija Jensenove nejednakosti na izotonične linearne funkcionalne.

**Teorem 3.5 (Jessenova nejednakost)** *Neka  $L$  zadovoljava svojstva (L1) i (L2) na nepraznom skupu  $E$  i neka je  $\phi$  neprekidna konveksna funkcija na  $I$ . Neka je  $\phi \circ g \in L$  za svaki  $g \in L$ . Ako je  $A$  izotoničan normaliziran linearan funkcional na  $L$  tada vrijedi  $A(g) \in I$  i*

$$\phi(A(g)) \leq A(\phi(g)).$$

Pogledajmo za koje izbore iz prethodnog teorema dobivamo Jensenovu nejednakost. Ako postavimo  $E = I$ , tada  $L$  postaje vektorski prostor  $\mathbb{R}^I$ . Neka je  $g \in L$  takva da  $g = id_E$  i  $\phi = f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Primijetimo da za izotonični linearni funkcional  $A(h) := \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i h(x_i)$  za svaki  $h \in L$ , gdje je  $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  uređena  $n$ -torka elemenata iz  $I^n$  i  $(p_1, \dots, p_n)$  nenegativna  $n$ -torka dobivamo Teorem 1.17 (Jessenova nejednakost).

Sljedeći rezultat je jedan od najpoznatijih generalizacija konverzija Jensenove nejednakosti poznata kao Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost. Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost je generalizacija Teorema 1.18.

**Teorem 3.6 (Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost)** *Neka  $L$  zadovoljava svojstva (L1) i (L2) na nepraznom skupu  $E$  i neka je  $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija na  $[m, M] \subset \mathbb{R}$ ,  $m < M$ . Neka je  $g \in L$  takav da je*

### 3.1. Izotonični linearni funkcionali

$\phi(g) \in L$  ( $g(t) \in [m, M], \forall t \in E$ ). Ako je  $A$  izotonični normalizirani linearni funkcional na  $L$  tada vrijedi

$$A(\phi(g)) \leq \frac{M - A(g)}{M - m} \phi(m) + \frac{A(g) - m}{M - m} \phi(M).$$

**Dokaz.** Koristeći konveksnost funkcije  $\phi$  za  $x_1, x_2, x_3 \in [m, M]$  takve da je  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ,  $x_1 < x_3$  i zapis

$$x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3$$

dobivamo

$$\phi(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \phi(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \phi(x_3).$$

Uvrštavanjem  $x_1 = m$ ,  $x_2 = g(t)$  i  $x_3 = M$  dobivamo

$$\phi(g(t)) \leq \frac{M - g(t)}{M - m} \phi(m) + \frac{g(t) - m}{M - m} \phi(M).$$

Zbog svojstava (A1), (A2) izotoničnog linearnog funkcionala  $A$  za svaki  $t \in E$  dobivamo

$$\begin{aligned} A(\phi(g(t))) &\leq \frac{A([M - g(t)] \phi(m)) + A([g(t) - m] \phi(M))}{A(M - m)} \\ A(\phi(g)) &\leq \frac{(M - A(g))\phi(m) + (A(g) - m)\phi(M)}{M - m}. \end{aligned}$$

■

Pogledajmo za koje izbore iz prethodnog teorema dobivamo Lah-Ribaričevu nejednakost. Ako postavimo  $E = [m, M]$ , tada  $L$  postaje vektorski prostor  $\mathbb{R}^{[m, M]}$ . Neka je  $g \in L$  takva da  $g = id_E$  i  $\phi = f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Primijetimo da za izotonični linearni funkcional  $A(h) := \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i h(x_i)$  za svaki  $h \in L$ , gdje je  $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$ ,  $(x_1, \dots, x_n)$  uređena  $n$ -torka elemenata iz  $[m, M]^n$  i  $(p_1, \dots, p_n)$  nenegativna  $n$ -torka dobivamo Teorem 1.18 (Lah-Ribaričeva nejednakost).

Teorem koji ćemo sada izložiti predstavlja generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti na izotonične normalizirane linearne funkcionale.

### 3.1. Izotonični linearni funkcionali

**Teorem 3.7** Neka  $L$  zadovoljava svojstva (L1) i (L2) na nepraznom skupu  $E$ . Neka je  $\phi$  neprekidna konveksna funkcija na  $I$  i neka je  $[m, M] \subset I$ ,  $m < M$ . Neka je funkcija  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  takva da  $g(t) \in [m, M]$  za svaki  $t \in E$  i za svaki  $g \in L$  i  $\phi(g) \in L$ . Ako je  $A : L \rightarrow \mathbb{R}$  izotoničan normalizirani linearni funkcional na  $L$  takav da  $A(g) \in [m, M]$ , tada vrijedi

$$\phi\left(\frac{pm + qM}{p + q}\right) \leq A(\phi(g)) \leq \frac{p\phi(m) + q\phi(M)}{p + q} \quad (3.5)$$

za nenegativne realne brojeve  $p, q$  takve da  $p + q > 0$  i

$$A(g) = \frac{pm + qM}{p + q}.$$

**Dokaz.** Kako je  $A(g) \in [m, M]$ , postoje  $p, q \geq 0$  takvi da je  $p + q > 0$  takvi da vrijedi

$$A(g) = \frac{pm + qM}{p + q}.$$

Prvu nejednakost iz (3.5) dobivamo direktnom primjenom Teorema 3.5

$$\phi\left(\frac{pm + qM}{p + q}\right) \leq A(\phi(g)).$$

Drugu nejednakost iz (3.5) dobivamo primjenom Teorema 3.6

$$\begin{aligned} A(\phi(g)) &\leq \frac{(M - A(g))\phi(m) + (A(g) - m)\phi(M)}{M - m} \\ &= \frac{(M - \frac{pm+qM}{p+q})\phi(m) + (\frac{pm+qM}{p+q} - m)\phi(M)}{M - m} \\ &= \frac{\frac{p(M-m)}{p+q}\phi(m) + \frac{q(M-m)}{p+q}\phi(M)}{M - m} \\ &= \frac{\frac{M-m}{p+q}(p\phi(m) + q\phi(M))}{M - m} \\ &= \frac{p\phi(m) + q\phi(M)}{p + q}. \end{aligned}$$

■

Promotrimo poseban slučaj prethodnog teorema kada je  $E = [a, b]$ ,  $-\infty <$

### 3.1. Izotonični linearni funkcionali

$a < b < \infty$ ,  $m = a$  i  $M = b$ . Neka je  $L$  klasa svih integrabilnih funkcija  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ . Izotonični normalizirani linearni funkcional  $A : L \rightarrow \mathbb{R}$  definiramo na sljedeći način

$$A(h) := \frac{\int_a^b h(t) dt}{b - a}, \forall h \in L.$$

Za  $g(t) = t$  dobivamo

$$A(g) = \frac{\int_a^b t dt}{b - a} = \frac{a + b}{2}.$$

Na kraju, za bilo koju konveksnu funkciju  $f$  na  $[a, b] \subset I$  koja zadovoljava uvjete Teorema 3.7 i  $p = q = \frac{1}{2}$  iz nejednakosti (3.5) dobivamo Hermite-Hadamardovu nejednakost

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

U nastavku dajemo daljnju generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti za izotonične normalizirane linearne funkcionale. Za dokaz rezultata treba nam sljedeća lema.

**Lema 3.8** *Neka je  $X$  realni vektorski prostor i  $C$  njegov konveksni podskup. Tada su za funkciju  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  sljedeće tvrdnje ekvivalentne*

(i) *funkcija  $f$  je konveksna na  $C$*

(ii) *funkcija  $g_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,*

$$g_{x,y}(t) = f(tx + (1-t)y)$$

*je konveksna na  $[0, 1]$*

**Dokaz.** (i)  $\rightarrow$  (ii) Neka je  $f$  konveksna na  $C$ . Neka su  $x, y \in C$ ,  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  i  $\alpha, \beta \geq 0$  takvi da je  $\alpha + \beta = 1$ . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} g_{x,y}(\alpha t_1 + \beta t_2) &= f[(\alpha t_1 + \beta t_2)x + (1 - \alpha t_1 - \beta t_2)y] \\ &= f[(\alpha t_1 + \beta t_2)x + [\alpha(1 - t_1) + \beta(1 - t_2)]y] \\ &\leq \alpha f(t_1x + (1 - t_1)y) + \beta f(t_2x + (1 - t_2)y). \end{aligned}$$



### 3.1. Izotonični linearni funkcionali

Zadnju nejednakost smo dobili koristeći konveksnost funkcije  $f$  na  $C$ . Time smo dokazali da je  $g_{x,y}$  konveksna na  $[0, 1]$ .

(ii)  $\rightarrow$  (i) Neka je  $g_{x,y}$  konveksna funkcija i  $x, y \in C$  i  $\alpha, \beta \geq 0$  takvi da je  $\alpha + \beta = 1$ . Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \\ &= g_{x,y}(\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0) \\ &\leq \alpha g_{x,y}(1) + \beta g_{x,y}(0) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Zadnju nejednakost smo dobili primjenom konveksnosti funkcije  $g_{x,y}$ . Time smo dokazali da je  $f$  konveksna na  $C$ . ■

Kada vrijede uvjeti iz prethodne leme, zbog konveksnosti funkcije  $g_{x,y}$ , primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti dobivamo sljedeću nejednakost

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \int_0^1 f(tx + (1-t)y) dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

za  $x, y \in C$  i  $t \in [0, 1]$ . Stoga, iz prethodno spomenutih rezultata, dolazimo do još jedne generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti na izotonične normalizirane linearne funkcionale.

