Obujam u kurikulumu

Šain, Meri

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

MERI ŠAIN

OBUJAM U KURIKULUMU

DIPLOMSKI RAD

Split, svibanj 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

OBUJAM U KURIKULUMU

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Meri Šain

Mentorica:
doc. dr. sc. Tanja Vojković

Split, svibanj 2023.

Uvod

Jedan od matematičkih pojmova s kojim se svakodnevno susrećemo i koristimo u životu je obujam, kao i njegove mjerne jedinice. Kada se učenici u svome obrazovanju prvi puta susreću s pojmom obujam i kako se i kada njihovo znanje širi i produbljuje na tom putu, vidjet ćemo u ovom radu.

Na početku rada se nalaze definicije geometrijskih tijela i aksiomatska definicija obujma.
U glavnom dijelu je pregled obrade obujma u osnovnoj školi i gimnazijama prema kurikulumu objavljenom u Narodnim novinama 2019. godine. Dan je prikaz teorijskog dijela gradiva iz udžbenika, kao i primjeri zadataka koji se mogu pronaći u njima.
Na kraju su neki od zadataka s dosadašnjih ispita državne mature i natjecanja iz matematike u osnovnoj i srednjoj školi u kojima se primjenjuje obujam.

Sadržaj

Poglavlje 1

Što je obujam?

Obujam se u osnovnoškolskom i srednjoškolskom obrazovanju definira na način koji je za učenike tada primjeren, kojeg oni s dotadašnjim znanjem mogu razumjeti, kao i mnogi drugi pojmovi s kojima se susreću u svome obrazovanju. U ovom poglavlju nalazi se definicija obujma te definicije geometrijskih tijela, koja su neizostavna pri poučavanju obujma i s kojima ćemo se susretati dalje u ovom radu, na nešto višoj, fakultetskoj razini.

Neka je u ravnini π dan n-terokut $A_1A_2\cdots A_n$ i neka je p bilo koji pravac koji nije paralelan s ravninom π. Unija svih pravaca, paralelnih s p, koji prolaze nekom točkom n-terokuta $A_1A_2\cdots A_n$ naziva se **neomeđena n-terokutna prizma** nad n-terokutom $A_1A_2\cdots A_n$.
Neka je dana jedna neomeđena n-terokutna prizma nad n-terokutom $A_1A_2\cdot\cdot\cdot A_n$ i ravnina $\pi' \neq \pi$ paralelna s ravninom π tog n-terokuta. Ravnine π i π' određuju zatvoreni sloj $\mathcal{S}$ s rubom $\pi\cup\pi'$. Presjek promatrane neomeđene n-terokutne prizme sa zatvorenim slojem $\mathcal{S}$ naziva se **n-terokutnom prizmom**.
Presjeci neomeđene prizme s ravninama π i π' su dva n-terokuta koja se zovu

osnovke prizme. Presjeci pojedinih stranica neomeđene prizme sa slojem $\mathcal{S}$ su paralelogrami koji se zovu **pobočke prizme**. Dužine koje spajaju odgovarajuće vrhove osnovki nazivaju se **pobočni bridovi**.
Prizma kojoj su osnovke paralelogrami naziva se **paralelopiped**, prizma kojoj su sve stranice pravokutnici naziva se **kvadar**, a prizma kojoj su sve stranice kvadrati naziva se **kocka**.
Dužina kojoj je jedan kraj bilo koja točka jedne osnovke prizme, a drugi nožište okomice spuštene iz te točke na ravninu druge njezine osnovke naziva se **visina prizme**.
Ako je pravac p okomit na ravninu π i n-terokut $A_1A_2\cdots A_n$ pravilan govorimo o **pravilnoj prizmi**.

Neka je u ravnini π dan n-terokut $A_1A_2\cdots A_n$ i neka je V bilo koja točka koja ne pripada ravnini π. Unija svih dužina kojima je V jedan kraj, a drugi je bilo koja točka n-terokuta $A_1A_2\cdots A_n$ naziva se **n-terokutna piramida**. Točke $V, A_1, A_2, ..., A_n$ nazivaju se **vrhovi**, n-terokut $A_1A_2\cdots A_n$ naziva se **osnovkom**, trokuti $\triangle VA_iA_{i+1}, i = 1, 2, ..., n-1$ nazivaju se **pobočke**, a dužine $\overline{VA_i}, i = 1, 2, ..., n$, **pobočni bridovi** piramide.
Ako je n-terokut $A_1A_2\cdots A_n$ pravilan i svi pobočni bridovi jednakih duljina govorimo o **pravilnoj piramidi**.
Dužina kojoj je jedan kraj vrh V, a drugi nožište okomice spuštene iz tog vrha na ravninu osnovke piramide naziva se **visina piramide**.

Neka je u ravnini π dan krug $K(S, r)$ i neka je p bilo koji pravac koji nije paralelan s ravninom π. Unija svih pravaca paralelnih s p koji prolaze nekom točkom kruga $K(S, r)$ naziva se **neomeđeni valjak**.
Svaki pravac koji prolazi rubnom točkom kruga $K(S, r)$ naziva se **izvodnica**

neomeđenog valjka. Unija svih izvodnica naziva se **plašt** tog neomeđenog valjka.
Neka je π' ravnina paralelna s π, a $\mathcal{S}$ zatvoreni sloj s rubom $\pi \cup \pi'$. Presjek promatranog neomeđenog valjka sa zatvorenim slojem $\mathcal{S}$ naziva se **valjak**.
Presjek neomeđenog valjka s ravninama π i π' su dva sukladna kruga koja se zovu **osnovke valjka**.
Dužina kojoj je jedan kraj bilo koja točka jedne osnovke valjka, a drugi nožište okomice spuštene iz te točke na ravninu druge njegove osnovke naziva se **visina valjka**.
Ako je pravac p okomit na ravninu π onda govorimo o **uspravnom valjku**.

Neka je u ravnini π dan krug $K(S, r)$ i neka je V bilo koja točka koja ne pripada ravnini π. Unija svih dužina kojima je V jedan kraj, a drugi kraj bilo koja točka kruga $K(S, r)$ naziva se **stožac**.
Krug $K(S, r)$ naziva se **osnovka**, a V **vrh** stošca. Svaka dužina kojoj je jedan kraj V, a drugi točka ruba kruga $K(S, r)$ naziva se **izvodnica** stošca.
Unija svih izvodnica naziva se **plašt stošca**.
Dužina kojoj je jedan kraj vrh V, a drugi nožište okomice spuštene iz tog vrha na ravninu osnovke stošca naziva se **visina stošca**.
Ako sve izvodnice stošca imaju jednaku duljinu govorimo o **uspravnom stošcu** i u tom slučaju je visina stošca jednaka duljini dužine kojoj je točka V jedan kraj, a drugi kraj je središte S kruga $K(S, r)$.
Jednakokračni trokut kojemu su krakovi izvodnice stošca, a baza dijametar kruga K naziva se **osni presjek uspravnog stošca**.

Neka je $S \in \mathbb{E}$ bilo koja točka prostora $\mathbb{E}$ i $r > 0$. Skup $Kg(S, r) = \{T \in \mathbb{E} : d(S, T) \leq r\}$ naziva se **kugla** sa središtem S i radijusom r.

Prije nego navedemo definiciju obujma potrebno je definirati još nekoliko pojmova.

Započet ćemo s petim aksiomom euklidske geometrije prostora:

(E5) Postoji funkcija $f : \mathbb{E} \to \mathbb{R}$ koju zovemo **metrika** na prostoru $\mathbb{E}$, za koju vrijedi:

(M1) $d(A, B) \geq 0$, za svaki $A, B \in \mathbb{E}$,
$d(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$;

(M2) $d(A, B) = d(B, A)$, za svaki $A, B \in \mathbb{E}$;

(M3) $d(A, B) \leq d(A, C) + d(C, B)$, za svaki $A, B, C \in \mathbb{E}$, i pritom znak jednakosti vrijedi onda i samo onda ako je $C \in \overline{AB}$;

(M4) Ako je na bilo kojem pravcu p dana točka O i jedan linearni uređaj $\preceq$, onda je svakom nenegativnom broju $x \geq 0$ pridružena jedinstvena točka $T \in p$ tako da je $O \preceq T$ i $d(O, T) = x$.

Definicija 1.1 *Preslikavanje $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ naziva se **izometrija** prostora ako vrijedi*

$$d(f(A), f(B)) = d(A, B), \text{ za svaki } A, B \in \mathbb{E}.$$

*Za skupove $X, Y \subseteq \mathbb{E}$ kažemo da su **sukladni**, i pišemo $X \cong Y$, ako postoji izometrija $f : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ takva da je $f(X) = Y$.*

Neka je $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{E}$ bilo koji konačan skup točaka u prostoru $\mathbb{E}$. Konveksna ljuska skupa $\mathcal{S}$ naziva se **konveksni poliedar**.

Definicija 1.2 *Svaki skup točaka u prostoru $\mathbb{E}$ koji se može prikazati kao unija od konačno mnogo konveksnih poliedara, od kojih nikoja dva nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka naziva se **poliedar**.*

Reći ćemo da je poliedar P **zbroj poliedara** P_1 i P_2 i pisati $P = P_1 + P_2$, ako je $P = P_1 \cup P_2$, te poliedri P_1 i P_2 nemaju zajedničkih unutrašnjih točaka.

Definicija 1.3 *Neka je $\mathcal{P}$ skup svih poliedara u prostoru $\mathbb{E}$ (uključujući i $\emptyset$).* ***Volumen*** *ili* ***obujam*** *na skupu $\mathcal{P}$ je funkcija $v : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$ za koju vrijedi:*

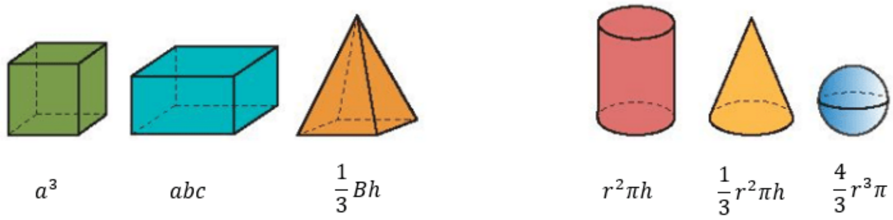
($v1$) $v(P) \geq 0$, *za svaki $P \in \mathcal{P}$;*

($v2$) *Ako je poliedar P zbroj poliedara P_1 i P_2 onda je $v(P) = v(P_1) + v(P_2)$, tj. $v(P_1 + P_2) = v(P_1) + v(P_2)$;*

($v3$) *Ako je $P_1 \cong P_2$ onda je $v(P_1) = v(P_2)$;*

($v4$) *Postoji bar jedna kocka K s bridom 1 takva da je $v(K) = 1$.*

Na slici 1.1 su dane poznate formule za obujam (bez njihova izvoda), a dokazi se mogu naći u [3].



Slika 1.1: Geometrijska tijela i njihovi obujmi

Poglavlje 2

Obujam u Kurikulumu

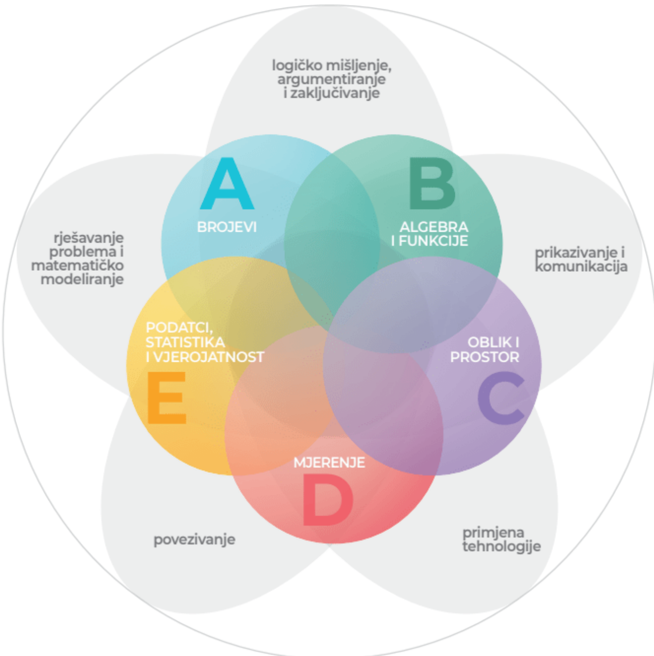
Kurikulum za nastavni predmet Matematika za osnovne škole i gimnazije objavljen je u [13].

Učenje i poučavanje nastavnoga predmeta Matematika ostvaruje se povezivanjem matematičkih procesa i domena. Matematički procesi su: prikazivanje i komunikacija, povezivanje, logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje, rješavanje problema i matematičko modeliranje te primjena tehnologije. Domene predmeta Matematika su: brojevi, algebra i funkcije, oblik i prostor, mjerenje te podatci, statistika i vjerojatnost.

Obujam pretežito pripada domeni Mjerenje, ali može se naći i u domenama Oblik i prostor i Algebra i funkcije.

Prema [13] mjerenje je uspoređivanje neke veličine s istovrsnom veličinom koja je dogovorena jedinica mjere. Domena Oblik i prostor dio je geometrije koji se bavi proučavanjem oblika, njihovih položaja i odnosa. Algebra je jezik za opisivanje pravilnosti u kojemu slova i simboli predstavljaju brojeve, količine i operacije, a varijable se upotrebljavaju pri rješavanju matematičkih problema.

Kroz domenu Mjerenje učenici povezuju matematiku s drugim odgojno-obrazovnim područjima, s vlastitim iskustvom, svakodnevnim životom u kući i zajednici te na radnome mjestu, prepoznavaju mjeriva obilježja ravninskih i prostornih oblika u umjetnosti te ih upotrebljavaju za opis i analizu svijeta oko sebe.



Slika 2.1: Matematički procesi i domene kurikuluma nastavnoga predmeta Matematika

U ovom poglavlju proći ćemo kroz svaki razred u kojem se obrađuje obujam. Vidjet ćemo neke od definicija koje se predstavljaju učenicima u njihovim udžbenicima, s kojim se sve pojmovima susreću i na kojim geometrijskim tijelima primjenjuju znanje o obujmu u određenom razredu. Nakon teorijskog dijela uslijedit će primjeri zadataka s primjenom obujma koji se pojavljuju u udžbenicima toga razreda. Na taj način dobit ćemo predodžbu koje pojmove učenici moraju savladati kako bi mogli rješavati zadatke, o raznolikosti samih zadataka u pojedinom razredu te kako i koliko se njihovo znanje o obujmu proširuje s godinama obrazovanja.

2.1 Osnovna škola

U prvom i drugom razredu osnovnoškolskog obrazovanja ne pojavljuje se pojam obujam.

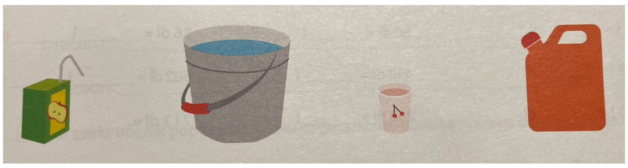
2.1.1 Treći razred osnovne škole

Učenici trećeg razreda prvi puta se susreću s pojmom obujam, obujmom tekućine i mjernim jedinicama za obujam tekućine.
S obradom gradiva započinju prisjećajući se pojedinih vrsta tekućina i kako su količine tih tekućina izražene u svakodnevnom životu.

Prostor koji zauzima tekućina nazivamo **volumen** tekućine. Mjerne jedinice za volumen tekućine su litra (L,l) i decilitar (dl). $1\ l = 10\ dl$.
Riječ volumen je međunarodna, a u hrvatskom jeziku upotrebljavamo riječi *obujam* i *zapremnina* koje imaju jednako značenje.

Prvi zadatci s kojima se učenici susreću su procjena obujma tekućine u različitim posudama, primjer takvog zadatka je zadatak 2.1.

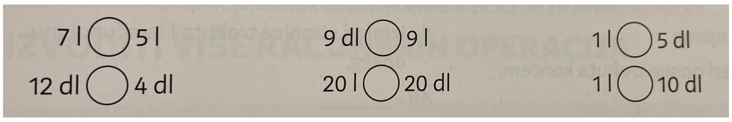
Zadatak 2.1 *Procijeni u koju bi posudu moglo stati koliko tekućine:* $2\ dl$, $1\ l$, $5\ l$, $10\ l$. *Zaokruži posudu najmanjeg obujma. (Slika 2.2)*



Slika 2.2:

Nakon toga slijede zadatci s preračunavanjem mjernih jedinica za obujam tekućine i uspoređivanjem obujama. Primjer takvog zadatka je zadatak 2.2.

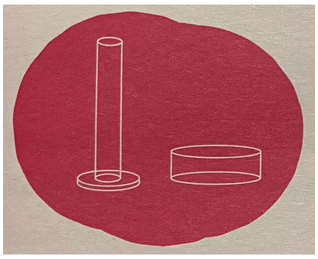
Zadatak 2.2 *Usporedi volumene. (Slika 2.3)*



Slika 2.3:

Zadatak 2.3 je primjer zadatka kojim se može provjeriti jesu li učenici doista shvatili što je obujam, kao i spriječiti moguća miskoncepcija da je obujam posude veći ako je posuda viša.

