

# Problem brahistokrone u nehomogenom gravitacijskom polju

---

Šalinović, Josip

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:949237>

Rights / Prava: [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

Download date / Datum preuzimanja: **2024-12-24**

Repository / Repozitorij:

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet

**PROBLEM BRAHISTOKRONE U  
NEHOMOGENOM  
GRAVITACIJSKOM POLJU**

Završni rad

Josip Šalinović

Split, rujan 2022.

## Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu

Završni rad

Prirodoslovno – matematički fakultet

Odjel za fiziku

Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

### Problem brahistokrone u nehomogenom gravitacijskom polju

Josip Šalinović

Sveučilišni preddiplomski studij Fizika

#### Sažetak:

Problem brahistokrone jedan je od zanimljivijih problema klasične mehanike koji potječe još od vremena Galilea. Problem je glasio ovako: Dane su točke A i B koje su položene u vertikalnoj ravnini, tijelo pod utjecajem gravitacije klizi po krivulji bez trenja od točke A do B. Nađite krivulju takvu da tijelo u najkraćem mogućem vremenu stigne od A do B. Prva točna rješenja objavili su braća Bernoulli koja su koristila zakone optike, točnije Snellov zakon kao polazište. Kasnije se razvila nova grana matematike varijacijski račun, te Euler-Lagrangeova jednadžba koja je problem brahistokrone riješila analitičkim putem. U ovom radu prezentiramo analitičko rješenje problema brahistokrone iz Euler-Lagrangeove jednadžbe i numeričko rješenje pripadne diferencijalne jednadžbe. Uspoređujemo rješenja numeričke metode s analitičkim rješenjima. Na kraju je problem brahistokrone generaliziran za nehomogena gravitacijska polja.

**Cljučne riječi:** brahistokrona, Euler-Lagrangeova jednadžba, nehomogeno gravitacijsko polje, Runge–Kutta metoda.

**Rad sadrži:** 23 stranica, 16 slika, 10 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom

**Mentor:** doc. dr. sc. Petar Stipanović

**Ocjenjivači:** doc. dr. sc. Petar Stipanović  
izv. prof. dr. sc. Željana Bonačić Lošić  
doc. dr. sc. Marko Kovač

**Rad prihvaćen:** 22. rujna 2022.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

## Basic documentation card

University of Split

Bachelor thesis

Faculty of Science

Department of Physics

Rudera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

### Brachistochrone problem for nonuniform gravitational fields

Josip Šalinović

University undergraduate study programme Physics

#### Abstract:

The problem of brachistochrone is one of the most interesting problems of classical mechanics dating back to the time of Galileo. The problem was as follows: Given two points A and B in a vertical plane, what is the curve traced out by a point acted on only by gravity, which starts at A and reaches B in the shortest time. Johann and his brother Jakob Bernoulli derived the first solution. They used the laws of optics more precisely Snell's law as indirect method. Later, a new branch of the mathematics of variational calculus was developed and the Euler-Lagrange equation solved the problem of brachistochrone analytically. In this paper, we will present an analytical solution of the brachistochrone problem from the Euler-Lagrange equation and a numerical solution of the corresponding differential equation. Finally, we will generalize the brachistochrone problem for nonuniform gravitational fields.

**Keywords:** Brachistochrone, Euler-Lagrange equation, nonuniform gravitational fields, Runge–Kutta method.

**Thesis consists of:** 23 pages, 16 figures, 10 references. Original language: Croatian

**Supervisor:** Assist. Prof. Dr. Petar Stipanović

**Reviewers:** Assist. Prof. Dr. Petar Stipanović  
Assoc. Prof. Dr. Željana Bonačić Lošić  
Assist. Prof. Dr. Marko Kovač

**Thesis accepted:** September 22, 2022.

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

# Sadržaj:

<b>1 Povijesni uvod .....</b>	<b>1</b>
1.1 Problem brahistokrone .....	1
<b>2 Analitička metoda .....</b>	<b>2</b>
2.1 Problem brahistokrone u homogenom polju .....	2
2.2 Euler-Lagrangeova jednačba .....	3
2.3 Analitičko rješenje klasičnog problema brahistokrone .....	5
2.4 Problem brahistokrone u nehomogenom gravitacijskom polju .....	7
2.5 Jednačbe gibanja .....	9
<b>3 Numerička metoda.....</b>	<b>11</b>
3.1 Runge Kutta 4: .....	11
<b>4 Rezultati .....</b>	<b>14</b>
4.1 Rezultati problema brahistokrone u homogenom polju .....	14
4.3 Problem tautohrone .....	17
4.5 Rezultati brahistokrone u nehomogenom polju .....	19
<b>5 Zaključak .....</b>	<b>22</b>
<b>6 Prilog i literatura .....</b>	<b>23</b>

## Popis crteža:

<i>Crtež 1 : Prikaz lijevog koordinatnog sustava.</i>	2
<i>Crtež 2: Jedna krivulja iz familije <math>Y(x)</math> i tražena <math>y(x)</math>. <math>\varepsilon\delta(x)</math> je funkcija razmaka.</i>	4
<i>Crtež 3: Kotrljanjem kruga njena točka na kružnici opisuje cikloidu.</i>	7
<i>Crtež 4: Polarni sustav.</i>	7
<i>Crtež 5: Prikaz egzaktna funkcije zelena i aproksimacije crvena na intervalu <math>h</math>.</i>	11
<i>Crtež 6: Cikloida, rezultat numeričke RK4 metode za <math>N=500</math>.</i>	14
<i>Crtež 7: Greška numeričke metode u odnosu na egzaktno rješenje u ovisnosti o <math>N</math>.</i>	14
<i>Crtež 8: Isječci iz moje animacije. Video pogledati na <a href="#">anima</a> [1].</i>	15
<i>Crtež 9: Ovisnost apsolutne brzine i položaja <math>x</math>.</i>	16
<i>Crtež 10: Ovisnost brzine u <math>x</math>-smjeru i visine tijela.</i>	16
<i>Crtež 11: <math>x(t)</math> ovisnost. Tri čestice dolaze istovremeno u <math>x=3.14</math>.</i>	17
<i>Crtež 12: <math>y(t)</math> ovisnost. Tri čestice dolaze istovremeno u <math>y=0</math>.</i>	17
<i>Crtež 13: Isječci iz moje animacije. Video pogledati na <a href="#">anima</a> [1].</i>	18
<i>Crtež 14: Putanje za deset različitih parametara <math>Z</math>.</i>	20
<i>Crtež 15: Produžene putanje za 4 parametra <math>Z</math>.</i>	21
<i>Crtež 16: Cikloidalno (Huygensovo) njihalo. Izvor: [10].</i>	22