**Teorem 3.9** *Neka  $L$  zadovoljava svojstva (L1) i (L2) na nepraznom skupu  $E$ . Neka je  $C \subseteq X$  konveksni podskup realnog vektorskog prostora i  $f : C \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Neka je  $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \in L$  takva da  $h(t) \in [0, 1]$  i  $g_{x,y} \circ h \in L$ ,  $\forall x, y \in C$ . Ako je  $A$  izotoničan normalizirani linearni funkcional onda vrijedi nejednakost*

$$\begin{aligned} f(A(h)x + (1 - A(h))y) &\leq A[f(hx + (\mathbf{1} - h)y)] \\ &\leq A(h)f(x) + (1 - A(h))f(y). \end{aligned}$$

### 3.1. Izotonični linearni funkcionali

**Dokaz.** Promotrimo funkciju  $g_{x,y} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  gdje je  $g_{x,y}(t) := f(tx + (1-t)y)$ . Zbog konveksnosti funkcije  $f$  na konveksnom skupu  $C$  možemo primijeniti Lemu 3.8 pa vrijedi da je  $g_{x,y}$  konveksna na  $[0, 1]$ . Sada za svaki  $t \in E$  vrijedi

$$\begin{aligned} g_{x,y}(h(t) \cdot 1 + (1-h(t)) \cdot 0) &\leq h(t)g_{x,y}(1) + (1-h(t))g_{x,y}(0) \\ A(g_{x,y}(h)) &\leq A(h)g_{x,y}(1) + (1-A(h))g_{x,y}(0) \\ A[f(hx + (1-h)y)] &\leq A(h)f(x) + (1-A(h))f(y). \end{aligned}$$

Preostaje nam dokazati prvu nejednakost. Primjenom Teorema 3.5 na funkciju  $g_{x,y}$  dobivamo

$$\begin{aligned} g_{x,y}(A(h)) &\leq A(g_{x,y}(h)) \\ f(A(h)x + (1-A(h))y) &\leq A[f(hx + (1-h)y)]. \end{aligned}$$

■

Primijetimo da ako definiramo  $h : E \rightarrow [0, 1]$  tako da za izotonični linearni funkcional  $A$  vrijedi  $A(h) = \frac{1}{2}$ . Iz Teorema 3.9 dobivamo

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq A(f(hx + (1-h)y)) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}, \forall x, y \in C$$

- Neka je  $E = [0, 1]$  i  $A : L \rightarrow \mathbb{R}$  izotonični linearni funkcional takav da je  $A(h) = \int_0^1 h$ . Neka je  $h(t) = t$ ,  $h \in L$  gdje je  $t \in [0, 1]$ . Za  $C = [x, y] \subset \mathbb{R}$  dobivamo Hermite-Hadamardovu nejednakost

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \int_0^1 f(h(t)x + (\mathbf{1}(t) - h(t))y) dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \int_0^1 f(tx + (1-t)y) dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2} \\ f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{1}{y-x} \int_x^y f(t) dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}. \end{aligned}$$

### 3.2. Izotonični sublinearni funkcionali

- Neka je  $E = [0, \frac{\pi}{2}]$  i  $A : L \rightarrow \mathbb{R}$  izotonični linearni funkcional takav da je  $A(h) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} h$ . Neka je  $h(t) = \sin^2 t$ ,  $h \in L$  gdje je  $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ . Za  $C = [x, y] \subset \mathbb{R}$  dobivamo nejednakost

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x\sin^2 t + y\cos^2 t) dt \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

- Neka je  $E = [0, 1]$  i  $A : L \rightarrow \mathbb{R}$  izotonični linearni funkcional takav da je  $A(h) = \int_0^1 h$ . Neka je  $h(t) = t$ ,  $h \in L$  gdje je  $t \in [0, 1]$ . Za normalizirani vektorski prostor  $X$  i  $f(x) = \|x\|^p$ , gdje je  $p \geq 1$  (da bi funkcija  $f$  bila konveksna) za svaki  $x, y \in X$ , vrijedi

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p \leq \int_0^1 \|tx + (1-t)y\|^p dt \leq \frac{\|x\|^p + \|y\|^p}{2},$$

a za  $p = 1$  dobivamo oblik formule za nejednakost trokuta

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leq \int_0^1 \|tx + (1-t)y\| dt \leq \frac{\|x\| + \|y\|}{2}.$$

## 3.2 Izotonični sublinearni funkcionali

**Definicija 3.10** Neka je  $E$  neprazan skup i  $K$  vektorski prostor funkcija  $g : E \rightarrow \mathbb{R}$  koje imaju svojstva:

(K1)  $f + g \in K$ ,  $\forall f, g \in K$  (zatvorenost na zbrajanje)

(K2)  $\alpha f \in K$ ,  $\forall f \in K$ ,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$  (zatvorenost na množenje skalarom)

(K3)  $\mathbf{1} \in K$  (posjedovanje jedinice)

Funkcija  $S : K \rightarrow \mathbb{R}$  je izotoničan sublinearni funkcional ako zadovoljava svojstva:

(S1)  $S(f + g) \leq S(f) + S(g)$ ,  $\forall f, g \in K$

### 3.2. Izotonični sublinearni funkcionali

$$(S2) \ S(\alpha f) = \alpha S(f), \ \forall \alpha \geq 0, \ \forall f \in K$$

$$(S3) \ 0 \leq f \leq g \rightarrow S(f) \leq S(g)$$

**Definicija 3.11** *Izotoničan sublinearni funkcional  $S : K \rightarrow \mathbb{R}$  je izotoničan normalizirani sublinearni funkcional na  $K$  ako vrijedi  $S(\mathbf{1}) = 1$ . Ako dodatno vrijedi i svojstvo  $S(-\mathbf{1}) = -1$ , tada je  $S$  izotoničan potpuno normalizirani sublinearni funkcional na  $K$ .*

Dodatno, navodimo generalizaciju Jessenove nejednakosti za izotonične sublinearne funkcionale za koju možemo povući poveznicu sa Teoremom 3.5.

**Teorem 3.12** *Neka  $K$  zadovoljava svojstva (K1), (K2) i (K3) na nepraznom skupu  $E$  i neka je  $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  neprekidna konveksna funkcija na  $[m, M] \subset \mathbb{R}$ . Neka je  $g : E \rightarrow [m, M]$ ,  $g \in K$  takva da je  $\phi \circ g \in K$ . Ako je  $S$  izotoničan potpuno normalizirani sublinearni funkcional na  $K$  tada vrijedi  $S(g) \in [m, M]$  i*

$$S(\phi(g)) \geq \phi(S(g)).$$

Ako je  $S = A$  normalizirani izotonični linearni funkcional na  $L$  dobivamo Jessenovu nejednakost iz Teorema 3.5.

Na sličan način dobivamo i rezultat vezan uz generalizaciju Lah-Ribariča za izotonične sublinearne funkcionale.

**Teorem 3.13** *Neka  $K$  zadovoljava svojstva (K1), (K2) i (K3) na nepraznom skupu  $E$ . Neka je  $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija na  $[m, M] \subset \mathbb{R}$ ,  $m < M$ . Neka je  $g : E \rightarrow [m, M]$ ,  $g \in K$  takva da je  $\phi \circ g \in K$  i  $\lambda := \text{sgn}(\phi(M) - \phi(m))$ . Ako je  $S$  potpuno normalizirani izotonični sublinearni funkcional na  $K$  tada vrijedi*

$$S(\phi(g)) \leq \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} + \frac{|\phi(M) - \phi(m)|}{M - m} S(\lambda g).$$

### 3.2. Izotonični sublinearni funkcionali

**Dokaz.** Iz konveksnosti funkcije  $\phi$  za  $x_1, x_2, x_3 \in [m, M]$  takve da je  $x_1 \leq x_2 \leq x_3$ ,  $x_1 < x_3$  vrijedi

$$\phi(x_3) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} \phi(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} \phi(x_3).$$

Dakle, za  $x_1 = m$ ,  $x_2 = g(t)$  i  $x_3 = M$  dobivamo da za svaki  $t \in E$  vrijedi

$$\phi(g(t)) \leq \frac{M - g(t)}{M - m} \phi(m) + \frac{g(t) - m}{M - m} \phi(M),$$

tj.

$$\phi \circ g \leq \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} \mathbf{1} + \frac{\phi(M) - \phi(m)}{M - m} g.$$

Iz svojstava potpuno normaliziranog izotoničnog sublinearnog funkcionala  $S$  dobivamo

$$\begin{aligned} S(\phi \circ g) &\leq S\left(\frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} \mathbf{1} + \frac{\phi(M) - \phi(m)}{M - m} g\right) \\ &= \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} + S\left(\frac{\phi(M) - \phi(m)}{M - m} g\right) \\ &= \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} + \frac{|\phi(M) - \phi(m)|}{M - m} S(\lambda g). \end{aligned}$$

■

Ako je  $S = A$  normalizirani izotonični linearni funkcional na  $L$  tada dobivamo upravo Teorem 3.6.