Zadatak 2.3 *Posude na slici 2.4 imaju jednak obujam, ali različit oblik. U koju će posudu stati više tekućine?*



Slika 2.4:

Naposljetku dolazi primjena obujma u zadatcima iz svakodnevnog života. U nastavku su neki od takvih zadataka iz udžbenika, zbirki zadataka i radnih bilježnica u trećem razredu osnovne škole. Najčešće su to zadatci u kojima je potrebno napraviti jednu osnovnu računsku operaciju kako bi se došlo do rješenja.

Zadatak 2.4 *U jednom je loncu* 12 *dl mlijeka. U drugom su loncu* 24 *dl mlijeka. Stane li mlijeko iz oba lonca u jedan lonac obujma* 4 *l?*

Zadatak 2.5 *Irena je kupila* 9 *l meda. Trećinu je dala baki. Koliko je litara meda ostalo Ireni?*

Zadatak 2.6 *Mama je napravila* 3 *l domaćeg soka od višanja.*
Koliko je decilitara soka napravila?
Sok je prelila u boce od pola litre. Koliko joj je boca trebalo da prelije sav sok?

Zadatak 2.7 *Tena je kupila tri boce soka od* 2 *l i dvije boce od* 5 *dl. Koliko je ukupno soka kupila Tena?*

Zadatak 2.8 *Niko zalijeva cvijeće kantom od* 5 *l. Da bi zalio sve cvijeće 8 puta mora napuniti kantu. Koliko mu je vode potrebno da bi zalio cvijeće?*

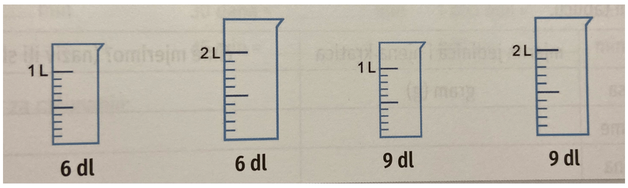
2.1.2 Četvrti razred osnovne škole

U četvrtom razredu učenici se prisjećaju što su učili o obujmu u trećem razredu. Slično kao i u trećem razredu, procjenjuju obujam tekućine, preračunavaju mjerne jedinice za obujam tekućine (l, dl), uspoređuju obujme i na kraju rješavaju zadatke iz svakodnevnog života.
Osim zadataka kakvi su se rješavali u trećem razredu, sada imaju i malo zahtjevnije zadatke u kojima je ponekad potrebno napraviti i više računskih operacija. Primjeri takvih zadataka nalaze se u nastavku.

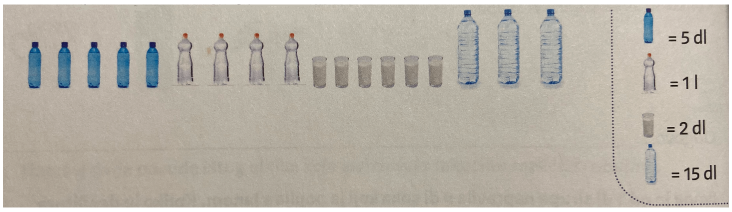
Zadatak 2.9 *Zadano je koliko decilitara treba uliti u posudu. U posudi nacrtaj crtu koja pokazuje do koje visine treba uliti tekućinu. (Slika 2.5)*

Zadatak 2.10 *Koliko je ukupno tekućine na slici 2.6?*

Zadatak 2.11 *Mama je napravila* 30 *l soka od cikle i* 20 *l soka od aronije. Želi ga spremiti u boce volumena* 5 *dl. Koliko je takvih boca potrebno da bi spremila sav sok koji je napravila?*



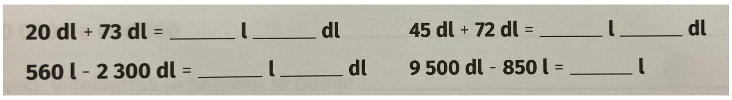
Slika 2.5:



Slika 2.6:

Zadatak 2.12 *Jakov je ulio* 3 *l vode u 6 bočica. Koliko je dl vode ulio u 1 bočicu?*

Zadatak 2.13 *Izračunaj. (Slika 2.7)*


20 dl + 73 dl = ______ l ______ dl

45 dl + 72 dl = ______ l ______ dl

560 l - 2 300 dl = ______ l ______ dl

9 500 dl - 850 l = ______ l

Slika 2.7:

Zadatak 2.14 *Imaš posudu od* 1 *l napunjenu vodom. Imaš i dvije prazne posude od* 5 *dl i* 3 *dl. Kako ćeš samo pomoću pretakanja (bez mjerenja) od* 1 *l odliti* 1 *dl? Nacrtaj slike i opiši.*

Zadatak 2.15 *Ivana je od* 1 *dl sirupa napravila* 9 *dl soka koji je popila s Janom. Koliko je decilitara soka popila Ivana, a koliko Jana ako je Jana popila dva puta više nego Ivana?*

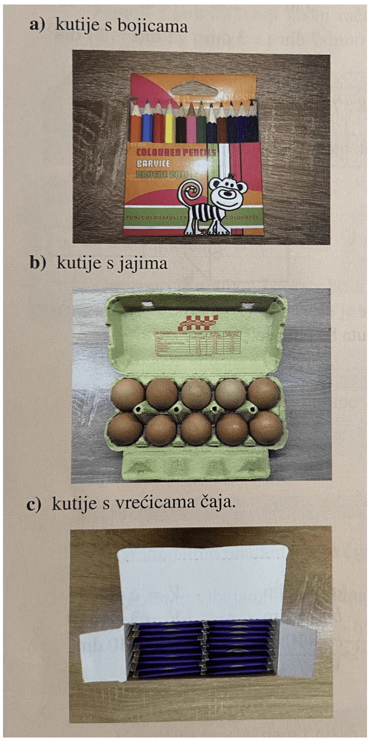
2.1.3 Peti razred osnovne škole

U petom razredu učenici proširuju svoje dotadašnje znanje o obujmu. Osim obujma tekućine s kojim su do tada bili upoznati sada uče o obujmu (geometrijskog) tijela, mjernim jedninicama za obujam te određuju i primjenjuju obujam na kocki i kvadru.

Volumen ili **obujam** nekog tijela je veličina prostora koju to tijelo zauzima. Oznaka za volumen ili obujam je veliko slovo V.
U nekim udžbenicima može se naći i pojam zapremnina.
Volumen mjerimo: metrima kubnim (m^3), decimetrima kubnim (dm^3), centimetrima kubnim (cm^3), milimetrima kubnim (mm^3), kilometrima kubnim (km^3).
1 cm^3 je obujam kocke čiji su svi bridovi duljine 1 cm. 1 dm^3 je obujam kocke čiji su svi bridovi duljine 1 dm. Isto vrijedi i za kocke obujma 1 mm^3, 1 m^3, 1 km^3. Ovakve kocke nazivamo **jediničnim kockama**.
Ponekad se kao mjerna jedinica za volumen koristi i litra: 1 $dm^3 = 1\ l$.
U pojedinim udžbenicima nalazi se i opisivanje obujma nestandarnim mjernim jedinicama, primjer takvog zadatka je zadatak 2.16.
Također, u nekim udžbenicima se navode i mjerne jedninice: hl, dl, ml.

Zadatak 2.16 *Koristeći predmete na slici 2.8 opiši koliki je obujam:*

Prvi zadatci s kojima se učenici susreću su određivanje obujma tijela sastavljenih od jediničnih kocki. Znaju da je volumen kocke i kvadra jednak broju jediničnih kocki koje to tijelo sadržava. Primjer takvog zadatka je zadatak 2.17.
U nekim udžbenicima su i zadatci preračunavanja obujma iz jedne u drugu mjernu jedinicu, kao što je zadatak 2.18.



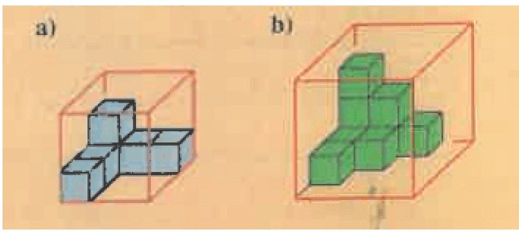
Slika 2.8:

Zadatak 2.17 *(Slika 2.9). Odgovori na sljedeća pitanja:*

Koliki je obujam tijela što ga čine jedinične kocke?

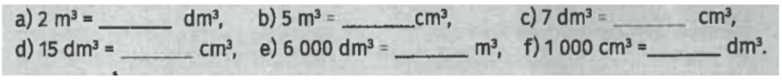
Koliko još jediničnih kocaka nedostaje do pune kocke?

Koliki je obujam kocke sastavljene od svih jediničnih kocaka?



Slika 2.9:

Zadatak 2.18 *Dopuni: (Slika 2.10)*



a) 2 m³ = ______ dm³, b) 5 m³ = ______ cm³, c) 7 dm³ = ______ cm³,
d) 15 dm³ = ______ cm³, e) 6 000 dm³ = ______ m³, f) 1 000 cm³ = ______ dm³.

Slika 2.10:

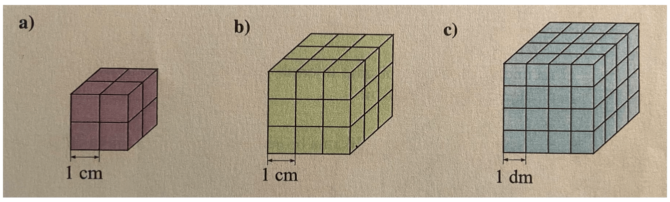
Nakon toga prelazi se na određivanje obujma kocke i kvadra ako su zadane duljine njihovih bridova. Samo u nekim udžbenicima kocka i kvadar su definirani. Isto tako, ima udžbenika gdje se primjerima dolazi do formule za obujam kocke i kvadra, a u ostalima su one odmah zadane. U daljnjem tekstu navedene su definicije i način dolaska do formula iz udžbenika koji ih sadržavaju.

Kocka je geometrijsko tijelo omeđeno sa šest kvadrata.

Kvadar je geometrijsko tijelo omeđeno sa šest pravokutnika.

Popunjavanjem kvadra ili kocke jediničnim kockama, kao što je opisano u nastavku, dolazi se do veze između obujma i duljina bridova kvadra, odnosno kocke.

Odredimo obujmove kocaka sa slike 2.11:



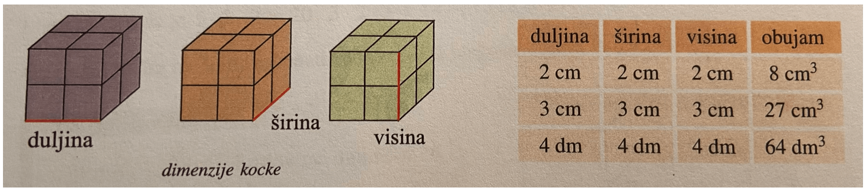
Slika 2.11:

a) Kocka u donjem redu ima dva niza s dvjema jediničnim kockama u svakom od njih. To je $2 \cdot 2 = 4$ jedinične kocke. Sastoji se od ukupno dva reda pa je to $2 \cdot 4 = 8$ jediničnih kocaka. $V = 8\ cm^3$.

b) U donjem je redu $3 \cdot 3 = 9$ jediničnih kocaka. Ukupno je 3 reda, $3 \cdot 9 = 27$ jediničnih kocaka obujma 1 cm^3. $V = 27\ cm^3$.

c) U svakom od 4 reda nalazi se $4 \cdot 4 = 16$ jediničnih kocaka obujma 1 dm^3. Ukupno je to $4 \cdot 16 = 64$ jedinične kocke. $V = 64\ dm^3$.

Međutim, postoji i jednostavniji način računanja obujma kocke. Popunimo tablicu (slika 2.12) podatcima pa izvedimo zaključak.



duljina	širina	visina	obujam
2 cm	2 cm	2 cm	8 cm^3
3 cm	3 cm	3 cm	27 cm^3
4 dm	4 dm	4 dm	64 dm^3

Slika 2.12:

Uočavamo da je $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$, $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$.

Volumen (obujam) kocke brida duljine a je $V = a \cdot a \cdot a = a^3$.

Na analogan način dođe se do formule za obujam kvadra.

Volumen (obujam) kvadra jednak je umnošku duljina triju bridova iz istog vrha. Ako duljine bridova kvadra iz istog vrha označimo redom a, b, c tada je volumen kvadra $V = a \cdot b \cdot c$.

U daljnjem tekstu su neki od zadataka iz udžbenika za peti razred.

Zadatak 2.19 *Izračunaj obujam kvadra čije su dimenzije* $3\ dm \times 8\ dm \times 10\ dm$.

Zadatak 2.20 *Kocka ima volumen* $8\ cm^3$. *Je li duljina brida kocke* $4\ cm$, $2\ cm$ *ili* $1\ cm$?

Zadatak 2.21 *Kvadar je sastavljen od jediničnih kocaka obujma* 1 cm^3. *Napiši barem tri mogućnosti za duljine bridova ako je obujam kvadra:*

a) 12 cm^3 *b)* 32 cm^3 *c)* 60 cm^3

Zadatak 2.22 *Školska je dvorana duga* 45 m *i visoka* 8 m. *Kolika je širina ako je njezin volumen* 9720 m^3*?*

Zadatak 2.23 *Anika je kupila akvarij za ribice koji ima oblik kvadra, a dimenzije su mu* 4 dm, 3 dm *i* 2.5 dm.

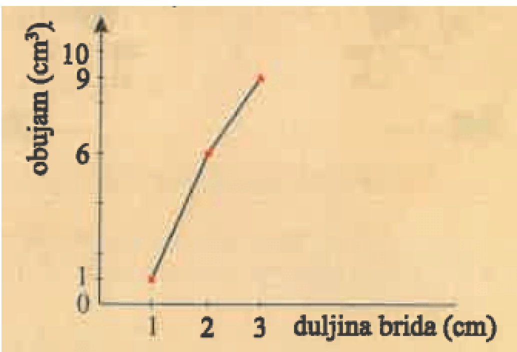
a) Kolika je njegova zapremnina (obujam) izražena u litrama ako je 1 $dm^3 =$ 1 l*?*

b) Anika mijenja vodu ribicama 4 *puta mjesečno. Koliko litara vode mjesečno potroši na to?*

c) Ako cijena vode za 10 l *iznosi* 0.15 kn, *koliko novaca mjesečno Anika potroši na vodu za akvarij?*

Zadatak 2.24 *Marin je dobio terarij oblika kvadra čije su duljine bridova* 4 dm, 35 cm *i* 1 m. *Treba ga do polovice napuniti pijeskom. Koliki će biti volumen pijeska? Za koliko je volumen terarija veći od volumena pijeska?*

Zadatak 2.25 *Mario je grafički prikazao obujmove kocaka s bridovima duljine* 1, 2 *i* 3 cm. *Je li Mario ispravno nacrtao dijagram? (Slika 2.13)*



Slika 2.13:

U šestom i sedmom razredu učenici u nastavi matematike ne obrađuju pojam volumen, već se bave planimetrijom, nakon čega u osmom razredu prelaze na stereometriju i vraćaju se ponovnoj obradi obujma tijela.

2.1.4 Osmi razred osnovne škole

U osmom razredu znanje o obujmu još se proširuje. Uče se geometrijska tijela (prizma, piramida, valjak, stožac), a s njima i određivanje obujama uspravnih prizmi, piramida, valjka i stošca. Redoslijed obrade geometrijskih tijela razlikuje se od udžbenika do udžbenika, a u nastavku je predstavljen redoslijed koji mi se čini najčešći.

Prizme

Prije obrađivanja obujma prizme učenici se upoznavaju s tim tijelom, definiraju prizmu i ostale pojmove koji ju određuju. A samu obradu obujma prizme započinju ponavljanjem ranije poznatih pojmova vezanih za obujam i preračunavanjem njegovih mjernih jedinica.

Tijelo omeđeno dvama paralelnim i sukladnim mnogokutima te paralelogramima naziva se **prizma**.
Likovi koji omeđuju prizmu nazivaju se **strane** prizme.
Sukladni mnogokuti nazivaju se **baze** ili **osnovke** prizme.
Preostali paralelogrami koji omeđuju prizmu nazivaju se **pobočne strane** ili **pobočke**. Sve te pobočke zajedno čine **pobočje** prizme.
Dužina koja je zajednička dvjema stranama naziva se **brid**. Stranice baze nazivaju se **osnovni bridovi** prizme.
Zajedničke stranice dviju pobočki nazivaju se **pobočni bridovi** prizme.
Točka koja je zajednička trima bridovima naziva se **vrh** prizme.

Prizme imenujemo prema vrsti mnogokuta koji je baza prizme.

Ako je baza prizme trokut, prizma se naziva **trostrana**.

Ako je baza prizme četverokut, prizma se naziva **četverostrana**.

Ako je baza prizme n-terokut, prizma se naziva n-**terostrana**.

Prizma kojoj su pobočni bridovi okomiti na bazu naziva se **uspravna prizma**.

