PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

IVAN BARIĆ

DANIELLOV INTEGRAL

DIPLOMSKI RAD

Split, veljača 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

DANIELLOV INTEGRAL

DIPLOMSKI RAD

Student:
Ivan Barić

Mentorica:
doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš

Split, veljača 2023.

Uvod

Civilizacija se definira kao ukupnost svih vještina, znanja, običaja i nazora neke šire zajednice, naroda ili zemlje. Upravo su vještine i znanja oblikovali civilizacije i bili kamen temeljac njihovu razvoju. Jedna od najvažnijih vještina bila je mjerenje, posebice mjerenje površine jer su prve civilizacije gospodarstvo temeljile na obradi zemlje i poljoprivredi. Kako bi se znalo koliko zemlje pripada pojedincu, bilo je potrebno razviti posebne metode za mjerenje površine. U tome su posebno vješti bili Egipćani. Oni su primjenjivali Pitagorin poučak i druga znanja bitna za izmjere.

Suvremeni čovjek nije u načelu različit od prvih civilizacija. I danas mjerimo sve ono što su mjerili Egipćani ili Sumerani. Ipak, razvojem znanosti i tehnologije, pojavile su se nove veličine koje je bilo potrebno mjeriti - primjerice sila i tlak, ali i mnogo drugih fizikalnih veličina, primjerice, u strujnom krugu. Danas postoji cijeli spektar fizikalnih veličina i mjernih jedinica kojima ih mjerimo da ih je gotovo nemoguće pobrojati u samo jednoj knjizi. Dakle, čovjek voli mjeriti. Gotovo da bi mogli definirati čovjeka kao biće koje mjeri. Čovjek je svojevrsni *homo mensurat*.

Vratimo se mjerenju površine. Formule za mjerenje površine nekih jednostavnijih likova (npr. pravokutnika i trokuta) poznate su od davnina. Ipak, neki su se matematičari željeli odmaknuti od očitog i definirati pojam površine za sve likove u ravnini (takvi su likovi najčešće omeđeni nekim krivuljama čija nam je jednadžba poznata). Bio je to začetak teorije mjere. Tako je nastao pojam određenog integrala, i to onog Riemannovog čiji začetak seže iz [6]. Zbog nekih nedostataka Riemannovog pristupa integralu, Lebesgue je u svojoj doktorskoj disertaciji [2] dao novi prijedlog definicije integrala preko teorije izmjerivih funkcija (kojima prethode pojmovi kao što su σ - algebre i π - sistemi).

No, nekim matematičarima ni to nije bilo dosta. Neprestano su tražili nove pristupe teoriji integracije. Jedan od tih matematičara je i Percy J. Daniell.

Sadržaj

Poglavlje 1

Riemannov i Lebesgueov integral

Na početku se prisjetimo kako su Riemann i Lebesgue pristupili problemu "mjerenja površine". Najprije ćemo vidjeti kako je Riemann pristupio tom problemu, koji su osnovni rezultati njegovog pristupa, a zatim ćemo vidjeti kako je Lebesgue popravio neke nedostatke koji su se javili u Riemannovom pristupu teoriji integracije.

Na početku ovog poglavlja najprije ćemo izložiti pojam proširenog prostora $\overline{\mathbb{R}}$. Skupu $\mathbb{R}$ dodat ćemo dvije međusobno različite točke: $+\infty$ (plus beskonačno) koju ćemo ponekad označavati i samo s ∞ i točku $-\infty$ (minus beskonačno). Dobiveni skup $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ naziva se *prošireni prostor realnih brojeva* i označava s $\overline{\mathbb{R}}$. Totalni uređaj $\leq$ na $\mathbb{R}$ proširuje se do totalnog uređaja na $\overline{\mathbb{R}}$ stavljajući

$$-\infty \leq x \leq +\infty, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vrijedi: $\mathbb{R} = \langle -\infty, +\infty \rangle$ i $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$.

Operacije zbrajanja i množenja ne mogu se proširiti na cijeli prostor $\overline{\mathbb{R}}$.

Ipak, vrijedi sljedeće:

$$x \pm \infty = \pm\infty + x = \pm\infty,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \pm\infty, \; x > 0,$$

$$x \cdot (\pm\infty) = (\pm\infty) \cdot x = \mp\infty, \; x < 0,$$

$$\frac{x}{\pm\infty} = 0.$$

Nadalje,

$$+\infty + \infty = +\infty, \; -\infty - \infty = -\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (+\infty) = (-\infty) \cdot (-\infty) = (+\infty)^{+\infty} = +\infty,$$

$$(+\infty) \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty.$$

Izrazi

$$+\infty - \infty, \; \frac{0}{0}, \; \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \; 0 \cdot (\pm\infty), \; 0^0, \; 1^{+\infty}, \; (\pm\infty)^0$$

nazivaju se neodređeni oblici. Ipak, u teoriji mjere korisno je definirati da je $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Prisjetimo se još nekih oznaka i definicija iz matematičke analize. Neka je X neprazan skup i $f, g : X \to \mathbb{R}$ dvije realne funkcije te $c \in \mathbb{R}$. Funkcije $f + g$ i cf definiramo prirodno:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x),$$

$$(cf)(x) = cf(x)$$

Kako ćemo često za $f(x)$ i $g(x)$ koristiti funkcije definirane sa $\max\{f(x), g(x)\}$ i $\min\{f(x), g(x)\}$, uvest ćemo sljedeće pokrate: sa $(f \vee g)(x)$ označimo

$$(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$

a sa $(f \wedge g)(x)$ označimo

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Napomenimo i kako sa $\mathbb{R}^X, X \subseteq \mathbb{R}$ označavamo vektorski prostor svih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ s operacijama zbrajanja i množenja skalarom definiranim kao gore. Najčešće ćemo razmatrati slučaj kada je X neki segment $[a, b]$.

1.1 Riemannov integral

U ovom poglavlju dat ćemo pregled osnovnih pojmova integralnog računa realne funkcije realne varijable. Promatrat ćemo one realne funkcije kojima je domena neki segment $[a, b]$ (dakle, podskup od $\mathbb{R}$) i koje su omeđene. Kako bi fundirali pojam Riemannovog integrala, uvedimo najprije neke pojmove.

Svaki konačan podskup $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\} \subset [a, b]$ takav da je $\{a, b\} \subset D$ nazivamo *particijom* ili *razdiobom* segmenta $[a, b]$. Jednostavnosti radi, pretpostavljat ćemo da vrijedi:

$$a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots x_{n-1} \leq x_n = b.$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$, neka je $h = \frac{b-a}{n}$ i $x_k = a + kh$, $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Tada je $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ particija segmenta $[a, b]$ koju nazivamo *ekvidistantna particija* i označavamo s Δ_n. Takva particija dijeli segment $[a, b]$ na n podsegmenata $[x_{k-1}, x_k]$ jednake duljine $h = \frac{b-a}{n}$. Označimo s $\mathcal{D} = \mathcal{D}([a, b])$ skup svih particija D segmenta $[a, b]$. Primijetimo da je skup $\mathcal{D}$ parcijalno uređen relacijom $\subseteq$ ("biti podskup"). Ako su D_1 i D_2 dvije particije iz $\mathcal{D}$ i vrijedi $D_1 \subseteq D_2$, kažemo da particija D_2 *profinjuje* D_1. Uočimo da je parcijalno uređen skup $(\mathcal{D}, \subseteq)$ *usmjeren*, tj. za svake dvije particije D_1, D_2 postoji particija D koja profinjuje i D_1 i D_2. (Takva je, primjerice, $D = D_1 \cup D_2$.)

Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Tada postoje $M = \sup f([a, b])$ i $m = \inf f([a, b])$ i za svaki $x \in [a, b]$ vrijedi $m \leq f(x) \leq M$. Neka je D particija segmenta $[a, b]$ takva da je $a = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_{n-1} \leq x_n = b$. Označimo, za svaki $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$, brojeve $M_k = \sup f([x_{k-1}, x_k])$ i $m_k =$

inf $f([x_{k-1}, x_k])$. Uočimo da je, za svaki k, $m \leq m_k \leq M_k \leq M$. Funkciji f i particiji D pridružimo sume $s(f, D)$ i $S(f, D)$ definirane na sljedeći način:

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

$$S(f, D) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Broj $s(f, D)$ nazivamo *donja Darbouxova suma*, a broj $S(f, D)$ *gornja Darbouxova suma* (funkcije f s obzirom na particiju D). Prikaz donje i gornje Darbouxove sume za danu particiju dan je na Slici 1.1. Važno je uočiti da brojevi m_k, M_k nisu općenito funkcijske vrijednosti $f(t)$, za neki $t \in [x_{k-1}, x_k]$. Ipak, za proizvoljni izbor točaka $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ možemo definirati tzv. *integralnu sumu* $\sigma(f, D, t_1, \ldots, t_n)$ stavljajući:

$$\sigma(f, D, t_1, \ldots, t_n) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Uočimo da vrijedi:

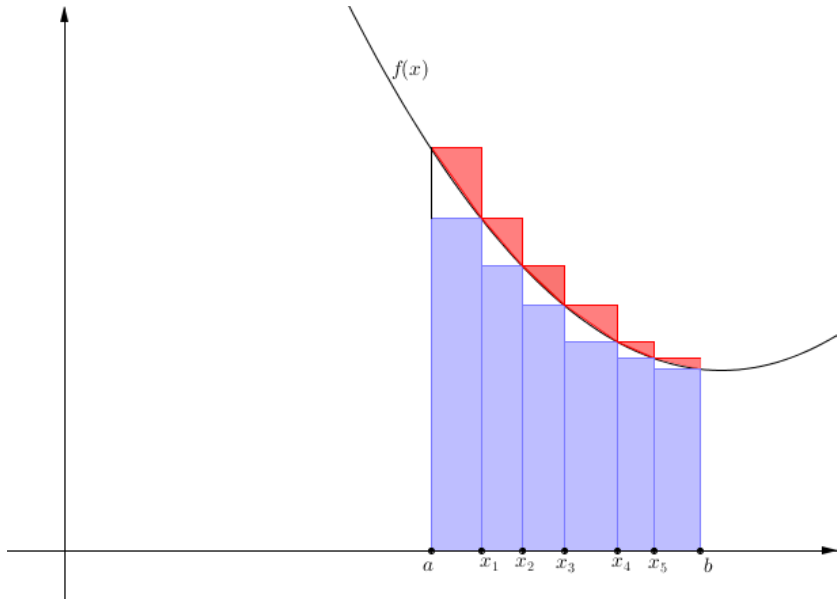
$$m(b - a) \leq s(f, D) \leq \sigma(f, D, t_1, \ldots, t_n) \leq S(f, D) \leq M(b - a).$$

Sljedeće dvije leme ključne su u definiranju pojma Riemannovog integrala.

Lema 1.1 *Neka su D_1 i D_2 dvije particije segmenta $[a, b]$. Ako D_2 profinjuje D_1, onda je $s(f, D_1) \leq s(f, D_2)$ i $S(f, D_1) \geq S(f, D_2)$*

Lema 1.2 *Neka su D_1 i D_2 dvije particije segmenta $[a, b]$. Tada je $s(f, D_1) \leq S(f, D_2)$.*

Dokaz. *Označimo s $D = D_1 \cup D_2$. Tada je D particija segmenta $[a, b]$ koja profinjuje i D_1 i D_2. Primjenom prethodne leme slijedi $s(f, D_1) \leq s(f, D) \leq S(f, D) \leq S(f, D_2)$.* ■



Slika 1.1: Gornja Darbouxova suma(crveno) i donja Darbouxova suma(plavo) za zadanu particiju.

Iz prethodne leme slijedi da je skup $\{s(f,D) : D \in \mathcal{D}\}$ omeđen odozgo proizvoljnom gornjom Darbouxovom sumom te da je skup $\{S(f,D) : D \in \mathcal{D}\}$ omeđen odozdo proizvoljnom dornjom Darbouxovom sumom. Stoga postoje brojevi

$$I_*(f) = \sup\{s(f,D) : D \in \mathcal{D}\}$$

$$I^*(f) = \inf\{S(f,D) : D \in \mathcal{D}\}$$

i vrijedi da je

$$I_*(f) \leq I^*(f).$$

Broj $I_*(f)$ naziva se *donji Riemannov integral funkcije* f (na segmentu $[a,b]$), a broj $I^*(f)$ *gornji Riemannov integral funkcije* f (na segmentu $[a,b]$). Uočimo da za svaku particiju $D \in \mathcal{D}$ vrijedi

$$s(f,D) \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq S(f,D).$$

Definicija 1.3 (R - integrabilna funkcija) *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ omeđena funkcija. Kažemo da je f integrabilna u Riemannovom smislu na $[a, b]$ (kraće R-integrabilna) ako je $I_*(f) = I^*(f)$. Tada se broj $I(f) = I_*(f) = I^*(f)$ naziva (Riemannov) određeni integral funkcije f (na segmentu $[a, b]$) i označava s $\int_a^b f$ ili $\int_a^b f(x)dx$.*

Navedimo sada primjer jedne funkcije koja je integrabilna u Riemannovom smislu i jedne koja nije.

Primjer 1.4 *Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija zadana sa $f(x) = \alpha$. Kako je f omeđena funkcija, ima smisla ispitati je li integrabilna. Neka je $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ bilo koja particija segmenta $[a, b]$. Vrijedi $m_k = f(x_{k-1}) = \alpha$ i $M_k = f(x_k) = \alpha$ pa je $s(f, D) = S(f, D)$. Imamo*

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \alpha \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) = \alpha(x_n - x_0) = \alpha(b - a).$$

Slijedi da je $I_*(f) = I^*(f) = \alpha(b - a)$ pa zaključujemo da je f integrabilna i da vrijedi $\int_a^b f = \alpha(b - a)$.

Primjer 1.5 *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija zadana sa*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \textit{ ako je } x \in \mathbb{Q} \cap [a, b], \\ 0 & , \textit{ inače.} \end{cases} \tag{1.1}$$

Funkcija f je omeđena. Tvrdimo da nije integrabilna. Neka je $D = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ po volji odabrana particija segmenta $[a, b]$. Kako svaki podsegment $[x_{k-1}, x_k] \subseteq [a, b]$ sadrži i racionalne i iracionalne brojeve, slijedi da je $m_k = 0$ i $M_k = 1$, za svaki $k \in \{1, \ldots, n\}$. Slijedi

$$s(f, D) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = 0,$$

$$S(f,D)=\sum_{k=1}^{n}M_k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=x_n-x_0=b-a.$$

Zaključujemo da je $I_*(f)=0$, a $I^*(f)=b-a>0$ pa f nije integrabilna funkcija.

Sljedeći teorem daje jednu korisnu karakterizaciju integrabilnosti u Riemannovom smislu.

Teorem 1.6 *Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omeđena funkcija. Funkcija f je integrabilna u Riemannovom smislu ako i samo ako za svaki $\varepsilon>0$ postoji particija D segmenta $[a,b]$ tako da je*

$$S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon.$$

Dokaz. *Neka je f integrabilna u Riemannovom smislu i neka je $\varepsilon>0$ bilo koji. Kako je f integrabilna, vrijedi $I_*(f)=I^*(f)$. Po definiciji brojeva $I_*(f)$ i $I^*(f)$ postoje particije D_1 i D_2 segmenta $[a,b]$ tako da vrijedi $I_*(f)-\frac{\varepsilon}{2}<s(f,D_1)\le I_*(f)$ i $I^*(f)\le S(f,D_2)<I^*(f)+\frac{\varepsilon}{2}$. Neka je $D=D_1\cup D_2$. Tada D profinjuje D_1 i D_2 pa vrijedi $I_*(f)-\frac{\varepsilon}{2}<s(f,D_1)\le s(f,D)\le S(f,D)\le S(f,D_2)<I^*(f)+\frac{\varepsilon}{2}$. Stoga je $S(f,D)-s(f,D)\le S(f,D_2)-s(f,D_1)<I^*(f)+\frac{\varepsilon}{2}-(I_*(f)-\frac{\varepsilon}{2})=\varepsilon$.*

Obratno, neka za svaki $\varepsilon>0$ postoji particija D segmenta $[a,b]$ tako da je $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$. Tvrdimo da je $I^*(f)=I_*(f)$, tj. da je za svaki $\varepsilon>0$ $I^*(f)-I_*(f)<\varepsilon$. Neka je $\varepsilon>0$ bilo koji. Po pretpostavci postoji particija D segmenta $[a,b]$ tako da je $S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$ pa dobivamo $I^*(f)-I_*(f)\le S(f,D)-s(f,D)<\varepsilon$ ■

Korolar 1.7 *Neka je $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ omeđena funkcija. Ako postoji niz (D_n) particija segmenta $[a,b]$ tako da su nizovi $(S(f,D_n))$ i $(s(f,D_n))$ konvergentni i konvergiraju istom limesu, onda je f R-integrabilna funkcija i vrijedi $\int_a^b f=\lim(S(f,D_n))=\lim(s(f,D_n))$.*

Prethodni korolar govori da za provjeru integrabilnosti možemo uzeti neku pogodnu familiju particija segmenta $[a,b]$, primjerice familiju ekvidistantnih razdioba. Tu tvrdnju ćemo iskoristiti u sljedećem primjeru u kojem ćemo se vratiti pitanju iz uvoda ovog rada i pokušati odrediti površinu lika u ravnini omeđenog nekim krivuljama čija je jednadžba poznata.

Primjer 1.8 *Neka je $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ funkcija dana pravilom $f(x) = x^2$. Ta je funkcija omeđena pa ispitajmo ima li pridruženi ravninski lik $P = \{(x,y) \in [0,1] \times \mathbb{R} : 0 \leq y \leq x^2\}$ površinu.*

Promatrat ćemo samo ekvidistantne razdiobe Δ_n, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ekvidistantna particija, za $h = \frac{1}{n}$, tj. $x_k = \frac{k}{n}$. Vrijedi da je $m_k = f(x_{k-1}) = (\frac{k-1}{n})^2$ i $M_k = f(x_k) = (\frac{k}{n})^2$, za sve $k \in \{1, \ldots, n\}$. Imamo

$s_n = s(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\frac{k-1}{n})^2 = \frac{1}{n^2}(1 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^2} = \frac{2n^3-3n^2+n}{6n^2}$,

$S_n = S(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} (\frac{k}{n})^2 \frac{1}{n} = \cdots = \frac{n(n+1)(2n+1}{6n^2} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^2}$.