Slijedi generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti na potpuno normalizirane izotonične sublinearne funkcionale koju dokazujemo pomoću prethodnih tvrdnji.

**Teorem 3.14** *Neka  $K$  zadovoljava svojstva (K1), (K2) i (K3) na nepraznom skupu  $E$  i neka je  $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija na  $[m, M] \subset \mathbb{R}$ ,  $m < M$ . Neka je  $g : E \rightarrow [m, M]$ ,  $e \in K$  takva da je  $\phi \circ g \in K$  i  $\lambda := \text{sgn}(\phi(M) - \phi(m))$ . Ako je  $S$  potpuno normalizirani izotonični sublinearni funkcional na  $K$  takav da je*

$$S(\lambda g) = \lambda \frac{m + M}{2} \quad S(g) = \frac{m + M}{2}$$

### 3.2. Izotonični sublinearni funkcionali

tada vrijedi nejednakost

$$\phi\left(\frac{m+M}{2}\right) \leq S(\phi \circ g) \leq \frac{\phi(m) + \phi(M)}{2}. \quad (3.6)$$

**Dokaz.** Prvu nejednakost iz (3.6) dobivamo direktnom primjenom Teorema 3.12 na funkciju  $e$

$$S(\phi(g)) \geq \phi(S(g)) = \phi\left(\frac{m+M}{2}\right).$$

Drugu nejednakost iz (3.6) dobivamo primjenom Teorema 3.13 na funkciju  $e$

$$\begin{aligned} S(\phi(g)) &\leq \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} + \frac{|\phi(M) - \phi(m)|}{M - m} S(\lambda g) \\ &= \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} + \frac{|\phi(M) - \phi(m)|}{M - m} \lambda \frac{m + M}{2} \\ &= \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} + \frac{(m + M)(\phi(M) - \phi(m))}{2(M - m)} \\ &= \frac{(\phi(m) - \phi(M))(M - m)}{2(M - m)} \\ &= \frac{\phi(m) - \phi(M)}{2}. \end{aligned}$$

■

Promotrimo, ako je  $S = A$  izotoničan normaliziran linearni funkcional i  $g : E \rightarrow [m, M], e \in L$  takva da su  $\phi(g) \in L$  i  $A := \frac{m+M}{2}$  tada vrijedi generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti na izotonične normalizirane linearne funkcionalne jer imamo zadovoljene sve uvjete Teorema 3.7. Zatim, iz tog oblika, pod uvjetima koje smo već opisali možemo dobiti Hermite-Hadamardovu nejednakost.

### 3.3. Fejérová generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti

## 3.3 Fejérová generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti

Godine 1906. Fejer<sup>1</sup> je proučavajući trigonometrijske polinome otkrio nejednakosti koje generaliziraju Hermiteovu. Unatoč tome Hermiteov doprinos, kao što smo spomenuli na početku rada, nije bio opažen još dugo vremena. U sljedećem teoremu navodimo Fejérov rezultat.

**Teorem 3.15** *Neka je  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija gustoće na  $[a, b]$ , tj.  $g$  je nenegativna, integrabilna funkcija takva da vrijedi  $\int_a^b g(x) dx = 1$ . Ako je funkcija  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna i  $g$  simetrična na  $[a, b]$ , tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}.$$

**Dokaz.** Koristimo konveksnost funkcije  $f$  i zapis od  $x$  dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &= \int_a^b f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) g(x) dx \\ &\leq \int_a^b \left[\frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right] g(x) dx \\ &= \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} \int_a^b g(x) dx + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \int_a^b xg(x) dx. \end{aligned}$$

Zbog simetričnosti funkcije  $g$  vrijedi  $\int_a^b xg(x) dx = \frac{a+b}{2}$ . Stoga dobivamo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)g(x) dx &\leq \frac{bf(a) - af(b)}{b-a} + \frac{f(b) - f(a)}{b-a} \cdot \frac{a+b}{2} \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Za dokaz drugog dijela nejednakosti ćemo koristiti činjenicu

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(b+a-x)\right),$$

---

<sup>1</sup>Lipót Fejér (1880-1959), mađarski matematičar

### 3.3. Fejérová generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti

pa zbog konveksnosti funkcije  $f$  dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(f(x) + f(b + a - x)) &\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right), \forall x \in [a, b] \\ \frac{1}{2} \left[ f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) + f\left(\frac{b-x}{b-a}b + \frac{x-a}{b-a}a\right) \right] &\geq f\left(\frac{a+b}{2}\right). \end{aligned}$$

Pomnožimo li sa  $g(x)$  i integriramo po  $x$  od  $a$  do  $b$  dobit ćemo

$$\frac{1}{2} \left[ \int_a^b f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) g(x) dx + \int_a^b f\left(\frac{b-x}{b-a}b + \frac{x-a}{b-a}a\right) g(x) dx \right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right). \quad (3.7)$$

Neka je  $y = a + b - x$ . Zbog simetričnosti funkcije  $g$  za drugi integral iz (3.7) vrijedi

$$\begin{aligned} &\int_a^b f\left(\frac{y-a}{b-a}b + \frac{b-y}{b-a}a\right) g(a+b-y) dy \\ &= \int_a^b f\left(\frac{y-a}{b-a}b + \frac{b-y}{b-a}a\right) g(y) dy. \end{aligned}$$

Prvi i drugi integral iz (3.7) imaju jednaku vrijednost  $\int_a^b f(x)g(x) dx$  pa je

$$\int_a^b f(x)g(x) dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

■

U nastavku se navodi jedan od poznatijih nejednakosti Fejérovog tipa koju nazivamo Hermite-Hadamard-Fejérova nejednakost.

**Teorem 3.16 (Hermite-Hadamard-Fejérova nejednakost)** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Ako je  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nenegativna integrabilna funkcija koja je simetrična s obzirom na pravac  $\frac{a+b}{2}$ , tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(x) dx. \quad (3.8)$$



### 3.3. Fejérová generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti

**Dokaz.** Iz konveksnosti funkcije  $f$  i zapisa  $a = ta + (1-t)b, b = tb + (1-t)a$  za svaki  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)}{2}.$$

Množenjem nejednakosti sa  $2g(tb+(1-t)a)$  i zatim integriranjem nejednakosti s obzirom na varijablu  $t$  od 0 do 1 slijedi

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_0^1 g(tb+(1-t)a) dt \leq \int_0^1 [f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a)]g(tb+(1-t)a) dt.$$

Koristeći supstituciju  $x = tb + (1-t)a$  iz prethodnog dobivamo

$$\begin{aligned} \frac{2}{b-a} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx &\leq \frac{1}{b-a} \left[ \int_a^b f(a+b-x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g(x) dx \right] \\ &\leq \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx. \end{aligned}$$

Preostaje nam pokazati drugu nejednakost iz (3.8). Ponovno, zbog konveksnosti funkcije  $f$  i zapisa  $a = ta + (1-t)b, b = tb + (1-t)a$  za svaki  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a) \leq f(a) + f(b).$$

Množenjem nejednakosti sa  $g(tb+(1-t)a)$  i zatim integriranjem nejednakosti s obzirom na varijablu  $t$  od 0 do 1 slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b)g(tb + (1-t)a) dt + \int_0^1 f(tb + (1-t)a)g(tb + (1-t)a) dt \\ \leq (f(a) + f(b)) \int_0^1 g(tb + (1-t)a) dt. \end{aligned}$$

Ponovnom koristeći supstituciju  $x = tb + (1-t)a$  dobivamo rezultat teorema

$$\begin{aligned} \frac{2}{b-a} \int_a^b f(x)g(x) dx &\leq \frac{f(a) + f(b)}{b-a} \int_a^b g(x) dx \\ \int_a^b f(x)g(x) dx &\leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

### 3.3. Fejérová generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti

■

Ako je  $g \equiv 1$ , tada iz prethodnog teorema dobivamo Hermite-Hadamardovu nejednakost

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Slijedi generalizacija Teorema 3.1 i Teorema 3.16.

**Teorem 3.17** *Neka je  $g : [a, b] \rightarrow [0, \infty)$  integrabilna i simetrična funkcija s obzirom na  $A = \frac{pa+qb}{p+q}$ , gdje su  $p, q$  pozitivni realni brojevi. Vrijedi*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \int_{A+y}^{A-y} g(x) dx \leq \int_{A+y}^{A-y} f(x)g(x) dx \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \int_{A+y}^{A-y} g(x) dx \quad (3.9)$$

za konveksnu funkciju  $f$  na  $[a, b]$  i  $0 \leq y \leq \frac{b-a}{p+q} \min\{p, q\}$ .

Za kraj ćemo navesti još jednu generalizaciju, do sada tri navedena teorema, čiji ćemo utjecaj moći vidjeti i u poglavlju Lipschitzove funkcije. Najprije iskažimo pomoćnu tvrdnju.