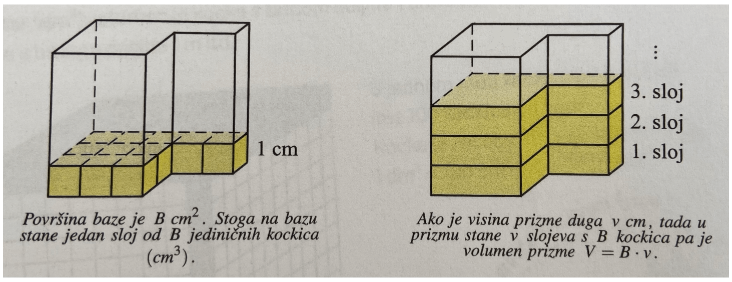
Uspravna prizma kojoj je baza pravilni mnogokut naziva se **pravilna prizma**.

Visina prizme je dužina povučena iz bilo koje točke jedne baze okomito na ravninu druge baze. Duljina visine prizme u nekim je udžbenicima označena s h, a u nekima s v.

Zamislimo da smo danu prizmu razrezali po nekim bridovima tako da se baze i pobočke mogu položiti u ravninu. Lik koji dobivamo naziva se **mreža** prizme.

Osim uspravnih postoje i kose prizme. Mi ćemo proučavati samo uspravne prizme, pa ćemo nadalje izostavljati riječ "uspravna".

Do formule za obujam prizme dolazi se na način kako je prikazano na slici 2.14.



Slika 2.14: Određivanje volumena prizme

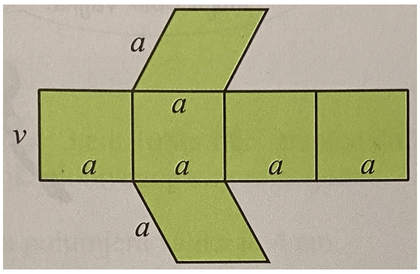
Volumen prizme jednak je umnošku površine baze i duljine visine prizme. $V = B \cdot h$.

Slijedi nekoliko primjera zadataka iz udžbenika.

Zadatak 2.26 *Izračunaj površinu baze prizme kojoj je volumen* $10\ dm^3$*, a visina* $40\ mm$*.*

Zadatak 2.27 *Izračunaj volumen trostrane prizme čija je baza pravokutan trokut s katetama* $a = 6\ cm$*,* $b = 8\ cm$*. Duljina visine prizme je* $v = 6.5\ cm$*.*

Zadatak 2.28 *Nacrtana je mreža četverostrane prizme čija je baza romb. (Slika 2.15) Duljine dijagonala romba su* $40\ cm$ *i* $42\ cm$*. Visina prizme je* $10\ cm$*. Izračunaj volumen prizme.*

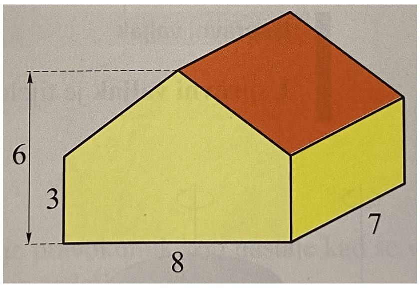


Slika 2.15:

Zadatak 2.29 *Sve su mjere na skici Zlatkove kuće (slika 2.16) u metrima. Prije početka gradnje, Zlatko je platio komunalni doprinos koji se plaća po volumenu koji zauzima kuća. Ako je cijena za* $1\ m^3$ $50\ kn$*, koliki je iznos komunalnog doprinosa platio Zlatko?*

Zadatak 2.30 *Limenka sadržava* $1.5\ L$ *boje. Sva boja iz limenke ravnomjerno je nanesena na zid površine* $120\ m^2$*. Kolika je debljina sloja boje na tome zidu?*

Nakon općenite obrade obujma prizme, slijedi proučavanje pojedinih vrsta prizme (kocka, kvadar, kvadratna prizma) i njihovih obujama. Zadatci



Slika 2.16:

su slični za svaku od navedenih prizmi, a primjeri takvih zadataka nalaze se u nastavku nakon pripadajućeg teorijskog dijela.

Kocka je pravilna četverostrana prizma kojoj su svi bridovi jednake duljine.
Plošna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva nasuprotna vrha koji pripadaju istoj strani.
Prostorna dijagonala kocke je dužina koja spaja dva vrha koja ne pripadaju istoj strani kocke.
Dijagonalni presjek kocke je presjek kocke ravninom koja sadrži dvije paralelne plošne dijagonale.
Kocka duljine brida a ima površinu baze $B = a^2$ i visinu $h = a$. Zato je njezin volumen $V = B \cdot h = a^2 \cdot a = a^3$.
Volumen kocke: $V = a^3$.

Kvadar je uspravna prizma kojoj je baza pravokutnik.
Analogno, kao kod kocke, se definiraju plošna i prostorna dijagonala kvadra, kao i dijagonalni presjek kvadra.
Kvadar s bridovima duljina a, b i c možemo shvatiti kao prizmu s površinom baze $B = a \cdot b$ i visinom $h = c$. Zato je njegov volumen: $V = B \cdot h = a \cdot b \cdot c$.

Volumen kvadra: $V = abc$.

Uspravna prizma kojoj je baza pravilni četverokut naziva se **pravilna četverostrana prizma** ili **kvadratna prizma**.
Volumen kvadratne prizme osnovnog brida a i duljine visine h je $V = B \cdot h = a^2 \cdot h$.
Volumen kvadratne prizme: $V = a^2 h$.

Zadatak 2.31 *Izračunaj volumen jedne kocke za slaganje (slika 2.17) te obujam svih kocaka u slagalici potrebnih da bi se sastavila slika ako je oplošje jedne kocke za slaganje* $73.5\ cm^2$.

Slika 2.17:

Zadatak 2.32 *Gospođa Zlatić ima tri zlatne kockice s bridovima duljina* $5\ cm$, $4\ cm$ *i* $3\ cm$. *Želi ih pretopiti u jednu novu kocku. Koliki je brid novonastale kocke?*

Zadatak 2.33 *Koliko se puta promijeni volumen kocke ako joj se brid:*
a) poveća četiri puta *b) smanji pet puta?*

Zadatak 2.34 *Izračunaj volumen kutije za poklon oblika kocke kojoj su dva najudaljenija vrha spojena dužinom duljine* $24.22\ cm$.

Zadatak 2.35 *Kolika je masa željeznog kvadra s duljinama bridova* 2 *cm*, 4 *cm*, 20 *cm*? *Gustoća željeza je* 7900 kg/m^3.

Zadatak 2.36 *Maja je za rođendan dobila akvarij dimenzija* 140 $cm \times 60$ $cm \times$ 70 *cm*. *Na internetu je saznala da svakoj ribici treba* 50 *L vode. Koliko najviše ribica Maja može nabaviti za svoj akvarij?*

Zadatak 2.37 *Bazen u obliku kvadra dug je* 8 *m*, *širok* 10 *m i dubok* 2.5 *m*. *Koliko je vode u bazenu ako je voda napunjena tako da je njezina razina* 20 *cm ispod gornjeg ruba bazena?*

U udžbenicima se mogu naći zadatci koji mogu biti interesantni i edukativni za učenike, poput sljedećeg 2.38. Kroz primjenu gradiva kojeg uče mogu osvijestiti i naučiti nešto korisno što mogu primijenjivati u svome svakodnevnom životu.

Zadatak 2.38 *Kartonska ambalaža za mlijeko zauzima volumen od oko jedne litre. Kad potroše mlijeko, neki ljudi nepromišljeno bace ambalažu u smeće. Pretpostavimo da imamo vreću volumena* 50 *l i da smo u nju skupljali samo kartonsku ambalažu od mlijeka. Koliko nam kutija stane u takvu vreću? Kako bismo uštedjeli na prostoru pri skupljanju takve ambalaže, potrebno je maknuti čep i spljoštiti volumen. Pretpostavite da ste na taj način uklonili* 80% *zraka iz ambalaže i smanjili njezin volumen na* 20%. *Koliko vam sad takve ambalaže stane u vreću volumena* 50 *l koju ne bacite u smeće nego u za to predviđen kontejner? Opišite kako na taj način pomažete u zaštiti okoliša.*

Zadatak 2.39 *Izračunaj volumen kvadratne prizme kojoj je površina pobočja* 48 cm^2, *a omjer duljina osnovnog brida i visine* $1 : 3$.

Zadatak 2.40 *Izračunaj volumen pravilne četverostrane prizme kojoj je duljina brida baze* 5 *cm*, *a površina dijagonalnog presjeka* $40\sqrt{2}$ cm^2.

Zadatak 2.41 *Antikna drvena kutija za nakit bez poklopca ima oblik kvadratne prizme. Koliki je volumen unutrašnjosti te kutije ako joj je vanjski brid dug* 20 *cm, visina* 15 *cm, a debljina drvenih stijenki* 1 *cm?*

Piramida

Nakon obrađivanja prizmi prelazi se na piramide, pri čemu se detaljnije obrađuje kvadratna piramida, i određivanje njezina obujma.

Neka je $A_1A_2...A_n$ mnogokut, a V točka koja ne leži u ravnini tog mnogokuta. Tijelo omeđeno mnogokutom $A_1A_2...A_n$ i s n trokuta VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_nA_1 zovemo **n-terostrana piramida**.
Mnogokut $A_1A_2...A_n$ nazivamo **baza** ili **osnovka piramide**, a trokute VA_1A_2, VA_2A_3, ..., VA_nA_1 **pobočke** ili **bočne strane** piramide. Sve trokute zajedno zovemo **pobočje** piramide.
Bridove baze nazivamo **osnovnim bridovima**, a dužine $\overline{VA_1}$, ..., $\overline{VA_n}$ **pobočnim bridovima.**. Točka V je **vrh** piramide.
Pravac, okomit na bazu, koji sadržava vrh piramide V probada ravninu baze u točki V'. Dužinu $\overline{VV'}$ nazivamo **visina** piramide. Točka V' naziva se **nožište visine**.
Piramida je **uspravna** ako joj je nožište visine u središtu bazi opisanoj kružnici. Ako je baza piramide pravilni mnogokut, a nožište visine upravo u središtu tome mnogokutu opisane kružnice, tada piramidu nazivamo **pravilna piramida**.
Uspravna piramida kojoj je baza pravilni četverokut naziva se **pravilna četverostrana piramida** ili **kvadratna piramida**.
Presjek kvadratne piramide ravninom kroz vrh i dijagonalu baze naziva se **dijagonalni presjek** te piramide.

Kod podučavanja obujma piramide može se izvesti sljedeći pokus:
Napravi se od tvrđeg papira model prizme i piramide jednakih baza i visina, ali bez jedne baze. Piramida se napuni rižom (ili šećerom, pijeskom i sl.) te se ta riža presipa u model prizme. Postupak se ponovi onoliko puta koliko je potrebno da se model prizme napuni.
Na temelju pokusa zaključuje se da je obujam piramide trostruko manji od volumena prizme jednake baze i jednake visine.

Volumen piramide jednak je trećini umnoška površine baze i duljine visine piramide. $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot h$.

Slijede primjeri zadataka iz udžbenika u kojima se izračunava i primjenjuje obujam piramide.

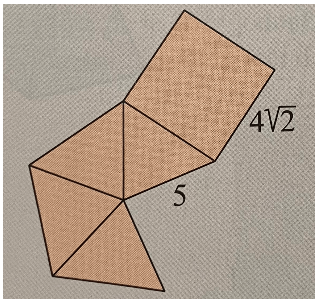
Zadatak 2.42 *Duljina stranice baze pravilne trostrane piramide je* 6 *cm, a duljina visine piramide* $2\sqrt{3}$ *cm. Izračunaj volumen piramide.*

Zadatak 2.43 *Volumen je piramide* 18 cm^3*. Izračunaj volumen prizme koja ima istu bazu i jednaku visinu kao i piramida.*

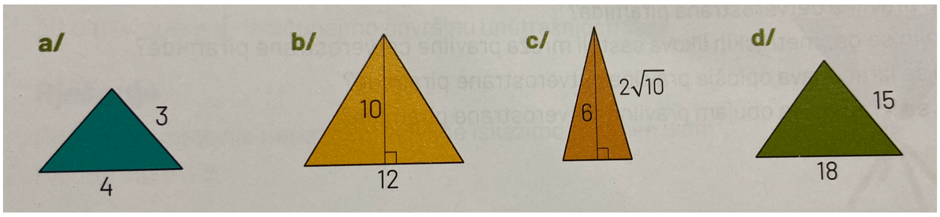
Zadatak 2.44 *Mreža pravilne četverostrane piramide prikazana je na slici 2.18. Izračunaj njezin volumen.*

Zadatak 2.45 *Izračunaj volumen pravilne četverostrane piramide (slika 2.19) kojoj je nacrtana jedna pobočka (mjere su u cm).*

Zadatak 2.46 *Oplošje pravilne četverostrane piramide iznosi* 4800 cm^2*. Izračunaj volumen te piramide ako joj je duljina stranice baze* 48 *cm.*



Slika 2.18:



Slika 2.19:

Zadatak 2.47 *Opseg dijagonalnog presjeka kvadratne piramide iznosi* 36 *cm, a duljina pobočnog brida* 13 *cm. Izračunaj obujam te piramide.*

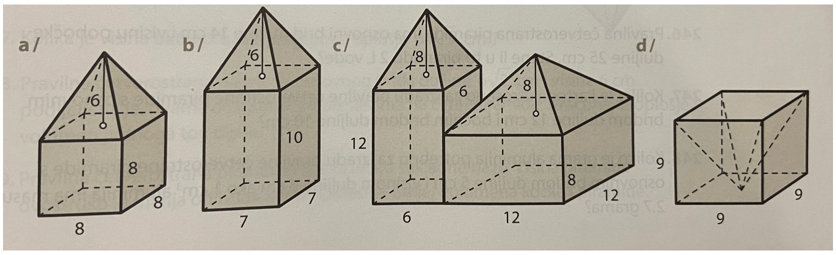
Zadatak 2.48 *Može li se iz plastelina oblika kvadra dimenzija* 20 *cm* $\times$ 5 *cm* $\times$ 5 *cm oblikovati pravilna četverostrana piramida s bridom baze* 10 *cm i visinom* 20 *cm?*

Zadatak 2.49 *Koliko je grama aluminija potrebno za izradu pravilne četverostrane piramide s osnovnim bridom duljine* 5 *cm i visinom duljine* 6 *cm ako* 1 cm^3 *aluminija ima masu* 2.7 *grama?*

Zadatak 2.50 *Visina i pobočni brid pravilne četverostrane piramide odnose se kao* 4 : 5. *Duljina osnovnog brida je* $6\sqrt{2}$ *dm. Izračunaj volumen te piramide.*

Zadatak 2.51 *Izračunaj volumen složenih tijela sa slike 2.20.*

Iduće geometrijsko tijelo koje se proučava nakon piramide je valjak.



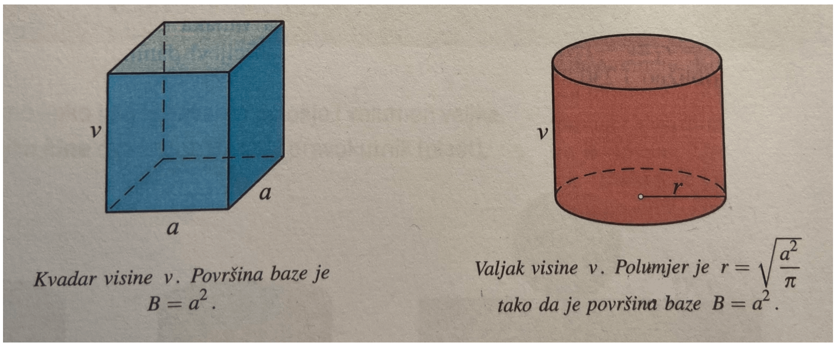
Slika 2.20:

Valjak

Valjak je geometrijsko tijelo omeđeno dvama sukladnim krugovima, koji leže u usporednim ravninama, i dijelom zakrivljene plohe.
Krugove nazivamo **baze** ili **osnovke valjka**, a zakrivljenu plohu nazivamo **plašt valjka**.
Pravac koji prolazi središtima gornje i donje baze nazivamo **os valjka**.
Dužina okomita na baze kojoj su krajnje točke u bazama naziva se **visina** valjka.
Izvodnica valjka je dužina koja pripada plaštu valjka, usporedna je s njegovom osi, a krajnje točke pripadaju kružnicama koje omeđuju baze valjka.
Ako je os valjka okomita na baze, valjak nazivamo **uspravni valjak**.
Uspravni valjci bit će predmet našega proučavanja i u daljnjem tekstu uspravni ćemo valjak jednostavno zvati valjak.
Osni presjek valjka jest presjek valjka ravninom koja sadržava os valjka.

Pri obradi volumena valjka može se izvesti sljedeći pokus:
Napravi modele kvadra i valjka bez gornje plohe. Duljine a i h odaberi po svojoj volji. Kad izabereš a, tada za r uzmi vrijednost broja $\sqrt{\frac{a^2}{\pi}}$ zaokruženu na jednu decimalu. Napuni rižom (ili solju ili pijeskom) kvadar do vrha i presipaj rižu u valjak.