Dakle, $s_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ i $S_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$ pa je $\lim(s_n) = \lim(S_n) = \frac{1}{3}$ pa zaključujemo da je površina lika P jednaka $\frac{1}{3}$.

Sljedeći teorem, koji nećemo dokazivati, daje pregled osnovnih svojstava Riemannovog integrala i njegovog ponašanja prema operacijama i uređaju na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^{[a,b]}$.

Teorem 1.9 *Neka su $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ funkcije integrabilne u Riemannovom smislu. Tada vrijedi:*

1. *Funkcija $f + g : [a,b] \to \mathbb{R}$ je integrabilna u Riemannovom smislu i vrijedi $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.*

2. *Ako je $f \leq g$, onda je $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.*

3. *Za svaki* $\alpha \in \mathbb{R}$ *je funkcija* $\alpha f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *integrabilna u Riemannovom smislu i vrijedi* $\int_a^b (\alpha f) = \alpha \int_a^b f$.

4. *Funkcija* $|f|$ *je integrabilna u Riemannovom smislu i vrijedi* $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$.

Označimo s $I([a, b])$ skup svih funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilnih u Riemannovom smislu (na segementu $[a, b]$). Uočimo da svojstva (1) i (3) govore da je $I([a, b])$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$. Nadalje, svojstva (1) i (3) govore da je Riemannov integral linearni funkcional na vektorskom prostoru $I([a, b])$. Svojstvo (2) govori da je Riemannov integral pozitivan linearni funkcional. Naime, uzevši za $f = 0$ nul-funkciju i uvažavajući očitu tvrdnju da je $\int_a^b 0 = 0$, slijedi da je $\int_a^b g \geq 0$, za svaku nenegativnu funkciju g integrabilnu u Riemannovom smislu.

Sljedeći teorem govori da je područje integracije moguće "rascijepati" na dva pogodna podskupa segmenta $[a, b]$ i integrirati funkciju na tim podsegmentima te dobivene vrijednosti zbrojiti.

Teorem 1.10 *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija i* $c \in \langle a, b\rangle$. *Funkcija* f *je R-integrabilna na* $[a, b]$ *ako i samo ako je R-integrabilna na podsegmentima* $[a, c]$ *i* $[c, b]$. *U tom slučaju vrijedi* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Sljedeći korolar je izravna posljedica prethodnog teorema:

Korolar 1.11 *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*

1. *Ako je* f *R-integrabilna funkcija, onda je* f *R-integrabilna na svakom podsegmentu* $[c, d] \subseteq [a, b]$.

2. *Ako je* $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ *particija segmenta* $[a,b]$ *i* f *je R-integrabilna na svakom podsegmentu* $[x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1,\ldots,n\}$, *onda je* f *R-integrabilna i na* $[a,b]$ *i vrijedi* $\int_a^b f = \sum_{k=1}^n \int_{x_{k-1}}^{x_k} f$.

U matematičkoj analizi od posebna su značaja *neprekidne* funkcije. Kako su takve funkcije (po jednom od najvažnijih teorema matematičke analize) omeđene na segmentu, ima smisla promatrati njihovu integrabilnost. Pitamo se, dakle, je li prostor $C([a,b])$ neprekidnih funkcija na $[a,b]$ podprostor prostora $I([a,b])$. Odgovor na to pitanje daje sljedeći teorem.

Teorem 1.12 *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Tada je* f *integrabilna funkcija.*

Pogledajmo kako možemo karakterizirati nul-funkciju, tj. funkciju koja svugdje iščezava. Realna funkcija koja svugdje iščezava je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 0 \ , \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

U 2. poglavlju ćemo proširiti pojam nul-funkcije, no za sada smatramo nul-funkcijom onu koja svugdje iščezava.

Korolar 1.13 *Neka je* $X \subseteq \mathbb{R}$ *konveksan skup i* $f : X \to \mathbb{R}$ *neprekidna funkcija. Funkcija* f *je nul-funkcija ako i samo ako za svaki segment* $[a,b] \subseteq X$ *vrijedi* $\int_a^b f = 0$.

Teorem 1.12 jedan je od najvažnijih teorema u teoriji integracije realnih funkcija jedne realne varijable. Postavlja se pitanje je li $C([a,b]) \subsetneqq I([a,b]$, tj. postoje li prekidne integrabilne funkcije. Put do odgovora na to pitanje vodi nas preko sljedećeg teorema i korolara. Prije toga, prisjetimo se da je funkcija $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ *rastuća* ako za svaki izbor točaka $x_1, x_2 \in [a,b]$ vrijedi $f(x_1) \le f(x_2)$ čim je $x_1 \le x_2$, odnosno *padajuća* ako za svaki izbor točaka

$x_1, x_2 \in [a, b]$ vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$ čim je $x_1 \geq x_2$. Za funkciju kažemo da je *monotona* ako je rastuća ili padajuća.

Teorem 1.14 *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ monotona funkcija. Tada je f integrabilna funkcija.*

Dokaz. *Razmotrimo najprije slučaj kada je f rastuća. Ako je $f(a) = f(b)$, onda je f konstantna funkcija pa je i integrabilna. Pretpostavimo da je $f(b) > f(a)$ i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n > \frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{\varepsilon}$ i neka je $\Delta_n = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ ekvidistantna particija segmenta $[a, b]$, za $h = \frac{b-a}{n}$. Kako je f rastuća, to je $m_k = \inf f([x_{k-1}, x_k]) = \min f([x_{k-1}, x_k]) = f(x_{k-1})$ i $M_k = \sup f([x_{k-1}, x_k]) = \max f([x_{k-1}, x_k]) = f(x_k)$ pa je $M_k - m_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, za svaki $k \in \{1, \ldots, n\}$. Slijedi $S(f, \Delta_n) - s(f, \Delta_n) = \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n}(f(x_k) - f(x_{k-1}))h = h(f(x_n) - f(x_0)) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) < \varepsilon$. Time je dokazano da je f integrabilna funkcija.*

Ako je f padajuća, onda je $-f$ rastuća pa je i integrabilna. Stoga je i funkcija $f = -(-f)$ također integrabilna. ■

Prisjetimo se da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ po dijelovima monotona ako postoji particija $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ segmenta $[a, b]$ tako da je f monotona na svakom podsegmentu $[x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Koristeći prethodni teorem i Korolar 1.11, izravno dobivamo sljedeću tvrdnju:

Korolar 1.15 *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ po dijelovima monotona funkcija. Tada je f integrabilna funkcija.*

Kako monotone funkcije ne moraju biti neprekidne, zaključujemo da postoje prekidne funkcije integrabilne u Riemannovom smislu. No, koliko točaka prekida mogu imati prekidne funkcije, a da se ne naruši svojstvo integrabilnosti? Da bismo odgovorili na to pitanje, potrebne su nam sljedeće tri leme koje nećemo dokazivati.

Lema 1.16 *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *funkcija koja iščezava na* $[a,b]$ *osim u točki* $c \in [a,b]$. *Tada je* f *integrabilna na* $[a,b]$ *i vrijedi* $\int_a^b f = 0$.

Lema 1.17 *Neka su* $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ *omeđene funkcije koje se podudaraju u svakoj točki* $x \in [a,b]$ *osim u točki* $c \in [a,b]$. *Ako je jedna od funkcija* f *i* g *integrabilna, onda je i druga integrabilna i vrijedi* $\int_a^b f = \int_a^b g$.

Lema 1.18 *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija koja je neprekidna u svakoj točki* $x \in [a,b]$ *osim u točki* $c \in [a,b]$. *Tada je* f *integrabilna funkcija.*

Vidjet ćemo da u teoriji integracije koju je razvio Lebesgue postoji sličan teorem o podudaranju funkcija kao u Lemi 1.17.

Dokažimo sada sljedeći važan teorem.

Teorem 1.19 *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija. Ako je skup točaka prekida funkcije* f *konačan, onda je* f *integrabilna funkcija.*

Dokaz. *Neka je* $\{c_1, \ldots, c_n\}$ *skup točaka prekida funkcije* f *i neka je* $a \leq c_1 < c_2 < \cdots < c_n \leq b$. *Ako je* $n = 1$, *tvrdnja slijedi po prethodnoj lemi. Pretpostavimo da je* $n \geq 2$. *Za svaki* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ *odaberimo točke* x_k *tako da vrijedi* $c_k < x_k < c_{k+1}$. *Posebno stavimo* $x_0 = a$ *i* $x_n = b$. *Time je dobivena particija* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *segmenta* $[a,b]$ *tako da svaka restrikcija* $f|[x_{k-1}, x_k]$, $k \in \{1, \ldots, n\}$ *od* f *ima točno jednu točku prekida i to u točki* $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$. *Po prethodnoj lemi slijedi da je* f *integrabilna na svakom podsegmentu* $[x_{k-1}, x_k]$ *pa je* f *integrabilna i na* $[a,b]$, *po Korolaru 1.11.* ■

Sada ćemo dati primjer jedne funkcije kojoj je skup točaka prekida prebrojiv, a ipak je integrabilna.

Primjer 1.20 (Riemannova funkcija) *Neka je* $A = [0,1] \cap (\mathbb{Q} \diagdown \{0,1\}) = \{\frac{m}{n}$*: m i n relativno prosti i* $m < n\}$. *Definirajmo tzv. Riemannovu funkciju sa:*

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{, ako je } x \in [0,1] \diagdown A \\ \\ \frac{1}{n} & \text{, ako je } x = \frac{m}{n} \in A \end{cases} \tag{1.2}$$

Može se pokazati da je f *neprekidna u svim točkama* $x_0 \in [0,1]$ *kojima je funkcijska vrijednost* $f(x_0)$ *jednaka 0. Dakle, skup točaka prekida funkcije* f *je upravo skup* A*, koji je prebrojiv. Pokažimo da je* f *integrabilna. Neka je* $\varepsilon > 0$ *bilo koji. Pokaže se da postoji samo konačno mnogo točaka* $x \in A$ *tako da je* $f(x) \geq \frac{\varepsilon}{2}$*. Neka su to točke* $c_1, \ldots, c_i$ *i neka je* $M = \max\{f(c_1), \ldots, f(c_i)\} \geq \frac{\varepsilon}{2}$*. Odaberimo* $n \in \mathbb{N}$ *takav da je* $n > \frac{2Mi}{\varepsilon}$ *i neka je* Δ_n *ekvidistantna particija* $0 < \frac{1}{n} < \frac{2}{n} < \cdots < \frac{n-1}{n} < 1$*. Uočimo da je* $n > \frac{2Mi}{\varepsilon} > \frac{2}{\varepsilon}\frac{\varepsilon}{2}i = i$*. Očito je* $s(f,\Delta_n) = 0$*. U sumi* $S(f,\Delta_n) = \sum_{k=1}^{n} M_k \frac{1}{n}$ *najviše i članova iznosi* $M\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2n}$*, dok su svi preostali članovi* $M_k\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2n}$*. Budući da je i* $M\frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$*, slijedi da se suma* $\sum_{k=1}^{n} M_k \frac{1}{n}$ *može prikazati kao zbroj dvije sume od kojih je svaka manja od* $\frac{\varepsilon}{2}$*. Dakle,* $S(f,\Delta_n) - s(f,\Delta_n) = S(f,\Delta_n) < \varepsilon$*, što dokazuje integrabilnost funkcije* f*. Štoviše,* $\int_a^b f = 0$*.*

Sljedeći teorem govori o ponašanju *niza omeđenih funkcija* $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ koji *uniformno konvergira* prema nekoj funkciji $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Prije tog teorema, podsjetimo se sljedećih dvaju bitnih definicija.

Definicija 1.21 *Kažemo da niz* (f_n) *funkcija* $f_n : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *konvergira obično (ili po točkama) prema funkciji* $f : [a,b] \to \overline{\mathbb{R}}$ *i pišemo* $f_n \to f$ *ako je, za sve* $x \in X$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$*. Ako je, uz to, i* $f_n \leq f_{n+1}$ *(odnosno* $f_n \geq f_{n+1}$*), za sve* n*, pisat ćemo* $f_n \uparrow f$ *(odnosno* $f_n \downarrow f$*) i reći da niz* f_n *raste (pada) prema funkciji* f*.*

Definicija 1.22 *Kažemo da niz (f_n) funkcija $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ konvergira uniformno (ili jednoliko) prema funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ako vrijedi sljedeći uvjet:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in \mathbb{N})(\forall x \in X)(\forall n \in \mathbb{N})\ n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Teorem 1.23 *Neka je (f_n) niz omeđenih funkcija $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f_0 : [a, b] \to \mathbb{R}$. Ako je svaka od funkcija f_n integrabilna, onda je i f_0 integrabilna funkcija i vrijedi $\int_a^b f_0 = \lim(\int_a^b f_n)$.*

Ako u prethodnom teoremu funkciju f_0 shvatimo kao "limes" niza (f_n), onda prethodni teorem kaže da vrijedi

$$\int_a^b \lim(f_n) = \lim(\int_a^b f_n),$$

pa se kaže da kod uniformne konvergencije niza funkcija $\int_a^b$ i lim komutiraju.

Sljedeći korolar je izravna posljedica prethodnog teorema, a govori o ponašanju integrala kod uniformne konvergencije *reda funkcija.*

Teorem 1.24 *Neka je $\sum f_n$ red omeđenih funkcija $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ koji uniformno konvergira prema funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Ako je svaka od funkcija f_n integrabilna, onda je i funkcija f integrabilna i vrijedi $\int_a^b f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$*

Ako u prethodnom korolaru funkciju f zapišemo kao $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$, onda prethodni korolar kaže da vrijedi

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n$$

pa se kaže da kod uniformne konvergencije reda funkcija $\int_a^b$ i $\sum_{n=1}^{\infty}$ komutiraju.

Na kraju ovog potpoglavlja osvrnut ćemo se na tzv. Osnovni teorem integralnog računa, čuvenu Newton-Leibnizovu formulu. Naime, u teoriji diferencijalnog računa jedan od problema koji smo rješavali bio je za zadanu funkciju f odrediti njenu derivaciju f'. Inverzno pitanje je možemo li za danu funkciju f odrediti funkciju g tako da vrijedi $g' = f$. Pokazat će se da je odgovor na to pitanje usko vezan uz pojam određenog integrala i već spomenutu Newton-Leibnizovu formulu. Navedimo najprije sljedeću definiciju.

Definicija 1.25 (Primitivna funkcija) *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ interval i $f : X \to \mathbb{R}$ funkcija. Derivabilna funkcija $F : X \to \mathbb{R}$ takva da je $F'(x) = f(x)$, za svaki $x \in X$, naziva se primitivna funkcija za funkciju f (na intervalu X).*

Teorem 1.26 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ konveksan skup te $F, G : X \to \mathbb{R}$ dvije primitivne funkcije za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$. Tada postoji konstanta $c \in \mathbb{R}$ tako da je, za svaki $x \in X$, $F(x) = G(x) + c$.*

Teorem 1.27 *Neka je $X \subseteq \mathbb{R}$ konveksan skup i $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Tada je funkcija $F : X \to \mathbb{R}$, zadana s*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt, x \in X$$

primitivna funkcija za f, pri čemu je $a \in X$ bilo koja točka.

Iskažimo i dokažimo sada Osnovni teorem integralnog računa, poznat i pod nazivom Newton-Leibnizova formula.

Teorem 1.28 (Newton-Leibnizova formula) *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna funkcija. Ako f ima primitivnu funkciju, onda vrijedi*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

gdje je $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *proizvoljna primitivna funkcija za* f.

Dokaz. *Po pretpostavci postoji derivabilna funkcija* $G : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tako da je* $G'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$. *Neka je* $D = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ *proizvoljna particija segmenta* $[a, b]$. *Budući da je* G *derivabilna na svakom podsegmentu* $[x_{k-1}, x_k]$, *primjenom Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti, vrijedi* $G(x_k) - G(x_{k-1}) = G'(c_k)(x_k - x_{k-1}) = f(c_k)(x_k - x_{k-1})$, *gdje je* $c_k \in \langle x_{k-1}, x_k \rangle$. *Sada dobivamo* $G(b) - G(a) = \sum_{k=1}^{n} (G(x_k) - G(x_{k-1})) = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1})$, *a time i* $s(f, D) \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)(x_k - x_{k-1}) \leq S(f, D)$. *Dakle, za svaku particiju* D *segmenta* $[a, b]$ *vrijedi* $s(f, D) \leq G(b) - G(a) \leq S(f, D)$ *pa po definiciji gornjeg i donjeg Riemannovog integrala mora biti* $I_*(f) \leq G(b) - G(a) \leq I^*(f)$. *Kako je* f *integrabilna funkcija, vrijedi* $I_*(f) = I^*(f)$ *pa zaključujemo da je* $\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a)$. *Neka je* $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ *proizvoljna primitivna funkcija za f. Po Teoremu 1.26 postoji* $c \in \mathbb{R}$ *tako da, za svaki* $x \in [a, b]$ *vrijedi* $F(x) = G(x) + c$. *Slijedi* $F(b) - F(a) = (G(b) + c) - (G(a) + c) = G(b) - G(a) = \int_a^b f(x)dx$. ■

1.2 Lebesgueov integral

Započnimo ovo potpoglavlje primjerima koji govore o lošem ponašanju Riemannovog integrala u graničnom slučaju, tj. ako imamo niz (f_n) omeđenih funkcija na segmentu $[a, b]$ integrabilnih u Riemannovom smislu koji konvergira prema funkciji $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ prirodno se postavljaju sljedeća pitanja:

1. Je li f integrabilna u Riemannovom smislu?
2. Postoji li $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx$?
3. Ako su odgovori na prva dva pitanje potvrdni, je li tada $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$?

Prema Teoremu 1.23, odgovor na ova pitanja je potvrdan ako niz (f_n) uniformno konvergira prema f. No, to je često prejak zahtjev na niz (f_n). Pogledajmo sljedeća tri primjera koja ilustriraju da je odgovor na gore postavljena pitanja u općenitom slučaju negativan.