# 1 Povijesni uvod

U povijesti fizike za mnoge zakone fizike se pokazalo da su minimizacija određenih fizikalnih veličina poput puta, vremena i akcija. Na primjer u klasičnoj mehanici Newtonovi zakoni se dobiju iz minimiziranja akcije koja je jednaka integralu razlike potencijalne i kinetičke energije po vremenskim pomacima. U relativnosti, čestica slijedi putanju u prostor-vremenu koja minimizira prostor-vremenski interval poznatija kao geodetska krivulja. U optici imamo Fermatov princip po kojem lomljena zraka svjetlosti između dva sredstva uvijek ide po putanji najkraćeg vremena. Poznatiji problemi iz varijacijskog računa su primjerice Newtonov problem određivanja oblika projektila za koji je sila otpora zraka minimalna. Određivanje putanje koja ima najkraću duljinu između dviju točki na zakrivljenim plohama. Sve je to dovelo do izuma varijacijskog računa odnosno Langrangeove mehanike. [2]

## 1.1 Problem brahistokrone

Problem brahistokrone (*grčki: βράχιστος χρόνος -najkraće vrijeme*) službeno je objavljen 1696. god. u znanstvenom časopisu „Acta Eruditorum“ od strane poznatog fizičara Johana Bernoulija. Problem je bio izazov za sve velike matematičare i fizičare tog vremena. Problem je glasio ovako prema riječima Johana Bernoulija [3]: ***Dane su točke A i B koje su položene u vertikalnoj ravnini, tijelo pod utjecajem gravitacije klizi po krivulji bez trenja od točke A do B. Nađite krivulju takvu da tijelo u najkraćem mogućem vremenu stigne od A do B.*** Znanstvenici koji su ponudili točna rješenja bili su Johan i Jakob Bernoulli, Isaac Newton, G.Leibniz. Njihovi izvodi su se temeljili na zakonima optike i geometrije. Primjerice Johan Bernoulli je zamislio česticu kao zraku svjetlosti koja prolazi kroz beskonačno mnogo tankih slojeva medija čija gustoća linearno raste. Svaka promjena brzine između tih slojeva ide po putanji najkraćeg vremena. Stoga vrijedi Fermatov princip odnosno Snellov zakon. Iz toga se može dobiti diferencijalna jednačba cikloide. Kasnije ti problemi postaju predmet istraživanja Leonarda Eulera i Josepha Lagrangea koji kasnije razvijaju analitički pristup rješavanju tih problema gdje se minimiziraju ili maksimiziraju funkcionali. To često budu određeni integrali oblika  $\int f(x, y(x), y'(x))$ , pa tražimo rješenje  $y(x)$  iz Euler-Lagrangeove jednačbe za koju je funkcional ekstremal. Područje matematike koje se bavi navedenim optimizacijskim problemima zove se varijacijski račun, a jednačba iz koje dobivamo rješenje je Euler-Lagrangeova jednačba. U 2. poglavlju riješit ćemo klasični problem brahistokrone analitičkim putem, te ćemo na kraju generalizirati za nehomogena gravitacijska polja. U 3. poglavlju uvodimo numeričku metodu. U 4. poglavlju grafički prikazujemo rješenja. U 5. poglavlju iznijet ćemo zaključak.

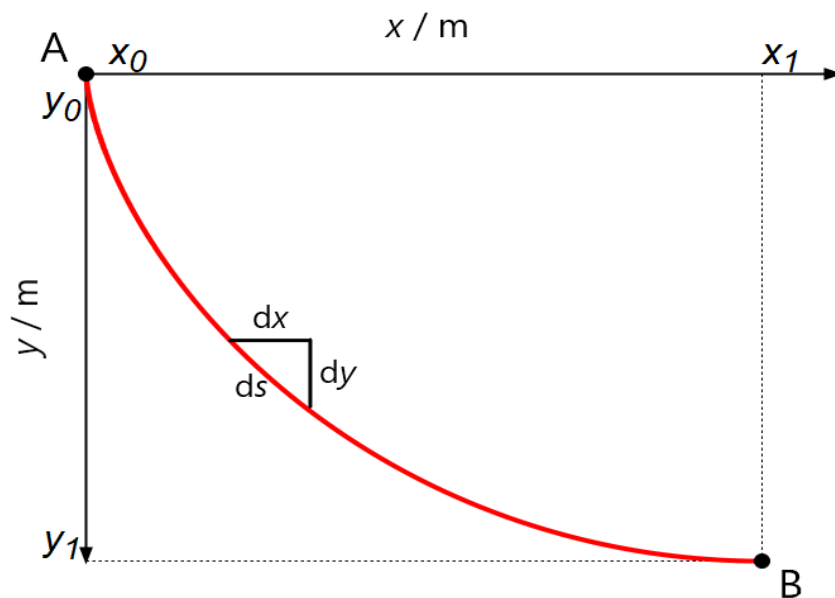
## 2 Analitička metoda

U ovom poglavlju riješit ćemo problem brahistokrone analitičkim putem za homogenu i nehomogenu gravitacijsko polje. Pretpostavimo sljedeće idealizacije:

1. materijalna točka klizi po krivulji od točke A do B bez sile trenja i sile otpora zraka,
2. savršeno vertikalna ravnina sadrži vektor sile teže paralelan njoj,
3. točka B nije vertikalno ispod A jer onda je rješenje pravac (slobodan pad).