Riža će napuniti valjak do vrha. To znači da su volumeni kvadra i valjka



Slika 2.21: Usporedba obujma valjka i prizme

jednaki (vidi sliku 2.21). Oba tijela imaju baze jednakih površina i visine jednakih duljina pa je: $V_{\text{valjka}} = V_{\text{kvadra}} = B \cdot h$.

Volumen valjka jednak je umnošku površine njegove baze i duljine visine: $V = B \cdot h$, tj. $V = r^2\pi h$.

U nastavku su zadatci koji se nalaze u udžbenicima kod obrade obujma valjka.

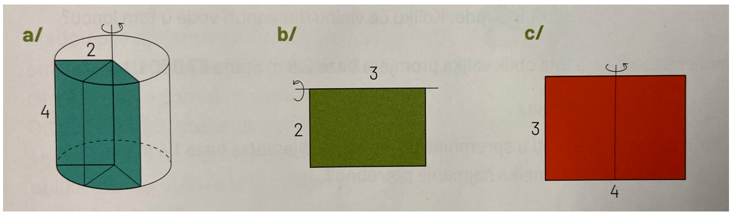
Zadatak 2.52 *Oplošje valjka iznosi* $360\pi\ m^2$*, a plašt je* $72\pi\ m^2$*. Koliki je volumen valjka?*

Zadatak 2.53 *Koliko zemlje treba iskopati da se dobije bunar u obliku valjka promjera* $1.2\ m$ *i dubine* $13\ m$*?*

Zadatak 2.54 *Izračunaj volumen valjka kojemu je površina osnoga presjeka* $36.04\ cm^2$*, a radijus baze* $3.4\ cm$*.*

Zadatak 2.55 *Valjak možemo zamisliti kao dio prostora koji „prebriše" pravokutnik pri rotaciji oko jedne svoje stranice (vidi sliku 2.22 podzadatak* ***a/****).*

Izračunaj volumen valjka nastaloga rotacijom pravokutnika na slici 2.22 (sve su mjere u cm).



Slika 2.22:

Zadatak 2.56 *Valjak ima polumjer baze* 5 *cm i visok je* 8 *cm. Izračunaj za koliko se promijeni volumen valjka ako se radijus baze poveća za* 20%*, a duljina visine smanji za* 10%*.*

Zadatak 2.57 *Izračunaj masu bakrene žice promjera* 2 *mm, duljine* 42 *m. Gustoća bakra je* 8900 kg/m^3*.*

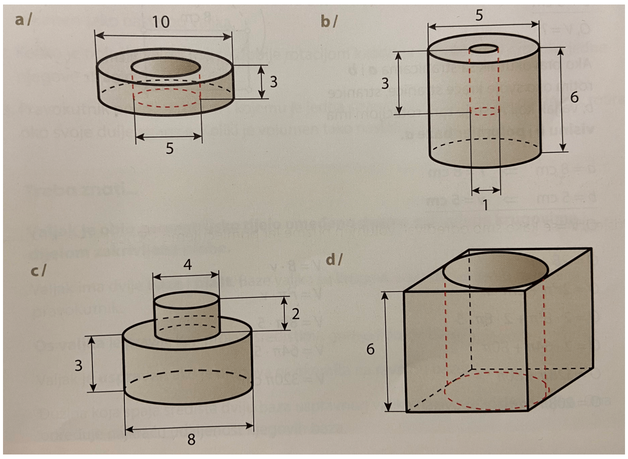
Zadatak 2.58 *Bunar ima oblik valjka promjera* 2 *m i dubine je* 14 *m. Petina bunara ispunjena je vodom. Koliko litara vode ima u bunaru?*

Zadatak 2.59 *U kutiju u obliku kvadra smješteno je* 12 *limenki u obliku valjka, svaka promjera* 9 *cm i visine* 16 *cm, u četiri reda po tri limenke. Koliki dio volumena kutije nije iskorišten?*

Zadatak 2.60 *Plastična cijev duljine je* 4 *m, vanjskog promjera* 20 *cm i debljine stijenke* 1 *cm. Koliko je plastike potrebno za izradu takve cijevi? Koliko vode stane u tu cijev?*

Zadatak 2.61 *Izračunajte volumen tijela sa slike 2.23. Mjere su u centimetrima.*

Nakon obrade valjka prelazi se na stožac i određivanje njegova obujma.



Slika 2.23:

Stožac

Geometrijsko tijelo koje nastaje tako da se sve točke kruga spoje s točkom koja je izvan ravnine kruga naziva se **stožac**.
Ta točka naziva se **vrh** stošca, a taj krug **baza** ili **osnovka** stošca.
Stožac je omeđen krugom i zakrivljenom plohom. Zakrivljena ploha naziva se **plašt stošca**.
Pravac koji sadržava vrh stošca V i središte baze S naziva se **os** stošca. Spojnice vrha stošca V s točkama na kružnici baze nazivaju se **izvodnice** stošca.
Dužina $\overline{SV}$ naziva se **visina** stošca.
Stožac je **uspravan** ako je os stošca okomita na ravninu baze. Predmet našega proučavanja bit će uspravni stošci i u daljnjem tekstu ćemo uspravni stožac jednostavno zvati stožac.
Osni presjek stošca jest presjek stošca ravninom koja sadržava os stošca.

Sličnim pokusom, kao što se izvodi s piramidom i prizmom, uzme li se stožac i valjak kojima su baze sukladni krugovi i visine jednake, pokaže se da je volumen stošca tri puta manji od volumena valjka.

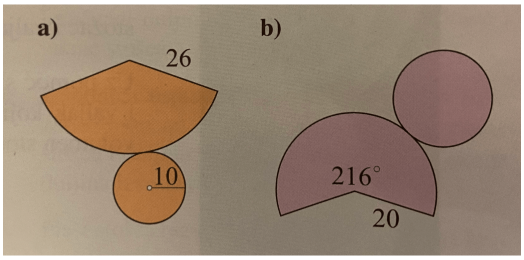
Volumen stošca jednak je trećini umnoška površine baze i duljine visine, tj. $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$.

U nastavku su zadatci izračunavanja i primjene obujma stošca koji se mogu naći u udžbenicima.

Zadatak 2.62 *Plašt stošca površine je* $369\pi\ cm^2$*, a izvodnica stošca duga je* $41\ cm$*. Izračunajte volumen stošca.*

Zadatak 2.63 *Izračunaj volumen stošca kojemu je oplošje* $27\pi\ cm^2$*, a osni presjek je jednakostraničan trokut.*

Zadatak 2.64 *Izračunaj volumen stošca sa slike 2.24 ako mu je zadana mreža.*



Slika 2.24:

Zadatak 2.65 *Koliko se čaša može napuniti sokom iz boce* $1.5\ L$ *ako je čaša u obliku stošca kojemu je promjer* $6\ cm$*, a izvodnica duljine* $5\ cm$*?*

Zadatak 2.66 *Metalni valjak polumjera baze* $8\ cm$ *i visine* $10\ cm$ *treba pretopiti u stožac kojemu je površina baze četiri puta veća od površine baze valjka. Kolika će biti visina stošca?*

Zadatak 2.67 *Vrtnjom pravokutnog trokuta s katetama* 15 *cm i* 20 *cm oko jedne ili druge katete nastaju dva različita stošca. Koji stožac ima veći volumen i za koliko?*

Zadatak 2.68 *Od vrha do kraja olovke ima* 18 *cm, a duljina nenašiljenog dijela olovke je* 16.2 *cm. Ako je promjer olovke* 16 *mm, koliki joj je volumen?*

Zadatak 2.69 *U kinu prodaju kokice u manjem i većem pakiranju. Manje pakiranje je u kutiji oblika stošca, a veće u kutiji oblika valjka. Kutije imaju jednake dijametre baza i jednake visine i napunjene su ravno do vrha. U kakvom su omjeru volumeni tih dviju kutija? Manje pakiranje kokica stoji 11.50 kn, a veće pakiranje je 28 kn. Koje pakiranje je isplativije?*

Nakon što se obrade prizme, piramide, valjak i stožac, kao prošireni sadržaj u udžbenicima se nalazi kugla i njezin obujam.

Prošireni sadržaj: Kugla

Kugla je skup svih točaka prostora čija je udaljenost od čvrste točke S tog prostora manja ili jednaka r, $r > 0$.
Sfera je skup svih točaka prostora koje su udaljene od jedne čvrste točke S tog prostora za isti iznos r. Kugla je omeđena sferom.
Točka S naziva se **središte** kugle ili **središte** sfere.
Svaka dužina koja spaja središte S i neku točku sfere jest **polumjer** sfere. Ona je ujedno i **polumjer** kugle.
Kada kuglu presiječemo ravninom, bez obzira na kojem mjestu, dobivamo krug. Presjek koji sadržava središte kugle je **osni presjek**. To je krug najveće površine. Nazivamo ga **glavni krug**.
Kružnica koja omeđuje taj krug, odnosno kružnica u kojoj ravnina tada siječe

sferu, naziva se **glavna kružnica** sfere.

Formula za obujam kugle u osmom razredu se ne izvodi, već je samo navedena.

Volumen kugle polumjera r je $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

U nastavku se nalaze zadatci s određivanjem i primjenom obujma kugle.

Zadatak 2.70 *Dopuni tablicu (slika 2.25).*

r			
O	324π		200.96
V		288π	

Slika 2.25:

Zadatak 2.71 *Reklamni stup pokriven je polukuglastom kupolom promjera* 120 cm. *Koliki je volumen te kupole?*

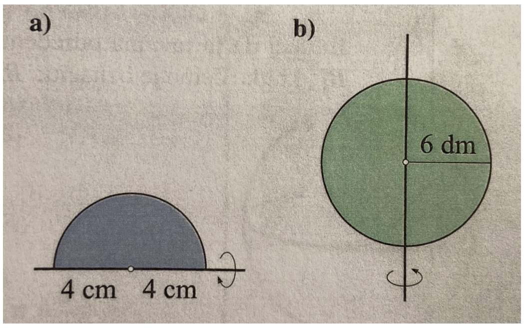
Zadatak 2.72 *Muška i ženska rukometna lopta razlikuju se i veličinom i težinom. Veličina lopte određuje se opsegom glavnoga kruga. Opseg muške rukometne lopte po pravilu mora biti između* 58 *i* 60 cm, *dok opseg ženske lopte ne smije biti manji od* 54 cm *ni veći od* 56 cm. *Izračunaj razliku obujma najveće i najmanje muške rukometne lopte tako da radijus zaokružiš na dvije decimale.*

Zadatak 2.73 *Izračunaj masu kugle polumjera* 5 cm *ako je kugla od zlata* ($\rho = 19320\ kg/m^3$).

Zadatak 2.74 *Dinja je voće približno kuglastog oblika. U njezinu središtu je dio sa sjemenkama koji se ne jede. Oko tog dijela je jestivo meso voća okruženo korom izvana. Unutrašnjost sa sjemenkama je promjera duljine dvostruko manjeg od dijametra cijele dinje. Ako zanemarimo debljinu kore, koliki je postotak dinje jestiv?*

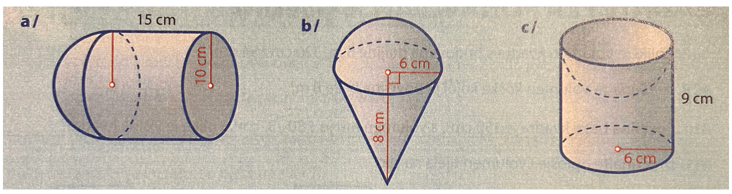
Zadatak 2.75 *Kugla je presječena ravninom koja se nalazi na udaljenosti* 6 *cm od središta. Opseg dobivenog kruga je* 16π *cm. Izračunaj volumen kugle.*

Zadatak 2.76 *Izračunaj volumen tijela nastalih rotacijom likova sa slike 2.26.*



Slika 2.26:

Zadatak 2.77 *Odredite volumen tijela na slici 2.27.*



Slika 2.27:

2.2 Srednja škola

U srednjoj školi po gimnazijskom programu obujam se podučava u drugom razredu u cjelini Poliedri i rotacijska tijela.
U programima s 160 i više sati matematike godišnje radi se i u četvrtom razredu gdje se određuje obujam rotacijskih tijela. No, kako je taj pristup integralni, odnosno analitički, nećemo u to ulaziti u ovom radu.

2.2.1 Drugi razred srednje škole

U drugom razredu srednje škole obujmu i geometrijskim tijelima se pristupa na nešto drugačiji način negoli u osnovnoj školi. Prvo se obrađuje obujam, učenici se prisjećaju definicije i prvi puta susreću i obrađuju načelo vezano uz obujam, Cavalierijev princip [1]. Potom se obrađuju geometrijska tijela: prizma, piramida, valjak, stožac i kugla i njihov obujam, u detaljnijem obliku u odnosu na osnovnu školu, primjenjujući pritom Cavalierijev princip.
Ovisno o godišnjem broju sati matematike, postoje razlike u obujmu gradiva koje se uči. U programima s 105 i 140 sati rade se uspravna geometrijska tijela i rotacijska tijela [2]. S 175 sati rade se uspravna i krnja geometrijska tijela i rotacijska tijela [3]. A s 210 sati uče se uspravna, kosa i krnja geometrijska tijela i rotacijska tijela.
U nastavku će biti predstavljeno cijelo gradivo iz udžbenika.

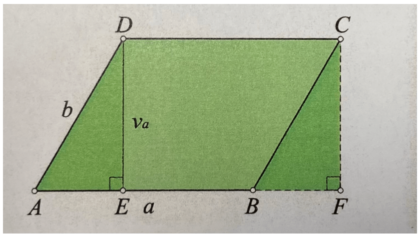
Obujam tijela. Cavalierijev princip.

Učeći geometriju, između ostalog smo naučili kako izmjeriti površinu nekih likova u ravnini. Krenuli smo od površine pravokutnika jer je njegovu površinu

[1] U udžbeniku izdavača Profil Klett nema sadržaja Cavalierijev princip
[2] Prošireni sadržaj za programe s 140 sati godišnje su krnja tijela
[3] Prošireni sadržaj su kosa tijela

najjednostavnije izračunati. Ako su a i b duljine stranica pravokutnika, onda je njegova površina jednaka $P = a \cdot b$.

Površina paralelograma jednaka je umnošku duljina njegove stranice i visine na tu stranicu, $P = a \cdot v_a = b \cdot v_b$, a do ove formule došli smo na sljedeći način:
Iz vrha D paralelograma $ABCD$ položimo visinu v_a na njegovu stranicu $\overline{AB}$. Od paralelograma je time odsječen pravokutni trokut AED. Nadomjestimo taj trokut sukladnim trokutom BFC onako kako je to prikazano na slici 2.28. Površina paralelograma $ABCD$ jednaka je površini pravokutnika $EFCD$,

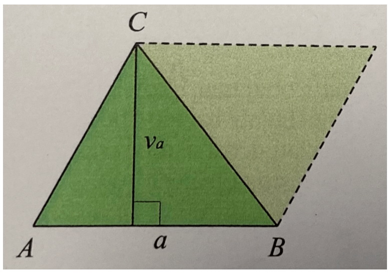


Slika 2.28:

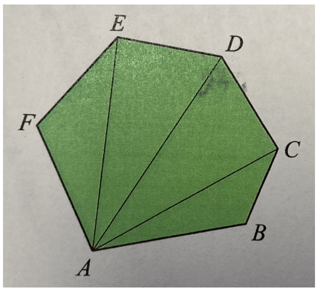
čija je stranica $\overline{EF}$ sukladna stranici $\overline{AB}$ paralelograma, a druga je jednaka visini v_a. Analogno se pokaže da je $P = b \cdot v_b$.

Svaki se trokut može nadopuniti do paralelograma. To je moguće učiniti na tri načina, a jedan je prikazan na slici 2.29. U svakom je slučaju povšina trokuta jednaka polovini povšine paralelograma. Tako dolazimo do poznatih formula za površinu trokuta: $P = \frac{1}{2}av_a = \frac{1}{2}bv_b = \frac{1}{2}cv_c$.

Bilo koji mnogokut možemo podijeliti na trokute pa je njegova površina zbroj površina tih trokuta. Ta podjela može se provesti na razne načine, na slici 2.30 je jedan od njih.



Slika 2.29:



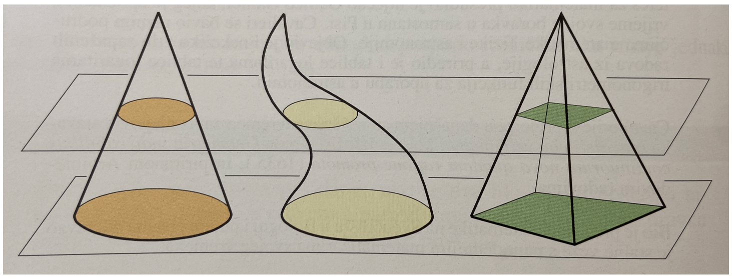
Slika 2.30:

Računajući površinu kruga, koristili smo se površinama krugu opisanih i upisanih mnogokuta s dovoljno velikim brojem stranica.