Primjer 1.29 *Posložimo racionalne brojeve iz skupa* $[0,1]\cap\mathbb{Q}$ *u niz* $q_1, q_2, \ldots$. *Kako je* $\mathbb{Q}$ *prebrojiv, to je moguće. Definirajmo sada, za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *funkciju* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ *sa*

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & , \textit{ ako je } x \in \{q_1, \ldots, q_n\} \\ 0 & , \textit{ inače} \end{cases} \tag{1.3}$$

Za svaki $n \in \mathbb{N}$ *funkcija* f_n *je integrabilna jer ima samo konačno mnogo točaka prekida i vrijedi* $\int_a^b f_n(x)dx = 0$. *No, granična funkcija* $f = \lim_n f_n$ *je tzv. Dirichletova funkcija*

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \textit{ ako je } x \textit{ racionalan} \\ 0 & , \textit{ ako je } x \textit{ iracionalan} \end{cases} \tag{1.4}$$

koja nije integrabilna u Riemannovom smislu.

Primjer 1.30 *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *funkcija* $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, *definirane formulom*

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^3 x & , \textit{ ako je } 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ 4n^2 - 4n^3 x & , \textit{ ako je } \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & , \textit{ ako je } \frac{1}{n} \leq x < 1 \end{cases} \tag{1.5}$$

su integrabilne u Riemannovom smislu i vrijedi $\int_0^1 f_n(x)dx = n$ *pa očito u* $\mathbb{R}$ *ne postoji* $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx$.

Primjer 1.31 *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ funkcija $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, definirane formulom*

$$f_n(x) = \begin{cases} 4n^2x & , \text{ ako je } 0 \leq x < \frac{1}{2n} \\ 4n - 4n^2x & , \text{ ako je } \frac{1}{2n} \leq x < \frac{1}{n} \\ 0 & , \text{ ako je } \frac{1}{n} \leq x < 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

su integrabilne u Riemannovom smislu i vrijedi $\int_0^1 f_n(x)dx = 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Kako niz (f_n) konvergira prema funkciji $f = 0$, zaključujemo da je $1 = \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx = 0$.

Kako bi definirali pojam *Lebesgueovog integrala* (za *izmjerive funkcije*) potrebni su nam neki fundamentalni pojmovi i rezultati iz teorije mjere, npr. pojam σ - *algebre*, *mjere na* σ - *algebri* i izmjerivih funkcija.

Definicija 1.32 (Prsten skupova) *Neka je X neprazan skup i $\mathcal{R}$ neprazna familija podskupova od X. Kažemo da je $\mathcal{R}$ prsten (podskupova od X) ako za svaka dva podskupa $A, B \in \mathcal{R}$ vrijedi $A \cup B$, $A \setminus B \in \mathcal{R}$.*

Definicija 1.33 (σ - prsten) *Neka je X neprazan skup i $\mathcal{F}$ neprazna familija podskupova od X. Kažemo da je $\mathcal{F}$ σ - prsten ako vrijedi:*

1. $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$
2. *Ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ prebrojiva familija elemenata iz $\mathcal{F}$, onda je i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$*

Sljedeći primjer pokazuje da postoji prsten koji nije σ - prsten.

Primjer 1.34 *Promotrimo skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}$ i definirajmo $\mathcal{F} = \{X \subseteq \mathbb{N} : X \text{ konačan}\}$. Očito je $\mathcal{F}$ prsten jer je unija i presjek dvaju konačnih skupova opet konačan skup. No, $\mathcal{F}$ nije σ - prsten. Stavimo $A_n = \{n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \mathbb{N}$ koji nije konačan skup.*

Definicija 1.35 (σ - algebra) *Familiju $\mathcal{A}$ podskupova od X nazivamo σ - algebra skupova na X ako vrijedi:*

1. $X \in \mathcal{A}$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$
3. *Ako je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}$, onda vrijedi da je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$.*

Uređeni par $(X, \mathcal{A})$ nazivamo izmjeriv prostor, a svaki element $A \in \mathcal{A}$ nazivamo izmjeriv skup.

Primjer 1.36 *Navedimo nekoliko primjera familija podskupova od X koje jesu σ - algebre i nekih koje nisu.*

1. *Neka je X bilo koji skup i 2^X njegov partitivni skup. Tada su familije $\mathcal{A} = 2^X$ i $\mathcal{A}' = \{\emptyset, X\}$ σ - algebre na skupu X.*
2. *Neka je $X = [0, 1]$. Familija $\mathcal{A} = \{\emptyset, X, [0, 1/2], \langle 1/2, 1]\}$ je σ - algebra na X.*
3. *Neka je $X = \mathbb{R}$. Familija $\mathcal{A} = \{A \subseteq \mathbb{R} : A$ je diskretan ili A^c je diskretan$\}$*[1] *je σ - algebra na $\mathbb{R}$. Očigledno da $\mathcal{A}$ zadovoljava prva dva svojstva iz definicije σ - algebre. Neka je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ niz skupova iz $\mathcal{A}$. Ako su svi skupovi A_n diskretni, onda je i njihova unija $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ diskretan skup. Ako, pak, postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ za koji je $A_{n_0}^c$ diskretan, onda je $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n^c \subseteq A_{n_0}^c$ pa je $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c$. diskretan skup jer je podskup diskretnog skupa $A_{n_0}^c$*
4. *Neka je X bilo koji beskonačan skup. Familija $\mathcal{A} = \{A \subseteq X : A$ konačan ili A^c konačan$\}$ nije σ - algebra na X. Naime, neka je (x_n) niz međusobno*

[1] Za skup kažemo da je diskretan ako je konačan ili prebrojiv.

različitih točaka iz X. Svi skupovi $A_n = \{x_{2n-1}\}$ pripadaju familiji $\mathcal{A}$, no ipak i $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ i $(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n)^c$ su beskonačni skupovi.

Propozicija 1.37 *Neka je $(\mathcal{A}_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ bilo koja familija σ - algebri na skupu X. Tada je i $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ također σ - algebra na skupu X.*

Korolar 1.38 *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova od X. Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) = \bigcap\{\mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ je } \sigma \text{ - algebra i } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\}$$

najmanja (u smislu inkluzije) σ - algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$. Za $\sigma(\mathcal{F})$ kažemo da je σ - algebra generirana sa $\mathcal{F}$.

Definicija 1.39 (Borelova σ - algebra) *Neka je $(X,\mathcal{U})$ topološki prostor. Za σ - algebru $\sigma(\mathcal{U})$ generiranu topologijom $\mathcal{U}$ kažemo da je Borelova σ - algebra na skupu X i označavamo je s $\mathcal{B}(X,\mathcal{U})$ ili sa $\mathcal{B}(\mathcal{U})$. Elemente Borelove σ - algebre $\mathcal{B}(X,\mathcal{U})$ nazivamo Borelovim skupovima.*

Sada ćemo se okrenuti pojmu mjere na σ - algebri. Precizna definicija glasi:

Definicija 1.40 (Mjera na σ - algebri) *Neka je $\mathcal{A}$ σ - algebra na skupu X. Mjera na $\mathcal{A}$ je svako preslikavanje $\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}$ sa sljedećim svojstvima:*

1. *Za svaki $A \in \mathcal{A}$ je $\mu(A) \geq 0$,*
2. *$\mu(\emptyset) = 0$,*
3. *Za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz $\mathcal{A}$ vrijedi*

$$\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

Za $\mu(A)$ kaže se da je mjera skupa A. Uređena trojka $(X,\mathcal{A},\mu)$ naziva se prostor mjere. Kažemo da je mjera konačna ako je $\mu(X) < \infty$.

Primjer 1.41 *Navedimo nekoliko primjera mjera:*

1. *Ako za svaki $A \in \mathcal{A}$ stavimo $\mu(A) = 0$, dobijamo tzv. trivijalnu mjeru.*

2. *Funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definirana sa*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , \textit{ ako je } A = \emptyset \\ +\infty & , \textit{ ako je } A \neq \emptyset \end{cases} \tag{1.7}$$

   je mjera.

3. *Funkcija $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definirana sa*

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & , \textit{ ako je } A = \emptyset \\ 1 & , \textit{ ako je } A \neq \emptyset \end{cases} \tag{1.8}$$

   nije mjera. Naime, ako su A_1 i A_2 disjunktni neprazni skupovi, onda je $\mu(A_1 \cup A_2) = 1$, dok je $\mu(A_1) + \mu(A_2) = 2$.

4. *Neka je $x \in X$ bilo koja točka. Funkcija $\delta_x : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ definirana sa:*

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & , \textit{ ako je } x \in A \\ 0 & , \textit{ ako } x \notin A \end{cases} \tag{1.9}$$

   je mjera. Naziva se mjera koncentrirana u točki x.

Napomenimo kako se pojam mjere može definirati i na σ - prstenu.

Nakon što smo definirali izmjeriv prostor $(X, \mathcal{A})$, možemo se okrenuti pojmu izmjerive funkcije. Prije toga napomenimo da za funkciju $f : A \to B$ sa

$$f^{-1}(B) = \{x \in A : f(x) \in B\} \subseteq A$$

označavamo *original* (ili *prasliku*) skupa B, s obzirom na funkciju f.

Definicija 1.42 *Neka su* $(X, \mathcal{A})$ *i* $(Y, \mathcal{B})$ *izmjerivi prostori,* $A \subseteq X$ *i* $f : A \to Y$ *funkcija. Kažemo da je funkcija* f *izmjeriva u paru* σ *- algebri* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *(ili kraće,* $\mathcal{A}$ *-* $\mathcal{B}$ *izmjeriva) ako je, za svaki* $B \in \mathcal{B}$*,* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$*.*

U teoriji integracije zanimat će nas samo one funkcije koje poprimaju vrijednosti u skupu $\mathbb{R}$ ili $\overline{\mathbb{R}}$. Pri tome se za $\mathcal{B}$ uzima Borelova σ - algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, odnosno $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$. Za funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ reći ćemo da je $\mathcal{A}$ - izmjeriva ako je, za svaki $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Ako u definiciji izmjerive funkcije dodatno uzmemo da je $(X, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ Borelova σ - algebra na $\mathbb{R}$, tada za funkciju f kažemo da je *izmjeriva u Borelovom smislu.*

Teorem 1.43 *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \subseteq X$ *bilo koji podskup od* X *i* $f : A \to \mathbb{R}$ *(ili* $\overline{\mathbb{R}}$*) funkcija. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. f *je* $\mathcal{A}$ *- izmjeriva.*

2. $f^{-1}(V) \in \mathcal{A}$*, za svaki otvoren skup* V *u* $\mathbb{R}$ *(odnosno* $\overline{\mathbb{R}}$*).*

3. $f^{-1}(C) \in \mathcal{A}$*, za svaki zatvoreni skup* C *u* $\mathbb{R}$ *(odnosno* $\overline{\mathbb{R}}$*).*

Teorem 1.44 *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *i* $f, g : A \to [-\infty, +\infty]$ *bilo koje dvije* $\mathcal{A}$ *- izmjerive funkcije. Tada vrijedi:*

1. $\{x \in A : f(x) < g(x)\} \in \mathcal{A}$

2. $\{x \in A : f(x) \geq g(x)\} \in \mathcal{A}$

3. $\{x \in A : f(x) = g(x)\} \in \mathcal{A}$

Polako se približavamo pojmu Lebsgueovog integrala. Sljedeći korak je definicija *jednostavne funkcije.* Za tu definiciju treba nam pojam *stepenaste funkcije.*

Definicija 1.45 (Stepenasta funkcija) *Neka je* $A \subseteq X$ *podskup od* X. *Za funkciju* $f : A \to [-\infty, \infty]$ *kažemo da je stepenasta funkcija ako poprima samo konačno mnogo različitih vrijednosti.*

Definicija 1.46 *Neka je* $A \subseteq X$ *podskup od* X. *Funkciju* $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ *definiranu sa*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & , \textit{ ako je } x \in A \\ \\ 0 & , \textit{ ako je } x \notin A \end{cases} \tag{1.10}$$

nazivamo karakteristična funkcija skupa A.

Uočimo da je karakteristična funkcija jedan primjer stepenaste funkcije.

Definicija 1.47 (Jednostavna funkcija) *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \subseteq X$ *i* $f : A \to \mathbb{R}$ *stepenasta i* $\mathcal{A}$ *- izmjeriva funkcija. Tada kažemo da je* f jednostavna funkcija *(s obzirom na izmjeriv prostor* $(X, \mathcal{A})$*).*

Svaka jednostavna funkcija $f : A \to \mathbb{R}$ dopušta prikaz u obliku

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}, \tag{1.11}$$

gdje su $A_1, \ldots, A_n$ disjunktni i izmjerivi skupovi takvi da je $A = \bigcup_{i=1}^{n} A_n$, $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ različiti realni brojevi. To se dobije za $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\} = f(A)$ i $A_i = f^{-1}(\alpha_i)$. Ovaj prikaz naziva se standardni prikaz jednostavne funkcije.

Sljedeća dva teorema govore da za svaku izmjerivu funkciju postoji niz jednostavnih funkcija koji joj konvergira. Ovi teoremi će se pokazati korisnima u definiciji integrala izmjerive funkcije.

Teorem 1.48 *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *skup i* $f : A \to [0, \infty]$ *izmjeriva funkcija. Tada postoji niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jednostavnih funkcija* $f_n : A \to [0, \infty\rangle$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$, *za svaki* $x \in A$

2. *Niz funkcija* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira po točkama prema funkciji* f, *tj. vrijedi*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \ , \text{ za svaki } x \in A.$$

3. *Ako je funkcija* f *omeđena na skupu* $K \subseteq A$, *onda niz funkcija* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira uniformno prema* f *na cijelom* K.

Teorem 1.49 *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *skup i* $f : A \to [-\infty, \infty]$ *izmjeriva funkcija. Tada postoji niz* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *jednostavnih funkcija* $f_n : A \to \langle -\infty, \infty \rangle$ *sa sljedećim svojstvima:*

1. $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \cdots \leq f(x)$, *za svaki* $x \in A$

2. *Niz funkcija* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira po točkama prema funkciji* f, *tj. vrijedi*

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x), \ , \text{ za svaki } x \in A.$$

3. *Ako je funkcija* f *omeđena na skupu* $K \subseteq A$, *onda niz funkcija* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergira uniformno prema* f *na cijelom* K.

Sljedeći korolar jednostavna je posljedica prethodna dva teorema.

Korolar 1.50 *Neka je* $(X, \mathcal{A})$ *izmjeriv prostor,* $A \in \mathcal{A}$ *skup i* $f : A \to [-\infty, \infty]$ *funkcija. Funkcija* f *je* $\mathcal{A}$ *- izmjeriva ako i samo ako postoji niz jednostavnih funkcija koji konvergira obično (po točkama) prema funkciji* f *na cijelom skupu* A.

Neka je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ prostor mjere. Za skup $N \subseteq X$ reći ćemo da je *zanemariv* ako postoji izmjeriv skup Z takav da je $N \subseteq Z$ i $\mu(Z) = 0$. Neka je $T \subseteq X$. Ako neka tvrdnja ili svojstvo vrijede za sve $x \in T$, osim za $x \in N$, gdje je $N \subseteq T$ zanemariv skup, onda kažemo da ta tvrdnja ili svojstvo vrijedi μ - *skoro svuda* ili kraće, *skoro svuda*. Koristimo oznaku (s.s.). Tako, primjerice, $f = g(s.s)$ znači da je skup $\{x \in X : f(x) \neq g(x)\}$ zanemariv.

Konačno smo došli do pojma integrala koji se definira samo za izmjerive funkcije. Konstrukcija se provodi u tri koraka: najprije se definira pojam integrala za nenegativne jednostavne funkcije. Zatim se pojam integrala proširuje na nenegativne izmjerive funkcija, a potom i na sve izmjerive funkcije.

Definicija 1.51 *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty\rangle$ jednostavna nenegativna funkcija s prikazom*

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

gdje su $A_1, \dots, A_n$ disjunktni skupovi i $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ nenegativni realni brojevi.

Broj

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i)$$

naziva se integral funkcije f (obzirom na mjeru μ). Za funkciju f kažemo da je integrabilna ako je $\int f d\mu < \infty$.

Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E)$$

naziva se integral funkcije f na skupu E (s obzirom na mjeru μ). Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E ako je $\int_E f d\mu < \infty$.

Može se pokazati da definicija integala nenegativne jednostavne funkcije f ne ovisi o prikazu preko skupova $A_1, \dots, A_n$ i realnih brojeva $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Dakle, definicija je konzistentna.

Prisjetimo se da je Lebesgueova mjera λ na $\mathbb{R}$ generalizacija pojma duljine na najveću moguću familiju podskupova od $\mathbb{R}$. Takvu familiju podskupova od $\mathbb{R}$ zovemo Lebesgueova σ - algebra. Lebesgueova mjera je definirana preko Lebesgueove vanjske mjere λ^* na $\mathbb{R}$ koja svakom svakom od skupova $[a,b]$, $[a,b\rangle$, $\langle a,b]$ i $\langle a,b\rangle$ pridružuje broj $b-a$. Pokaže se da i Lebesgueova mjera na $\mathbb{R}$ svakom od skupova $[a,b]$, $[a,b\rangle$, $\langle a,b]$ i $\langle a,b\rangle$ pridružuje broj $b-a$. Više o Lebesgueovoj mjeri može se pronaći u [1], poglavlje 2.

Primjer 1.52 *Neka je $f = \chi_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Dirichletova funkcija, a za mjeru uzmimo Lebesgueovu mjeru λ. Vrijedi:*

1. $\int \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q}) = 1 \cdot 0 = 0.$

2. *Neka je $E \subseteq \mathbb{R}$ bilo koji izmjeriv skup, npr. $[a,b]$. Tada je*

$$\int_E \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda = \int \chi_E \chi_{\mathbb{Q}} d\lambda = \int \chi_{(\mathbb{Q}\cap E)} d\lambda = 1 \cdot \lambda(\mathbb{Q} \cap E) = 1 \cdot 0 = 0.$$

   Dakle, $\chi_{\mathbb{Q}}$ je integrabilna na svakom izmjerivom skupu $E \subseteq \mathbb{R}$.

   Prisjetimo se da $\chi_{\mathbb{Q}}$ nije integrabilna u Riemannovom smislu ni na jednom segmentu.

Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Skup svih nenegativnih jednostavnih funkcija definiranih na X označavat ćemo sa $\mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ ili kraće sa $\mathcal{F}_+$. Taj skup nije vektorski prostor, ali ima sljedeća svojstva:

Teorem 1.53 *Neka su $f, g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \geq 0$ realan broj. Vrijedi:*

1. $\alpha f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$

2. $f + g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$

3. $f \leq g \Rightarrow g - f \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$

4. *$f \vee g, f \wedge g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$*

Teorem 1.54 *Neka su $f, g \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$ i $\alpha \geq 0$ realan broj. Tada vrijedi:*

1. *$\int \alpha f d\mu = \alpha \int f d\mu$ (pozitivna homogenost)*

2. *$\int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$ (aditivnost)*

3. *$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$ (monotonost)*

Teorem 1.55 *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f, f_n \in \mathcal{F}_+(X, \Sigma, \mu)$, $n \in \mathbb{N}$, funkcije sa sljedeća dva svojstva:*

1. *$f_n \leq f_{n+1}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$,*

2. *(f_n) konvergira po točkama prema f.*

Tada je

$$\int f d\mu = \lim_{n \to +\infty} \int f_n d\mu$$

Sada slijedi drugi korak u izgradnji integrala izmjerive funkcije - definicija integrala nenegativne izmjerive funkcije. Precizna definicija je sljedeća:

Definicija 1.56 *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ nenegativna Σ - izmjeriva funkcija. Broj*

$$\int f d\mu := \sup\{\int g d\mu : g \in \mathcal{F}+, g \leq f\}$$

naziva se integral funkcije f (s obzirom na mjeru μ). Kažemo da je f integrabilna ako je $\int f d\mu < \infty$.

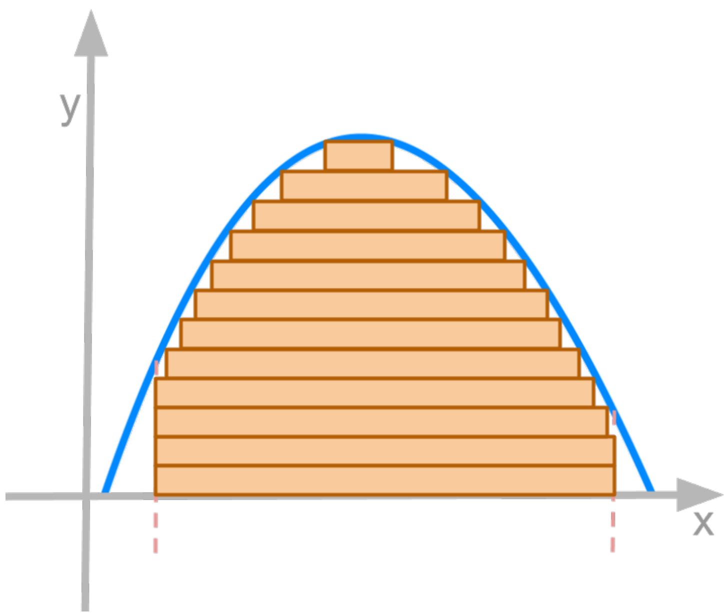
Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Broj

$$\int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu$$

naziva se integral funkcije f na skupu E (s obzirom na mjeru μ). Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E ako je $\int_E f d\mu < \infty$.

Lako se vidi da je ova definicija konzistentna s Definicijom 1.51, tj ako je $f \in \mathcal{F}_+$, onda se vrijednost integrala iz Definicije 1.51 i prethodne definicije podudaraju. Sa prethodnom definicijom dano je proširenje pojma integrala sa skupa $\mathcal{F}_+$ svih nenegativnih jednostavnih funkcija na skup svih nenegativnih Σ - izmjerivih funkcija.

Ideja koja se krije iza Definicije 1.56 prikazana je na Slici 1.2:



Slika 1.2: Prikaz aproksimacije Lebesgueovog integrala jednostavnom funkcijom.

Teorem 1.57 *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere. Ako je $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ rastući niz funkcija iz $\mathcal{F}_+$ koji konvergira prema Σ - izmjerivoj funkciji $f : X \to [0, \infty]$, onda je*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$$

.

Za Σ - izmjerive funkcije vrijedi analogon Teorema 1.54 o pozitivnoj homogenosti, aditivnosti i monotonosti kao za nenegativne jednostavne funkcije pa ga nećemo posebno navoditi.

Sljedeći teorem daje dva važna svojstva nenegativnih Σ - izmjerivih funkcija koristeći svojstvo "skoro svuda".

Teorem 1.58 *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f, g : X \to [0, \infty]$ nenegativne i Σ - izmjerive funkcije. Tada vrijedi:*

1. $\int f d\mu = 0 \Longleftrightarrow f = 0(s.s)$

2. *Ako je $f = g(s.s.)$, onda je $\int f d\mu = \int g d\mu$*

U teoriji integrala od posebne je važnosti tzv. Levijev teorem koji nam govori da na skupu svih nenegativnih izmjerivih funkcija integral i limes rastućeg niza funkcija "komutiraju". Taj rezultat poznat je i pod nazivom Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji.

Teorem 1.59 (Lebesgueov teorem o monotonoj konvergenciji) *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ Σ - izmjeriva funkcija. Nadalje, neka je $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ niz Σ - izmjerivih funkcija $f_n : X \to [0, \infty]$ sa sljedeća dva svojstva:*

1. $f_n \leq f_{n+1}$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$,

2. $\lim_{n \to \infty} f_n = f(s.s.)$

Tada je

$$\int f d\mu = \lim_{n \to \infty} \int f_n d\mu.$$

Sljedeći rezultat, tzv. Fatouova lema, govori o ponašanju integrala po mjeri prema graničnom postupku.

Teorem 1.60 (Fatouova lema) *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [0, \infty]$ i $f_n : X \to [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ - izmjerive funkcije. Ako je $f = \liminf_n f_n (s.s.)$, onda je*

$$\int f d\mu \leq \liminf_n \int f_n d\mu.$$

Došli smo do trećeg koraka u našem postupku izgradnje integrala preko teorije mjere - definicije integrala izmjerive funkcije. Prije toga podsjetimo se da s f^+ označavamo funkciju $f^+ = f \vee 0$, a sa f^- funkciju $f^- = -(f \wedge 0)$.

Definicija 1.61 *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere i $f : X \to [-\infty, \infty]$ neka Σ - izmjeriva funkcija.*

Ako je barem jedan od brojeva $\int f^+ d\mu$ i $\int f^- d\mu$ konačan, onda se definira

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

i nazivamo ga integral funkcije f (s obzirom na mjeru μ). Za funkciju f kažemo da je integrabilna ako je $\int f d\mu < \infty$.

Neka je $E \in \Sigma$ izmjeriv skup. Ako je definiran integral $\int \chi_E f d\mu$, onda broj

$$\int_E f d\mu := \int f \chi_E d\mu$$

nazivamo integral funkcije f na skupu E (s obzirom na mjeru μ). Za funkciju f kažemo da je integrabilna na skupu E ako je $\int_E f d\mu < \infty$.

Ova je definicija konzistentna s definicijom integrala nenegativne Σ - izmjerive funkcije.

Razliku u Riemannovom i Lebesgueovom pristupu integralu funkcije možemo vidjeti na Slici 1.2.

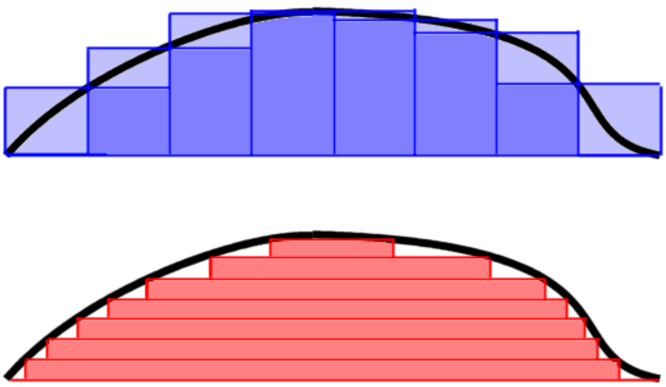
Teorem 1.62 *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f, g : X \to [-\infty, \infty]$ dvije Σ - izmjerive funkcije takve da je $f = g (s.s.)$. Ako je definiran integral*

$\int f d\mu$, onda je definiran i integral $\int g d\mu$ i vrijedi

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Teorem 1.63 *Neka je (X, Σ, μ) prostor mjere, a $f : X \to [-\infty, \infty]$ Σ - izmjeriva funkcija. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. $f = 0$ *(s.s.)*,
2. $\int |f| d\mu = 0$,
3. $\int f \chi_A d\mu = 0$, *za svaki* $A \in \Sigma$.



Slika 1.3: Razlika između Rieamnnovog i Lebesgueovog integrala. Uočimo da se kod Riemannovog integrala "cijepa" os x, a kod Lebesgueovog integrala os y.

Napomenimo da za integral Σ - izmjerive funkcije vrijedi homogenost, aditivnost (u slučaju kad vrijednosti u zbroju nisu beskonačne i različitih predznaka) i monotonost.

Sljedeći teorem daje koristan kriterij pod kojim limes i integral mogu zamijeniti mjesta i jedan je od najpoznatijih teorema u teoriji integracije.

Teorem 1.64 (Lebesgueov teorem o dominiranoj konvergenciji) *Neka su* $f, f_n : X \to [-\infty, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$, Σ *- izmjerive funkcije i neka je* $g : X \to [0, \infty]$ *integrabilna funkcija. Ako su ispunjeni sljedeći uvjeti:*

1. $f = \lim_n f_n$ *(s.s.)*,
2. $(\forall n \in \mathbb{N})\ |f_n| \leq g$,

onda su sve funkcije f *i* f_n, $n \in \mathbb{N}$ *integrabilne i vrijedi*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Na kraju ovog poglavlja izreći ćemo teorem koji daje vezu između Riemannovog i Lebesgueovog integrala. Podsjetimo se da je Riemannov integral definiran samo za omeđene funkcije na nekom segmentu $[a, b]$.

Teorem 1.65 (Lebesgueov kriterij za R-integrabilnost) *Neka je* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *omeđena funkcija.*

1. *Funkcija* f *je R-integrabilna ako i samo ako je neprekidna skoro svuda na* $[a, b]$.
2. *Ako je* f *integrabilna u Riemannovom smislu, onda je integrabilna i u Lebesgueovom smislu i pri tome se Lebesgueov integral* $\int_{[a,b]} f d\lambda$ *podudara s Riemannovim integralom* $\int_a^b f(x)dx$.

Prethodni teorem je koristan alat za računanje Lebesgueova integrala. Primjerice, pretpostavimo da treba izračunati Lebesgueov integral $\int f d\lambda$ funkcije $f : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$. Ako je f R-integrabilna na nizu segmenata $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$, gdje $a_n \to -\infty$, a $b_n \to \infty$, definiramo funkcije $f_n = f\chi_{[a_n,b_n]} : \mathbb{R} \to [0, \infty\rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Tada $f_n \to f$ pa pomoću Lebesgueova teorema o monotonoj konvergenciji dobivamo:

$$\int f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int f\chi_{[a_n,b_n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[a_n,b_n]} f d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{a_n}^{b_n} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx.$$

Ilustrirajmo ovaj postupak na sljedećem primjeru.

Primjer 1.66 *Izračunajmo:*

1. $\int_{[1,\infty\rangle} \frac{1}{x} d\lambda$,

2. $\int_{[1,\infty\rangle} \frac{1}{x^2} d\lambda$

1. Neka je $X = [1,\infty\rangle$, $f : X \to [0,\infty\rangle$, $f(x) = \frac{1}{x}$. Nadalje, neka je za svaki $n \in \mathbb{N}$, $f_n = f \cdot \chi_{[1,n]}$. Niz nenegativnih izmjerivih funkcija (f_n) je monotono rastući i na cijelom skupu $[0,\infty\rangle$ konvergira prema izmjerivoj funkciji f. Primjenjujući gore opisani postupak, dobivamo:

$$\int_{[1,\infty\rangle} \frac{1}{x} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{x}\chi_{[1,n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_{[1,n]} \frac{1}{x} d\lambda.$$

Kako je funkcija f neprekidna na segmentu $[1, n]$, po Lebesgueovom kriteriju za R-integrabilnost zaključujemo da je ona i R-integrabilna na tom segmentu i da vrijedi

$$\int_{[1,n]} \frac{1}{x} d\lambda = \int_1^n \frac{1}{x} dx = \ln(x).$$

Zato je

$$\int_{[1,\infty\rangle} \frac{1}{x} d\lambda = \infty.$$

Zaključujemo da f nije integrabilna u smislu Lebesguea na $[1,\infty\rangle$.

2. Imitirajući postupak kao u 1., dobivamo

$$\int_{[1,\infty\rangle} \frac{1}{x^2} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int \frac{1}{x^2}\chi_{[1,n]} d\lambda = \lim_{n\to\infty} \int_1^n \frac{1}{x^2} dx = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{n}) = 1.$$

Dakle, funkcija $f(x) = \frac{1}{x^2}$ je integrabilna u smislu Lebesguea na $[1,\infty\rangle$.

Ipak, moguće je da za neku funkciju postoji nepravi Riemannov integral (i to na cijelom $\mathbb{R}$), a da ta funkcija nije integrabilna u Lebesgueovom smislu.

Primjer 1.67 *Promotrimo funkciju* $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{sin(x)}{x}$ *i pripadni nepravi integral* $\int_{\mathbb{R}} \frac{sin(x)}{x}dx$. *Prisjetimo se da je nepravi integral* $\int_a^b g(x)dx$ *neke funkcije* $g : \langle a, b\rangle$ *definiran sa* $\int_a^b g(x)dx := \lim_{c\to a\ b\to d} \int_c^d g(x)dx$. *Ako je domena cijeli skup* $\mathbb{R}$, *onda je* $\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \lim_{a\to-\infty\ b\to\infty} \int_a^b g(x)dx$. *U našem slučaju, lako se vidi da je* $\int_{\mathbb{R}} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty\ b\to\infty} \int_a^b \frac{sin(x)}{x}dx = \pi$. *No, ipak funkcija* f *nije integrabilna u Lebesgueovom smislu jer nepravi integral* $\int_{\mathbb{R}} |\frac{sin(x)}{x}|dx$ *divergira.*

Na kraju ovog poglavlja napomenimo sljedeće: moguće je, koristeći alate iz konstrukcije Lebesgueovog integrala, razmatrajući uniformnu konvergenciju umjesto obične i konačnu aditivnost mjere umjesto prebrojive aditivnosti dobiti integral po mjeri za koji je skup integrabilnih funkcija upravo jednak skupu svih R-integrabilnih funkcija. Više o tome može se naći u [7].

Poglavlje 2

Daniellov integral

Prisjetimo se osnovnih svojstava Riemannovog integrala realne funkcije realne varijable. Ako su dane dvije funkcije $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ i $c \in \mathbb{R}$, tada vrijedi $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ i $\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$. Ako označimo s $I = \int_a^b$, tada je I linearni funkcional. Prisjetimo se i da je $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, čim je $f \geq 0$. Dakle, I je pozitivni linearni funkcional.

Također, prisjetimo se da i Lebesgueov integral ima svojstva linearnosti, homogenosti i pozitivnosti. Dakle, označimo li s $J = \int d\lambda$ Lebesgueov integral, zaključujemo da je J pozitivan linearni funkcional.

Vidjet ćemo da za fundiranje pojma Daniellovog integrala nije potrebna nikakava teorija mjere, već da se Daniellov integral definira aksiomatski. Prisjetimo se da smo za pojam Lebesgueovog integrala morali proći iscrpni kurs teorije mjere prije nego smo mogli izreći osnovne definicije integrala izmjerive funkcije.

Prije nego krenemo na pojam Daniellovog integrala, trebamo *pripremiti teren.* Upoznajmo se s pojmom *vektorske rešetke.*

2.1 Vektorska rešetka

Prisjetimo se da smo za funkcije $f, g : X \to \mathbb{R}$ sa $f \vee g$ označili funkciju koja svakom elementu $x \in X$ pridružuje realni broj $\max\{f(x), g(x)\}$, a sa $f \wedge g$ funkciju koja svakom elementu $x \in X$ pridružuje realni broj $\min\{f(x), g(x)\}$. Očito su operacije $\vee$ i $\wedge$ komutativne i asocijativne. Zbog asocijativnosti možemo izuzimati zagrade i pisati $f_1 \vee \cdots \vee f_n$ i $f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$. Definirali smo i funkcije f^+ i f^- stavljajući

$$f^+ = f \vee 0$$

i

$$f^- = (-f) \vee 0 = -(f \wedge 0).$$

Uočimo da vrijedi

$$|f| = f^+ - f^-.$$

Operacije $\vee$ i $\wedge$ možemo definirati i za proizvoljnu(ne nužno konačnu) familiju funkcija s vrijednostima u proširenom prostoru $\overline{\mathbb{R}}$. Tada će maksimum preći u supremum, a minimum u infimum. Preciznije, neka je A (neprazan) indeksni skup i neka je dana familija $(f_a, a \in A)$ funkcija $f_a : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Tada definiramo

$$\bigvee_{a \in A} f_a = \sup_{a \in A} f_a$$

i

$$\bigwedge_{a \in A} f_a = \inf_{a \in A} f_a.$$

U slučaju da je A konačan skup, imamo $\bigvee_{i=1}^n f_n = f_1 \vee \cdots \vee f_n$.

U klasi svih funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ definirana je relacija parcijalnog uređaja $\leq$ sa $f \leq g$ ako je $f(x) \leq g(x)$, za sve $x \in X$. Tada je $f \vee g$ najmanja gornja međa za f i za g, a $f \wedge g$ je najveća donja međa za f i za g.