**Propozicija 3.18** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  konveksna funkcija. Neka je  $A = \alpha a + (1-\alpha)b$  i neka je  $z_0 = (b-a) \min\{\frac{\alpha}{1-\beta}, \frac{1-\alpha}{\beta}\}$  za  $\alpha, \beta \in [0, 1]$ . Definiramo funkciju  $g$  kao*

$$g(z) = (1-\beta)f(A-\beta z) + \beta f(A+(1-\beta)z), z \in [0, z_0].$$

Tada je  $g$  rastuća konveksna funkcija na  $[0, z_0]$  i za svaki  $z \in [0, z_0]$  vrijedi

$$f[\alpha a + (1-\alpha)b] \leq g(z) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b). \quad (3.10)$$

Slijedi generalizacija Teorema 3.17, Teorema 3.16 i Teorema 2.1.

**Teorem 3.19** *Neka su  $\alpha, \beta, A$  i  $z_0$  definirani kao u Propoziciji 3.18 i neka je  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  nenegativna i integrabilna funkcija takva da vrijedi*

$$g(A-\beta z) = g(A+(1-\beta)z), \forall z \in [0, z_0]. \quad (3.11)$$

### 3.3. Fejérova generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti

Tada vrijedi

$$\begin{aligned}
 f[\alpha a + (1 - \alpha)b] \int_{A-\beta z}^{A+(1-\beta)z} g(x) dx &\leq \frac{1-\beta}{\beta} \int_{A-\beta z}^A f(x)g(x) dx \\
 &\quad + \frac{\beta}{1-\beta} \int_A^{A+(1-\beta)z} f(x)g(x) dx \\
 &\leq [\alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b)] \int_{A-\beta z}^{A+(1-\beta)z} g(x) dx.
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

**Dokaz.** Za svaki  $z \in [0, z_0]$  vrijedi

$$\begin{aligned}
 \int_{A-\beta z}^{A+(1-\beta)z} g(x) dx &= \int_{A-\beta z}^A g(x) dx + \int_A^{A+(1-\beta)z} g(x) dx \\
 &= \beta \int_0^z g(A - \beta x) dx + (1 - \beta) \int_0^z g(A + (1 - \beta)x) dx \quad (3.13) \\
 &= \int_0^z g(A - \beta x) dx.
 \end{aligned}$$

Kako su zadovoljeni uvjeti Teorema 3.18, pomnožimo li (3.10) sa  $g(A - \beta x)$  gdje je  $g$  nenegativna funkcija te zatim integriramo dobiveni rezultata po  $x$  na  $[0, z]$  dobivamo

$$\begin{aligned}
 f[\alpha a + (1 - \alpha)b] \int_0^z g(A - \beta x) dx &\leq (1 - \beta) \int_0^z f(A - \beta x)g(A - \beta x) dx \\
 &\quad + \beta \int_0^z f(A + (1 - \beta)x)g(A + (1 - \beta)x) dx \\
 &= \frac{1-\beta}{\beta} \int_{A-\beta z}^A f(x)g(x) dx \\
 &\quad + \frac{\beta}{1-\beta} \int_A^{A+(1-\beta)z} f(x)g(x) dx \\
 &\leq [\alpha f(a) + (1 - \alpha)f(b)] \int_0^z g(A - \beta x) dx.
 \end{aligned}$$

Formula (3.12) slijedi korištenjem (3.13). ■

Primijetimo,

- Pomoću (3.12), definiramo li  $\alpha = \frac{p}{p+q}$ ,  $\beta = \frac{1}{2}$  i  $z = 2y$  dobit ćemo (3.9) iz Teorema 3.17

### 3.3. Fejérova generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \int_{A-y}^{A+y} g(x) dx \leq \int_{A-y}^{A+y} f(x)g(x) dx \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q} \int_{A-y}^{A+y} g(x) dx$$

- Pomoću (3.12), definiramo li  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  i  $z = z_0 = b - a$  dobit ćemo (3.8) iz Teorema 3.16

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x) dx \leq \int_a^b f(x)g(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x) dx$$

- Pomoću (3.12), definiramo li  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$  i  $z = z_0 = b - a$  i  $g \equiv \mathbf{1}$  dobit ćemo Hermite-Hadamardovu nejednakost

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

## Poglavlje 4

# Hermite-Hadamardova nejednakost za različite vrste konveksnosti

U ovom poglavlju ćemo promatrati različite vrste konveksnih funkcija te koja je njihova veza sa običnom (tj. klasičnom) konveksnosti. Hermite-Hadamardova nejednakost predstavlja temelj za razvoj brojnih generalizacija koje proširuju njen opseg primjene. Spomenut ćemo log-konveksne, r-konveksne, m-konveksne, s-konveksne i h-konveksne funkcije. Za svaku od njih navodimo različite verzije nejednakosti dobivene iz Hermite-Hadamardove nejednakosti. Na samom kraju rada ćemo spomenuti Lipschitz-neprekidne funkcije zbog njihovog važnog utjecaja pri procjeni preciznosti Hermite-Hadamardove nejednakosti.

#### 4.1. Log-konveksne funkcije

### 4.1 Log-konveksne funkcije

**Definicija 4.1** Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$ . Funkcije  $f : I \rightarrow (0, \infty)$  je log-konveksna ili multiplikativno konveksna ako za svaki  $x, y \in I$  i  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$f(tx + (1 - t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}.$$

Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada kažemo da je  $f$  log-konkavna funkcija.

**Napomena 4.2** Primjetimo da je funkcija  $f : I \rightarrow (0, \infty)$  log-konveksna ako i samo ako je  $\log \circ f$  konveksna funkcija. Vrijedi

$$(\log \circ f)(tx + (1 - t)y) \leq t(\log \circ f)(x) + (1 - t)(\log \circ f)(y)$$

$$\log(f(tx + (1 - t)y)) \leq \log([f(x)]^t [f(y)]^{1-t})$$

$$f(tx + (1 - t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}.$$

**Propozicija 4.3** Neka je funkcija  $f : I \rightarrow (0, \infty)$  log-konveksna. Tada je  $f$  konveksna.

**Dokaz.** Iz log-konveksnosti funkcije  $f$  iz prethodne napomene slijedi da je  $\log \circ f$  konveksna funkcija. Korištenjem konveksnosti funkcije  $\log \circ f$  za svaki  $x, y \in I$  i  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$(\log \circ f)(tx + (1 - t)y) \leq t(\log \circ f)(x) + (1 - t)(\log \circ f)(y)$$

$$\log(f(tx + (1 - t)y)) \leq \log(tf(x) + (1 - t)(f(y)))$$

$$f(tx + (1 - t)y) \leq tf(x) + (1 - t)(f(y)),$$

gdje smo drugu nejednakost dobili iz konkavnosti funkcije  $\log$ . ■

Obrat prethodne propozicije ne vrijedi kao što možemo vidjeti u sljedećem primjeru.

#### 4.1. Log-konveksne funkcije

**Primjer 4.4** Neka je  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana sa  $f(x) = x^2$ . Funkcija  $f$  je konveksna, ali nije log-konveksna. Vrijedi

$$(tx + (1-t)y)^2 \leq tx^2 + (1-t)y^2,$$

ali kako je  $\log f(x) = 2\log|x|$  funkcija koja nije konveksna slijedi da  $f$  nije log-konveksna.

Neka je  $f : I \rightarrow (0, \infty)$  log-konveksna funkcija na  $I$  i  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$ . Kako je tada  $\log \circ f$  konveksna funkcija možemo na nju primijeniti Hermite-Hadamardovu nejednakost

$$\log \left[ f \left( \frac{a+b}{2} \right) \right] \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b (\log \circ f)(x) dx \leq \frac{(\log \circ f)(a) + (\log \circ f)(b)}{2},$$

pa iz gornje nejednakosti dobivamo Hermite-Hadamardovu nejednakost za log-konveksne funkcije

$$f \left( \frac{a+b}{2} \right) \leq \exp \left[ \frac{1}{b-a} \int_a^b \log(f(x)) dx \right] \leq \sqrt{f(a)f(b)}.$$

Označimo s  $A(a, b)$  aritmetičku sredinu nenegativnih realnih brojeva  $a$  i  $b$  te s  $G(a, b)$  njihovu geometrijsku sredinu.

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2} \quad G(a, b) = \sqrt{ab}$$

Nadalje, primijetimo da vrijedi

$$f(A(a, b)) \leq \exp \left[ \frac{1}{b-a} \int_a^b \log(f(x)) dx \right] \leq G(f(a), f(b)).$$

Nastavno na prethodnu nejednakost u sljedećem teoremu ,uz pomoć geometrijske sredine, navodimo još jednu generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti za log-konveksne funkcije.