### 2.1 Problem brahistokrone u homogenom polju

Jedina sila koja djeluje na tijelo mase  $m$  je **gravitacija** i neka imamo lijevi koordinatni sustav kao na crtežu 1. [4]



Crtež 1 : Prikaz lijevog koordinatnog sustava.

Zakon očuvanja energije je dan izrazom

$$mgy_0 + \frac{1}{2}mv_0^2 = mg(-y) + \frac{1}{2}mv^2. \quad (1.1)$$

Nađimo brzinu čestice u ovisnosti o visini  $y$  iz (1.1) uz uvjet da su početna brzina i položaj u ishodištu nula, to jest  $v_0 = 0$  i  $y_0 = 0$ ,

$$v = \sqrt{2gy}. \quad (1.2)$$

Infinitezimalnu promjenu vremena dobijemo kao omjer infinitezimalne promjene puta i brzine

$$dt = \frac{ds}{v}, \quad (1.3)$$



gdje je  $ds$  jednak infinitezimalnom segmentu krivulje. Pitagorin poučak (Crtež 1) daje

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}. \quad (1.4)$$

Iz (1.4) izlučimo  $dx$  da dobijemo

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx. \quad (1.5)$$

Ukupno vrijeme je zbroj svih infinitezimalnih vremena  $dt$  od početnog trenutka u točki A do krajnjeg u točki B

$$T = \int_{t_A}^{t_B} dt. \quad (1.6)$$

Uvrstimo brzinu (1.2) i segment  $ds$  (1.5) sve u (1.7), uz pokratu  $y' \equiv \frac{dy}{dx}$

$$T = \int_{t_A}^{t_B} dt = \int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} \frac{ds}{v} = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{2gy}} dx = \int_0^x \sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} dx. \quad (1.7)$$

Vrijeme  $T$  zapravo je funkcional koji daje ukupno vrijeme. Želimo minimizirati taj funkcional tako da odredimo funkciju  $y(x)$  koja predstavlja putanju tijela s najmanjim vremenom spuštanja niz tu krivulju. Tu funkciju ćemo odrediti iz Euler-Lagrangeove jednačbe.

## 2.2 Euler-Lagrangeova jednačba

Izvedimo Euler-Lagrangeovu jednačbu koristeći varijacijski račun [5]. Neka je dana podintegralna funkcija (Langragian) oblika  $L(x, y, y')$ . Razmislimo kako ćemo pronaći ekstremnu vrijednost ovog funkcionala

$$I = \int_{x_1}^{x_2} L(x, y, y') dx. \quad (1.8)$$

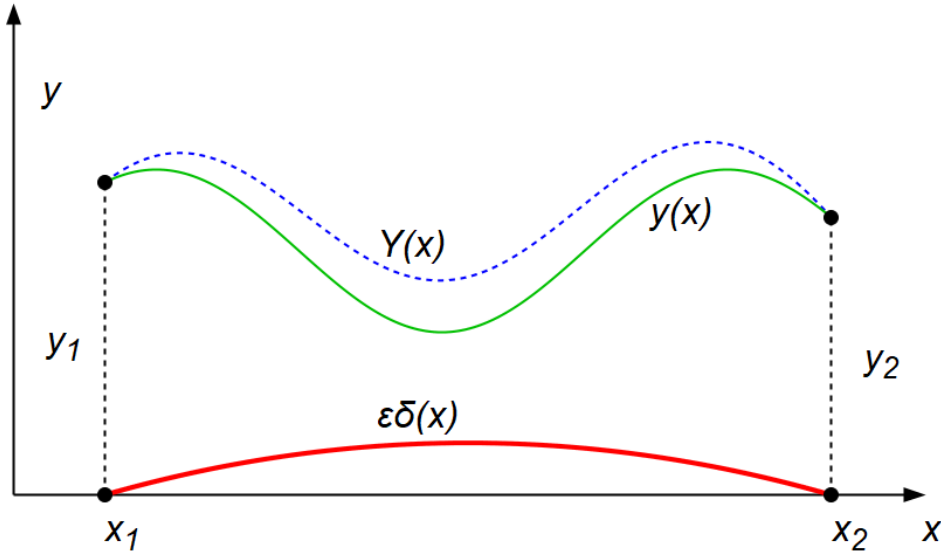
Odaberimo familiju proizvoljnih funkcija  $Y(x)$  koje su bliske traženoj funkciji  $y(x)$

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon \delta(x) \quad (1.9)$$

gdje je  $\delta(x)$  proizvoljna funkcija i  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ , uz uvjet jednakosti na rubovima  $Y(x_1) = y(x_1) \equiv y_1$  i  $Y(x_2) = y(x_2) \equiv y_2$ . Od familije funkcija tražimo onu  $y(x)$  za koju je funkcional

$$I(\varepsilon) = \int_{x_1}^{x_2} L(x, Y, Y') dx \quad (1.10)$$

ekstreman. Funkcional ovisi samo o  $\varepsilon$  jer kada se uvrste granice varijabla  $x$  nestaje.