Definicija 2.1 (Vektorska rešetka) *Neka je X neprazan skup i $\Re$ klasa nekih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$. Kažemo da $\Re$ vektorska rešetka (nad X) ako su za sve funkcije $f, g \in \Re$ i sve $c \in \mathbb{R}$ funkcije $f + g$, cf, $f \vee g$ i $f \wedge g \in \Re$.*

Primjer 2.2 *Klasa svih neprekidnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je jedna vektorska rešetka. Ipak, potklasa svih neprekidno derivabilnih funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nije vektorska rešetka: za funkcije $f(x) = x$ i $g(x) = -x$ funkcije $(f \vee g)(x) = |x|$ i $(f \wedge g)(x) = -|x|$ nisu neprekidno derivabilne na cijelom $\mathbb{R}$.*

Primjer 2.3 *Ako je na skupu X dana topologija, onda je klasa svih neprekidnih funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ vektorska rešetka.*

Napomena 2.4 *Kako je $f \wedge g = f + g - (f \vee g)$ i $f \vee g = (f - g) \wedge 0 + g$, zaključujemo da je vektorski prostor funkcija jedna vektorska rešetka ako je zatvoren na operaciju koja funkciji f pridružuje funkciju $f^+ = f \vee 0$. Kako je $|f| = f^+ + (-f)^+$, svaka vektorska rešetka sadrži i funkciju $|f|$. Stoga je, ekvivalentno, vektorski prostor funkcija jedna vektorska rešetka ako je zatvoren na operaciju koja funkciji f pridružuje funkciju $|f|$.*

Pogledajmo kako glasi precizna definicija *Daniellovog integrala*:

Definicija 2.5 (Daniellov integral) *Neka je X neprazan skup i $\Re$ vektorska rešetka funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Kažemo da je funkcija $I : \Re \to \mathbb{R}$* ***Daniellov integral*** *nad $\Re$ ako vrijedi:*

(a) $I(f + g) = I(f) + I(g)$,

(b) $I(cf) = cI(f)$, $c \in \mathbb{R}$,

(c) $I(f) \geq 0$, *ako je* $f \geq 0$

(d) *Ako* $f_n \downarrow 0$[1], *onda* $(I(f_n)) \to 0$.

[1] ovdje i u (c) 0 označava nul-funkciju

Uočimo da svojstva (a) i (b) govore da je I linearni funkcional, a svojstvo (c) dodatno govori da je I pozitivni linearni funkcional. Svojstvo (d) nazivamo svojstvom neprekidnosti. Prisjetimo se da klasični (Riemannov) integral te Lebesgueov integral imaju prva tri svojstva. Može se pokazati (koristeći Dinijev teorem) da Riemannov integral ima i četvrto svojstvo iz definicije. Također, i Lebesgueov integral ima posljednje svojstvo. Dakle, Riemannov i Lebesgueov integral su samo posebni slučajevi Daniellovog integrala.

Iz prva tri svojstva lako se vidi da iz $f \leq g$ slijedi $I(f) \leq I(g)$, a iz četvrtog svojstva slijedi da za niz funkcija (f_n) koji raste (ili pada) prema f, niz $(I(f_n))$ konvergira prema $I(f)$.

Za pozitivne linearne funkcionale, uvjet (d) iz Definicije 2.5 ekvivalentan je svakoj od sljedeće dvije tvrdnje:

1. Ako je (f_n) rastući niz funkcija u $\Re$ i ako postoji funkcija $f \in \Re$ takva da je, za sve $x \in X$, $f(x) \leq \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, tada je $I(f) \leq \lim_{n\to\infty} I(f_n)$.

2. Ako je (f_n) niz nenegativnih funkcija u $\Re$ i $f \in \Re$ takva da je $f \leq \sum f_n$, tada je $I(f) \leq \sum I(f_n)$.

Da bismo to dokazali, potrebna nam je sljedeća lema. Prije toga, napomenimo, da je za vektorsku rešetku $\Re$ nad X skup $P \subseteq X$ *polaran skup* (s obzirom na vektorsku rešetku $\Re$) ako postoji funkcija $h \in \Re$ takva da je, za sve $x \in P$, $|h(x)| = \infty$.

Lema 2.6 *Neka je $\Re$ vektorska rešetka nad skupom X, P polaran skup, $f \in \Re$ i $g : X \to \mathbb{R}$ funkcija za koju je $f(x) = g(x)$, za sve $x \notin P$. Tada je $g \in \Re$ i $I(g) = I(f)$.*

Dokaz. *Neka je $h \in \Re$ takva da je, za sve $x \in P$, $|h(x)| = \infty$. Tada je*

$$h(x) - h(x) = g(x) - f(x),$$

kada je zbroj na lijevoj strani definiran (u protivnom uzimamo $g(x) - f(x) = 0$*). Tada* $g - f$ *pripada* $\Re$ *i*

$$I(g - f) = I(h) - I(h) = 0.$$

Stoga je

$$g(x) = f(x) + [g(x) - f(x)],$$

kada je desna strana jednakosti definirana. Zaključujemo da je $g \in \Re$ *i*

$$I(g) = I(f) + I(g - f) = I(f).$$

■

Koristeći prethodnu Lemu, može se dokazati sljedeća Propozicija:

Propozicija 2.7 *Neka je* $\Re$ *vektorska rešetka funkcija s vrijednostima u* $\overline{\mathbb{R}}$*. Tada su tvdnje (1), (2) i tvrdnja (d) iz Definicije 2.5 ekvivalentne.*

2.2 Gornje funkcije i donje funkcije

U ovom odjeljku ćemo definirati nove klase funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ koje ćemo označavati s $\Re^o$ i $\Re_u$ i koje će ovisiti o danoj vektorskoj rešetki $\Re$ te ćemo proširiti pojam Daniellovog integrala i na te dvije klase funkcija. Krenimo redom.

Definicija 2.8 (Gornja funkcija) *Neka je* $\Re$ *vektorska rešetka nad skupom* X*. Za funkciju* $f : X \to \mathbb{R}$ *reći ćemo da je* gornja funkcija *ako postoji niz* (f_n) *u* $\Re$ *takav da* $f_n \uparrow f$*. Klasu svih gornjih funkcija označavat ćemo s* $\Re^o$*.*

Uočimo da je $\Re \subseteq \Re^o$ (stavimo, za $f \in \Re$, $f_n = f$, za sve n). Neka svojstva gornjih funkcija dana su u sljedećem teoremu.

Teorem 2.9 *Vrijedi:*

1. *Ako su* $f, g \in \Re^o$, *onda je i* $f + g \in \Re^o$.

2. *Ako je* $f \in \Re^o$ *i* $0 \leq c < +\infty$, *onda je i* $cf \in \Re^o$.

3. *Ako su* $f, g \in \Re^o$, *onda su i funkcije* $f \vee g$ *i* $f \wedge g \in \Re^o$.

Dokaz. *Prve dvije tvrdnje su očite. Dokažimo treću tvrdnju. Neka su* (f_n) *i* (g_n) *nizovi u* $\Re$ *takvi da* $f_n \uparrow f$ *i* $g_n \uparrow g$. *Uočimo da tada niz* $f_n \vee g_n$ *raste prema funkciji* $f \vee g$, *a niz* $f_n \wedge g_n$ *raste prema funkciji* $f \wedge g$. *Promotrimo prvi slučaj. Označimo s* $h_n = f_n \vee g_n$. *Dokažimo najprije da je, za sve* n, $h_n \leq h_{n+1}$. *Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je, za dane* n *i* x, $f_n(x) \geq g_n(x)$. *Tada je* $h_n(x) \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x) \leq h_{n+1}(x)$. *Dakle,* $h_n \leq h_{n+1}$. *Označimo s* $h = f \vee g$. *Želimo dokazati da* (h_n) *konvergira k funkciji* h *(već smo dokazali da je* (h_n) *rastući niz funkcija). Kako je* $f_n \leq f \leq h$ *i* $g_n \leq g \leq h$, *za sve* n, *onda je* $f_n \vee g_n \leq h$, *za sve* n. *Ponovno, BSOMP da je za dani* $x, f(x) \geq g(x)$. *Pretpostavimo* $c \leq f(x)$. *Tada je* $c \leq f_n(x)$ *za neki* n. *Kako je* $f_n(x) \leq h_n(x)$, *slijedi* $c \leq h_i(x) \leq h(x)$, *za* $i \geq n$. *Dakle,* $(h_i) \to h$. *Druga tvrdnja se dokazuje analogno.* ■

Napomena 2.10 *Ako je* $f \in \Re^o$, *tada za dani* x *vrijednost* $f(x)$ *može biti* $+\infty$, *ali ne i* $-\infty$.

Ako je $f \in \Re^o$ i $f_n \uparrow f$, tada niz realnih brojeva $(I(f_n))$ konvergira k nekom limesu (koji može biti i $+\infty$). Sljedeća lema pokazuje da taj limes ovisi samo o funkciji f, a ne i o rastućem nizu (f_n).

Lema 2.11 *Ako je* $f \in \Re^o$ *i* (f_n) *i* (g_n) *dva niza u* $\Re$ *takvi da* $f_n \uparrow f$ *i* $g_n \uparrow f$, *onda je* $\lim_{n\to\infty} I(f_n) = \lim_{n\to\infty} I(g_n)$.

Dokaz. *Neka je* $A = \lim I(f_n)$. *Neka je* $h \in \Re^o$ *takva da je* $h \leq f$. *Dokažimo da je* $I(h) \leq A$. *Kako je* $f_n \wedge h \leq f_n$, *slijedi* $I(f_n \wedge h) \leq I(f_n)$. *Kako vrijedi*

$f_n \wedge h \uparrow f \wedge h = h$, slijedi da $h - (f_n \wedge h) \to 0$. Odatle slijedi da $I(h) - I(f_n \wedge h)) \to 0$. Dobivamo $I(h) = \lim_{n\to\infty}(I(f_n) \wedge h) \leq \lim_{n\to\infty}(I(f_n)) \leq A$.

Za $B = \lim_{n\to\infty}(g_n)$ dokažimo $B \leq A$. Kako je $g_n \leq f$, po prethodno dokazanom slijedi $I(g_n) \leq A$ pa je $B \leq A$.

Konačno, zamjenom nizova (f_n) i (g_n) dobivamo $A \leq B$. Dakle, $A = B$.

■

Sada ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 2.12 *Neka je $f \in \Re^o \diagdown \Re$. Definiramo Daniellov integral funkcije f sa:*

$$I(f) = \lim(I(f_n)),$$

gdje je (f_n) bilo koji niz u $\Re$ za koji vrijedi da $f_n \uparrow f$.

Ova definicija zaista proširuje pojam Daniellovog integrala definiranog na vektorskoj rešetki $\Re$. Naime, stavljajući $f_n = f$, za svaki n, dobivamo traženu jednakost.

Napomena 2.13 *Vrijednost Daniellovog integrala na $\Re^o$ može biti i $+\infty$, ali ne i $-\infty$.*

Pogledajmo neka svojstva Daniellovog integrala definiranog na vektorskoj rešetki $\Re^o$.

Teorem 2.14 *Preslikavanje $I : \Re^o \to \overline{\mathbb{R}}$ ima sljedeća svojstva:*

1. *$I(f+g) = I(f) + I(g)$*
2. *$I(cf) = cI(f)$, za $c \geq 0$*
3. *$I(f) \leq I(g)$, za $f \leq g$*
4. *Ako je (f_n) niz u $\Re^o$ i $f_n \uparrow f$, onda $(I(f_n)) \to I(f)$.*

Definicija 2.15 (Donja funkcija) *Za funkciju $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je* donja funkcija *ako je $-f \in \Re^o$. Klasu svih donjih funkcija označavamo s $\Re_u$.*

Propozicija 2.16 *Funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ je donja funkcija ako i samo ako postoji niz (f_n) u $\Re$ takav da $f_n \downarrow f$.*

Sljedeći teorem daje karakterizaciju (nenegativnih) gornjih funkcija.

Teorem 2.17 *Neka je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ nenegativna funkcija. f pripada klasi $\Re^o$ ako i samo ako postoji niz funkcija (f_n) u $\Re$ takav da je $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. U tom slučaju je $I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$.*

Dokaz. *Nužnost je očita. Dokažimo dovoljnost. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ nenegativna funkcija i (ϕ_n) niz funkcija sa svojstvom da $\phi_n \uparrow f$ i $\phi_n \in \Re$. Zamjenjujući svaku funkciju ϕ_n sa $\phi_n \vee 0$, možemo pretpostaviti da je svaka od funkcija ϕ_n nenegativna. Definirajmo novi niz funkcija (ψ_n) stavljajući $\psi_1 = \phi_1$ i $\psi_n = \phi_n - \phi_{n-1}$, za $n \geq 2$. Tada je $f = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k$ i vrijedi*

$$I(f) = \lim_n I(\phi_n) = \lim_n I(\sum_{k=1}^{n} \psi_k) = \lim_n \sum_{k=1}^{n} I(\psi_k) = \sum_{k=1}^{\infty} I(\psi_k).$$

■

Napomena 2.18 *Ako je $f \in \Re_u$, onda može biti $f(x) = -\infty$, ali ne i $f(x) = +\infty$.*

Teorem 2.9 vrijedi i ako zamijenimo $\Re^o$ sa $\Re_u$. Funkcija može pripadati objema klasama $\Re^o$ i $\Re_u$: tada f ne može imati beskonačne vrijednosti. Također, Teorem 2.14 vrijedi i za klasu $\Re_u$, jedino u tvrdnji 4. treba zamijeniti $\uparrow$ sa $\downarrow$.

Sljedeći teorem govori o redovima funkcija u klasi $\Re^o$.

Teorem 2.19 *Neka je (f_n) niz nenegativnih funkcija u $\Re^o$. Tada je funkcija f definirana sa $f = \sum f_n \in \Re^o$ i vrijedi $I(f) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_n)$.*

Dokaz. *Za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji niz funkcija $(\psi_{n,k})$ takav da je $f_n = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_{n,k}$. Stoga je, po prethodnom teoremu, $f = \sum_{k,n} \psi_{n,k}$. Kako je skup uređenih parova prirodnih brojeva prebrojiv, to je i funkcija f suma reda nenegativnih funkcija iz $\Re$ pa, po prethodnom teoremu, pripada klasi $\Re^o$ i vrijedi*

$$I(f) = \sum_{k,n} I(\psi_{n,k}) = \sum_{n} I(f_n)$$

■

Navedimo (bez dokaza) sljedeći rezultat, na koji ćemo se pozivati u dokazima nekih tvrdnji.

Teorem 2.20 *Neka je $f \in \Re_u$ i $g \in \Re^o$ te $f \leq g$. Tada je $g - f \in \Re^o$ i vrijedi $I(g - f) = I(g) - I(f) \geq 0$.*

Pogledajmo sljedeći primjer u kojem ćemo eksplicitno odrediti klasu $\Re^o$.

Primjer 2.21 *Neka je $X = \mathbb{N}$ i $\Re$ klasa svih nizova realnih brojeva čije su vrijednosti različite od 0 za najviše konačno mnogo $n \in \mathbb{N}$. Definiramo funkciju $I : \Re \to \mathbb{R}$ sa*

$$I(f) = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(n).$$

Lako se vidi da je $\Re$ vektorska rešetka, a I Daniellov integral. Ako je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ takva da $f(n) \neq -\infty$ i $f(n) \geq 0$ samo za $n \geq N$ (gdje N ovisi o funkciji f), tada je $f \in \Re^o$ i ta klasa se sastoji upravo od svih takvih funkcija. Proširenje Danielovog integrala na klasu $\Re^o$ dano je gornjom formulom (uzevši u obzir da sada suma može biti i $+\infty$).

Sljedeći primjer pokazuje da klasa $\Re^o$ nije nužno mnogo bogatija od početne klase $\Re$.

Primjer 2.22 *Neka je* $X = [0, \pi]$ *i* $\Re$ *klasa svih funkcija oblika* $f(x) = a\sin(x)$, *za neki* $a \in \mathbb{R}$ *te neka je* $I(f)$ *Riemannov intergral* $\int_0^\pi f(x)dx$. *Tada je jedini element klase* $\Re^o \diagdown \Re$ *funkcija koja u rubnim točkama segmenta* $[0, \pi]$ *poprima vrijednost 0, a u ostalim točkama poprima vrijednost* $+\infty$ *i za nju je* $I(f) = +\infty$.

2.3 Sumabilne funkcije

U ovom odjeljku ćemo definirati pojam *sumabilne funkcije* te pojam Daniellovog integrala za takve funkcije. Dokazat ćemo neka (uobičajena) svojstva integrala sumabilnih funkcija te ćemo vidjeti da je za sumabilne funkcije moguće iskazati slične teoreme o konvergenciji koji su vrijedili za Lebesgueov integral.

Definicija 2.23 (Gornji i donji integral) *Neka je* $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *funkcija za koju postoji* $h \in \Re^o$ *takva da je* $f \leq h$. *Broj*

$$\overline{I}(f) = \inf\{I(h) : h \in \Re^o, f \leq h\}$$

nazivamo gornji Daniellov integral funkcije f.

Neka je $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *funkcija za koju postoji* $g \in \Re_u$ *takva da je* $g \leq f$. *Broj*

$$\underline{I}(f) = \sup\{I(g) : g \in \Re_u, g \leq f\}$$

nazivamo donji Daniellov integral funkcije f.

Klasa svih funkcija za koje je definiran donji (gornji) Daniellov integral uključuje cijelu klasu $\Re^o$ ($\Re_u$). Ako je $f \in \Re^o$ ($\Re_u$), tada je donji (gornji) Daniellov integral jednak $I(f)$.

Napomena 2.24 *Prema Teoremu 2.20 za $g \in \Re_u$ i $h \in \Re^o$ takve da vrijedi $g \leq h$ je $I(g) \leq I(h)$ i $g \leq f \leq h$. Odavde slijedi sljedeći važan rezultat:*

$$\underline{I}(f) \leq \overline{I}(f),$$

ako su oba integrala definirana.

Definicija 2.25 (Sumabilna funkcija) *Neka je funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ takva da postoje $\underline{I}(f)$ i $\overline{I}(f)$ i konačni su. Ako vrijedi $\underline{I}(f) = \overline{I}(f)$, kažemo da je funkcija f* sumabilna *u odnosu na Daniellov integral I (ili I - sumabilna) i broj*

$$I(f) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$$

nazivamo Daniellov integral funkcije f. *Klasu svih sumabilnih funkcija označavamo s $\mathcal{L}$.*

Sljedeći teorem pokazuje da je pojam integrala dan u prethodnoj definiciji konzistentan s pojmom integrala u slučaju da je $f \in \Re_u \cup \Re^o$.