**Teorem 4.5** Neka je  $f : I \rightarrow (0, \infty)$  log-konveksna funkcija na  $I$  i  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$ . Tada vrijedi

$$f(A(a, b)) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x)) dx \leq G(f(a), f(b)). \quad (4.1)$$

#### 4.1. Log-konveksne funkcije

**Dokaz.** Iz log-konveksnosti funkcije  $f$  za svaki  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$f(ta + (1 - t)b) \leq [f(a)]^t [f(b)]^{1-t}, \forall t \in [0, 1]$$

i

$$f((1 - t)a + tb) \leq [f(a)]^{1-t} [f(b)]^t, \forall t \in [0, 1].$$

Množenjem, a zatim korjenovanjem gornjih nejednakosti dobivamo

$$G(f(ta + (1 - t)b), f((1 - t)a + tb)) \leq G(f(a), f(b)), \forall t \in [0, 1].$$

Integriranjem gornjih nejednakosti po  $t$  dobivamo

$$\int_0^1 G(f(ta + (1 - t)b), f((1 - t)a + tb)) dt \leq G(f(a), f(b)).$$

Nakon uvođenja supstitucije  $x = (1 - t)a + tb$ ,  $t \in [0, 1]$  slijedi

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{b - a} dx \\ t = 0 &\rightarrow x = b \\ t = 1 &\rightarrow x = a. \end{aligned}$$

Sada za integral vrijedi

$$\int_0^1 G(f(ta + (1 - t)b), f((1 - t)a + tb)) dt = \frac{1}{b - a} \int_a^b G(f(a + b - x), f(x)) dx$$

pa je druga nejednakost iz 4.3 dokazana. Sada iz definicije log-konveksnosti funkcije  $f$  za  $t = \frac{1}{2}$  i za svaki  $x, y \in I$  slijedi

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \sqrt{f(x)f(y)}.$$

Definiramo li  $x = ta + (1 - t)b$  i  $y = (1 - t)a + tb$  dobivamo

$$f\left(\frac{a + b}{2}\right) \leq G(f(ta + (1 - t)b), f((1 - t)a + tb)), \forall t \in [0, 1].$$



#### 4.1. Log-konveksne funkcije

Integriranjem gornje nejednakosti po  $t$  dobivamo prvu nejednakost iz 4.3

$$f(A(a, b)) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(x), f(a+b-x)) dx.$$

■

U nastavku navodimo definiciju logaritamske sredine koja nam je potrebna za sljedeću generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti na log-konveksne funkcije, a također ćemo je koristiti i kod generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti na  $r$ -konveksne funkcije.

**Definicija 4.6** *Logaritamska sredina pozitivnih brojeva  $x, y$ , u oznaci  $L(x, y)$ , je definirana sa*

$$L(x, y) = \begin{cases} \frac{x-y}{\ln x - \ln y} & , x \neq y \\ x & , x = y \end{cases}$$

*i generalizirana logaritamska sredina reda  $r$  pozitivnih brojeva  $x, y$  u oznaci  $L_r(x, y)$  je definirana sa*

$$L_r(x, y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1} - y^{r+1}}{x^r - y^r} & , r \neq 0, -1, x \neq y \\ \frac{x-y}{\ln x - \ln y} & , r = 0, x \neq y \\ \frac{\ln x - \ln y}{x-y} & , r = -1, x \neq y \\ x & , x = y. \end{cases}$$

**Teorem 4.7** *Neka je  $f$  log-konveksna funkcija na  $[a, b], 0 < a < b < +\infty$  Tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq L(f(a), f(b)).$$

**Dokaz.** Iz log-konveksnosti funkcije  $f$  slijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq [f(a)]^t [f(b)]^{1-t}, \forall t \in [0, 1].$$

## 4.2. R-konveksne funkcije

Integriranjem nejednakosti po  $t$  na  $[0, 1]$  dobivamo

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \leq \int_0^1 [f(a)]^t [f(b)]^{1-t} dt.$$

Koristeći supstituciju  $x = tb + (1-t)a$  dobivamo

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Također, vrijedi za  $f(a) \neq f(b)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(a)]^t [f(b)]^{1-t} dt &= f(a) \int_0^1 \left( \frac{f(b)}{f(a)} \right)^t dt \\ &= f(a) \frac{\left( \frac{f(b)}{f(a)} \right)^t}{\ln \left( \frac{f(b)}{f(a)} \right)} \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{\ln(f(b)) - \ln(f(a))} \\ &= L(f(a), f(b)) \end{aligned}$$

i za  $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned} \int_0^1 [f(a)]^t [f(b)]^{1-t} dt &= \int_0^1 f(a) dt \\ &= L(f(a), f(b)), \end{aligned}$$

pa je tvrdnja teorema dokazana. ■

## 4.2 R-konveksne funkcije

Za početak dajemo definiciju potencijalne sredine reda  $r$  koja nam je potrebna za uvođenje definicije  $r$ -konveksnih funkcija.

**Definicija 4.8** *Potencijalnu sredinu reda  $r$  pozitivnih brojeva  $x, y$ , u oznaci  $M_r(x, y; \lambda)$ , definiramo sa*

$$M_r(x, y; \lambda) = \begin{cases} (\lambda x^r + (1-\lambda)y^r)^{\frac{1}{r}} & , r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda} & , r = 0 \end{cases}$$

## 4.2. R-konveksne funkcije

U slučaju da je  $\lambda = \frac{1}{2}$  potencijalnu sredinu reda  $r$  pozitivnih brojeva  $x, y$  označavamo sa  $M_r(x, y)$ .

**Definicija 4.9** *Pozitivna funkcija  $f$  je  $r$ -konveksna na  $[a, b]$  ako za sve  $x, y \in [a, b]$  i  $\lambda \in [0, 1]$  vrijedi*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y); \lambda)$$

*Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je  $f$   $r$ -konkavna funkcija.*

- 0-konveksne funkcije se svode na log-konveksne funkcije
- 1-konveksne funkcije se svode na obične konveksne funkcije

Sljedeći teorem predstavlja generalizaciju desne strane Hermite-Hadamardove nejednakosti na  $r$ -konveksne funkcije.

**Teorem 4.10** *Neka je  $f$  pozitivna  $r$ -konveksna funkcija na  $[a, b]$ . Tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq L_r(f(a), f(b)).$$

**Dokaz.** Pretpostavimo da je  $r = 0$ . Tada je  $f$  log-konveksna funkcija pa tvrdnja teorema sljedi iz Teorema 4.7.

Pretpostavimo da je  $r \neq 0, -1$ . Za  $f(a) \neq f(b)$  iz definicije  $r$ -konveksnosti slijedi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (b-a) \int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a) d\lambda \\ &\leq (b-a) \int_0^1 (\lambda f^r(b) + (1-\lambda)f^r(a))^{\frac{1}{r}} d\lambda \end{aligned}$$

Nakon uvođenja supstitucije  $t = \lambda f^r(b) + (1-\lambda)f^r(a)$  imamo

$$d\lambda = \frac{1}{f^r(b) - f^r(a)} dt$$

$$\lambda = 0 \rightarrow t = f^r(a)$$

$$\lambda = 1 \rightarrow t = f^r(b)$$

## 4.2. R-konveksne funkcije

te vrijedi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\leq (b-a) \int_{f^r(a)}^{f^r(b)} \frac{t^{\frac{1}{r}}}{f^r(b) - f^r(a)} dt \\ &= (b-a) \frac{r}{r+1} \cdot \frac{f^{r+1}(b) - f^{r+1}(a)}{f^r(b) - f^r(a)} \\ &= (b-a) L_r(f(a), f(b)). \end{aligned}$$

Za  $f(a) = f(b)$  slično vrijedi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\leq (b-a) \int_0^1 (\lambda f^r(a) + (1-\lambda) f^r(a))^{\frac{1}{r}} d\lambda \\ &= (b-a) f(a) \\ &= (b-a) L_r(f(a), f(b)). \end{aligned}$$

Pretpostavimo da je  $r = -1$ . Za  $f(a) \neq f(b)$  iz definicije r-konveksnosti slijedi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\leq (b-a) \int_0^1 (\lambda f^{-1}(b) + (1-\lambda) f^{-1}(a))^{-1} d\lambda \\ &= \frac{b-a}{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}} \int_{\frac{1}{f(a)}}^{\frac{1}{f(b)}} t^{-1} dt \\ &= \frac{b-a}{\frac{1}{f(b)} - \frac{1}{f(a)}} \left( \ln \frac{1}{f(b)} - \ln \frac{1}{f(a)} \right) \\ &= (b-a) f(a) f(b) \frac{\ln f(a) - \ln f(b)}{f(a) - f(b)} \\ &= (b-a) L_{-1}(f(a), f(b)). \end{aligned}$$

Slično se dokaže za  $f(a) = f(b)$ .

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\leq (b-a) \int_0^1 (\lambda f^{-1}(b) + (1-\lambda) f^{-1}(a))^{-1} d\lambda \\ &= (b-a) \frac{1}{f(a)} \\ &= (b-a) L_{-1}(f(a), f(a)). \end{aligned}$$

### 4.3. M-konveksne funkcije

■

Primijetimo da za  $r = 1$  dobivamo desnu stranu klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti za konveksne funkcije.

## 4.3 M-konveksne funkcije

**Definicija 4.11** *Neka je  $m \in [0, 1]$ . Funkcija  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je  $m$ -konveksna ako za svaki  $x, y \in [0, \infty)$  i  $t \in [0, 1]$  vrijedi*

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y).$$

*Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je  $f$   $m$ -konkavna funkcija.*

**Napomena 4.12**  *$M$ -konveksne funkcije za razliku od konveksnih funkcija mogu imati prekide u točkama koje nisu rubne točke domene kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru.*

**Primjer 4.13** *Promotrimo funkciju  $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$  takvu da*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & , 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

*Funkcija je  $m$ -konveksna, ali nije neprekidna jer ima prekid u točki  $x = 1$ .*

Slijede Hermite-Hadamardovi tipovi nejednakosti za  $m$ -konveksne funkcije.