*Crtež 2: Jedna krivulja iz familije  $Y(x)$  i tražena  $y(x)$ .  $\varepsilon\delta(x)$  je funkcija razmaka.*

Definiramo uvjet za koji je funkcional ekstreman. Kada  $\varepsilon \rightarrow 0$ , tada  $Y(x) \rightarrow y(x)$ ,

$$\left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0. \quad (1.11)$$

Derivirajmo (1.9) i njenu derivaciju po  $\varepsilon$

$$\frac{dY}{d\varepsilon} = \delta(x) \text{ i } \frac{dY'}{d\varepsilon} = \delta'(x). \quad (1.12)$$

Totalna derivacija poprima oblik

$$\left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \left( \left( \frac{\partial L}{\partial Y} \right) \delta(x) + \left( \frac{\partial L}{\partial Y'} \right) \delta'(x) \right) dx = 0. \quad (1.13)$$

Primjenimo parcijalnu integraciju drugog člana zagrade iz (1.13)

$$\int_{x_1}^{x_2} \left( \frac{\partial L}{\partial Y'} \right) \delta' dx = \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial Y'} \right) \delta(x)}_0 \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial Y'} \right) \delta(x) dx. \quad (1.14)$$

Vrijedi  $\delta(x_1) = \delta(x_2) = 0$ , pa je 1.član zdesna u (1.14) jednak 0. (1.14) vratimo u (1.13).

Budući da je  $\delta(x)$  proizvoljna funkcija, onda zagrada u konačnom izrazu za  $\varepsilon = 0$

$$\left. \frac{dI(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_{x_1}^{x_2} \underbrace{\left( \frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) \right)}_0 \delta(x) dx = 0 \quad (1.15)$$

mora biti 0, odnosno dobivamo Euler-Lagrangeovu jednadžbu

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = 0. \quad (1.16)$$

**Teorem:**

Ako Lagrangian  $L$  iz (1.16) ne ovisi eksplicitno o varijabli  $x$  već samo o  $y(x)$  i njenoj derivaciji  $y'(x)$ , vrijedi pojednostavljeni izraz takozvani **Beltramijev identitet** [6]

$$L - y' \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) = C. \quad (1.17)$$

**Dokaz:**

Neka je potpuna derivacija Lagrangiana  $L(x, y, y')$  dana izrazom

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial L}{\partial y} \left( \frac{dy}{dx} \right) + \frac{\partial L}{\partial y'} \frac{dy'}{dx}. \quad (1.18)$$

Pod pretpostavkom da  $L$  ne ovisi o  $x$ , to jest  $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$ , dobivamo

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial y} y' + \frac{\partial L}{\partial y'} y''. \quad (1.19)$$

Pomnožimo Euler-Lagrangeovu jednadžbu s  $y'$

$$\frac{\partial L}{\partial y} y' = \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) y'. \quad (1.20)$$

Uvrstimo (1.20) u (1.19)

$$\frac{dL}{dx} = y' \frac{d}{dx} \left( \frac{\partial L}{\partial y'} \right) + \frac{\partial L}{\partial y'} y''. \quad (1.21)$$

Primjetimo da je desni dio izraza (1.21) derivacija produkta  $\frac{d}{dx} \left( y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right)$ , premjestimo taj član na lijevu stranu pod zajedničku derivaciju. Izraz u zagradi mora biti konstantan,

$$\frac{d}{dx} \underbrace{\left( L - y' \frac{\partial L}{\partial y'} \right)}_{\text{konst.}} = 0. \quad \blacksquare (1.22)$$

## 2.3 Analitičko rješenje klasičnog problema brahistokrone

Sada kada znamo Lagrangian i Euler-Lagrangeovu jednadžbu, odredimo rješenje našeg problema. Koristimo funkcional (1.7), odnosno vrijeme spuštanja tijela. Uzmimo integrand od (1.7) i primjenimo Beltramijev identitet (1.17) [4]

$$\sqrt{\frac{1 + y'^2}{2gy}} - y' \left( \frac{y'}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} \right) = \frac{1}{\sqrt{2gy(1 + y'^2)}} = C \quad (1.23)$$

gdje nakon kvadriranja uvodimo pokratu za konstantu  $2R$ ,

$$y(1 + y'^2) = \frac{1}{2gC^2} = 2R = \text{konst.} \quad (1.24)$$

Analitičkim sređivanjem prelazimo u jednostavniju formu diferencijalne jednačbe 1. reda

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2R - y}{y}}. \quad (1.25)$$

Riješimo je metodom separacije varijabli,

$$dx = \int_0^y \sqrt{\frac{y}{2R - y}} dy \quad (1.26)$$

uz supstitucije

$$y = 2R \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ i } dy = 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (1.27)$$

poprima oblik

$$x = \int_0^\theta \frac{2R \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\sqrt{2R \left(1 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)}} 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta \quad (1.28)$$