Teorem 2.26

1. *Funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ je sumabilna ako i samo ako za svaki $\varepsilon > 0$ postoji par funkcija g, h takav da je $g \in \Re_u$, $h \in \Re^o$, $g \leq f \leq h$, $I(g)$ i $I(h)$ konačni te $I(h) - I(g) \leq \epsilon$.*

2. *Ako je $f \in \Re^o$, f je sumabilna ako i samo ako $I(f) < +\infty$ (gdje je $I(f)$ definiran kao u Definiciji 2.12). U svim ostalim slučajevima kad je $f \in \Re^o$, bilo da je integral konačan ili ne, vrijedi $I(f) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.*

3. *Ako je $f \in \Re_u$, f je sumabilna ako i samo ako je $-\infty < I(f)$(gdje je $I(f)$ definiran kao u Definiciji 2.12). U svim ostalim slučajevima kad je $f \in \Re_u$, bilo da je integral konačan ili ne, vrijedi $I(f) = \underline{I}(f) = \overline{I}(f)$.*

Dokaz. *1. Pretpostavimo da za svaki $\varepsilon \geq 0$ postoji par funkcija g, h s pretpostavljenim svojstvima. Prema Napomeni 2.24, kada su $\underline{I}(f)$ i $\overline{I}(f)$*

konačni te kako su $I(g)$ i $I(h)$ konačni, zaključujemo da je $-\infty < \underline{I}(f)$ i $\overline{I}(f) < +\infty$. Kako je $I(h) \leq I(g) + \varepsilon$, zaključujemo da je $\overline{I}(f) \leq \underline{I}(f) + \varepsilon$. Odavde slijedi da je f sumabilna funkcija. Obrat prepuštamo čitatelju.

2. Neka je $f \in \Re^o$. Tada je $\overline{I}(f) \leq I(f)$. Neka je (f_n) niz u $\Re$ takav da $f_n \uparrow f$. Tada $(I(f_n)) \to I(f)$. Kako je, za sve n, $f_n \in \Re_u$, slijedi $I(f) \leq \overline{I}(f)$. Zaključujemo da je $I(f) = \overline{I}(f) = \underline{I}(f)$ pa je f sumabilna ako i samo ako je $I(f) < +\infty$.

3. Analogno kao pod 2. $\blacksquare$

Naglašavamo još jednom da je vrijednost Daniellovog integrala konačna za $f \in \mathcal{L}$. Klasa $\mathcal{L}$ sadrži originalnu vektorsku rešetku $\Re$.

U sljedećem teoremu dana su osnovna algebarska svojstva klase $\mathcal{L}$ i proširenog Daniellovog integrala I kao funkcije sa $\mathcal{L}$ u $\mathbb{R}$.

Teorem 2.27 *Neka su $f, g \in \mathcal{L}$ i $c \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

1. *$f + g \in \mathcal{L}$ i $I(f+g) = I(f) + I(g)$.*
2. *$cf \in \mathcal{L}$ i $I(cf) = cI(f)$.*
3. *$f \vee g$, $f \wedge g \in \mathcal{L}$.*
4. *Ako je $f \leq g$, onda je $I(f) \leq I(g)$.*
5. *$|f| \in \mathcal{L}$ i $|I(f)| \leq I(|f|)$.*

Dokaz. *1. Neka je $\varepsilon \geq 0$ i $f_1, g_1 \in \Re_u$, $f_2, g_2 \in \Re^o$ takve da vrijedi $f_1 \leq f \leq f_2$ i $g_1 \leq g \leq g_2$ i neka je $I(f_i) - I(f) \leq \varepsilon/2$ i $I(g_i) - I(g) \leq \varepsilon/2$, $i = 1, 2$. Tada je $f_1 + g_1 \leq f + g \leq f_2 + g_2$. Kako je $\Re_u$ vektorska rešetka, to je $f_1 + g_1 \in \Re_u$ i*

$$I(f) + I(g) - \varepsilon \leq I(f_1) + I(g_1) = I(f_1 + g_1).$$

Stoga je $I(f)+I(g)-\varepsilon \leq \underline{I}(f+g)$. *Slično se vidi da je* $\overline{I}(f+g) \leq I(f)+I(g)+\varepsilon$. *Stoga su* $\underline{I}(f+g)$ *i* $\overline{I}(f+g)$ *konačni te se razlikuju od* $I(f)+I(g)$ *za manje od* ε. *Kako je* ε *bio proizvoljan, slijedi tražena tvrdnja.*

2. Dokaz se dijeli u tri slučaja: $c=0, c\leq 0$ *i* $c \geq 0$. *Detalje prepuštamo čitatelju.*

3. Neka su f_1, f_2, g_1, g_2 *odabrane kao u dokazu tvrdnje 1.. Tada je* $f_1 \vee g_1 \leq f \vee g \leq f_2 \vee g_2$. *Zbog simetrije možemo pretpostaviti da je, za svaki* $x \in X$, $(f_2 \vee g_2)(x) = f_2(x)$. *Kako je* $f_1(x) \leq (f_1 \vee g_1)(x)$ *te* $g_2(x)-g_1(x) \geq 0$, *zaključujemo*

$$(f_2 \vee g_2)(x)-(f_1 \vee g_1)(x) \leq f_2(x)-f_1(x) \leq [f_2(x)-f_1(x)]+[g_2(x)-g_1(x)]$$

pa je

$$(f_2 \vee g_2)-(f_1 \vee g_1) \leq (f_2-f_1)+(g_2-g_1).$$

Koristeći rezultat iz prethodnog odjeljka, slijedi

$$I(f_2 \vee g_2)-I(f_1 \vee g_1) \leq I(f_2)-I(f_1)+I(g_2)-I(g_1) \leq 2\epsilon.$$

Kako su $f_2 \vee g_2 \in \Re^o$ *i* $f_1 \vee g_1 \in \Re_u$, *po prethodnom teoremu (tvrdnja 1.), slijedi da* $f \vee g \in \mathcal{L}$. *Slučaj* $f \wedge g$ *dokazuje se slično.*

4. Po pretpostavci postoje funkcije $f_1 \in \Re_u$ *i* $g_1 \in \Re_o$ *takve da je* $f_1 \leq f$ *i* $g \leq g_1$. *Kako je* $f \leq g$, *slijedi* $f_1 \leq g_1$ *pa onda i* $I(f_1) \leq I(g_1)$. *Ako* prošetamo *po svim funkcijama* f_1, *dobijemo* $\underline{I}(f) \leq I(g_1)$. *Slično se dobije i* $I(f) \leq \overline{I}(g_1)$. *Kako su* f *i* g *sumabilne funkcije, slijedi tražena tvrdnja.*

5. Kako je $|f| = f^+ + f^-$ *te kako su* $f^+, f^- \in \mathcal{L}$, *po 1. zaključujemo da je* $|f| \in \mathcal{L}$ *i da je* $I(|f|) = I(f^+)+I(f^-)$. *No, vrijedi i* $f = f^+ - f^-$ *i* $I(f) = I(f^+)-I(f^-)$ *pa zaključujemo da je* $|I(f)| \leq I(|f|)$.[2] *Tražena nejednakost mogla se dokazati i iz 4. koristeći činjenicu da je* $-f \leq |f| \leq f$.

■

[2] Ovdje smo uzeli u obzir da je $|a-b| \leq a+b$, ako su a i b nenegativni realni brojevi.

Uočimo da svojstva 1., 2. i 3. iz prethodnog teorema govore da je I linearni funkcional na $\mathcal{L}$ i da je $\mathcal{L}$ vektorska rešetka, a uzimajući u 4. da je f nul-funkcija, dobivamo da je I i pozitivan funkcional na $\mathcal{L}$. Sada ćemo dokazati da za I vrijedi i posljednje definicijsko svojstvo za Daniellov integral. Za dokaz te tvrdnje potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 2.28 *Neka je (f_n) niz nenegativnih funkcija i $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$. Tada je $\overline{I}(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{I}(f_n)$.*

Dokaz. *Ako je za neki $n \in \mathbb{N}$, $\overline{I}(f_n) = \infty$, dokaz je gotov. Neka je, dakle, za sve n, $\overline{I}(f_n) < \infty$. Neka je $\varepsilon \geq 0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ i funkcija $g_{n_0} \in \Re_u$ takva da je $f_{n_0} \leq g_{n_0}$ i*

$$I(g_{n_0}) \leq \overline{I}(f_{n_0}) + \varepsilon \cdot 2^{-n_0}.$$

Kako je g_{n_0} nenegativna funkcija, to je funkcija $g = \sum_n g_n \in \Re_u$ te $I(g) = \sum_n I(g_n) \leq \sum_n \overline{I}(f_n) + \varepsilon$. Kako je $g \geq f$, imamo

$$\overline{I}(f) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \overline{I}(f_n) + \epsilon.$$

Tvrdnja sada slijedi zbog proizvoljnosti $\varepsilon > 0$. ■

Sljedeći teorem nam govori da pozitivni linearni funkcional I na $\mathcal{L}$ zadovoljava svojstvo (2) pa stoga i svojstvo (1) (svojstva iza definicije Daniellovog integrala). Uočimo sličnost ovog teorema s teoremom o monotonoj konvergenciji za Lebesgueov integral.

Teorem 2.29 (Teorem o monotonoj konvergenciji za Daniellov integral) *Neka je (f_n) rastući niz funkcija u $\mathcal{L}$ i neka je $f = \lim f_n$. Tada je $f \in \mathcal{L}$ ako i samo ako je $\lim I(f_n) < \infty$. U tom slučaju je $I(f) = \lim I(f_n)$.*

Dokaz. *Kako je, za sve $n \in \mathbb{N}$, $f \geq f_n$, vrijedi $\overline{I}(f) \geq I(f_n)$. Stoga, ako je $\lim I(f_n) = \infty$, onda je i $\overline{I}(f) = \infty$ pa $f \notin \mathcal{L}$.*

Obratno, neka je $\lim I(f_n) \leq \infty$*. Stavimo* $g = f - f_1$*. Tada je* $g \geq 0$ *i* $g = \sum_{n=1}^{\infty}(f_{n+1} - f_n)$*. Po prethodnoj lemi vrijedi :*

$$\overline{I}(g) \leq \sum_{n=1}^{\infty} I(f_{n+1} - f_n) = \sum_{n=1}^{\infty} I(f_{n+1}) - I(f_n) = \lim I(f_n) - I(f_1).$$

Stoga je

$$\overline{I}(f) = \overline{I}(f_1 + g) \leq I(f_1) + \overline{I}(g) \leq \lim I(f_n).$$

Kako je $f_n \leq f$*, imamo* $\underline{I}(f) \geq I(f_n)$ *pa je*

$$\underline{I}(f) \geq \lim I(f_n).$$

Slijedi $\underline{I}(f) = \overline{I}(f) = \lim I(f_n)$ ■

Korolar 2.30 *Linearni funkcional I je Daniellov integral na vektorskoj rešetki* $\mathcal{L}$*.*

2.4 Konvergencijski teoremi

Već smo vidjeli da za Daniellov integral postoji analogon Teorema o monotonoj konvergenciji. Sada ćemo vidjeti kako glase Fatouova lema i Teorem o dominiranoj konvergenciji za Daniellov integral.

Teorem 2.31 (Fatouova lema za Daniellov integral) *Neka je* (f_n) *niz nenegativnih funkcija u* $\mathcal{L}$*. Tada je funkcija* $\inf f_n$ *u* $\mathcal{L}$*. Nadalje, ako je* $\liminf I(f_n) < \infty$*, onda je* $\liminf f_n$ *u* $\mathcal{L}$ *i vrijedi*

$$I(\liminf f_n) \leq \liminf I(f_n).$$

Dokaz. *Neka je* $g_n = f_1 \wedge \cdots \wedge f_n$*. Tada je* (g_n) *niz nenegativnih funkcija u* $\mathcal{L}$ *koji pada prema funkciji* $g = \inf g_n$*. Zbog toga niz* $(-g_n)$ *raste prema* *funkciji* $-g$. *Kako je* $I(-g_n) \leq 0$, *po Teoremu o dominiranoj konvergenciji za Daniellov integral, zaključujemo da je* $g \in \mathcal{L}$.

Neka je $h_n = \inf_{k \geq n} f_k$. *Tada je* (h_n) *niz nenegativnih funkcija u* $\mathcal{L}$ *koji pada prema funkciji* $\liminf f_k$. *Kako je, za* $n \leq k$, $h_n \leq f_k$, *to je* $\lim I(h_n) \leq \liminf I(f_k) < \infty$. *Ponovno, po Teoremu o dominiranoj konvergenciji, zaključujemo da je* $\liminf f_k \in \mathcal{L}$ *i da je* $I(\liminf f_k) \leq \liminf I(f_k)$.

■

Teorem 2.32 (Teorem o dominiranoj konvergenciji za Daniellov integral) *Neka je* (f_n) *niz funkcija u* $\mathcal{L}$ *i pretpostavimo da postoji funkcija* $g \in \mathcal{L}$ *takva da za sve* $n \in \mathbb{N}$ *vrijedi* $|f_n| \leq g$. *Ako je* $f = \lim f_n$, *onda vrijedi*

$$I(f) = \lim I(f_n).$$

Dokaz. *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$, *funkcije* $f_n + g$ *su nenegativne i vrijedi* $I(f_n + g) \leq 2I(g)$. *Po Fatouovoj lemi za Daniellov integral imamo da je* $f + g \in \mathcal{L}$ *i vrijedi*

$$I(f+g) \leq \liminf I(f_n + g) = I(g) + \liminf I(f_n).$$

Stoga je

$$I(f) \leq \liminf I(f_n).$$

Kako je i svaka funkcija $g - f_n$ *nenegativna, imamo*

$$I(g-f) \leq \liminf I(g - f_n) = I(g) - \overline{\lim} I(f_n).$$

Stoga je

$$\overline{\lim} I(f_n) \leq I(f_n)$$

pa zaključujemo da $\lim I(f_n)$ *postoji i jednak je* $I(f)$. ■

Poglavlje 3

Veza Daniellovog integrala i teorije mjere

U ovom poglavlju uvodimo pojam *skupova mjere nula*, *nul-funkcija* (ovaj pojam valja razlikovati od funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, koju ćemo označavati s 0) te jednakosti funkcija skoro svuda koristeći Daniellov integral. (Prisjetimo se da smo za definiranje ovih pojmova trebali teoriju mjere i pojam izmjerivih prostora.) Koristeći ove pojmove, definirat ćemo jedan Banachov prostor koji ćemo označiti sa L, a čiji će elementi biti klase ekvivalencije skoro svuda jednakih funkcija.

3.1 Skupovi mjere nula i nul-funkcije

Pogledajmo kako uvodimo pojam skupa mjere nula preko Daniellovog integrala.

Definicija 3.1 (Skup mjere nula) *Za skup $E \subseteq X$ kažemo da je* skup mjere nula *(u odnosu na Daniellov integral I) ako je karakteristična funkcija χ_E skupa E sumabilna i vrijedi $I(\chi_E) = 0$. Klasu svih skupova mjere nula* *označavat ćemo sa SZ.*

Uočimo da je klasa SZ neprazna jer sadrži barem prazan skup. Dokaz te i još nekih važnih tvrdnji za skupove mjere nula dan je u sljedećem teoremu.

Teorem 3.2 *Vrijedi:*

1. *Ako je $E \in SZ$ i $F \subseteq E$, onda je i $F \in SZ$.*

2. *$\emptyset \in SZ$*

3. *Prebrojiva unija skupova mjere nula je skup mjere nula.*

4. *Neka je $E \subseteq X$ i $f : X \to \mathbb{R}$, $f = +\infty \cdot \chi_E$, tj $f(x) = +\infty$ za $x \in E$ te $f(x) = 0$, za $x \in X \setminus E$. Tada je $f \in \mathcal{L}$ ako i samo ako je E skup mjere nula. U tom slučaju je $I(f) = 0$.*

5. *Ako je $g \in \mathcal{L}$, onda je $\{x \in X : |g(x)| = +\infty\} \in SZ$.*

Dokaz. *1. Kako je $0 \in \Re_u$, $0 \leq \chi_F$ i $I(0) = 0$, slijedi da je $0 \leq I(\chi_F)$. Neka je $\varepsilon \geq 0$ proizvoljan. Kako je $E \in SZ$, postoji $h \in \Re^o$ takva da je $\chi_E \leq h$ i $I(h) \leq \varepsilon$. Kako je $\chi_F \leq \chi_E$, slijedi da je $\chi_F \leq h$ pa je $\overline{I}(\chi_F) \leq \varepsilon$. Slijedi da je $\chi_F \in \mathcal{L}$ i $I(\chi_F) = 0$.*

2. Slijedi iz 1..

3. Neka je $(E_n, n \in \mathbb{N})$ prebrojiva familija skupova mjere nula i označimo sa $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ i $F_n = E_1 \cup \ldots \cup E_n$. Uočimo da ako je $\chi_{F_n} \in \mathcal{L}$, onda je $\chi_{F_n} = \chi_{E_1} \vee \ldots \vee \chi_{E_n}$. Također, kako je $0 \leq \chi_{F_n} \leq \chi_{E_1} \vee \ldots \vee \chi_{E_n}$, to je $0 \leq I(\chi_{F_n}) \leq I(\chi_{E_1}) + \ldots + I(\chi_{E_n}) \leq 0$. Kako $\chi_{F_n} \uparrow \chi_E$, po Teoremu o monotonoj konvergenciji za Daniellov integral zaključujemo da je $E \in SZ$.

4. Uočimo da vrijedi da $n\chi_E \uparrow f$. Ako je $E \in SZ$, vrijedi da je $I(n\chi_E) = nI(\chi_E) = 0$. Tada je, po Teoremu o monotonoj konvergenciji za Daniellov integral, $f \in \mathcal{L}$ i $I(f) = 0$. Obratno, neka je $f \in \mathcal{L}$. Tada je $f = 2f$,

$I(f) = 2I(f)$ i $I(f) = 0$. Kako je $0 \leq \chi_E \leq f$, slično kao u 1. zaključujemo da je $\chi_E \in \mathcal{L}$ i $I(\chi_E) = 0$.