**Teorem 4.14** *Neka je funkcija  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$   $m$ -konveksna, gdje je  $m \in (0, 1]$ . Ako su  $a, b \in [0, \infty)$  i  $f \in L_1$  tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \min \left\{ \frac{f(a) - mf(\frac{b}{m})}{2}, \frac{f(b) - mf(\frac{a}{m})}{2} \right\}.$$

### 4.3. M-konveksne funkcije

**Dokaz.** Iz  $m$ -konveksnosti funkcije  $f$  slijedi da za svaki  $x, y \geq 0$  i  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y).$$

Za  $x = a$  i  $y = \frac{b}{m}$ ,  $m \in (0, 1]$  dobivamo

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + m(1-t)f\left(\frac{b}{m}\right)$$

i za  $x = b$  i  $y = \frac{a}{m}$ ,  $m \in (0, 1]$  dobivamo

$$f(tb + (1-t)a) \leq tf(b) + m(1-t)f\left(\frac{a}{m}\right).$$

Integriranjem prethodnih nejednakosti po  $t$  slijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \leq \frac{f(a) + mf\left(\frac{b}{m}\right)}{2}$$

i

$$\int_0^1 f(tb + (1-t)a) dt \leq \frac{f(b) + mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2}.$$

Lako se pokaže da je

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt = \int_0^1 f(tb + (1-t)a) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx,$$

pa je

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \min \left\{ \frac{f(a) - mf\left(\frac{b}{m}\right)}{2}, \frac{f(b) - mf\left(\frac{a}{m}\right)}{2} \right\}.$$

■

$M$ -konveksnost se za  $m = 1$  svodi na običnu konveksnost pa iz Teorema 4.14 dobivamo drugi dio klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti za konveksne funkcije.

Sljedeći rezultat predstavlja još jednu generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti na  $m$ -konveksne funkcije.

### 4.3. M-konveksne funkcije

**Teorem 4.15** *Neka je funkcija  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je  $m$ -konveksna,  $m \in (0, 1]$ .*

*Ako su  $a, b \in [0, \infty)$  i  $f \in L_1$  tada vrijedi*

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \\ &\leq \frac{m+1}{4} \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + m \frac{f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)}{2} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

**Dokaz.** Zbog  $m$ -konveksnosti funkcije  $f$  za svaki  $x, y \in [0, \infty)$  vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left[ f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right) \right].$$

Neka je  $x = ta + (1-t)b$  i  $y = (1-t)a + tb$ . Sada za svaki  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left[ f(ta + (1-t)b) + mf\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right) \right].$$

Integriranjem gornje nejednakosti po  $t \in [0, 1]$  dobivamo

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt + m \int_0^1 f\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right) dt \right]. \quad (4.3)$$

Uzevši u obzir da vrijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

i

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right) dt &= \frac{m}{b-a} \int_{\frac{a}{m}}^{\frac{b}{m}} f(y) dy \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(\frac{x}{m}\right) dx, \end{aligned}$$

iz (4.3) dobivamo prvi dio nejednakosti (4.2)

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx.$$

#### 4.4. S-konveksne funkcije

Koristeći  $m$ -konveksnost funkcije  $f$  za svaki  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[ f\left(ta + (1-t)b\right) + mf\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right) \right] \\ & \leq \frac{1}{2} \left[ tf(a) + (1-t)f(b) + mtf\left(\frac{a}{m}\right) + m^2(1-t)f\left(\frac{b}{m}\right) \right]. \end{aligned}$$

Integriranjem gornje nejednakosti po  $t \in [0, 1]$  te korištenjem prikladnih supstitucija slijedi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \leq \frac{1}{2} \left[ \frac{f(a) + mf(b)}{2} + \frac{mf\left(\frac{a}{m}\right) + m^2f\left(\frac{b}{m}\right)}{2} \right].$$

Sličnim argumentima dolazimo do

$$\begin{aligned} & \frac{1}{b-a} \int_a^b \frac{f(x) + mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2} dx \\ & \leq \frac{1}{4} \left[ \frac{f(a) + f(b) + m(f(a) + f(b))}{2} + m \frac{f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right) + m(f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right))}{2} \right] \\ & = \frac{m+1}{4} \left[ \frac{f(a) + f(b)}{2} + m \frac{f\left(\frac{a}{m}\right) + f\left(\frac{b}{m}\right)}{2} \right] \end{aligned}$$

■

U Teoremu 4.15 za  $m = 1$  možemo zanemariti pretpostavku da je  $f \in L_1$ . Tada (4.2) postaje klasična Hermite-Hadamardova nejednakost.

## 4.4 S-konveksne funkcije

**Definicija 4.16** *Neka je  $0 < s \leq 1$ . Funkcija  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je  $s$ -konveksna u prvom smislu, ako za svaki  $x, y \in [0, \infty)$  i  $\alpha, \beta \geq 0$  takve da je  $\alpha^s + \beta^s = 1$  vrijedi*

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y).$$

*Skup svih  $s$ -konveksnih funkcija u prvom smislu označavamo s  $K_1^s$ . Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je  $f$   $s$ -konkavna funkcija u prvom smislu.*



#### 4.4. S-konveksne funkcije

Za dokazivanje generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti za s-konveksne funkcije potreban je sljedeći rezultat.

**Propozicija 4.17** *Neka je  $0 < s < 1$ . Ako je  $f \in K_1^s$  onda je  $f$  nepadajuća funkcija na  $(0, \infty)$  i*

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \leq f(0).$$

Slijede generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti za s-konveksne funkcije.

**Teorem 4.18** *Neka je  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  s-konveksna funkcija u prvom smislu,  $s \in (0, 1)$  i neka su  $a, b \in [0, \infty)$  takvi da je  $a < b$ . Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

**Dokaz.** Ako u definiciji s-konveksnosti u prvom smislu stavimo  $\alpha = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$  i  $\beta = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$  vrijedi da je  $\alpha^s + \beta^s = 1$  i za svaki  $x, y \in [0, \infty)$  je

$$f\left(\frac{x+y}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Ako stavimo  $x = ta + (1-t)b$  i  $y = (1-t)a + tb$ ,  $t \in [0, 1]$  dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)].$$

Kako je  $f$  monotono nepadajuća na  $[0, \infty)$ , integrabilan na  $[a, b]$ . Dakle, možemo integrirati po  $t$  gornju nejednakost.

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt &= \int_0^1 f((1-t)a + tb) dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned}$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. ■

#### 4.4. S-konveksne funkcije

**Teorem 4.19** *Neka je  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  s-konveksna funkcija u prvom smislu,  $s \in (0, 1)$  i neka su  $a, b \in [0, \infty)$  takvi da je  $a < b$ . Tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + sf(b)}{s+1}.$$

**Dokaz.** Kako je  $f$  s-konveksna u prvom smislu, za svaki  $t \in [0, 1]$  takav da  $t^s + (1-t)^s = 1$  vrijedi

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &\leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b) \\ &\leq t^s f(a) + (1-t^s) f(b) \\ &= t^s (f(a) - f(b)) + f(b). \end{aligned}$$

Kako je  $f$  monotono nepadajuća na  $[0, \infty)$ , integrabilan na  $[a, b]$ . Integriranjem nejednakosti po  $t$  na  $[0, 1]$  dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt &\leq (f(a) - f(b)) \int_0^1 t^s dt + f(b) \int_0^1 dt \\ &\leq \frac{f(a) + sf(b)}{s+1}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

slijedi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + sf(b)}{s+1}$$

i tvrdnja teorema je dokazana. ■

**Definicija 4.20** *Neka je  $0 < s \leq 1$ . Funkcija  $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  je s-konveksna u drugom smislu, ako za svaki  $x, y \in [0, \infty)$  i  $\alpha, \beta \geq 0$  takve da je  $\alpha + \beta = 1$  vrijedi*

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y).$$

#### 4.4. S-konveksne funkcije

Skup svih  $s$ -konveksnih funkcija u drugom smislu označavamo s  $K_2^s$ . Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je  $f$   $s$ -konkavna funkcija u drugom smislu.

**Teorem 4.21** Neka je  $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$   $s$ -konveksna funkcija u drugom smislu,  $s \in (0, 1)$  i neka su  $a, b \in [0, \infty)$  takvi da je  $a < b$ . Ako je  $f \in L_1[a, b]$  tada vrijedi

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{s+1}. \quad (4.4)$$

**Dokaz.** Iz  $s$ -konveksna u drugom smislu funkcije  $f$  za svaki  $t \in [0, 1]$  vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b).$$

Integriranjem nejednakosti po  $t$  na  $[0, 1]$  dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt &\leq f(a) \int_0^1 t^s dt + f(b) \int_0^1 (1-t)^s dt \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{s+1}. \end{aligned}$$

Preostaje pokazati prvu nejednakost iz (4.21). Za svaki  $x, y \in [0, \infty)$  vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2^s}.$$

Neka je  $x = ta + (1-t)b$  i  $y = tb + (1-t)a$  pa je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)}{2^s}.$$

Integriranjem nejednakosti po  $t$  od 0 do 1 dobivamo

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

pa je tvrdnja dokazana. ■

Prethodna tri teorema su generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti koju dobivamo kada je  $s=1$  jer se u tom slučaju  $s$ -konveksnost svodi na običnu konveksnost funkcije.