$\cos^2(\theta/2)$

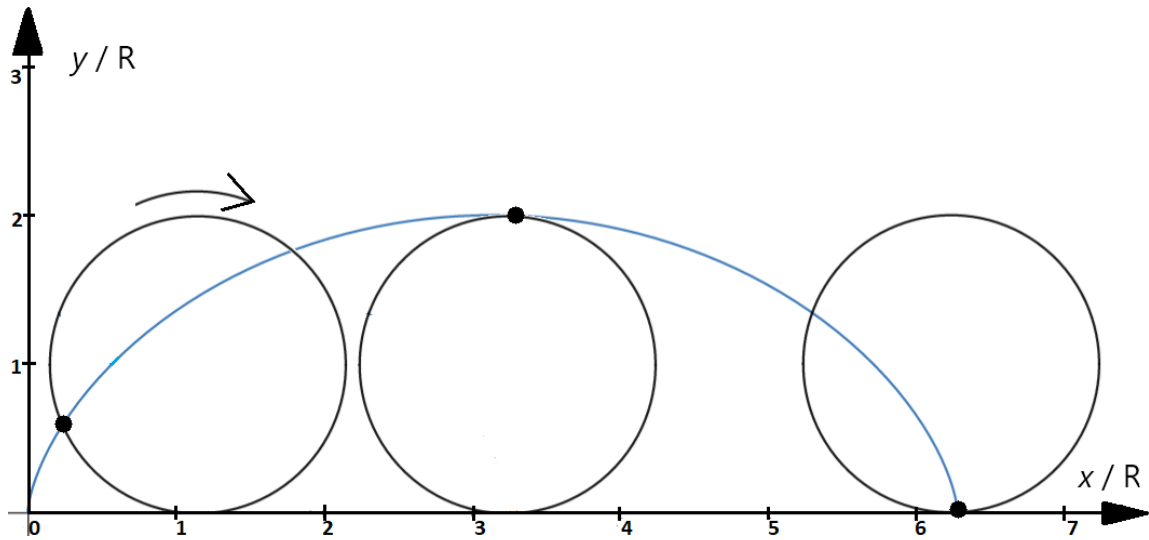
$$x = \int_0^\theta \frac{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} 2R \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = 2R \int_0^\theta \underbrace{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}_{\frac{1}{2}(1 - \cos(\theta))} d\theta \quad (1.29)$$

$$x = R \int_0^\theta (1 - \cos \theta) d\theta = R(\theta - \sin \theta). \quad (1.30)$$

Izraz (1.27) pojednostavljen i prepisani izraz (1.30) daju parametarsko rješenje

$$\begin{aligned} x &= R(\theta - \sin \theta) \\ y &= R(1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (1.31)$$

Konstanta  $R$  predstavlja radijus kružnice čija fiksna točka na kružnici opisuje cikloidu kotrljanjem kružnice stalnom brzinom po osi  $x$  kao na crtežu 3.

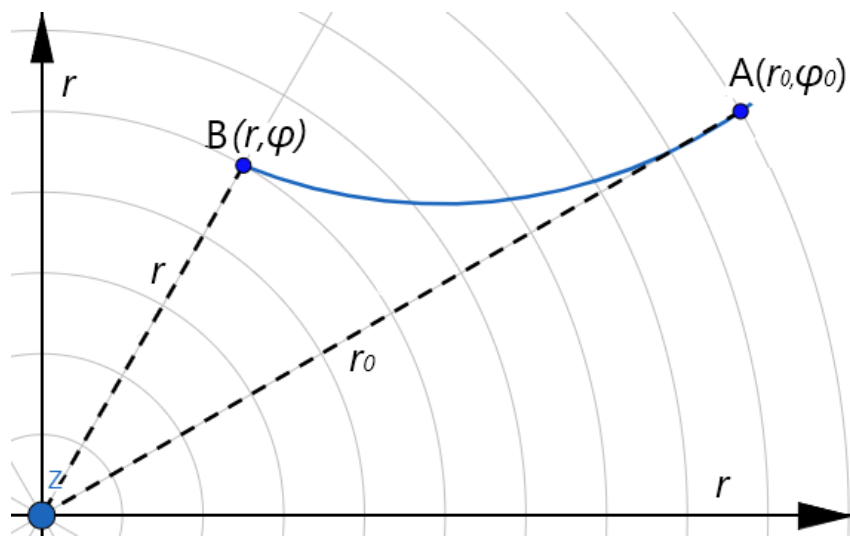


Crtež 3: Kotrljanjem kruga njena točka na kružnici opisuje cikloidu.

## 2.4 Problem brahistokrone u nehomogenom gravitacijskom polju

U podpoglavlju 2.3 razmatrali smo problem u aproksimaciji homogenog gravitacijskog polja Zemlje, odnosno kada je radijalna visina krivulje zanemariva u odnosu na radijus Zemlje. Promotrimo taj isti problem samo u situaciji kada je gravitacijska sila promijenjiva to jest kada su radijalne visine krivulje usporedive ili veće od radijusa Zemlje. Uvedimo polarni koordinatni sustav kao na crtežu 4 gdje se u ishodištu (točka Z) nalazi planet Zemlja. Neka čestica klizi po plavoj krivulji od točke  $A(r_0, \varphi_0)$  do  $B(r, \varphi)$ . Neka su konstante za naš problem:

- $M$  - masa Zemlje ( $M = 5,9722 \cdot 10^{24}$  kg),
- $m$  - proizvoljna masa čestice ili tijela,
- $G$  - gravitacijska konstanta ( $G = 6.6743 \cdot 10^{-11}$  kg<sup>-2</sup>m<sup>-2</sup>).



Crtež 4: Polarni sustav.

Zakon očuvanja energije u Zemljinom gravitacijskom polju [7]

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + \left(-G \frac{Mm}{r_0}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + \left(-G \frac{Mm}{r}\right). \quad (1.32)$$

Odredimo brzinu  $v$  iz prethodne relacije i neka je početna brzina  $v_0 = 0$ ,

$$v = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}. \quad (1.33)$$

Definiramo infinitezimalni segment krivulje u polarnom sustavu. Duljina diferencijalnog kružnog luka iznosi  $dl = r d\varphi$ . Primjenom Pitagorinog poučka slijedi

$$ds = \sqrt{dr^2 + (rd\varphi)^2}. \quad (1.34)$$

Izlučivanjem  $d\varphi$  iz korijena uz pokratu  $r' \equiv dr/d\varphi$  imamo

$$ds = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2} d\varphi = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi. \quad (1.35)$$