Ova priča o računanju površine nekih likova u ravnini trebala bi vas potaknuti na analogiju kad je riječ o računanju obujma geomerijskih tijela.
Krenut ćemo od obujma kvadra, prostornog lika koji je analogan pravokutniku. Obujam kvadra jednak je umnošku duljina triju njegovih bridova: $V = a \cdot b \cdot c$.
Računanje obujma nekih složenijih tijela oslanjat će se na računanje obujma kvadra, slično kao što je to bio slučaj s računanjem površina koje je započeto s površinom pavokutnika.
Pri računanju obujama tijela često se primjenjuje jedno jednostavno načelo, poznato kao Cavalierijev princip. Riječ je o uvjetima uz koje dva naizgled

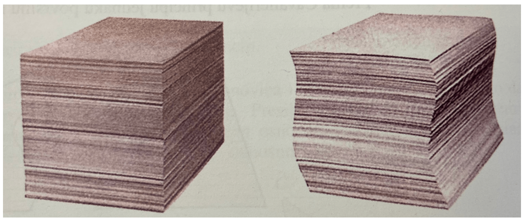
potpuno različita tijela imaju jednak obujam.

Cavalierijev princip za obujme: ako presjeci tijela istih visina sa svakom ravninom paralelnom ravnini baze imaju iste površine, onda ta tijela imaju jednak obujam.



Slika 2.31: Cavalierijev princip za obujme

Cavalierijev princip može se i zorno predočiti. Pogledaj sliku 2.32. Ako snopu papira u obliku prizme malo iskrenemo papire, početno tijelo će promijeniti oblik, ali ne i obujam.



Slika 2.32: Zorni prikaz Cavalierijeva principa

Prizme

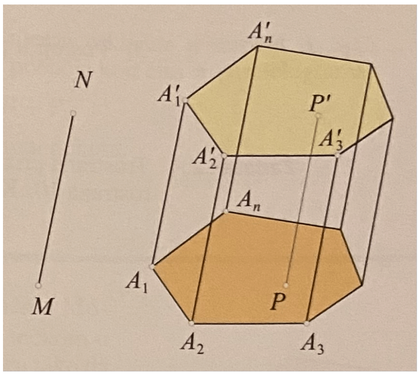
U udžbenicima koje sam proučavala nalaze se dvije različite definicije prizme. U [21] i [16] prizma je definirana na sljedeći način:

Prije definicije prizme potrebna je sljedeća definicija:
Poliedar je geometrijsko tijelo omeđeno poligonima, tj. mnogokutima. Ti su poligoni **strane** toga poliedra. Stranice tih poligona **bridovi** su poliedra, a vrhovi su **vrhovi** poliedra.

Poliedar kojemu su dvije strane paralelni i sukladni mnogokuti, a ostale su mu strane paralelogrami nazivamo **prizma**.
Paralelne i sukladne strane prizme nazivamo **bazama** ili **osnovkama** prizme (gornja i donja), dok sve ostale strane zajedno čine **pobočje** prizme. Pobočje se sastoji od paralelograma koje nazivamo **pobočkama** prizme.
Bridove uz bazu nazivamo **osnovnim bridovima**, a one između pobočki **bočni bridovi**.
Visina prizme jednaka je udaljenosti gornje i donje baze.
Prizma može biti **uspravna** i **kosa**. Prizma je uspravna ako su joj bočni bridovi okomiti na ravninu baze. Njezine pobočke su pravokutnici i visina je tada jednaka duljini bočnog brida. Prizma je kosa ako joj bočni bridovi nisu okomiti na ravninu baze.
Prizma je **pravilna** ako je uspravna i ako joj je baza pravilan mnogokut.
Za prizmu čija je osnovka n-terokut kažemo da je **n-terostrana** prizma.
Plošna dijagonala je dužina koja spaja dva nesusjedna vrha iste strane, dok je **prostorna dijagonala** dužina koja spaja dva vrha koja ne pripadaju istoj strani poliedra.
Dijagonalni presjek onaj je presjek poliedra koji prolazi bridom jedne strane i sadržava prostornu dijagonalu.

U [7] navedena je sljedeća definicija:
Neka je B zadani konveksan mnogokut $A_1A_2...A_n$ u ravnini π. Nacrtajmo i

dužinu $\overline{MN}$ koja ne leži u toj ravnini. Nazivamo je **izvodnica**. Promotrimo skup svih točaka dobivenih na sljedeći način: one leže na dužinama $\overline{PP'}$ koje su paralelne i sukladne dužini $\overline{MN}$, a početna im točka leži u bilo kojoj točki P lika B. Dobiveni skup točaka u prostoru nazivamo **prizmom**. Pogledaj sliku 2.33.



Slika 2.33: Prizma

Mnogokut B je **osnovka** ili **baza** prizme. Prizma ima dvije baze, donju i gornju.

Stranice na osnovkama prizme zovu se **osnovni bridovi**.

Spojnice odgovarajućih vrhova donje i gornje osnovke su **bočni bridovi** prizme.

Paralelogrami $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, ... su **bočne strane** ili **pobočke** prizme. Skup svih pobočki prizme čini njezino **pobočje**.

Visina prizme je međusobna udaljenost ravnina u kojima leže osnovke prizme.

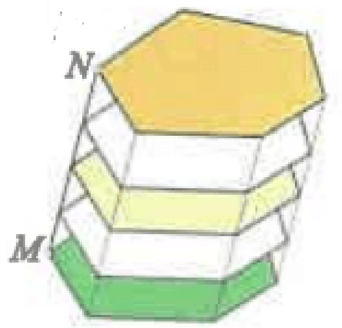
Za prizmu kažemo da je **n-terostrana** ako je njezina osnovka n-terokut.

Prizma je **uspravna** ako je izvodnica okomita na ravninu osnovke.

Prizma je **pravilna** ako je uspravna i ako je njezina osnovka pravilan mnogokut.

Obujam prizme

U [21] i [16] odmah su zadane formule za obujam prizme, kocke i kvadra, dok je u [7] objašnjeno sljedeće: Prizmu možemo opisati na još jedan način. Možemo zamisliti dužinu $\overline{MN}$ s početnom točkom u jednom vrhu baze i zatim translatirati bazu tako da taj vrh putuje dužinom (pogledati sliku 2.34). Skup svih tako dobivenih točaka ponovno je ta prizma. Zato je presjek prizme ravninom paralelnom s njegovom bazom mnogokut sukladan bazi.



Slika 2.34: Prizma

Po Cavalierijevu principu sve prizme koje imaju jednake površine osnovki i jednake visine imaju jednak obujam.

Kvadar je uspravna četverostrana prizma kojoj je baza pravoutnik. Obujam kvadra je $V = B \cdot v$, gdje je B površina baze, a v visina. Ova formula vrijedi za svaku prizmu, bilo koje baze i bez obzira na to je li uspravna ili ne. Ako su a, b i c duljine bridova kvadra, tada je **obujam kvadra** $V = abc$.

Kocka je uspravna četverostrana prizma kojoj su svi bridovi iste duljine. **Obujam kocke** je $V = Bh = a^2 \cdot a = a^3$.

Osim kocke i kvadra, kojima je baza kvadrat, odnosno pravokutnik, baza uspravne četverostrane prizme može biti i neki drugi četverokut kao romb, paralelogram ili trapez. Ako je baza paralelogram, prizmu nazivamo **paralelepiped** (ne mora biti uspravna).

Slijede zadatci sa izračunavanjem i primjenom obujma prizme koji se mogu naći u udžbenicima.

Zadatak 2.78 *Za koliko se posto poveća obujam kocke brida* 4 *cm ako joj se bridovi produlje za* 3 *cm?*

Zadatak 2.79 *Akvarij ima oblik kvadra s bridovima duljina* 60 *cm,* 45 *cm,* 40 *cm. Osnovka akvarija je najveća njegova strana i on leži na horizontalnoj ravnini. Ako je u akvariju voda do* 3/4 *visine, koliko je u njemu litara vode?*

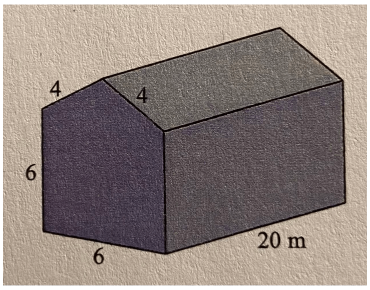
Zadatak 2.80 *Bridovi baze uspravne trostrane prizme imaju duljine* $a = 13$ *cm,* $b = 4$ *cm i* $c = 15$ *cm, a njezina visina je* $v = 8$ *cm. Koliki je obujam prizme?*

Zadatak 2.81 *Koliki je obujam kućice za ptice sa slike 2.35 ako je pročelje u obliku pravilnog peterokuta duljine stranice* 15 *cm, a duljina kućice* 20 *cm?*

Zadatak 2.82 *Kolika je masa zraka u plasteniku u obliku šatora (vidi sliku 2.36) ako je gustoća zraka jednaka* $1.29\ kg/m^3$*?*

Zadatak 2.83 *Izračunaj volumen uspravnog paralelepipeda visine* 8 *cm, kojemu je baza paralelogram sa stranicama duljine* 5 *cm i* 6 *cm i kutom od* $30°$.

Slika 2.35:



Slika 2.36:

Zadatak 2.84 *Duljine bridova kvadra su uzastopni prirodni brojevi. Koliki mu je obujam ako mu je oplošje* 148 cm^2*?*

Zadatak 2.85 *Koliki je volumen pravilne šesterostrane prizme kojoj je veći dijagonalni presjek kvadrat površine* 64 cm^2*?*

Zadatak 2.86 *Na slici 2.37 je modilica za kekse. Keksi se rade tako da se tijesto razvalja na debljinu* 5 *mm i modilicom izreže u obliku zvjezdice. Modilica ima oblik šesterostrane zvijezde kojoj su svi krakovi jednakostranični trokuti stranice* 1 *cm. Ako je volumen tijesta* 1.5 dm^3*, koliko keksa možemo napraviti?*

Zadatak 2.87 *Osnovka uspravne trostrane prizme pravokutni je trokut s katetama duljina* 9 *cm i* 12 *cm. Hipotenuzom jedne osnovke i vrhom pravog*

Slika 2.37:

kuta druge položena je ravnina koja prizmu siječe u liku površine $90\ cm^2$. *Koliki je obujam te prizme?*

Zadatak 2.88 *Površine strana kvadra su u omjeru* $2 : 3 : 5$. *Njegovo je oplošje jednako* $300\ cm^2$. *Koliki je obujam ovog kvadra?*

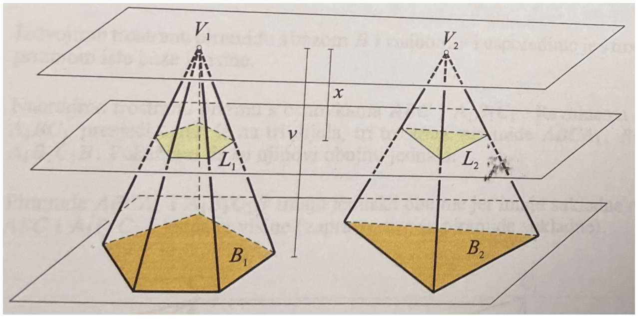
Zadatak 2.89 *Izračunaj obujam četverostrane prizme kojoj su bočni bridovi duljine* $10\ cm$, *prema osnovici nagnuti pod kutom* $56°6'$. *Baza prizme jest kvadrat stranice* $8\ cm$.

Piramida

Poliedar kojemu je jedna strana mnogokut, a ostale strane su trokuti sa zajedničkim vrhom, nazivamo **piramida**.
Mnogokut nazivamo **bazom** ili **osnovkom** piramide, dok sve ostale strane zajedno čine **pobočje** piramide. Pobočje se sastoji od trokuta koje nazivamo **pobočkama** piramide.
Bridove baze nazivamo **osnovnim bridovima**, a ostale bridove **bočnim bridovima**.
Visina piramide je udaljenost od vrha do ravnine baze piramide.
Piramida je **uspravna** ako su joj bočni bridovi jednakih duljina. Ako je baza uspravne piramide pravilan mnogokut, ona se naziva **pravilna** piramida.

Obujam piramide

U [7] je pokazano da obujam piramide ovisi samo o njezinoj visini i površini osnovke.
Neka su zadane dvije piramide istih visina s bazama B_1 i B_2 koje imaju jednaku površinu. Postavimo ih tako da im baze leže u istoj ravnini π (pogledaj sliku 2.38).

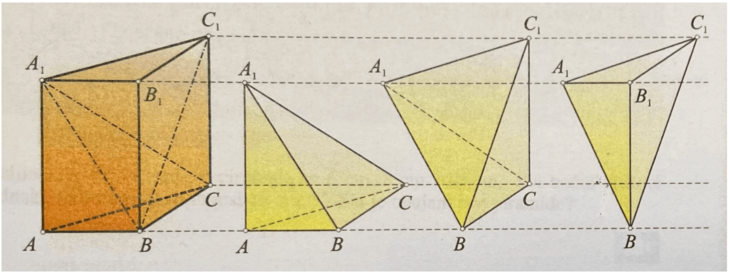


Slika 2.38:

Povucimo ravninu paralelnu s bazom na udaljenosti x od vrha prizme (odnosno $v - x$ od ravnine π).
Označimo s L_1 i L_2 presjeke ravnine s prizmama kao i površine tih presjeka.
Tvrdimo da je $L_1 = L_2$.
Likovi L_1 i B_1 su homotetični, sa središtem homotetije V_1. Koeficijent je homotetije $\frac{x}{v}$. Isto vrijedi i za likove L_2 i B_2. Zato vrijedi: $\frac{L_1}{B_1} = (\frac{x}{v})^2 = \frac{L_2}{B_2}$.
Kako je $B_1 = B_2$, mora biti i $L_1 = L_2$.
Dakle, pokazali smo da presjeci ovih dviju piramida s ravninama paralelnim zadanoj ravnini imaju jednake površine.
Po Cavalierijevu principu takve piramide imaju jednake obujme.

Jednakost obujama piramida: Dvije piramide koje imaju baze jednakih površina i jednake visine imaju jednak obujam.

U [16] i [7] se do formule za obujam piramide dolazi na sljedeći način: Izdvojimo trostranu prizmu $ABCA_1B_1C_1$ s bazom B i visinom h i usporedimo je s trostranom piramidom iste baze i visine.



Slika 2.39:

Promotrimo trostranu prizmu s osnovkama ABC i $A_1B_1C_1$. Ravninama A_1BC i A_1BC_1 presjeći ćemo je na tri dijela, tri trostrane piramide $ABCA_1$, BCC_1A_1, $A_1B_1C_1B$. Pokažimo da su njihovi obujmi jednaki.
Piramide $ABCA_1$ i $A_1B_1C_1B$ imaju jednake obujme jer imaju sukladne osnovke ABC i $A_1B_1C_1$ i jednake visine (zapravo ove su piramide sukladne).
Usporedimo sad piramide BCC_1A_1 i $A_1B_1C_1B$. Zamislimo da je točka A_1 vrh obiju piramida. Njihove su baze BCC_1 i BB_1C_1 jednakih površina (jer su obje polovica paralelograma BCC_1B_1), a njihove se visine podudaraju. Zato i te dvije piramide imaju jednake obujme.
Ovime smo pokazali da je obujam svih triju piramida jednak i iznosi trećinu obujma prizme.

Piramida s bazom B i visinom v ima obujam $V = \frac{B \cdot v}{3}$.

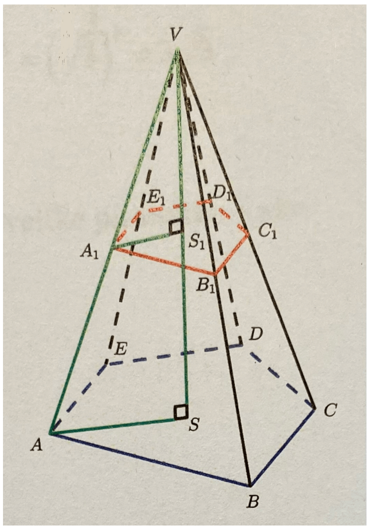
Krnja piramida

Kada piramidu presiječemo ravninom koja je paralelna s njezinom osnovkom, podijelili smo je na dva dijela: manju piramidu koju zovemo **dopunjak** i ostatak tijela kojeg zovemo **krnja piramida**.

Zanimljivo je da u svakom udžbeniku imamo različit pristup obrade obujma krnje piramide.

U [16] pokazuje se sljedeće:

Osnovke krnje piramide su slični mnogokuti, dok su pobočke trapezi. Uvedimo oznake kao na slici 2.40.



Slika 2.40: Krnja piramida i dopunjak

Tada je visina velike piramide $h = |SV|$, visina dopunjka $h_1 = |S_1V|$, a visina krnje piramide $v = h - h_1 = |SS_1|$.

Promotrimo trokute $\triangle ASV$ i $\triangle A_1S_1V$. Oni imaju sukladne kutove (jer je $AS \parallel A_1S_1$) pa su po poučku K-K slični.