#### 4.5. Modificirane h-konveksne funkcije

### 4.5 Modificirane h-konveksne funkcije

**Definicija 4.22** *Neka je  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  nenegativna funkcija. Za nenegativnu funkciju  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je h-konveksna ako za svaki  $x, y \in I$  i  $t \in [0, 1]$  vrijedi*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq h(t)f(x) + h(1 - t)f(y).$$

*Klasu svih h-konveksnih funkcija definiranih na  $I$  označavamo s  $SX(h, I)$ . Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je  $f$  h-konkavna funkcija.*

**Definicija 4.23** *Neka je  $h : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  nenegativna funkcija. Za  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je modificirana h-konveksna funkcija ako za svaki  $x, y \in I$  i  $t \in [0, 1]$  vrijedi*

$$f(tx + (1 - t)y) \leq h(t)f(x) + (1 - h(t))f(y).$$

- Ako je  $h(t) = t$  h-konveksnost i modificirana h-konveksnost se svodi na običnu konveksnost.
- Ako je  $h(t) = t^s$  h-konveksnost se svodi na s-konveksnost.

U nastavku navodimo generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti za modificirane h-konveksne funkcije.

**Teorem 4.24** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  modificirana h-konveksna funkcija na intervalu  $[a, b]$ ,  $a < b$ . Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(a) + (f(a) + f(b)) \int_0^1 h(t) dt.$$

#### 4.5. Modificirane h-konveksne funkcije

**Dokaz.** Neka je  $u = ta + (1 - t)b$  i  $v = (1 - t)a + tb$ . Tada je

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{u+v}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{ta + (1-t)b + (1-t)a + tb}{2}\right) \\ &\leq \left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right] f(ta + (1-t)b) + h\left(\frac{1}{2}\right) f((1-t)a + tb). \end{aligned}$$

Integriranjem nejednakosti po  $t \in [0, 1]$  slijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \left[1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right] \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx + h\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Također, vrijedi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= (b-a) \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \\ &\leq (b-a) \int_0^1 [(1-h(t))f(a) + h(t)f(b)] dt \\ &= (b-a) \left[ f(a) + (f(b) - f(a)) \int_0^1 h(t) dt \right]. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq f(a) + (f(b) - f(a)) \int_0^1 h(t) dt. \tag{4.6}$$

Kombiniranjem (4.5) i (4.6) završavamo dokaz teorema. ■

Ako u prethodnom teoremu stavimo  $h(t) = t$  dobivamo klasičnu Hermite-Hadamardovu nejednakost.

Prethodno u radu smo spomenuli Hermite-Hadamard-Fejérovu nejednakost. Kako bi pokazali njenu generalizaciju za modificirane h-konveksne funkcije potrebna nam je sljedeća lema.

**Lema 4.25** *Neka je  $f$  modificirana h-konveksna funkcija. Tada za svaki  $x \in [a, b]$  vrijedi*

$$f(a + b - x) \leq f(a) + f(b) - f(x)$$

#### 4.5. Modificirane h-konveksne funkcije

gdje je  $x = ta + (1 - t)b$ ,  $t \in [0, 1]$ .

U nastavku navodimo Hermite-Hadamard-Fejérovu nejednakost za modificirane h-konveksne funkcije.

**Teorem 4.26** *Neka je  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  modificirana h-konveksna funkcija,  $w : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $w \leq 0$  integrabilna i simetrična s obzirom na  $\frac{a+b}{2}$ . Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x) dx \leq \int_a^b f(x)w(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx.$$

**Dokaz.** Kako je  $f$  modificirana h-konveksna funkcija iz Leme 4.25 slijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b w(x) dx &= \int_a^b f\left(\frac{a+b-x+x}{2}\right) w(x) dx \\ &\leq \int_a^b \left[ \left(1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right) f(a+b-x) + h\left(\frac{1}{2}\right) f(x) \right] w(x) dx \\ &= \left(1 - h\left(\frac{1}{2}\right)\right) \int_a^b f(a+b-x)w(a+b-x) dx \\ &\quad + h\left(\frac{1}{2}\right) \int_a^b f(x)w(x) dx \\ &= \int_a^b f(x)w(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f(a+b-x)w(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f(x)w(x) dx \\ &\leq \frac{1}{2} \int_a^b (f(a) + f(b) - f(x))w(x) dx + \frac{1}{2} \int_a^b f(x)w(x) dx \\ &= \frac{f(a) + f(b)}{2} \int_a^b w(x) dx. \end{aligned}$$

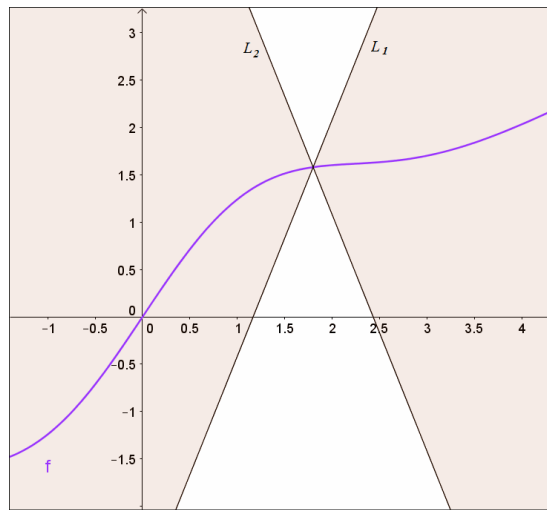
■

Prethodni teorem je, kao što smo već rekli, generalizacija Hermite-Hadamard-Fejérove nejednakosti koju dobivamo kada je  $h(t) = t$  jer se u tom slučaju modificirana h-konveksnost svodi na običnu konveksnost funkcije.

#### 4.6. Lipschitz-neprekidne funkcije

## 4.6 Lipschitz-neprekidne funkcije

Lipschitz-neprekidne funkcije su zanimljive radi specifičnog ponašanja na grafu koje nam omogućuje da ih preciznije istražimo. Intuitivno, Lipschitzovo svojstvo kaže da je Lipschitz-neprekidna funkcija ograničena brzinom kojom se može mijenjati. Točnije, daju nam bolji uvid u preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti, kao što smo naveli u Poglavlju 1.4 gdje smo također imali rezultate povezane sa Lipschitzovim svojstvom (Slika 4.6). Važno je napomenuti da u ovom poglavlju ne uvodimo specijalnu konveksnost nego koristimo činjenicu da su sve konveksne funkcije Lipschitz-neprekidne na svakom intervalu  $[a, b]$  sadržanom u domeni koja doprinosi boljoj procjeni preciznosti Hermite-Hadamardove nejednakosti.



Slika 4.1: Lipschitz svojstvo

Uz pomoć Teorema 1.13 upravo nam Lipschitz-neprekidne funkcije mogu dobro predočiti preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti. Stoga u ovom poglavlju promatramo posebno nam zanimljive sljedeće Lipschitz-neprekidne funkcije :

#### 4.6. Lipschitz-neprekidne funkcije

Za  $L$ -Lipschitz funkciju  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  definiramo funkcije  $H : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  i  $F : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sa

$$H(t) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right) dx$$

i

$$F(t) := \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y) dx dy.$$

Zanemarivanjem konveksnosti, a korištenjem dvije prethodno definirane funkcije dolazimo do procjena preciznosti lijeve i desne strane originalne Hermite-Hadamardove nejednakosti.

**Teorem 4.27** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$   $L$ -Lipschitz funkcija na  $I$  i neka su  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$ . Vrijedi*

(i) *Funkcija  $H$  je  $\frac{L}{4}(b-a)$ -Lipschitz funkcija na  $[0, 1]$*

(ii)  *$\forall t \in [0, 1]$  vrijede nejednakosti*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - H(t) \right| \leq \frac{Lt}{4}(b-a), \quad (4.7)$$

$$\left| H(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{L(1-t)}{4}(b-a), \quad (4.8)$$

$$\left| H(t) - t \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - (1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{t(1-t)L}{2}(b-a). \quad (4.9)$$



#### 4.6. Lipschitz-neprekidne funkcije

**Dokaz.** Za  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  vrijedi

$$\begin{aligned}
 & |H(t_2) - H(t_1)| \\
 &= \frac{1}{b-a} \left| \int_a^b f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right) dx - \int_a^b f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right) dx \right| \\
 &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b \left| f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right) - f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right) \right| dx \\
 &\leq \frac{L}{b-a} \int_a^b \left| t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2} - t_1x - (1-t_1)\frac{a+b}{2} \right| dx \\
 &= \frac{L|t_2 - t_1|}{b-a} \int_a^b \left| x - \frac{a+b}{2} \right| dx \\
 &= \frac{L(b-a)}{4} |t_2 - t_1|,
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

iz čega slijedi da je  $H$   $\frac{L}{4}(b-a)$ -Lipschitz funkcija na  $[0, 1]$ . Nejednakost (4.7)

dobivamo iz (4.10) ako je  $t_1 = 0, t_2 = t$

$$\begin{aligned}
 |H(t_2) - H(t_1)| &\leq \frac{L(b-a)}{4} |t_2 - t_1| \\
 \left| \frac{1}{b-a} \int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right) dx - H(t) \right| &\leq \frac{Lt}{4}(b-a) \\
 \left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - H(t) \right| &\leq \frac{Lt}{4}(b-a).
 \end{aligned}$$