(5) Neka je $E = \{x : |g(x)| = +\infty\}$ i $h = +\infty \cdot \chi_E$. Uočimo da $\frac{1}{n}|g| \downarrow h$ i $I(\frac{1}{n}|g|) = \frac{1}{n}I(|g|) \to 0$. Po Teoremu o monotonoj konvergenciji za Daniellov integral, slijedi $h \in \mathcal{L}$ i $I(h) = 0$. Uvažavajući 4., slijedi $E \in SZ$. ■

Definicija 3.3 (Nul-funkcija) *Za funkciju $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je* nul-funkcija *ako je $|f| \in \mathcal{L}$ i $I(|f|) = 0$.*

Teorem 3.4 *Vrijedi :*

1. *Ako je f nul-funkcija, onda je i svaka funkcija g za koju je $|g| \leq |f|$ nul-funkcija.*

2. *Ako su f i g nul-funkcije i $c \in \mathbb{R}$, tada su i funkcije cf i $f + g$ nul-funkcije.*

3. *f je nul-funkcija ako i samo ako je skup $\{x : f(x) \neq 0\}$ skup mjere nula.*

4. *Ako je (f_n) niz nul-funkcija koji po točkama konvergira k funkciji f, onda je i f nul-funkcija.*

Dokaz. *Dokaze tvrdnji 1. i 2. prepuštamo čitatelju. Dokažimo 3. i 4..*

3. Označimo s $E = \{x : f(x) \neq 0\}$. Očito je $0 \leq |f| \leq +\infty \cdot \chi_E$. Ako je $E \in SZ$, po tvrdnji 1. ovog teorema i po tvrdnji 4. prethodnog teorema slijedi da je f nul-funkcija. Obratno, neka je f nul-funkcija. Označimo s $E_n = \{x : |f(x)| \geq \frac{1}{n}\}$. Uočimo da je $\frac{1}{n}\chi_{E_n} \leq |f|$ i da je $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Sada, po tvrdnjama 1. i 2. ovog teorema i po tvrdnji 3. prethodnog teorema slijedi da je $E \in SZ$.

4. Neka je ponovno $E = \{x : f(x) \neq 0\}$ te neka je $F_n = \{x : f_n(x) \neq 0\}$. Uočimo da je $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Po tvrdnji 3. ovog teorema primjenjenoj na *svaku od funkcija f_n te uvažavajući tvrdnje 1. i 3. prethodnog teorema, slijedi da je $E \in SZ$.* ■

Definicija 3.5 *Neka su dane funkcije $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Kažemo da su funkcije f i g* jednake skoro svuda *i pišemo $f = g$ (s.s.) ako je skup $\{x : f(x) \neq g(x)\}$ skup mjere nula.*

Napomena 3.6 *Kako je $\{x : f(x) \neq g(x)\} = \{x : f(x) - g(x) \neq 0\}$, slijedi da su funkcije f i g jednake skoro svuda ako i samo ako je funkcija $f - g$ nul-funkcija.*

Kratica *s.s.* može se primijeniti i u drugim situacijama. Primjerice, $f_n(x) \to f(x)$ (s.s.) znači da je skup točaka za koje niz (f_n) ne konvergira prema funkciji f skup mjere nula. Slično vrijedi za, primjerice, $f \leq g$ (s.s.).

Teorem 3.7 *Neka su f i g funkcije takve da je $f = g$ (s.s.) i neka je $g \in \mathcal{L}$. Tada je $f \in \mathcal{L}$ i $I(f) = I(g)$.*

Dokaz. *Neka je $E = \{x : f(x) \neq g(x)\}$ i $f_0 = +\infty \cdot \chi_E$. Tada je $f_0 \in \mathcal{L}$ i $I(f_0) = 0$. Neka je $\varepsilon \geq 0$ proizvoljan. Tada postoje funkcije $h_1, h_2 \in \Re^o$ takve da je $g \leq h_1$, $0 \leq f_0 \leq h_2$, $I(h_1) \leq I(g) + \varepsilon$ i $I(h_2) \leq \varepsilon$. Tada je $h_1 + h_2 \in \Re^o$ i $I(h_1 + h_2) \leq I(g) + 2\varepsilon$. Razmatrajući posebno slučajeve kad je $x \in E$ i $x \notin E$ dobijamo da je $f \leq h_1 + h_2$. Slijedi da je $\overline{I}(f) \leq I(g) + 2\varepsilon$, kad je $\overline{I}(f) \leq I(g)$. Postupajući slično, promatranjem funkcije $-f_0$, dobijamo da je $\underline{I}(f) \geq I(g)$ odakle slijedi tražena jednakost.* ■

Prethodni teorem nam omogućuje da oslabimo pretpostavke u nekim već dokazanim teoremima, a da zaključci ostanu jednaki: tako, primjerice, u teoremu o monotonoj konvergenciji i teoremu o dominiranoj konvergenciji uvjet "$f = \lim f_n$" možemo zamijeniti sa "$f = \lim f_n$ (s.s.)".

Sada ćemo definirati novi vektorski prostor koristeći relaciju jednakosti skoro svuda: reći ćemo da su funkcije f i g *ekvivalentne* i pisati $f \sim g$ ako su $f, g \in \mathcal{L}$ i $f = g$ (s.s.) Lako se vidi da je $\sim$ relacija ekvivalencije. Dakle, ona dijeli prostor $\mathcal{L}$ na klase ekvivalencije koje ćemo označavati s $[f]$ i uvijek možemo odabrati f (predstavnika klase) tako su sve vrijednosti od f konačne. Naime, za f definiramo funkciju g tako da je $f(x) = g(x)$ kad je $f(x)$ konačna vrijednost i $g(x) = 0$, inače. Očito je $g \in \mathcal{L}$ i $g \sim f$. Operacije zbrajanja vektora i množenja skalarom definirane su sa:

$$[f] + [g] = [f + g],$$

$$c[f] = [cf].$$

Norma na ovom vektorskom prostoru dana je sa

$$\|[f]\| = I(|f|).$$

Lako se vidi da ove definicije ne ovise o izboru pretstavnika. Primjerice, ako je $f \sim f_1$ i $g \sim g_1$, onda je $[f + g] = [f_1 + g_1]$ i $I(|f|) = I(|f_1|)$. Klasa kojoj je predstavnik funkcija $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $f(x) = 0$, za sve $x \in X$ sadrži sve nul-funkcije i ta klasa je neutralni element za zbrajanje ovog vektorskog prostora. Upravo konstruirani vektorski prostor označavat ćemo sa L.

Sljedeći teorem, koji nećemo dokazivati, govori o nekim svojstvima prostora $\mathcal{L}$, a za posljedicu ima potpunost prostora L.

Teorem 3.8 *Neka je (f_n) niz u $\mathcal{L}$ takav da $I(|f_n - f_m|) \to 0$ kada $n, m \to \infty$. Tada postoje funkcije f i h iz $\mathcal{L}$ i podnizovi (f_n) i (g_n) takvi da $I(|f_n - f|) \to 0$ osim na nekom skupu E mjere nula na kojem $g_n(x) \to f(x)$ i $|g_n(x)| \leq h(x)$, za sve $n \in \mathbb{N}$.*

Korolar 3.9 *Prostor L je potpun prostor.*

3.2 Izmjerive funkcije i izmjerivi skupovi

Nastavljamo s izgradnjom pojmova koje smo već susreli u teoriji mjere koristeći Daniellov integral. Upoznajmo se s izmjerivim funkcijama i izmjerivim skupovima.

Definicija 3.10 (Izmjeriva funkcija) *Za funkciju $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ kažemo da je* izmjeriva *(u kontekstu ovog poglavlja) ako je za svaki izbor sumabilnih funkcija g i h takvih da je $g \leq 0 \leq h$ sumabilna funkcija $g \vee (f \wedge h)$.*

Ideju koja se krije iza ove definicije lakše je shvatiti ako označimo s $F = g \vee (f \wedge h)$. Tada je

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{, ako je } g(x) \leq f(x) \leq h(x), \\ h(x) & \text{, ako je } h(x) < f(x), \\ g(x) & \text{, ako je } f(x) < g(x). \end{cases} \tag{3.1}$$

Iz ovog zapisa slijedi jednakost $g \vee (f \wedge h) = (g \vee f) \wedge h$ i slijedi $g \leq F \leq h$.

Klasu svih izmjerivih funkcija označavamo s $\mathcal{M}$. Neke važne činjenice o klasama $\mathcal{L}$ i $\mathcal{M}$ dane su u sljedećem teoremu.

Teorem 3.11 *Vrijedi:*

1. *Ako je $f_1 \in \mathcal{M}$ i $f_1(x) = f_2(x)$ (s.s.), onda je $f_2 \in \mathcal{M}$.*
2. *Ako je $f \in \mathcal{L}$, onda je $f \in \mathcal{M}$.*
3. *Ako je $f \in \mathcal{M}$ i $h \in \mathcal{L}$ te $|f| \leq h$, tada je $f \in \mathcal{L}$.*
4. *Ako je (f_n) niz u $\mathcal{M}$ i $(f_n) \to f$ (s.s.), onda je $f \in \mathcal{M}$.*

Dokaz. *Dokazi prve dvije tvrdnje su jednostavni. Dokažimo druge dvije tvrdnje.*

3. Iz $|f| \leq h$ slijedi $-h \leq f \leq h$ pa imamo $(-h) \vee (f \wedge h) = f$, što, po definiciji izmjerivih funkcija, povlači da je $f \in \mathcal{L}$.

4. Označimo s $F_n = g \vee (f_n \wedge h)$ i s $F = g \vee (f \wedge h)$, gdje su g i h sumabilne funkcije i vrijedi $g \leq 0 \leq h$. Tada $F_n(x) \to F(x)$ s.s. Naime, ako je (a_n) niz u $\overline{\mathbb{R}}$ koji konvergira k a, onda $a_n \wedge b \to a \wedge b$ i $a_n \vee b \to a \vee b$, za svaki $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Sada imamo $g \leq F_n \leq h$ pa je $|F_n| \leq (-g) \vee h$. Po teoremu o dominiranoj konvergenciji za Daniellov integral (uz oslabljenu pretpostavku konvergencije s.s.) zaključujemo da je $F \in \mathcal{L}$. ■

Sljedeći teorem govori o zatvorenosti klase $\mathcal{M}$ na neke, dosad viđene operacije.

Teorem 3.12 *Neka su f, f_1, $f_2 \in \mathcal{M}$ i $c \in \mathbb{R}$. Tada vrijedi:*

1. $cf \in \mathcal{M}$
2. $f_1 \wedge f_2 \in \mathcal{M}$ *i* $f_1 \vee f_2 \in \mathcal{M}$
3. f^+, $f^- \in \mathcal{M}$
4. $f_1 + f_2 \in \mathcal{M}$.

Dokaz. *1. Neka su g, $h \in \mathcal{L}$ i $g \leq 0 \leq h$. Lako se provjere sljedeće jednakosti:*

$$g \vee (cf \wedge h) = c\left[\frac{g}{c} \vee (f \wedge \frac{h}{c})\right] \quad , \text{ ako je } c > 0, \tag{3.2}$$

$$g \vee (cf \wedge h) = c\left[\frac{h}{c} \vee (f \wedge \frac{g}{c})\right] \quad , \text{ ako je } c < 0. \tag{3.3}$$

Slijedi da je za $c \neq 0$ funkcija cf izmjeriva. Ako je $c = 0$, dobivamo funkciju $cf = 0$ koja je također izmjeriva.

2. Po pretpostavci je $g \leq 0 \leq h$. Kako bismo dokazali traženu tvrdnju, potrebno je dokazati sljedeći identitet:

$$[g \vee (f_1 \wedge f_2)] \wedge h = [(g \vee f_1) \wedge h] \wedge [(g \vee f_2) \wedge h].$$

BSOMP da je $f_1(x) \leq f_2(x)$. Moguća su 4 slučaja: $h(x) \leq f_1(x)$, $f_2(x) \leq g(x)$, zatim $f_1(x) \leq h(x) \leq f_2(x)$ te slučaj $g(x) \leq f_2(x) \leq h(x)$. Lako se vidi da je traženi identitet istinit u svakom od navedenih slučajeva. Sada, po Teoremu 2.27 slijedi da $f_1 \wedge f_2 \in \mathcal{M}$. Slučaj $f_1 \vee f_2$ se dokazuje pomoću tvrdnje pod (1).

3. Slijedi iz 2. i jednakosti $f^+ = f \vee 0$ i $f^- = f \wedge 0$.

4. Neka su g, $h \in \mathcal{L}$, $g \leq 0 \leq h$ i f_1, $f_2 \in \mathcal{M}$. Definirajmo $p_n = n(h-g)$, $F_{n1} = (-p_n) \vee (f_1 \wedge p_n)$, $F_{n2} = (-p_n) \vee (f_2 \wedge p_n)$ te $F_n = F_{n1} + F_{n2}$. Uočimo da je $0 \leq p_n$ i $p_n \in \mathcal{L}$. Slijedi da su $F_{n1} \in \mathcal{L}$ i $F_{n2} \in \mathcal{L}$ pa je onda i $F_n \in \mathcal{L}$, za sve $n \in \mathbb{N}$. Također je i $g \vee (F_n \wedge h) \in \mathcal{L}$. Kako je $g \leq g \vee (F_n \wedge h) \leq h$, to je $|g \vee (F_n \wedge h)| \leq (-g) \vee h$. Dokazat ćemo da

$$g \vee (F_n \wedge h) \to g \vee [(f_1 + f_2) \wedge h].$$

Tada će, po teoremu o dominiranoj konvergenciji za Daniellov integral, slijediti da je $g \vee [(f_1 + f_2) \wedge h] \in \mathcal{L}$, a onda i da je $f_1 + f_2 \in \mathcal{M}$.

Dokažimo gornju tvrdnju. Neka je $f = f_1 + f_2$. Ako je $x \in X$ takav da je $h(x) - g(x) = 0$, onda obe funkcije $g \vee (F_n \wedge h)$ i $g \vee (f \wedge h)$ iščezavaju u x pa taj slučaj zanemarujemo. Ako je $h(x) - g(x) > 0$, tada $p_n(x) \to +\infty$. Tada je $F_{n1}(x) = f_1(x)$, za dovoljno veliki n ako je $f_1(x)$ konačan, odnosno $F_{n1}(x) = p_n(x)$, ako je $f_1(x) = +\infty$, tj. $F_{n1}(x) = -p_n(x)$, ako je $f_1(x) = -\infty$. Analogno zaključujemo za F_{n2}. ■

Definicija 3.13 (Izmjeriv skup) *Za skup $E \subseteq X$ kažemo da je* izmjeriv *skup ako je $\chi_E \in \mathcal{M}$.*

Klasu svih izmjerivih skupova označit ćemo sa S. Sljedeći teorem govori o strukturi klase S.

Teorem 3.14 *Klasa S svih izmjerivih skupova je jedan σ-prsten.*

Dokaz. *Kako je karakteristična funkcija praznog skupa funkcija koja iščezava na cijelom skupu X, ta je funkcija sumabilna pa je i izmjeriva. Dakle, $\emptyset \in S$.*

Dokažimo sada da je S prsten skupova. Označimo s $f_i = \chi_{E_i}$. Neka su E_1, $E_2 \in S$. Lako se provjere sljedeće jednakosti:

$$\chi_{E_1 \cup E_2} = f_1 \vee f_2,$$

$$\chi_{E_1 \cap E_2} = f_1 \wedge f_2,$$

$$\chi_{E_1 \setminus E_2} = f_1 - (f_1 \wedge f_2).$$

Sada, po Teoremu 3.11 zaključujemo da je S algebra skupova.

Neka je $(E_n, n \in \mathbb{N})$ familija skupova iz S. Označimo sa $G_n = \bigcup_{i=1}^{n} E_i$ i $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Želimo dokazati da je $G \in S$. Neka je $g_n = \chi_{G_n}$ i $g = \chi_G$. Lako se vidi da $g_n \uparrow g$. Kako je S algebra skupova, za svaki $n \in \mathbb{N}$, vrijedi $G_n \in S$ pa onda i $g_n \in \mathcal{M}$. Iz Teorema 3.11 slijedi da je $g \in \mathcal{M}$, ako je $G \in S$. ■

Skup X ne mora uopće biti izmjeriv. Za sada ne možemo reći ništa posebno o samoj klasi S izmjerivih skupova. Može se čak dogoditi da klasa S sadrži samo $\emptyset$. Ipak, na S možemo definirati mjeru koristeći Daniellov integral I kako slijedi:

Funkciju $\mu : S \to \overline{\mathbb{R}}$ definiranu sa:

$$\mu(E) = \begin{cases} I(\chi_E) & \text{, ako je } \chi_E \in \mathcal{L} \\ +\infty & \text{, ako je } \chi_E \in \mathcal{M} \setminus \mathcal{L} \end{cases} \tag{3.4}$$

nazivamo mjerom induciranom Daniellovim integralom I.

Klasa SZ skupova mjere nula je podskup klase S i vrijedi da je $E \in SZ$ ako i samo ako je $\mu(E) = 0$. Sljedeći teorem pokazuje da je μ mjera pa je naša definicija klase SZ konzistentna s definicijom funkcije μ.

Teorem 3.15 *Funkcija μ definirana sa (3.4) je mjera na S. Štoviše, μ je potpuna mjera.*

Dokaz. *Iz definicije funkcije μ očito je da ona poprima samo nenegativne vrijednosti. Nadalje, kako je $I(\chi_\emptyset) = I(0) = 0$, slijedi da je $\mu(\emptyset) = 0$.*

Neka je $(E_n, n \in \mathbb{N})$ prebrojiva familija disjunktnih skupova iz S. Označimo ponovno, kao u prethodnom teoremu, sa $f_i = \chi_{E_i}$, $G_n = \bigcup_{i=1}^n E_n$, $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n$ te sa $g_n = \chi_{G_n}$ i sa $g = \chi_G$. Najprije ćemo dokazati da μ konačno aditivna. U tu svrhu dovoljno je dokazati da je $\mu(G_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$. Kako je $E_1 \cap E_2 = \emptyset$, slijedi da je $g_2 = f_1 + f_2$. Ako su f_1, $f_2 \in \mathcal{L}$, onda je i njihova suma u $\mathcal{L}$ i slijedi da je $I(g_2) = I(f_1) + I(f_2)$. Stoga je $\mu(G_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$. Ako je, pak, $g_2 \in \mathcal{L}$, onda su f_1, $f_2 \in \mathcal{L}$. Kako su sve tri ove funkcije izmjerive i vrijedi $0 \leq f_1 \leq g_2$ i $0 \leq f_2 \leq g_2$, možemo primijeniti Teorem 3.11. Očito je $\mu(G_2) = +\infty$ ako i samo ako je barem jedna od vrijednosti $\mu(E_1)$, $\mu(E_2)$ beskonačna. U ovom slučaju također vrijedi da je $\mu(G_2) = \mu(E_1) + \mu(E_2)$.