Vrijedi proporcionalnost: $\frac{|AS|}{|A_1S_1|} = \frac{|AV|}{|A_1V|} = \frac{h}{h_1}$.
Analogno promotrimo trokute $\triangle ABV$ i $\triangle A_1B_1V$. Oni imaju sukladne kutove (jer je $AB \parallel A_1B_1$) pa su po poučku K-K slični.
Vrijedi proporcionalnost: $\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|BV|}{|B_1V|} = \frac{|AV|}{|A_1V|}$.
Zaključujemo: $\frac{|AB|}{|A_1B_1|} = \frac{|AV|}{|A_1V|} = \frac{h}{h_1}$, tj. odgovarajući osnovni bridovi te odgovarajući bočni bridovi velike piramide i dopunjka odnose se s istim koeficijentom sličnosti.
Kako se površine odnose s kvadratom koeficijenta sličnosti, zaključujemo da se površine odgovarajućih pobočki, pa onda i baza velike piramide i dopunjka odnose kao $\frac{B}{B_1} = \frac{P_{\triangle}ABV}{P_{\triangle}A_1B_1V} = (\frac{h}{h_1})^2$.
Promotrimo omjer obujmova velike piramide i dopunjka:
$\frac{V}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}Bh}{\frac{1}{3}B_1h_1} = (\frac{h}{h_1})^2 \cdot \frac{h}{h_1} = (\frac{h}{h_1})^3$.

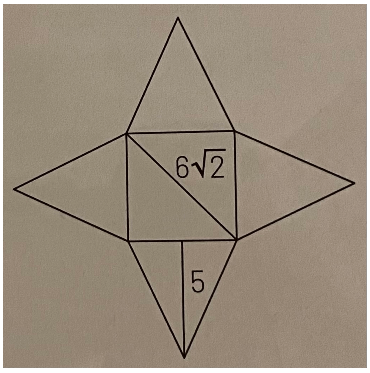
U [7] se pokazuje sljedeće:
Baze B i B_1 slični su likovi, s koeficijentom sličnosti $\frac{h}{h_1}$.
Zato vrijedi: $B : B_1 = h^2 : (h_1)^2$, odnosno $\sqrt{B} : \sqrt{B_1} = h : h_1$.
Odavde slijedi:
$h_1\sqrt{B} = h\sqrt{B_1}$,
$h_1 = \frac{v\sqrt{B_1}}{\sqrt{B}-\sqrt{B_1}} = \frac{v\sqrt{B_1}(\sqrt{B}+\sqrt{B_1})}{B-B_1}$.
Obujam krnje piramide V razlika je obujama dviju piramida s bazama B, odnosno B_1, i visinama h, odnosno h_1. Zato je
$V = \frac{Bh}{3} - \frac{B_1h_1}{3} = \frac{Bv}{3} + \frac{Bh_1}{3} - \frac{B_1h_1}{3} = \frac{Bv}{3} + \frac{h_1}{3}(B - B_1)$.
Uvrstimo ovdje izračunatu vrijednost za h_1:
$V = \frac{Bv}{3} + \frac{v\sqrt{B_1}(\sqrt{B}+\sqrt{B_1})}{3(B-B_1)}(B-B_1) = \frac{Bv}{3} + \frac{v}{3}(\sqrt{BB_1}+B_1) = \frac{v}{3}(B+\sqrt{BB_1}+B_1)$.

U [21] su samo zadane formule koje vrijede za krnju piramidu:
$B : B_1 = h^2 : h_1^2$

$V = \frac{v}{3}(B + \sqrt{BB_1} + B_1)$

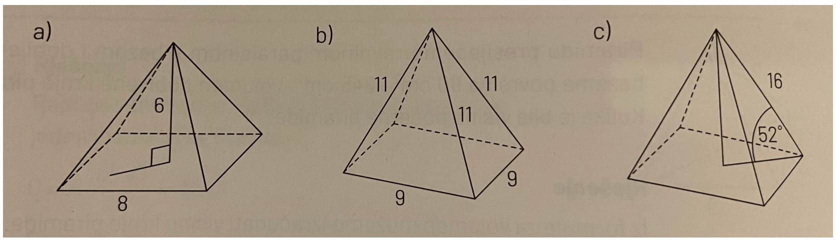
U nastavku su zadatci s izračunavanjem i primjenom obujma piramide iz udžbenika.

Zadatak 2.90 *Odredi volumen piramide čija je mreža prikazana na slici 2.41.*



Slika 2.41:

Zadatak 2.91 *Izračunaj volumen piramide sa slike 2.42. Piramida je pravilna.*



Slika 2.42:

Zadatak 2.92 *Dijagonalan presjek pravilne četverostrane piramide pravokutni je trokut površine* 18 cm^2. *Koliki je obujam te piramide?*

Zadatak 2.93 *Omjer duljina osnovnog brida i visine pravilne četverostrane piramide jednak je* $3:2$*, površina njezina pobočja iznosi* $1500\ cm^2$*. Koliki je obujam piramide?*

Zadatak 2.94 *Koliki je obujam pravilne četverostrane piramide kojoj je kut između pobočke i osnovke* $60°$*, a oplošje joj je* $192\ cm^2$*?*

Zadatak 2.95 *Pravilna trostrana piramida obujma* $450\ cm^3$ *visoka je* $15\ cm$*. Odredite duljine bridova piramide.*

Zadatak 2.96 *U trostranoj piramidi duljine osnovnih bridova su* $6\ cm$*,* $7\ cm$ *i* $9\ cm$*. Bočni bridovi piramide zatvaraju s bazom kut od* $60°$*. Odredite obujam te piramide.*

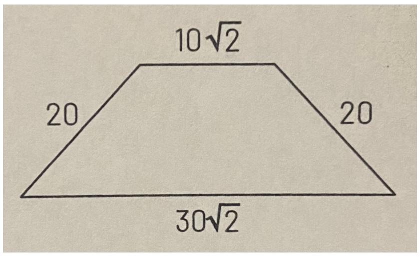
Zadatak 2.97 *Sve pobočke trostrane piramide s ravninom osnovke zatvaraju kut* $\alpha = 58°$*. Osnovka je jednakokračan trokut s osnovicom duljine* $12\ cm$ *i krakom od* $10\ cm$*. Koliki je obujam piramide?*

Zadatak 2.98 *Duljina visine pravilne šesterostrane piramide jednaka je osnovnom bridu* a*. Odredite obujam piramide.*

Zadatak 2.99 *Na kojoj je udaljenosti od vrha potrebno povući ravninu paralelnu s ravninom baze da površina presjeka bude jednaka devetini površine baze?*

Zadatak 2.100 *Pravilnu četverostranu piramidu čiji su bridovi duljine* $5\ cm$ *presiječemo ravninom paralelnom ravnini baze tako da se površine baze odnose kao* $9:4$*. Odredi obujam tako nastale krnje piramide.*

Zadatak 2.101 *Ako je površina jedne pobočke velike piramide tri puta veća od površine odgovarajuće pobočke dopunjka, kako se odnose njihovi obujmovi?*



Slika 2.43:

Zadatak 2.102 *Na slici 2.43 je dijagonalni presjek krnje piramide. Baza je piramide kvadrat. Odredi volumen te piramide.*

Zadatak 2.103 *Ako od piramide čija osnovka ima površinu* 36 cm^2 *odsiječemo piramidu ravninom paralelnom osnovci, dobit ćemo krnju piramidu obujma* 76 cm^3 *i visine* 3 cm. *Koliki je obujam odsječene piramide?*

Zadatak 2.104 *Kada kocku $ABCDA_1B_1C_1D_1$ obujma* 125 cm^3 *presiječemo ravninom koja prolazi točkama ACP pri čemu je P polovište brida BB_1, manje od nastalih tijela je piramida. Odredi obujam te piramide.*

Zadatak 2.105 *Izvor sjetlosti točkastog oblika nalazi se na zidu na visini* 2.1 m *i na podu obasjava samo knjigu širine* 53 cm *i duljine* 28 cm. *Koliki je obujam obasjanog dijela sobe?*

Nakon poliedara (prizme i piramide) slijedi obrada rotacijskih tijela: valjak, stožac i kugla.

Valjak

Tijelo nastalo rotacijom pravokutnika oko jedne njegove stranice je **uspravni valjak**.

Osnovke valjka su krugovi.

Visina valjka je udaljenost osnovki.

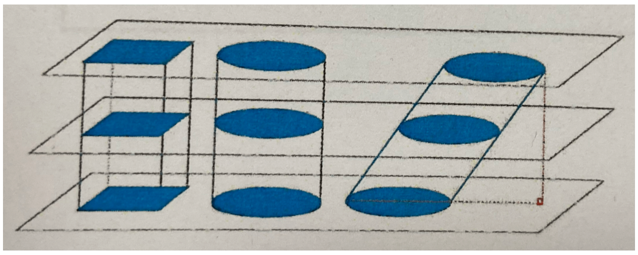
Pravac oko kojega je rotirao pravokutnik nazivamo **os valjka**.

Dužina paralelna osi valjka koji spaja kružnice u bazama nazivamo **izvodnicom valjka**.

Osim uspravni, valjak može biti i kosi. **Kosi valjak** nije rotacijsko tijelo jer ne može nastati rotacijom nekog lika. Kosi valjak nastaje translacijom kruga duž izvodnice valjka i u tome slučaju izvodnica nije okomita na ravninu osnovke.

Osni presjek valjka je presjek koji sadržava os valjka. Valjak čiji je osni presjek kvadrat nazivamo jednakostraničnim valjkom.

Obujam valjka je prema Cavalierijevu principu (vidi sliku 2.44) jednak umnošku površine baze i visine valjka: $V = Bh = r^2\pi h$.



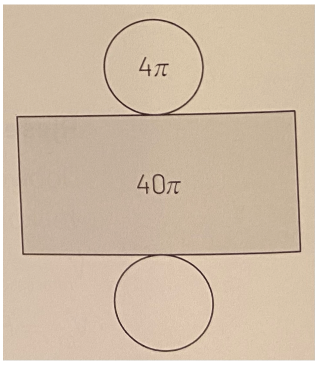
Slika 2.44: Cavalierijev princip

U nastavku su primjeri zadataka s obujmom valjka koji se mogu naći u udžbenicima.

Zadatak 2.106 *Odredi volumen valjka sa slike 2.45.*

Zadatak 2.107 *Kvadrat stranice a rotira oko pravca koji prolazi polovištima nasuprotnih stranica. Odredi obujam tako nastalog tijela.*

Zadatak 2.108 *Oplošje valjka jednako je* 240π cm^2. *Koliki je volumen valjka ako je omjer polumjera baze i visine* $3:7$*?*

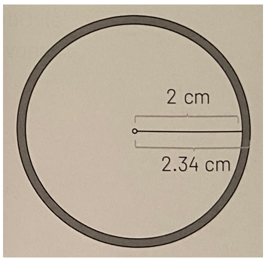


Slika 2.45:

Zadatak 2.109 *Površina osnog presjeka uspravnog valjka jest* 40 cm^2, *a opseg mu je* 28 cm. *Koliki je obujam valjka?*

Zadatak 2.110 *Presjek kružne cijevi ima dimenzije prikazane na slici 2.46.*

a) Koliki je volumen materijala potreban za proizvodnju 1 m *takve cijevi?*



Slika 2.46:

b) Jedan m^3 *materijala od kojega se izrađuje cijev ima* 3000 kg. *Koliku masu ima* 80 m *te cijevi?*

Zadatak 2.111 *U loncu visine* 16 cm *i promjera* 24 cm *kuha se juha. U početku je lonac bio pun tri četvrtine, no tijekom kuhanja* 12% *tekućine isparilo je. Koliko je litara juhe ostalo u loncu nakon kuhanja?*

Zadatak 2.112 *Iz drvenog trupca u obliku valjka duljine* v m *i promjera*

r cm treba ispiliti drvenu gredu kojoj je presjek kvadrat. Koliki je postotak otpada?

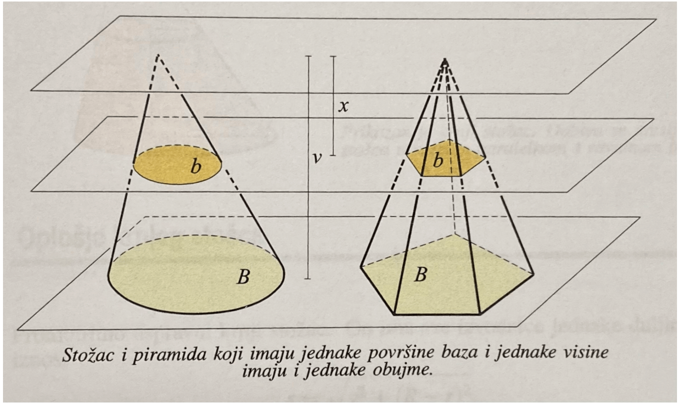
Zadatak 2.113 *Kolika je duljina aluminijske žice promjera $2r = 1$ mm koja se može dobiti od aluminija mase 1 kg? Gustoća aluminija je 2.7 g/cm^3.*

Zadatak 2.114 *Od pravilne šesterostrane prizme visine 14 cm i duljine osnovnog brida 4 cm želimo napraviti valjak iste visine i maksimalnog obujma. Koliki je polumjer baze i obujam takva valjka?*

Zadatak 2.115 *Radijus kosoga valjka iznosi 3 cm. Os mu je duljine 5 cm i s bazom zatvara kut od $40°$. Izračunaj volumen tog valjka.*

Stožac

Tijelo nastao rotacijom pravokutnog trokuta oko jedne njegove katete je **uspravni stožac**.
Osnovka stošca je krug.
Visina stošca je udaljenost vrha stošca od osnovke. Pravac oko kojeg je rotirao trokut nazivamo **os stošca**.
Dužinu koja spaja kružnicu u bazi s vrhom stošca nazivamo **izvodnicom stošca**.
Mreža uspravnog stošca sastoji se od kruga i kružnog isječka kojeg nazivamo **plašt stošca**. Kao i valjak, stožac može biti kosi. **Kosi stožac** nije rotacijko tijelo jer ne može nastati rotacijom nekog lika. Kosi stožac nastaje spajanjem vrha sa svim točkama baze i u tome slučaju izvodnice nisu jednako duge.
Osni presjek stošca jest bilo koji presjek stošca koji sadržava os stošca. Stožac čiji je osni presjek jednakostranični trokut nazivamo **jednakostraničnim stošcem**.



Slika 2.47: Cavalierijev princip

Obujam stošca polumjera baze r i visine h jednak je $V = \frac{1}{3}r^2\pi h$.

Presiječemo li stožac ravninom koja je paralelna s njezinom osnovkom, dobit ćemo manji stožac (**dopunjak**), sličan početnome, i **krnji stožac**.

Formulu za **obujam krnjeg stošca** dobivamo na potpuno istovjetan način kao i formulu za obujam krnje piramide.
Druga je mogućnost da se odmah pozovemo na Cavalierijev princip. Ako krnji stožac ima površinu donje i gornje baze istu kao i krnja piramida, i ako su im visine jednake, onda su jednaki i njihovi obujmi.
Krnji stožac kojem baze imaju polumjere R i r, a visina iznosi h, ima obujam $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + Rr + r^2)$.

Također, na sličan način kao i kod krnje piramide, pokaže se da vrijedi:
Ako se visina velikog stošca i visina dopunjka odnose s koeficijentom sličnosti k, tada se i polumjer baze velikog stošca i polumjer baze dopunjka odnose s istim koeficijentom sličnosti k.
Površine odgovarajućih likova velikog stošca i dopunjka odnose se s kvadra-

tom koeficijenta sličnosti k^2.
Obujmovi velikog stošca i dopunjka odnose se s kubom koeficijenta sličnosti k^3.

U nastavku su zadatci s obujmom stošca koji se mogu naći u udžbenicima.