Uvrstimo (1.33) i (1.35) sve u (1.36). Ukupno vrijeme je

$$T = \int_{(r_0, \varphi_0)}^{(r, \varphi)} \frac{ds}{v} = \int_{(r_0, \varphi_0)}^{(r, \varphi)} \sqrt{\frac{r^2 + (r')^2}{2GM \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}} d\varphi = \int_{(r_0, \varphi_0)}^{(r, \varphi)} \sqrt{\frac{r_0 r (r^2 + r'^2)}{2GM(r_0 - r)}} d\varphi. \quad (1.36)$$

Uvrstimo podintegralnu funkciju (Lagrangian) iz (1.36) u Beltramijev identitet (1.17)

$$\frac{\sqrt{r_0 r (r^2 + r'^2)}}{\sqrt{2GM(r_0 - r)}} - r' \cdot \frac{\sqrt{r_0 r}}{2\sqrt{2GM(r_0 - r)}} \frac{2r'}{\sqrt{r^2 + r'^2}} = C. \quad (1.37)$$

Izlučimo  $r'$  iz prethodne relacije i sredimo izraz

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{r_0 r^5 - 2C^2 GM(r_0 - r)r^2}{2C^2 GM(r_0 - r)}. \quad (1.38)$$

Definiramo  $2C^2 m = 1$  da izraz bude jednostavniji. Nađemo korijen i inverz od (1.38) [7]

$$\frac{d\varphi}{dr} = \sqrt{\frac{G(r_0 - r)}{r_0 r^5 - G(r_0 - r)r^2}}. \quad (1.39)$$

Izraz (1.38) možemo transformirati i bez ograničavanja konstante  $K \equiv 2C^2 m$ . Prvo izlučimo faktor  $1/r$  ispred korijena

$$\frac{d\varphi}{dr} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{1 - \frac{r}{r_0}}{Kr^3 - 1 + \frac{r}{r_0}}}. \quad (1.40)$$

[8] Uvedimo novu varijablu i konstantu  $z$ , Konstanta  $z_0$  je vrijednost varijable  $z$  kada nazivnik ispod korijena u (1.40) iščezava pa vrijedi

$$z = \frac{r}{r_0} \quad K = r_0^{-3}(z_0^{-3} - z_0^{-2}). \quad (1.41)$$

Transformirani oblik glasi

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{z_0^{3/2}}{z} \sqrt{\frac{1-z}{(z-z_0)[(1-z_0)z^2 + z_0(1-z_0) + z_0^2]}}. \quad (1.42)$$

Ovaj oblik nam omogućava da za različite  $z$  – ove od 0 do 1 dobivamo različite oblike putanja. U izrazu (1.38) imali smo dvije konstante  $C$  i  $r_0$  koje smo objedinili jednom konstantom  $z_0$ .

Pojednostavili smo izraz (1.38) bez ograničavanja konstante  $2C^2m = 1$ . Riješit ćemo (1.39) i (1.42) numeričkom metodom Runge-Kutta 4 (RK4) u sljedećem poglavlju.

## 2.5 Jednadžbe gibanja

Kako bi napravili animacije klizanja tijela niz cikloidu ili bilo koju drugu krivulju. Prvo moramo odrediti diferencijalne jednadžbe gibanja čije rješenje predstavlja funkciju položaja tijela u ovisnosti o vremenu. Mi ćemo prikazat izvod jednadžbe gibanja za cikloidu koristeći Euler-Lagrangeovu jednadžbu. Analogno se napravi i za ostale krivulje korištene u animacijama.

Uvrstimo parametarske jednadžbe invertirane cikloide  $x(\theta) = \theta + \sin\theta$  i  $y(\theta) = 1 - \cos\theta$  u definicije kinetičke i potencijalne energije. Kinetička energija je

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}mR^2 \{[(1 + \cos\theta)\dot{\theta}]^2 + [(\sin\theta)\dot{\theta}]^2\}. \quad (1.43)$$

Potencijalna energija glasi

$$V = mgy = mgR(1 - \cos\theta). \quad (1.44)$$

Određimo Lagrangian iz

$$L = T - V = mR^2(1 + \cos\theta)\dot{\theta}^2 - mgR(1 - \cos\theta). \quad (1.45)$$

Uvrstimo Lagrangian (1.45) u Euler-Lagrangeovu jednadžbu (1.16)

$$\frac{d}{dt} [2mR^2(1 + \cos\theta)\dot{\theta}] - [mR^2\sin\theta\dot{\theta}^2 + mgR\sin\theta] = 0. \quad (1.46)$$

Podijelimo gornji izraz sa  $2mR^2$

$$\frac{d}{dt} [(1 + \cos\theta)\dot{\theta}] - \frac{1}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a}\sin\theta = 0. \quad (1.47)$$

Derivirajmo prvi član po vremenu i konačni izraz glasi

$$(1 + \cos\theta)\ddot{\theta} + \frac{1}{2}\sin\theta\dot{\theta}^2 - \frac{g}{2a}\sin\theta = 0.$$

Ovu diferencijalnu jednadžbu možemo rastaviti na dvije vezane jednadžbe prvoga reda. Prva diferencijalna jednadžba predstavlja izraz za kutnu akceleraciju, a druga za kutnu brzinu

$$\ddot{\theta} \equiv \dot{\omega} = \frac{\frac{1}{2} \sin\theta \omega^2 - \frac{g}{2a} \sin\theta}{(1 + \cos\theta)} \quad (1.48)$$

$$\dot{\theta} \equiv \omega = \frac{d\theta}{dt} . \quad (1.49)$$

Zapišimo sustav diferencijalnih jednadžbi prvog reda (1.48 i 1.49) u matricnoj reprezentaciji

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\begin{bmatrix} \omega \\ \theta \end{bmatrix}}_{\vec{y}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}}_{\vec{k}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \sin\theta \omega^2 - \frac{g}{2a} \sin\theta \\ (1 + \cos\theta) \end{bmatrix}}_{\vec{k}} . \quad (1.50)$$