Da bismo dokazali teorem, potrebno je dokazati da vrijedi

$$\mu(G) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(E_n).$$

Kako je, prema dokazanome, funkcija μ konačno aditivna, dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\mu(G_n) \to \mu(G).$$

Kao u dokazu prethodnog teorema, pokaže se da $g_n \uparrow g$. Po definiciji funkcije μ, $\mu(G) = +\infty$ i $\mu(G) = I(\chi_G)$ ako i samo ako je $g \in \mathcal{L}$. Analogno *zaključujemo za funkcije* G_n *i* g_n*, za sve* $n \in \mathbb{N}$*. Kako je* μ *nenagativna i konačno aditivna, to je ona i monotona: dakle,* $\mu(G_n) \leq \mu(G_{n+1})$*. Imamo dva slučaja :* $\mu(G) = +\infty$ *i* $\mu(G) < +\infty$*. U prvom slučaju, zaključujemo da su* g_n *i* g *u* $\mathcal{L}$ *pa tražena tvrdnja slijedi iz Teorema o dominiranoj konvergenciji za Daniellov integral. U drugom slučaju vrijedi* $g \notin \mathcal{L}$*. Tada je ili* $g_n \notin \mathcal{L}$ *za neki* n *(tada je* $\mu(G_n) = +\infty$ *za taj i sve sljedeće* n*) ili su sve funkcije* $g_n \in \mathcal{L}$*,ali tada* $I(g_n) = \mu(G_n) \to +\infty$*. Zaključujemo da je tražena tvrdnja istinita i u drugom slučaju. Time je dokaz završen.* ■

Do sada smo razvili teoriju sumabilnih funkcija i integrala takvih funkcija bez korištenja teorije mjere. Zatim smo iskoristili sumabilne funkcije i preko njih definirali pojmove izmjerivih funkcija i izmjerivih skupova. Prema upravo dokazanim teoremima vidimo da smo preko Daniellovog integrala I dobili prostor potpune mjere $(X,\, S,\, \mu)$. Možemo se zapitati sljedeće: ako krenemo od prostora mjere $(X,\, S,\, \mu)$ i razvijemo teoriju izmjerivih i sumabilnih funkcija obzirom na taj prostor mjere koristeći alate iz 1. poglavlja, hoćemo li dobiti izmjerive i sumabilne funkcije u kontekstu 2. poglavlja te hoće li Lebesgueov integral $\int f d\mu$ biti jednak Daniellovom integralu I od kojeg smo krenuli?

Kako bismo ostali precizni, sumabilne i izmjerive funkcije u kontekstu 2. poglavlja nazivat ćemo, redom, I-sumabilne i I-izmjerive funkcije, dok ćemo izmjerive funkcije u kontekstu 1.poglavlja nazivati S-izmjerive funkcije (jer ovise o nekoj σ - algebri S) te ćemo sumabilne funkcije u kontekstu 1. poglavlja nazivati μ-sumabilne (jer ovise o nekom prostoru mjere $(X,\, S,\, \mu)$).

Pokazat će se da je važna karika u odgovoru na ova pitanja pretpostavka o I-izmjerivosti samog skupa X, tj. pitanje je li $X \in S$. Označimo s 1 funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ za koju je $f(x) = 1$, za sve $x \in X$. Dakle, 1 je karakteristična funkcija skupa X. Također, ekvivalentne tvrdnje su $X \in S$ i $1 \in \mathcal{M}$.

Pretpostavka da je $X \in S$ nije baš zgodna u kontekstu vektorske rešetke $\Re$ i Daniellovog integrala I. Stoga ćemo koristiti drugu pretpostavku koja će osigurati da je $X \in S$: $1 \wedge f \in \Re$, kad god je $f \in \Re$. Ova tvrdnja poznata je kao Stoneov aksiom. O njemu će biti govora nešto kasnije.

Teorem 3.16 *1. Neka je $X \in S$. Tada $f \in \mathcal{L}$ implicira $1 \wedge f \in \mathcal{L}$ te $f \in \mathcal{M}$ implicira $1 \wedge f \in \mathcal{M}$.*

2. Pretpostavimo da je $1 \wedge f \in \mathcal{L}$ kad god je $f \in \mathcal{L}$ i $f \geq 0$. Tada je $X \in S$.

Dokaz. *1. Uočimo da za sve $f \in \mathcal{L}$ vrijedi*

$$1 \wedge f = (1 \wedge f^+) - f^-.$$

Ako je $f \in \mathcal{L}$, tada je f^+, $f^- \in \mathcal{L}$. Vrijedi: $0 \vee (1 \wedge f^+) = 1 \wedge f^+$. Kako je $1 \in \mathcal{M}$, po definiciji slijedi da je $1 \wedge f^+ \in \mathcal{L}$ pa po gornjoj jednakosti slijedi $1 \wedge f \in \mathcal{L}$.

Neka je sada $f \in \mathcal{M}$. Kako je $1 \in \mathcal{M}$, po Teoremu 3.12 slijedi da je $1 \wedge f \in \mathcal{M}$.

2. Želimo dokazati da je $1 \in \mathcal{M}$, tj. da je $g \vee (1 \wedge h) \in \mathcal{L}$ kada je g, $h \in \mathcal{L}$ i $g \leq 0 \leq h$. Pod ovim uvjetima vrijedi $0 \leq 1 \wedge h$ i $g \vee (1 \wedge h) = 1 \wedge h$. No, po pretpostavci je $1 \wedge h \in \mathcal{L}$. Time je dokaz dovršen. ■

Sljedeći teorem, koji nećemo dokazivati govori o ekvivalentnosti pojmova I-izmjerivih i S-izmjerivih funkcija (naravno, uz pretpostavku da vrijedi Stoneov aksiom).

Teorem 3.17 *Neka je $X \in S$. Tada je $f \in \mathcal{M}$ ako i samo ako je f S-izmjeriva funkcija.*

Iskažimo i dokažimo sada najvažniji teorem u ovom odjeljku.

Teorem 3.18 *Neka je $X \in S$. Tada je f I-sumabilna ako i samo ako je μ-sumabilna. U tom slučaju vrijedi*

$$I(f) = \int f \, d\mu.$$

Dokaz. *Dovoljno je dokazati teorem u slučaju $f \geq 0$. Opći slučaj tada slijedi iz rastava $f = f^+ - f^-$.*

Označit ćemo sa $\mathcal{L}(I)$ klasu I-sumabilnih funkcija, a sa $\mathcal{L}(\mu)$ klasu μ-sumabilnih funkcija. Kako je, po prethodnom teoremu, klasa S-izmjerivih funkcija jednaka klasi I-izmjerivih funkcija, funkcije iz ove klase nazivat ćemo jednostavno izmjerive funkcije.

Neka je $f \geq 0$ i neka je ili $f \in \mathcal{L}(I)$ ili $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Tada je f izmjeriva funkcija. Neka je $F = \{x : f(x) = +\infty\}$. Odaberimo $\varepsilon > 1$ i definirajmo, za svaki $i \in \mathbb{Z}$, skupove $E_i(\varepsilon) = \{x : \varepsilon^i < f(x) < \varepsilon^{i+1}\}$. Neka je $h : X \to \overline{\mathbb{R}}$, $h(x) = +\infty$, za $x \in F$ i $h(x) = 0$, inače. Označimo sa h_i karakterističnu funkciju skupa $E_i(\varepsilon)$. Funkcija

$$H_n = h + \sum_{i=-n}^{n} \varepsilon_i h_i$$

je I-izmjeriva i konvergira po točkama (kada $n \to +\infty$) nekoj funkciji. Označimo tu funkciju s f_ε. Nadalje, neka je $\varepsilon_n = \delta^{\alpha_n}$, za $\alpha_n = 2^{1-n}$. Neka je sada $g_n = f_{\varepsilon_n}$.

U oba slučaja ($f \in \mathcal{L}(I)$ ili $f \in \mathcal{L}(\mu)$) vrijedi da je $\mu(F) = 0$. Stoga, h pripada i u $\mathcal{L}(I)$ i u $\mathcal{L}(\mu)$ i $I(h) = \int h \, d\mu$. Uočimo da je $0 \leq h_i \leq \varepsilon^{-i} f$. Kako je svaka funkcija h_i izmjeriva, zaključujemo da je $h_i \in \mathcal{L}(I)$ ako je $f \in \mathcal{L}(I)$ te da je $h_i \in \mathcal{L}(\mu)$ ako je $f \in \mathcal{N}(\mu)$. U svakom slučaju, kako je h_i karakteristična funkcija, vrijedi da je $\mu(E_i(\varepsilon)) \leq +\infty$. Štoviše, h_i pripada objema klasama $\mathcal{L}(I)$ i $\mathcal{L}(\mu)$ s bilo kojom od pretpostavki na f te vrijedi

$$I(h_i) = \int h_i \, d\mu = \mu(E_i(\varepsilon).$$

Stoga, funkcija H_n pripada objema klasama $\mathcal{L}(I)$ i $\mathcal{L}(\mu)$, $H_n \uparrow f_\varepsilon \leq f$, $I(H_n) = \int H_n \, d\mu$, niz $(I(H_n))$ je omeđen odozgo s $I(f)$, ako je $f \in \mathcal{L}(I)$ ili sa $\int f \, d\mu$, ako je $f \in \mathcal{L}(\mu)$. Po teoremima o monotonoj konvergenciji za Lebesgueov i Daniellov integral, zaključujemo da f_ε pripada klasama $\mathcal{L}(I)$ i $\mathcal{L}(\mu)$ i da je

$$I(f_\varepsilon) = \int f_\varepsilon \, d\mu.$$

Konačno, stavljajući $\varepsilon = \varepsilon_n$ i posljedično $f_\varepsilon = g_n$, vidimo da $g_n \uparrow f$. Zaključujući na jednak način, zaključujemo da je f sumabilna u oba slučaja te da vrijedi jednakost iz iskaza teorema. ■

3.3 Stoneov aksiom

U svom radu na teoriji integracije, M. H. Stone predložio je sljedeći uvjet na vektorskoj rešetki $\Re$ koji nazivamo Stoneov aksiom:

Aksiom 3.19 (Stoneov aksiom) $f \in \Re \Rightarrow 1 \wedge f \in \Re$.

Stoneov aksiom je važan jer implicira da je $X \in S$. Ta i još neke tvrdnje dokazane su u sljedećem teoremu.

Teorem 3.20 *Pretpostavimo da vrijedi Stoneov aksiom. Tada:*

1. $f \in \Re \Rightarrow (-1) \vee f \in \Re$ *te* $c \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow c \wedge f \in \Re$.

2. $f \in \Re^o \Rightarrow 1 \wedge f, (-1) \vee f \in \Re^o$. *Analogna tvrdnja vrijedi za klasu* $\Re_u$.

3. $X \in S$.

Dokaz. *1. Neka je $f \in \Re$. Tada je $1 \wedge (-f) \in \Re$ pa je i $-[1 \wedge (-f)] = (-1) \vee f \in \Re$. Neka je $c \in \mathbb{R}^+$. Uočimo da je $c \wedge f = c[1 \wedge f]$, gdje je $g = c^{-1} f$. Stoga je $c \wedge f \in \Re$.*

2. Ako je $f \in \Re^o$*, onda postoji niz* (f_n) *u* $\Re$ *koji raste prema* f*. Lako se vidi da tada niz* $1 \wedge f_n$ *raste prema funkciji* $1 \wedge f$ *pa je* $1 \wedge f \in \Re^o$*. Slično se zaključuje za funkciju* $(-1) \vee f$*. Ako je* $f \in \Re_u$*, onda je* $-f \in \Re^o$ *pa* $1 \wedge (-f) = -[(-1) \vee f]$ *i* $(-1) \vee (-f) = -[1 \wedge f]$ *pripadaju klasi* $\Re^o$*. Odatle slijedi da funkcije* $(-1) \vee f$ *i* $1 \wedge f$ *pripadaju klasi* $\Re_u$*.*

3. Po Teoremu 3.16 dovoljno je dokazati da je $1 \wedge f \in \mathcal{L}$ *kada je* $f \geq 0$ *i* $f \in \mathcal{L}$*. Neka je* $\varepsilon > 0$ *proizvoljan. Kako je* $f \in \mathcal{L}$*, postoje funkcije* $g \in \Re_u$ *i* $h \in \Re^o$ *tako da vrijedi:* $g \leq f \leq h$, $I(h) - I(f) \leq \varepsilon/2$, $I(f) - I(g) \leq \varepsilon/2$*. Tada je* $1 \wedge f \leq 1 \wedge h \leq h$*. Po tvrdnji (b) je* $1 \wedge h \in \Re^o$ *pa je i* $I(1 \wedge h) \leq I(h)$*. Označimo s* $G = (-1) \vee (g \wedge 1)$*. Po tvrdnji (b) slijedi da je* $G \in \Re_u$*. Lako se vidi da je* $G \leq 1 \wedge f$*. Dokazat ćemo da je*

$$(1 \wedge h) - G \leq h - g.$$

Kako je $1 \wedge h \leq h$*, dovoljno je dokazati željenu nejednakost u točkama u kojima je* $G(x) \leq g(x)$*. To je moguće jedino u točkama u kojima je* $G(x) = 1$ *i* $1 \leq g(x)$*. U tom slučaju je i* $1 \leq h(x)$ *(jer je* $g \leq h$*). Tada je vrijednost funkcije* $(1 \wedge h) - G$ *u točki* x *jednaka* 0*, dok je vrijednost funkcije* $h - g$ *nenegativna. Time je dokazana željena nejednakost. Nadalje, kako je* $G \leq 1 \wedge f \leq 1 \wedge h$*, iz dokazane nejednakosti te iz Teorema 2.20 i 2.9 slijedi da je*

$$I(1 \wedge h) - I(G) \leq I(h) - I(g) \leq \varepsilon.$$

Sada po Teoremu 2.26 slijedi da je $1 \wedge f \in \mathcal{L}$ *čime je teorem dokazan.* ■

Zaključak

Vidjeli smo Daniellov pristup teoriji integracije koji je, u suštini, aksiomatski jer četiri uvjeta iz definicije Daniellovog integrala možemo shvatiti kao svojevrsne aksiome integrala. Time je Daniell doprinio daljnoj izgradnji matematičke teorije (posebice funkcionalne analize) te omogućio da se pojam integrala proširi i na linearne funkcionale. Razlog zašto se Daniellov integral ne uči na nijednom kolegiju na sveučilišnoj razini je jednostavan: Riemannov i Lebesgueov integral omogućuju da, nakon što integriramo neku funkciju na nekom skupu, kao rezultat dobijemo neki (realni) broj na osnovu kojeg se mogu donijeti neki zaključci. U poglavlju u kojem smo iznijeli osnovne rezultate Daniellovog integrala nismo ništa računali, To je posljedica apstraktnosti pojma Daniellovog integrala. No, to nas ne treba obeshrabriti u promatranju pojma Daniellovog integrala jer svaka matematička teorija, ma kako apstraktna, sigurno se može primijeniti na pojave živog svijeta.

Literatura

[1] Jukić, D. (2012.), Mjera i integral, Osijek.

[2] Lebesgue, H. (1904.) ”Leçons sur l'intégration et la recherche des fonctions primitives”, Paris:Gauthier-Villars.

[3] Matijević, V. (2014.), Diferencijalni i integralni račun 1, Split.

[4] Royden, H.L. (1988.) , Real Analysis, treće izdanje, New York; London.

[5] Taylor, A.E. (1985.), General Theory of Functions and Integration, Toronto; London.

[6] Riemann, B. (1868.), Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe, Gottingen

[7] Šikić, H. (1992.), Riemann Integral vs. Lebesgue Integral, Zagreb;Gainesville

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

Daniellov integral

Ivan Barić

Sažetak:

Osnovni cilj ovog rada je aksiomatski pristup teoriji integracije. U prvom poglavlju su izneseni osnovni rezultati Riemannovog i Lebesgueovog pristupa pojmu integrala. U drugom poglavlju uvodimo Daniellov integral, pojmove donjih i gornjih funkcija te pojam sumabilne funkcije. U trećem poglavlju dajemo vezu Daniellovog integrala i teorije mjere. Na samom kraju iznosimo Stoneov aksiom i objašnjavamo njegovu važnost.

Ključne riječi:

Vektorska rešetka, gornje i donje funkcije, sumabilne funkcije, Stoneov aksiom

Podatci o radu:

74 stranice, 3 slike, 7 literaturnih navoda, hrvatski jezik

Mentorica: *doc.dr.sc Vesna Gotovac Đogaš*

Članovi povjerenstva:

izv.prof.dr.sc. Jurica Perić

mag.math. Marcela Mandarić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *17. veljače 2023. godine.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

Daniell integral

Ivan Barić

Abstract:

Primary goal of this paper is axiomatic aproach to theory of integration. In the first chapter we give basic results of Riemann and Lebesgue integral. In the second chapter we introduce definition of Daniell integral, definitions of lower and upper functions and definiton of summable function. In the third chapter we give a link between Daniell integral and measure theory. At the very end we discuss Stone's axiom and it's importance.

Key words:

Vector lattice, upper and lower functions, summable functions, Stone's axiom

Specifications:

74 pages, 3 pictures, 7 literary references, Croatian

Mentor: *Assistant professor Vesna Gotovac Đogaš*

Committee:

Associate professor Jurica Perić

Instructor Marcela Mandarić

This thesis was approved by a Thesis commettee on *February 17th, 2023.*