Nejednakost (4.7) dobivamo iz (4.10) ako je  $t_1 = 1, t_2 = t$

$$\begin{aligned}
 |H(t_2) - H(t_1)| &\leq \frac{L(b-a)}{4} |t_2 - t_1| \\
 \left| H(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \frac{L(1-t)}{4}(b-a).
 \end{aligned}$$

Nejednakost (4.8) dobivamo dodavanjem  $t$  puta (4.10) i  $(1-t)$  puta (4.10)

$$\left| H(t) - t \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - (1-t) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \leq \frac{t(1-t)L}{2}(b-a).$$

■

**Korolar 4.28** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  diferencijabilna, konveksna funkcija na  $I$  i  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$ . Neka je  $M := \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)| < \infty$ .*

#### 4.6. Lipschitz-neprekidne funkcije

Tada za svaki  $t \in [0, 1]$  vrijede sljedeće nejednakosti

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - H(t) \leq \frac{M(1-t)}{4}(b-a), \\ 0 &\leq H(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{Mt}{4}(b-a), \\ 0 &\leq \frac{f(tb + (1-t)\frac{a+b}{2}) + f(ta + (1-t)\frac{a+b}{2})}{2} - H(t) \leq \frac{Mt}{3}(b-a). \end{aligned}$$

**Teorem 4.29** Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$   $L$ -Lipschitz funkcija na  $I$  i neka su  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$ . Vrijedi

(i) Funkcija  $F$  je simetrična,  $f(t) = F(1-t), \forall t \in [0, 1]$

(ii) Funkcija  $F$  je  $\frac{L}{3}(b-a)$ -Lipschitz funkcija na  $[0, 1]$

(iii)  $\forall t \in [0, 1]$  vrijede nejednakosti

$$\left| F(t) - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right) dx dy \right| \leq \frac{L|2t-1|}{6}(b-a), \quad (4.11)$$

$$\left| F(t) - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{Lt}{3}(b-a), \quad (4.12)$$

$$|F(t) - H(t)| \leq \frac{(1-t)L}{4}(b-a). \quad (4.13)$$

**Dokaz.** Prva tvrdnja slijedi iz definicije funkcije  $F$ . Za  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  vrijedi

$$\begin{aligned} |F(t_2) - F(t_1)| &= \frac{1}{(b-a)^2} \left| \int_a^b \int_a^b [f(t_2x + (1-t_2)y) - f(t_1x + (1-t_1)y)] dx dy \right| \\ &\leq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |f(t_2x + (1-t_2)y) - f(t_1x + (1-t_1)y)| dx dy \\ &\leq \frac{L|t_2 - t_1|}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b |x - y| dx dy. \end{aligned}$$

Znamo

$$\int_a^b \int_a^b |x - y| dx dy = \frac{(b-a)^3}{3}$$

#### 4.6. Lipschitz-neprekidne funkcije

pa vrijedi

$$|F(t_2) - F(t_1)| \leq \frac{L|t_2 - t_1|}{3}(b - a), \forall t_1, t_2 \in [0, 1] \quad (4.14)$$

iz čega slijedi da je  $F$   $\frac{L}{3}(b - a)$ -Lipschitz funkcija na  $[0, 1]$ . Nejednakost (4.11) dobivamo iz (4.14) ako je  $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = t$

$$\begin{aligned} \left| F(t) - F\left(\frac{1}{2}\right) \right| &\leq \frac{L|t - \frac{1}{2}|}{3}(b - a) \\ \left| F(t) - \frac{1}{(b - a)^2} \int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x + y}{2}\right) dx dy \right| &\leq \frac{L|2t - 1|}{6}(b - a). \end{aligned}$$

Nejednakost (4.12) dobivamo iz (4.14) ako je  $t_1 = 0, t_2 = t$

$$\begin{aligned} |F(t) - F(0)| &\leq \frac{Lt}{3}(b - a) \\ \left| F(t) - \frac{1}{(b - a)^2} \int_a^b \int_a^b f(y) dx dy \right| &\leq \frac{Lt}{3}(b - a) \\ \left| F(t) - \frac{1}{(b - a)} \int_a^b f(x) dx \right| &\leq \frac{Lt}{3}(b - a). \end{aligned}$$

Kako je funkcija  $f$  L-Lipschitz funkcija za svaki  $t \in [0, 1]$  i  $x, y \in [a, b]$  vrijedi

$$\begin{aligned} &\left| f(tx + (1 - t)y) - f\left(tx + (1 - t)\frac{a + b}{2}\right) \right| \\ &\leq L \left| tx + (1 - t)y - tx - (1 - t)\frac{a + b}{2} \right| \\ &= (1 - t)L \left| y - \frac{a + b}{2} \right|. \end{aligned}$$

Integriranjem nejednakosti na  $[a, b] \times [a, b]$  dobivamo

$$\begin{aligned} &\left| \frac{1}{(b - a)^2} \int_a^b \int_a^b f(tx + (1 - t)y) dx dy - \frac{1}{(b - a)} \int_a^b f\left(tx + (1 - t)\frac{a + b}{2}\right) dx \right| \\ &\leq (1 - t)L \frac{1}{b - a} \int_a^b \left| y - \frac{a + b}{2} \right| dy \\ &= \frac{L(1 - t)(b - a)}{4}, \forall t \in [0, 1]. \end{aligned}$$

■

#### 4.6. Lipschitz-neprekidne funkcije

**Korolar 4.30** *Neka je  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $I \subseteq \mathbb{R}$  diferencijabilna, konveksna funkcija na  $I$  i  $a, b \in I$  takvi da je  $a < b$ . Neka je  $M := \sup_{x \in [a, b]} |f'(x)| < \infty$ . Tada za svaki  $t \in [0, 1]$  vrijede sljedeće nejednakosti*

$$0 \leq F(t) - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right) dx dy \leq \frac{M|2t-1|}{6}(b-a),$$

$$0 \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx - F(t) \leq \frac{Mt}{2}(b-a),$$

$$0 \leq F(t) - H(t) \leq \frac{M(1-t)}{4}(b-a).$$

# Literatura

- [1] M. Anwar, J. Pečarić, G. Roquia. On generalized Hermite Hadamard's inequality. *Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS)* 6(3), 2013, pp.225 - 249
- [2] A.G. Azpeitia. Convex Functions and the Hadamard Inequality. *Revista Colombiana de Matemáticas*, Vol. 28 (1994), 7-12
- [3] P. Cerone, S.S. Dragomir. *Mathematical inequalities*, Taylor & Francis Group, New York, 2011.
- [4] K.S. Chou. 2018 Fall MATH3060 *Mathematical Analysis III: Elementary Inequalities*, Department of mathematics The Chinese University of Hong Kong.
- [5] S.S. Dragomir, S. Fitzpatrick. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. *Demonstratio Math.*, 32 (4) (1999), 687-696
- [6] S.S. Dragomir, C.E M. Pearce. *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*. RGMIA Monographs, Victoria University, Melbourne, Victoria, Australia, 2000.
- [7] S.S. Dragomir. Superadditivity and monotonicity of some functionals associated with the Hermite-Hadamard Inequality for convex functions

## Literatura

- in linear space. *The Rocky Mountain Journal of Mathematics* , Vol. 42, No. 5 (2012), pp. 1447-1459
- [8] M. Iqbal. *Hadamard-type Inequalities with Applications*. Department of Mathematics, University of Engineering and Technology, Lahore-Pakistan, 2014.
- [9] M. Master. *Inégalité d’Hermite-Hadamard pour Différents Types de Convexité*. Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, Faculté des Sciences Exactes et d’Informatique, 2017.
- [10] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink. *Classical and New Inequalities in Analysis*. Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993.
- [11] C.P. Niculescu, L.E.Persson. *Old and New on the Hermite-Hadamard Inequality*, Vol. 29(2), 2003/2004, 663-685
- [12] C.P. Niculescu, L.E. Persson. *Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach (CMS Books in Mathematics)*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [13] M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan: *Hermite-Hadamard inequalities for modified h-convex functions*. *Trans. J. Math. Mechanics*. Vol. 6., 2014.
- [14] Z. Pavić, M.A. Ardic: *The most important inequalities of m-convex functions*. *Turkish Journal of Mathematics*, 2017, Vol. 41, No.3.
- [15] J. Pečarić, P.R. Beesack. *On Jessen’s inequality for convex functions II*. *Journal of mathematical analysis and applications* 1, Vol. 118, Issue 1, 1986, Pages 125-144

## Literatura

- [16] J.E. Pečarić, F. Proschan, Y.L. Tong. Convex functions, partial orderings and statistical applications. ACADEMIC PRESS, INC., 1992.
- [17] Đ. Pečarić, J. Pečarić and J. Perić. Refinement of the discrete Lah-Ribarič Inequality and applications on Csiszar divergence, 2022.
- [18] G.S. Yang, K.L. Tseng. Inequalities of Hadamard's Type for Lipschitzian Mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 245, Issue 2, 2000, Pages 489-501