Neka je rješenje vektor  $\vec{y}$  koji sadrži kutnu brzinu  $\omega$  i kut  $\theta$ . Vektor  $\vec{k}$  sadrži nagibe tangenti na tražena rješenja, oni su zapravo iznosi kutne akceleracije  $\ddot{\theta}$  i brzine  $\dot{\theta}$ . Koristeći definiciju numeričke derivacije možemo naći iznos od  $\vec{y}$  u  $n+1$  točki kao iznos  $\vec{y}$  u  $n$ -toj točki plus nagib tangenti  $\vec{k}$  puta vremenski pomak  $h$

$$\vec{y}_{n+1} = \vec{y}_n + \vec{k} \cdot h . \quad (1.51)$$

Ovaj algoritam ćemo modificirati u sljedećem poglavlju tako da ćemo nagibe  $\vec{k}$  određivati koristeći RK4 metodu. Koordinate položaja tijela  $x(t)$  i  $y(t)$  dobijemo tako da riješimo diferencijalnu jednadžbu iz (1.49) za kut  $\theta(t_i)$  u  $i$ -tom trenutku i uvrstimo u parametarske jednadžbe cikloide. Komponente brzine  $\dot{x}(t)$  i  $\dot{y}(t)$  dobijemo tako da vremenski deriviramo parametarske jednadžbe cikloide i uvrstimo u njih rješenja jednadžbi (1.49 i 1.48) za  $\theta(t_i)$  i  $\dot{\theta}(t_i)$ . Apsolutnu brzinu dobijemo po Pitagorinom poučku  $|v| = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}$ .

Rezimirajmo u ovom drugom poglavlju smo iz Euler-Lagrangeovog formalizma riješili problem brahistokrone za dvije situacije homogenog i nehomogenog gravitacijskog polja. Uveli smo vas u glavnu ideju problema i prikazali sve korake u izračunu oblika putanje analitičkim putem za homogeni problem brahistokrone. Za nehomogeni problem brahistokrone smo samo izveli diferencijalnu jednadžbu koju ćemo kasnije riješiti numeričkom metodom.



### 3 Numerička metoda

Izvedimo algoritam numeričke (RK4) metode za rješavanje diferencijalnih jednačbi [9].

#### 3.1 Runge Kutta 4:

Prilikom rješavanja diferencijalnih jednačbi oblika  $y'=f(x,y)$  prvo domenu rješenja podijelimo na  $N$  jednakih segmenata širine  $h$ . Promotrimo crtež 5. Prikazan je jedan međukorak na intervalu  $[x_0, x_1]$  širine

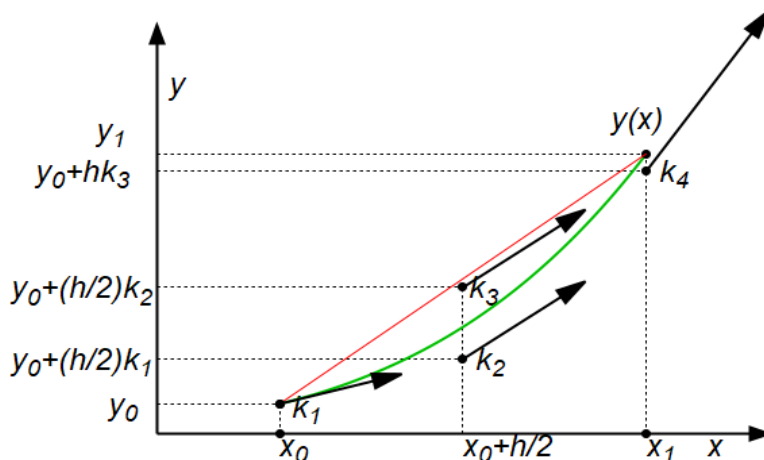
$$h = \frac{x_N - x_0}{N}, \quad (2.1)$$

gdje je  $i$ -ta točka domene  $x_i = x_0 + ih$ . Na slici su crnim strelicama označeni nagibi tangenata u 4 točke koje se nalaze unutar jednog koraka širine  $h$ . Zelenom bojom je prikazano egzaktno rješenje diferencijalne jednačbe i crvenom bojom numeričko rješenje RK4 metode. Vidimo da numeričko i egzaktno rješenje prolaze kroz istu točku  $T(x_1, y_1)$  međutim uvijek postoji jako malo odstupanje funkcijskih vrijednosti RK4 i analitičke metode koje se akumulira s povećanjem broja koraka  $N$ . Koraci u određivanju tangenti:

1. u točki  $(x_0, y_0)$  tangenta nagiba  $k_1 = f(x_0, y_0)$ ,
2. u točki  $(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_1h)$  tangenta nagiba  $k_2 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_1h)$ ,
3. u točki  $(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_2h)$  tangenta nagiba  $k_3 = f(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + k_2h)$ ,
4. u točki  $(x_0 + h, y_0 + k_3h)$  tangenta nagiba  $k_4 = f(x_0 + h, y_0 + k_3h)$ .

Funkcijske vrijednosti u točkama  $T(x_i, y_i)$  dobivamo dodavajući priraste iz prethodne iteracije i množenjem koraka  $h$  s težinskim prosjekom nagiba unutar trenutnog koraka

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)h. \quad (2.2)$$



Crtež 5: Prikaz egzaktno rješenja zelena i aproksimacije crvena na intervalu  $h$ .

Primjenimo RK4 metodu na nelinearnu diferencijalnu jednadžbu 1. reda iz izraza (1.25). Imamo invertiranu, to jest zrcalnu, cikloidu s obzirom na os x. Mjerne jedinice su metar. Na crtežu 6 vidimo cikloidu dobivenu iz RK4 metode dok na crtežu 7 vidimo graf greške to jest razliku egzaktnog i numeričkog rješenja u ovisnosti o broju koraka  $N$ . Egzaktno rješenje ima oblik  $x(y)$ , a izraz (1.25) smo zapisali u inverznom obliku kao derivaciju  $dx/dy$ . Greška je veća za manje  $N$ -ove.