Zadatak 2.116 *Deset hrpi pijeska u obliku stošca visine* $2\ m$ *i dijametra baze* $2\ m$, *želimo presuti u vreće. Koliko nam vreća za to treba ako u jednu vreću stane* $120\ L$ *pijeska?*

Zadatak 2.117 *Plašt stošca polumjera baze* $3\ cm$ *je u obliku četvrtine kruga. Odredite obujam takva stošca.*

Zadatak 2.118 *Opseg je osnog presjeka uspravnog stošca* $36\ cm$. *Koliki mu je volumen ako je površina plašta* $65\pi\ cm^2$*?*

Zadatak 2.119 *Pravokutni trokut s katetama* $3\ cm$ *i* $4\ cm$ *rotira oko jedne, a zatim oko druge katete. Kolika je razlika u obujmu tako nastalih rotacijskih tijela?*

Zadatak 2.120 *Površina baze uspravnog stošca je* $44,44\ cm^2$, *a izvodnica s ravninom baze zatvara kut od* $22°22'$. *Izračunaj obujam stošca.*

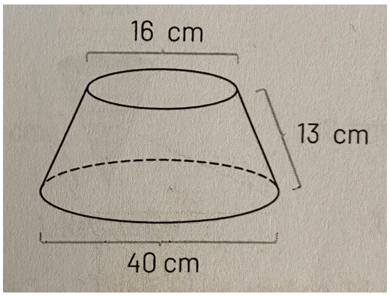
Zadatak 2.121 *U uspravni stožac polumjera baze* $r = 3\ cm$ *i visine* $v = 4\ cm$ *upisana je pravilna osmerostrana piramida. Koliki je omjer njihovih obujama?*

Zadatak 2.122 *Na kojoj udaljenosti od baze moramo razrezati uspravni stožac visine* $10\ cm$ *ako želimo dobiti dva dijela istog obujma?*

Zadatak 2.123 *Radijusi osnovki uspravnog krnjeg stošca odnose se kao* $5 : 3$. *Kako se odnose obujam krnjeg stošca i obujam dopunjka?*

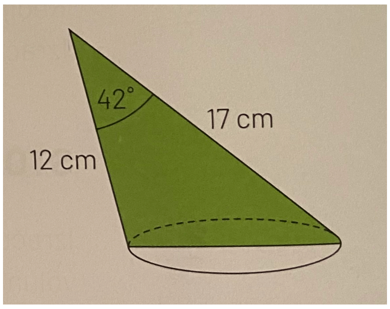
Zadatak 2.124 *Poršina plašta krnjega stošca jest* $1816\pi\ cm^2$*, a površina njegovih baza* $16\pi\ cm^2$ *i* $400\pi\ cm^2$*. Koliki mu je volumen?*

Zadatak 2.125 *Odredi volumen krnjega stošca sa slike 2.48 .*



Slika 2.48:

Zadatak 2.126 *Odredi obujam stošca sa slike 2.49:*



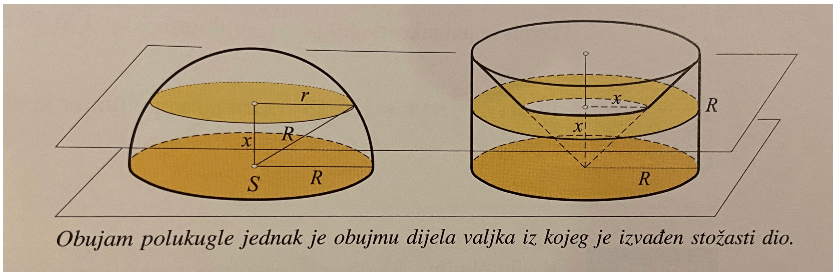
Slika 2.49:

Kugla

Kugla sa središtem S i polumjerom r je skup svih točaka T prostora za koje vrijedi da je $|ST| \leq r$. Pišemo kugla (S, r).
Sfera sa središtem S i polumjerom r je skup svih točaka T prostora za koje vrijedi da je $|ST| = r$.
Presiječemo li kuglu ravninom, dobit ćemo **kuglin odsječak**.

Dio sfere koji je nastao tim presjekom naziva se **kuglina kapica**.
Presiječemo li kuglu ravninom koja prolazi njezinim središtem, dobit ćemo dvije **polukugle**, odnosno **polusfere**.
Kuglin isječak dio je kugle omeđen kuglinom kapicom i plaštem stošca kojemu je vrh u središtu kugle, a baza mu je baza kapice.

Volumen kugle izračunat ćemo primjenom Cavalierijeva principa. Pogledaj sliku 2.50. Promotrimo polovicu kugle. Označimo sa S njezino središte, s R polumjer. Promotrimo i valjak polumjera baze i visine R kojem baza leži u istoj ravnini kao i glavna kružnica polukugle. Iz valjka izvadimo dio koji određuje stožac čija se baza podudara s gornjom bazom valjka, a vrh mu je u središtu donje baze.



Slika 2.50: Cavalierijev princip pri određivanju obujma kugle

Usporedit ćemo polukuglu s tijelom koje čini dio valjka s izvađenim stošcem. Postavimo ih u horizontalnu ravninu i presijecimo ravninom paralelnom s ravninom baze, na udaljenosti x od nje.
Presjek ravnine i kugle je krug polumjera $r = \sqrt{R^2 - x^2}$ i zato je površina presječnog kruga $(R^2 - x^2)\pi$.
Presjek ravnine i drugog tijela je kružni prsten. NJegov je veći polumjer R, a manji x. Zato je površina presjeka jednaka $r^2\pi - x^2\pi$ i jednaka je prethodnoj površini.

Ovime smo pokazali da su površine presjeka obaju tijela jednake. Po Cavalierijevu principu, i njihovi su obujmi jednaki. Obujam drugog tijela lako možemo odrediti kao razliku obujma valjka i stošca: $R^2\pi \cdot R - \frac{R^2\pi \cdot R}{3} = \frac{2}{3}R^3\pi$. Taj je obujam polovica obujma kugle.

Obujam kugle polumjera r iznosi $V = \frac{4}{3}r^3\pi$.

Usporedimo obujam kugle polumjera r sa stošcem i valjkom čiji je polumjer baze r i visina $2r$.

$V_{\text{stošca}} : V_{\text{kugle}} : V_{\text{valjka}} = (\frac{1}{3}r^2\pi \cdot 2r) : (\frac{4}{3}r^3\pi) : (r^2\pi \cdot 2r) = 1 : 2 : 3$

Obujmovi stošca, kugle i valjka jednakih polumjera i jednakih „visina" odnose se kao $1 : 2 : 3$.

U nastavku su primjeri zadataka s izračunavanjem i primjenom obujma kugle iz udžbenika.

Zadatak 2.127 *Najveći presjek kugle ravninom ima površinu* 16π cm^2. *Koliki je obujam te kugle?*

Zadatak 2.128 *Gustoća zlata je* 19.3 g/cm^3. *Masa zlatnog privjeska u obliku kugle je* 0.456 g, *a duljina polumjera* 2.8 mm. *Je li privjesak od čistog zlata?*

Zadatak 2.129 *Odredi volumen polukugle kojoj je oplošje* 243π cm^2.

Zadatak 2.130 *Kugla ima radijus R. Udvostručimo li radijus, koliko će se puta povećati volumen kugle?*

Zadatak 2.131 *Tri mjedene kuglice polumjera* 6 cm *rastopimo i napravimo jednu veću. Koliki je polumjer nove kugle?*

Zadatak 2.132 *Promjer Marsa je* 0.53 *promjera Zemlje. Koliki je omjer obujama Marsa i Zemlje?*

Zadatak 2.133 *Na dnu valjkaste posude promjera osnovke* 15 *cm nalazi se metalna kugla promjera* 12 *cm. Razina vode u posudi točno je na najvišoj točki kugle. Na koju će razinu pasti voda kada izvadimo kuglu?*

Zadatak 2.134 *Postoji više različitih vrsta biljara, pa su i kugle s kojima se igra različitih veličina. Najveća je od njih za "ruski biljar" i ima promjer* 68 *mm, dok je najmanja za "britansku osmicu" promjera* 56 *mm. Za koliko je posto volumen najveće kugle veći od volumena najmanje kugle?*

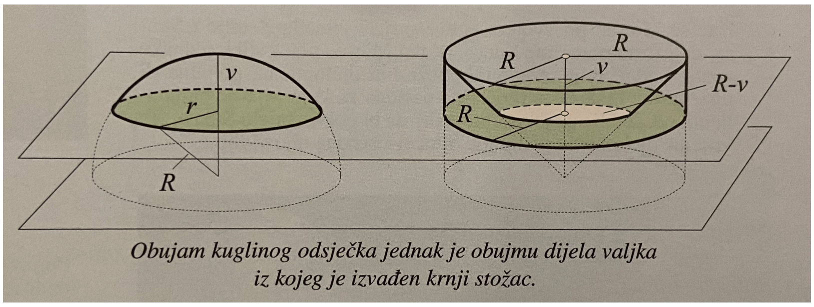
Zadatak 2.135 *Odredite obujam kugle upisane krnjem stošcu čiji su polumjeri osnovke* 9 *cm i* 25 *cm.*

U [7] se izvode i formule za obujam kuglinog odsječka, kuglinog sloja i kuglinog isječka.

Odredimo obujam V **kuglinog odsječka**, tijela koje od kugle odsijeca ravnina.
Neka je v njegova visina (to znači da je udaljenost presječne ravnine od središta sfere jednaka $R - v$). Formulu ćemo odrediti na potpuno isti način kao i obujam polukugle. Usporedit ćemo obujam odsječka s odgovarajučim tijelom koje dobivamo ako iz valjka visine v izvadimo krnji stožac polumjera gornje baze R, a donje baze $R - v$ (pogledaj sliku 2.51).

Po poznatim formulama za obujam valjka i krnjeg stošca, vrijedi:
$V = R^2\pi v - \frac{\pi v}{3}[R^2 + R(R - v) + (R - v)^2] = \frac{(3R-v)v^2\pi}{3}$.

Zadatak 2.136 *Odredi volumen kuglina odsječka ako je kugla radijusa* 18 *cm presječena ravninom udaljenom* 12 *cm od središa kugle.*



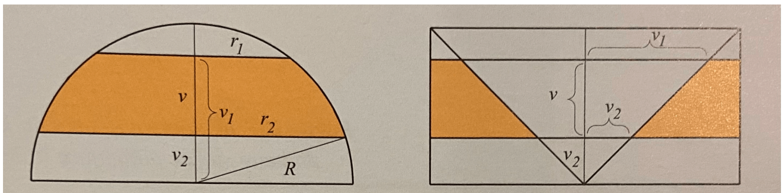
Slika 2.51: Cavalierijev princip pri određivanju obujma kuglinog odsječka

Zadatak 2.137 *Dana je kocka s bridom duljine* 10 *cm. U središtu kocke je središte kugle koja dira sve bridove kocke. Izračunaj obujam dijela kugle koji nije u kocki.*

Odredimo obujam **kuglinog sloja**, dijela kugle koji odsijecaju dvije paralelne ravnine.
Njegov je obujam jednak razlici obujama dvaju kuglinih odsječaka, ali račun je složeniji krenemo li na taj način.
Obujam ćemo odrediti s pomoću triju veličina: polumjera prvog presječnog kruga r_1, drugog presječnog kruga r_2 i visine kuglinog sloja v. Pretpostavit ćemo, radi jednostavnijeg zapisa, da je $r_1 > r_2$ i da kuglin sloj leži u istoj polukugli. Te tri veličine nisu međusobno neovisne;znajući dvije uvijek možemo odrediti treću, po formuli: $v = v_1 - v_2 = \sqrt{R^2 - r_1^2} - \sqrt{R^2 - r_2^2}$.
Značenje veličina vidimo na slici 2.52 na kojoj je naznačen glavni presjek polukugle i pomoćnih tijela.

Izvedimo pomoćne relacije. Iz veze $v = v_1 - v_2$ izračunat ćemo umnožak $v_1 v_2$:

$$v^2 = v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \Longrightarrow 2v_1v_2 = v_1^2 + v_2^2 - v^2. \tag{2.1}$$



Slika 2.52: Cavalierijev princip pri određivanju obujma kuglinog sloja

Također vrijedi:

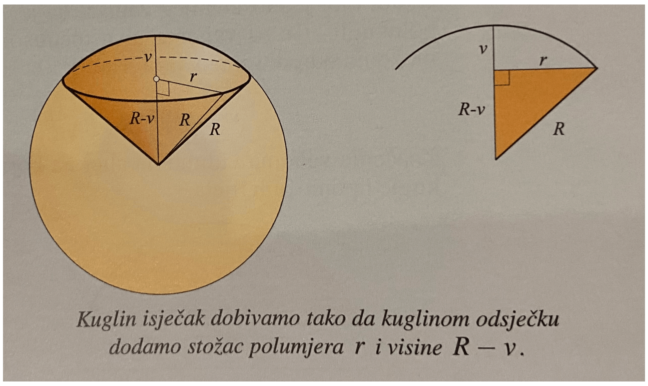
$$r_1^2 = R^2 - v_1^2,\ r_2^2 = R^2 - v_2^2. \tag{2.2}$$

Obujam kuglinog sloja jednak je obujmu pomoćnog tijela:
$V = R^2 v\pi - \frac{\pi v}{3}[v_1^2 + v_1 v_2 + v_2^2] = \frac{\pi v}{6}[6R^2 - 2v_1^2 - 2v_2^2 - 2v_1 v_2] = (\text{po } (2.1)) = \frac{\pi v}{6}[6R^2 - 3v_1^2 - 3v_2^2 + v^2] = (\text{po } (2.2)) = \frac{\pi v}{6}[3r_1^2 + 3r_2^2 + v^2].$

Ako je $r_2 = 0$, tada sloj prelazi u odsječak. Označimo li (jedini) polumjer presječnog kruga s r umjesto r_1, dobit ćemo formulu: $V = \frac{\pi v}{6}(3r^2 + v^2)$, što je drugi oblik za formulu obujma kuglinog odsječka.

Zadatak 2.138 *Polumjeri osnovki kuglinog sloja jednaki su* 3 *cm i* 4 *cm, a polumjer kugle je* 5 *cm. Koliki je obujam sloja ako su ravnine presjeka s iste strane središta kugle?*

Odredimo formulu za obujam **kuglinog isječka**. To je tijelo koje od kugle odsijeca ploha stošca koja ima vrh u središtu kugle. Pogledaj sliku 2.53.
Formula se može iskazati s pomoću polumjera kugle R i visine pripadnog odsječka v.



Slika 2.53:

Neka je r pomoćna veličina: polumjer baze stošca. Iz karakterističnog pravokutnog trokuta čitamo: $R^2 = (R-v)^2 + r^2 \Longrightarrow r^2 + v^2 = 2Rv$.
Sada računamo obujam V kuglinog isječka zbrajajući obujam odsječka $V_o = \frac{\pi v}{6}(3r^2 + v^2)$ i stošca $V_s = \frac{r^2\pi}{3}(R-v)$:
$V = \frac{\pi v}{6}(3r^2 + v^2) + \frac{r^2\pi}{3}(R-v) = \frac{\pi v}{6}(r^2 + v^2) + \frac{\pi v}{6} \cdot 2r^2 + \frac{r^2\pi}{3}(R-v) = \frac{\pi v}{6}(r^2+v^2) + \frac{r^2\pi}{3} \cdot R = \frac{\pi v}{6} \cdot 2Rv + \frac{r^2\pi}{3} \cdot R = \frac{1}{3}\pi R(v^2 + r^2) = \frac{2}{3}R^2\pi v$.

Zadatak 2.139 *Koliki je obujam kuglinog isječka ako je polumjer pripadnog kruga* 12 *cm, a polumjer kugle* 15 *cm?*

Zadatak 2.140 *Kuglin isječak je rotacijsko tijelo koje nastane vrtnjom kružnog isječka oko njegove osi simetrije. Ako je polumjer kružnice* 12 *cm, a kut kružnog isječka* 60°*, koliki je obujam tijela koje nastane opisanom rotacijom kružnog isječka?*

Još neka rotacijska tijela

Zadatak 2.141 *Pravokutnik stranica* 3 *cm i* 5 *cm zakrene se oko duže stranice za* 120°*. Koliki je obujam tijela što ga takvim zakretanjem opiše pravokutnik?*

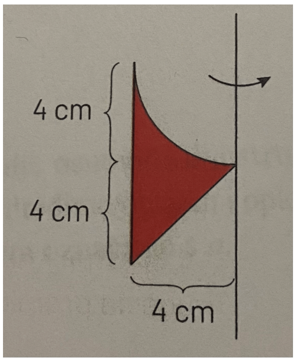
Zadatak 2.142 *Trokut sa stranicama duljine $a = 15$ cm, $b = 13$ cm i $c = 14$ cm rotira oko stranice c. Izračunaj obujam nastalog rotacijskog tijela.*

Zadatak 2.143 *Odredi volumen tijela koje nastaje rotacijom pravokutnog trokuta s katetama* 5 cm *i* 12 cm *oko osi koja prolazi vrhom nasuprot kraćoj kateti i s njom je paralelna.*

Zadatak 2.144 *Jednakokračni trapez kojem je duljina dulje osnovice dvostruko dulja od ostalih stranica rotira oko dulje osnovice. Odredi obujam nastalog rotacijskog tijela.*

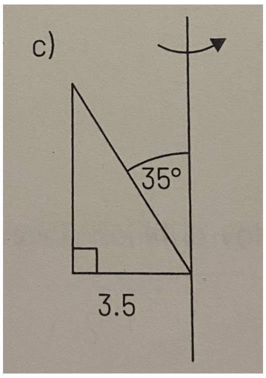
Zadatak 2.145 *Romb stranice a i šiljastog kuta od* $30°$ *vrti se oko jedne pa oko druge dijagonale. Koliki je omjer obujama nastalih rotacijskih tijela?*

Zadatak 2.146 *Odredi volumen tijela sa slike 2.54 koje nastaje rotacijom oko zadane osi.*



Slika 2.54:

Zadatak 2.147 *Skiciraj tijelo koje nastaje rotacijom (slika 2.55) i izračunaj mu volumen.*



Slika 2.55:

Poglavlje 3

Zadatci s državne mature

Ispiti državne mature iz matematike obuhvaćaju zadatke izračunavanja i primjene obujma tijela, i na višoj i na osnovnoj razini. U nastavku su neki od zadataka koji su bili na dosadašnjim ispitima državne mature iz matematike na višoj razini.

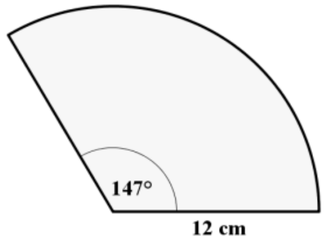
Zadatak 3.1 *U bazenu oblika valjka promjera* $3.7\ m$ *visina vode iznosi* $65\ cm$. *Koliko klora treba staviti u bazen ako je za* $10\ m^3$ *vode potrebno* $150\ g$ *klora? (Državna matura 2021./2022., jesenski rok, 17. zadatak)*

Zadatak 3.2 *Duljina visine pravilne uspravne trostrane piramide jednaka je duljini brida osnovke. Ako je obujam piramide* $43.41\ cm^3$, *kolika je duljina njezine visine? (Državna matura 2020./2021., jesenski rok, 13.zadatak)*

Zadatak 3.3 *Duljina jednoga osnovnog brida kvadra* $ABCDEFGH$ *iznosi* $2.7\ cm$. *Prostorna dijagonala toga kvadra duljine* $10\ cm$ *s ravninom osnovke zatvara kut mjere* $63°$. *Izračunajte obujam piramide* $ABCG$. *(Državna matura 2019./2020., jesenski rok, 29.4. zadatak)*

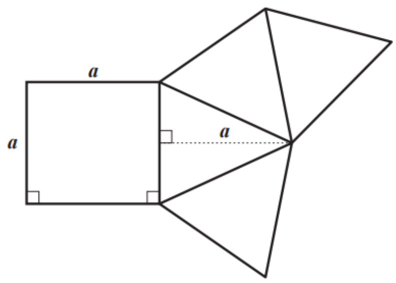
Zadatak 3.4 *Stožac i valjak imaju baze jednakih polumjera. Koliko je puta* *visina stošca veća od visine valjka ako su im volumeni jednaki? (Državna matura 2018./2019., ljetni rok, 22.2. zadatak)*

Zadatak 3.5 *Koliki je obujam stošca čiji je plašt prikazan na slici 3.1? (Državna matura 2015./2016., jesenski rok, 13. zadatak)*



Slika 3.1:

Zadatak 3.6 *Na slici 3.2 je prikazana mreža uspravnoga tijela. Mreža se sastoji od kvadrata i sukladnih jednakokračnih trokuta. Izračunajte obujam toga tijela ako je* $a = 5$ *cm. (Državna matura 2013./2014., jesenski rok, 29.1. zadatak)*



Slika 3.2:

Zadatak 3.7 *Koliki će biti polumjer kugle ako se* 12 *željeznih kuglica polumjera* 2 *cm taljenjem preoblikuje u tu kuglu? (Državna matura 2012./2013., jesenski rok, 24.2. zadatak)*

Zadatak 3.8 *Mjera šiljastog kuta pravokutnog trapeza je* 50°. *Duljine njegovih osnovica iznose* 4 *cm i* 6 *cm. Koliki je obujam tijela koje se dobije rotacijom zadanog trapeza oko dulje osnovice? (Državna matura 2011./2012., zimski rok, 15. zadatak)*

Zadatak 3.9 *Valjak je upisan u uspravnu pravilnu peterostranu prizmu kojoj su osnovni bridovi duljine* 6 *cm, a visina* 8 *cm. Koliki je obujam (volumen) valjka? (Državna matura 2010./2011., jesenski rok, 11. zadatak)*

Zadatak 3.10 *Blok debljine* 6.5 *mm sastoji se od* 100 *listova papira dimenzija* $21.5\ cm \times 29.7\ cm$. *Gustoća papira* ρ *je* $1.20\ g/cm^3$. *Kolika je masa jednoga lista papira u tome bloku? (Državna matura 2010./2011., zimski rok, 4. zadatak)*

Zadatak 3.11 *Zadana je pravilna uspravna šesterostrana piramida kojoj je duljina osnovnoga brida* 4 *cm, a bočnoga* 11.7 *cm. Koliki je obujam (volumen) zadane piramide? (Državna matura 2010./2011., zimski rok, 23.2. zadatak)*

Poglavlje 4

Zadatci s natjecanja

U ovom poglavlju nalaze se neki od zadataka s računanjem i primjenom obujma s dosadašnjih natjecanja u osnovnoj i srednjoj školi.

4.0.1 Osnovna škola

Na natjecanjima iz matematike zadatci s računanjem i primjenom obujma tijela počinju se javljati od petog razreda osnovne škole. Analizirajući natjecanja od 2022. unatrag do 2012. godine, primjećuje se da takvih zadataka nije bilo previše na osnovnoškolskim natjecanjima te da su se počeli pojavljivati na natjecanjima od 2021. godine.

Zadatak 4.1 *Marin ima* 7 *kocaka od glinamola. Volumen najveće kocke je* 64 cm^3 *. Dvije kocke imaju duljine bridova za* 1 *cm kraće od brida najveće kocke, a preostale kocke imaju duljine bridova za* 2 *cm kraće od brida najveće kocke. Marin zgnječi glinamol od svih* 7 *kocaka i oblikuje kvadar. Na koliko različitih načina može oblikovati kvadar kojemu su duljine bridova izražene prirodnim brojevima u centimetrima? (DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE Vodice, 10. – 12. svibnja 2022. 5. razred – osnovna škola, 1.*

zadatak)

Zadatak 4.2 *Duljine stranica kartona pravokutnog oblika, izražene u decimetrima, su prirodni brojevi. Iz svakog od njegovih kutova izrezan je kvadrat sa stranicom duljine* 25 *cm. Preostali dio kartona iskorišten je za slaganje kutije bez poklopca čiji je obujam* 112.5 dm^3 *. Odredi sve moguće duljine stranica početnog kartona. (DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 11. svibnja 2021. 5. razred – osnovna škola, 2. zadatak)*

Zadatak 4.3 *Volumen drvenog kvadra je* 840 cm^3 *. Duljine njegovih bridova izraženi u centimetrima su parni prirodni brojevi. Svaki je brid dulji od* 2 *cm. Nakon što je kvadar obojan sa svih strana, isječen je na kockice duljine brida* 1 *cm. Neke su strane tako dobivenih kockica obojane, a neke nisu. Koliko kockica ima neparan broj obojanih strana? (ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 15. veljače 2022. 6. razred – osnovna škola, 6. zadatak)*

4.0.2 Srednja škola

U srednjoj školi, na temelju zadataka s natjecanja od 2012. do 2022. godine, može se vidjeti da se uglavnom zadatci s računanjem i primjenom obujma javljaju na natjecanju iz matematike u B varijanti, također pretežno u trećem razredu srednje škole. U prvom razredu srednje škole u navedenom razdoblju bio je samo jedan takav zadatak, a to je zadatak 4.4.

Zadatak 4.4 *Duljina stranice kvadrata iznosi* 12 *cm. Iz kvadrata se izrežu* 4 *jednakokračna trokuta kojima su osnovice stranice kvadrata, a duljine visina* 3 *cm. Preostali dio kvadrata je mreža četverostrane piramide. Izračunajte obujam i oplošje te piramide. (ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ*

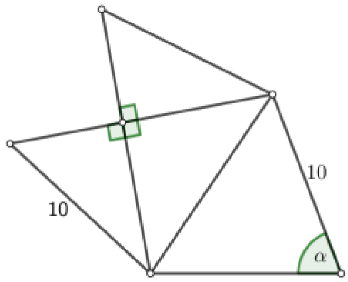
MATEMATIKE 1. razred – srednja škola – B varijanta 21. siječnja 2016., 7. zadatak)

Zadatak 4.5 *Pravokutan trokut kojemu je hipotenuza trostruko dulja od jedne katete rotira oko hipotenuze. Odredite omjer obujma tako nastalog tijela i obujma tom tijelu opisane kugle. (DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 2. razred – srednja škola – B varijanta 11. svibnja 2021., 2. zadatak)*

Zadatak 4.6 *Duljina stranice jednakostraničnog trokuta iznosi* $6/cm$. *Njegovim je težištem povučena paralela s jednom od stranica. Izračunajte obujam uspravne prizme čija je baza nastali trapez, a duljina visine prizme jednaka je duljini visine trapeza. Odredite kosinus kuta kojeg prostorna dijagonala prizme zatvara s ravninom baze. (ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 3. razred – srednja škola – B varijanta 17. siječnja 2013, 7. zadatak)*

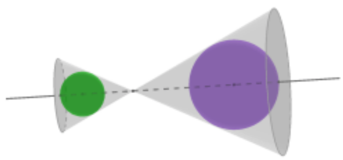
Zadatak 4.7 *Posuda oblika uspravnog stošca sadrži određenu količinu vode. Kada je stožac postavljen osnovkom na ravnu površinu vrhom prema gore, razina vode je* 8 *cm ispod vrha stošca. Ako stožac preokrenemo, razina vode je* 2 *cm ispod osnovke stošca. Kolika je visina posude? (ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 3. razred – srednja škola – A varijanta 27. siječnja 2020., 6. zadatak)*

Zadatak 4.8 *Na slici 4.1 je prikazana mreža piramide. Izračunajte obujam te piramide ako je* $\cos\alpha = \frac{9}{25}$. *(ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 3. razred – srednja škola – B varijanta 29. ožujka 2021., 5. zadatak)*



Slika 4.1:

Zadatak 4.9 *Dvije kugle polumjera* 3 *cm i* 5 *cm upisane su u dva stošca kao što je prikazano na slici 4.2. Stošci imaju jednake vršne kutove i zajedničku os koja je okomita na baze stožaca te prolazi njihovim središtima i zajedničkim vrhom. Udaljenost između baza je* 40 *cm. Ako svaka kugla dodiruje plašt i bazu pripadnog stošca, izračunajte ukupni obujam stožaca. (DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 3. razred – srednja škola – B varijanta Poreč, 13. travnja 2018., 3. zadatak)*



Slika 4.2:

Zadatak 4.10 *Jednakokračnom trokutu kojemu je duljina kraka* $b = 10$ *cm, a mjera kuta izmedu krakova* $\alpha = 30°$ *, opisana je kružnica. Neka je* t *tangenta te kružnice koja je paralelna s visinom na osnovicu. Izračunajte obujam tijela koje nastaje rotacijom danog trokuta oko tangente* t*. (DRŽAVNO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 3. razred – srednja škola – B varijanta Poreč, 26. travnja 2012., 5. zadatak)*

Zadatak 4.11 *Leda i Una se igraju plastelinom u obliku valjka kojemu je visina 6 puta veća od promjera baze. Leda je uzela dio tog plastelina i napravila veću, a Una je od ostatka napravila manju kuglicu. Koliko je puta obujam Ledine kuglice veći od obujma Unine kuglice, ako je zbroj njihovih polumjera 3 puta veći od polumjera baze valjka? (ŠKOLSKO/GRADSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 4. razred – srednja škola – B varijanta 27. siječnja 2020, 7. zadatak)*

Zadatak 4.12 *Polumjer osnovke, izvodnica i visina uspravnog stošca u nekom su poretku tri uzastopna člana rastućega aritmetičkog niza. Ako je površina osnoga presjeka stošca* $300\ cm^2$ *, koliki je njegov obujam? (ŽUPANIJSKO NATJECANJE IZ MATEMATIKE 4. razred – srednja škola – B varijanta 24. ožujka 2022., 2. zadatak)*

Literatura

[1] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, L. Havranek Bijuković, P. Brkić, M. Karlo, M. Kuliš, I. Matić, T. Rodiger, K. Vučić, *Matematika 8, udžbenik matematike u osmom razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[2] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić, N. Zvelf, *Matematika 5, udžbenik matematike u petom razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2019.

[3] S. Braić, *Predavanja iz Metodike nastave elementarne geometrije*, 2012./2013.

[4] M. Cindrić, I. Mišurac, A. Dragičević, *Matematička mreža 3, zbirka zadataka za matematiku u trećem razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[5] M. Cindrić, I. Mišurac, N. Ljubić Klemše, *Matematička mreža 4, zbirka zadataka za matematiku u četvrtom razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2021.

[6] M. Cindrić, I. Mišurac, S. Špika, A. Vetma, *Matematička mreža 3, radna bilježnica za matematiku u trećem razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

Literatura

[7] B. Dakić, N. Elezović, *Matematika 2, udžbenik za 2. razred gimanzija i strukovnih škola, 2. dio*, Element, Zagreb, 2020.

[8] D. Glasnović Gracin, G. Žokalj, T. Soucie, *Otkrivamo matematiku 4, radni udžbenik iz matematike za četvrti razred osnovne škole, drugi dio*, Alfa, Zagreb, 2021.

[9] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošanec, *Matematika 5, udžbenik za 5. razred osnovne škole, 2. dio*, Element, Zagreb, 2019.

[10] G. Gojmerac Dekanić, P. Radanović, S. Varošanec, *Matematika 8, udžbenik za 8. razred osnovne škole, 2. dio*, Element, Zagreb, 2021.

[11] S. Jakovljević Rogić, D. Miklec, G. Prtajin, *Moj sretni broj 3, udžbenik matematike u trećem razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[12] S. Jakovljević Rogić, D. Miklec, G. Prtajin, *Moj sretni broj 3, zbirka zadataka za matematiku u trećem razredu osnovne škole*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[13] *Kurikulum nastavnog predmeta Matematika za osnovne škole i gimnazije*
`https://narodne-novine.nn.hr/clanci/sluzbeni/2019_01_7_146.html`

[14] J. Markovac, *Matematika 4, radni udžbenik za četvrti razred osnovne škole, drugi dio*, Alfa, Zagreb, 2021.

[15] M. Martić, G. Ivančić, J. Dunatov, M. Brnićević Stanić, J. Martinić Cezar, *Super matematika za prave tragače 4, radni udžbenik za četvrti razred osnovne škole, drugi dio*, Profil Klett, Zagreb, 2022.

[16] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, *Matematika 2, udžbenik matematike u drugom razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje, 2. dio*, Školska knjiga, Zagreb, 2020.

[17] *Natjecanja iz matematike-Osnovna škola* `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-OS.htm`

[18] *Natjecanja iz matematike-Srednja škola* `http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-SS.htm`

[19] G. Paić, Ž. Bošnjak, B. Čulina, N. Grgić, *Matematički izazovi 5, udžbenik i zbirka zadataka iz matematike za peti razred osnovne škole, drugi dio*, Alfa, Zagreb, 2018.

[20] *Provedeni ispiti državne mature* `https://www.ncvvo.hr/kategorija/drzavna-matura/provedeni-ispiti/`

[21] Z. Šikić, A. Copić, R. Kalazić, S. Lukač, K. J. Penzar, *Matematika 2, udžbenik za drugi razred gimnazije i srednje strukovne škole, 2. svezak*, Profil Klett, Zagreb

[22] Z. Šikić, V. Draženović Žitko, I. Golac Jakopović, Z. Labor, M. Milić, T. Nemeth, G. Stajčić, M. Vuković *Matematika 8, udžbenik matematike za 8. razred osnovne škole, 2. svezak*, Profil Klett, Zagreb, 2021.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

OBUJAM U KURIKULUMU

Meri Šain

Sažetak:

Cilj ovog rada je prikazati kako se s godinama obrazovanja učenika proširuje njihovo znanje o obujmu. Istražen je koncept i tip zadataka koji se proteže kroz školovanje učenika, iz njihovih udžbenika. Obrazovanje o obujmu kreće sa obradom obujma tekućine, nakon toga uči se o obujmu tijela i to znanje se primjenjuje prvo na kocki i kvadru, a nakon toga na svim uspravnim geometrijskim tijelima. Zatim se uči o obujmu geometrijskih tijela primjenjujući pri tome načelo Cavalierijev princip. Osim na geometrijskim tijelima, obujam se tada primjenjuje i na rotacijskim tijelima.

Ključne riječi:

matematika, mjerenje, geometrijska tijela, rotacijska tijela, državna matura, natjecanje iz matematike

Podatci o radu:

75 stranica, 60 slika, 22 literaturna navoda, jezik izvornika: hrvatski

Mentorica: *doc. dr. sc. Tanja Vojković*

Članovi povjerenstva:

Željka Zorić, v. pred.

dr. sc. Ana Laštre

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *8. svibnja 2023.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

VOLUME IN THE CURRICULUM

Meri Šain

Abstract:

This paper aims to show how the student's knowledge of the volume expands with the years of education. The concept and type of tasks that extend throughout the education of students were investigated from students' textbooks. Education about volume starts with processing the volume of a liquid after which you learn about the volume of solids and this knowledge is applied first to the cube and cuboid and then to all right geometric solids. Then they learn about the volume of geometric solids by applying Cavalieri's principle. In addition to geometric solids, the volume is also applied to solids of revolution.

Key words:

mathematics, measure, geometric solids, solids of revolution, state graduation exam, mathematics competitions

Specifications:

75 pages, 60 pictures, 22 references, original language: Croatian

Mentor: *assisstant professor Tanja Vojković*

Committee:

Željka Zorić, senior lecturer

Ana Laštre, phd

This thesis was approved by a Thesis committee on *May 8, 2023.*