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sin,cos,fabs,acos,sqrt,pi
import numpy as np
# funkcija diferencijalne jednadžbe cikloide dx/dy=
def f(x,y):
    return -sqrt((-y)/(2.0-(-y)))
#parametarske jed.cikloide
def xt(th):
    return th - sin(th)
def yt(th):
    return cos(th)-1.0
# RK-4 metoda
def rk4(x0,y0,yn,n):
    h = (yn-y0)/n
    for i in range(n):
        k1 = (f(x0, y0))
        k2 = (f((x0+k1*h/2), (y0+h/2)))
        k3 = (f((x0+k2*h/2), (y0+h/2)))
        k4 = (f((x0+k3*h), (y0+h)))
        k = ((k1+2*k2+2*k3+k4)/6)*h
        xn = x0 + k
        y0 = y0+h
        x0 = xn
        ax =fabs(xn-(acos(1.0+y0)-sqrt(y0*(-2.0-y0))))
        X.append(xn)#x-položaj
        Y.append(-y0)#y-položaj
        G.append(ax)#greška
    return Y,X,G
# Početni uvjeti
x0 = xt(0.1)
y0 = yt(0.1)
yn = -1.9999
G=[]
xn=pi
X=[]
Y=[]
#br_koraka=500
for br_koraka in range(100,501,100):
    rk4(x0,y0,yn,br koraka)
```

Pozovimo se na sustav diferencijalnih jednadžbi (1.50) i algoritam (1.51) gdje smo nagib  $\vec{k}$  odredili RK4 metodom. Istim postupkom rješavamo i jednadžbe gibanja za preostale krivulje.

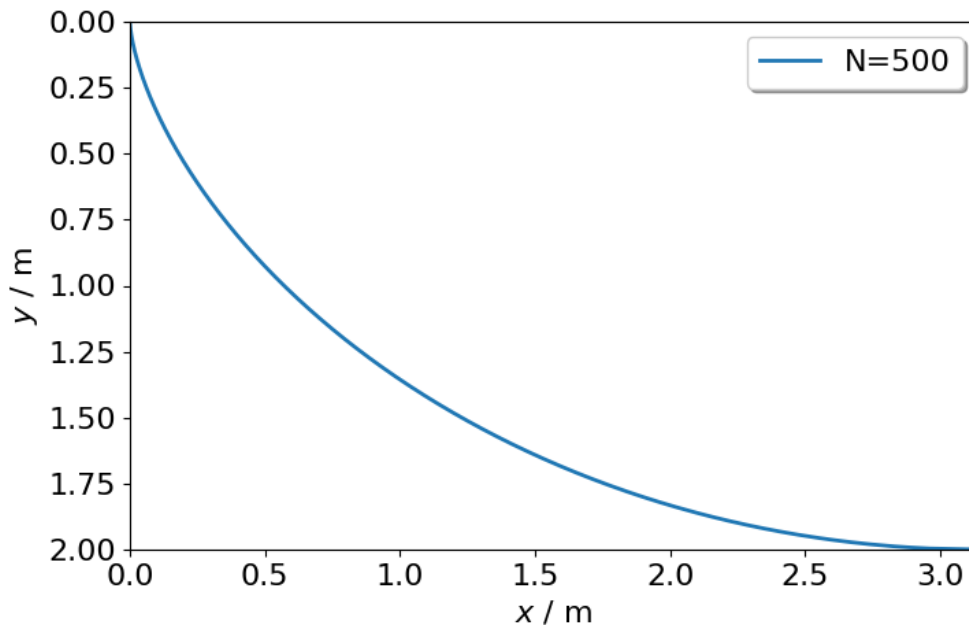
```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import sin, cos, pi, sqrt, fabs
import numpy as np
v_x=[]#brzine u x i y smjeru
v_y=[]
xp=[]#položaji x i y
yp=[]
v=[]#apsolutna brzina
y=np.array([0.0,3.13])
#početni uvjeti polje y=[kut.brzina,kut]
h = (2.1)/600#vremenski pomak
time=np.arange(0.0, 2.1,h)
#[diskretizacija vremena-podjela domene na 600 trenutaka]
def cikloida(y,t) :# diferencijalna j. gibanja za cikloidu
    v=y[0]#brzina
    x=y[1]#kut
    akc=((0.5*sin(x)*v*v)+(-(G/(2.0))*sin(x)))/(1.0+cos(x))
    brz=v
    return np.array([akc,brz])#vraća akceleraciju i brzinu
# RK-4 metoda
def rk4(f,y,t):
    k1 = (f(y, t))
    k2 = (f((y+k1*h/2), (t+h/2)))
    k3 = (f((y+k2*h/2), (t+h/2)))
    k4 = (f((y+k3*h), (t+h)))
    k = ((k1+2*k2+2*k3+k4)/6)
    return k #vraća tež.prosjek nagiba ubrzanja I brzine
for t in time:
    y = y + rk4(cikloida,y,t)*h
    #poziv rk4 metode za proizvoljnu funkciju
    v_x.append(fabs((y4[0]+cos(y4[1])*y4[0])))
    #x-komponenta brzine
    v_y.append(fabs((sin(y4[1])*y4[0])))
    # y-komponenta brzine
    v.append(sqrt((y4[0]+cos(y4[1])*y4[0])**2+(sin(y4[1])*y4[0])**2))
    #apsolutna brzina
    yp.append((1.0-cos(y4[1])))
    #y-položaj
    xp.append(y[1]+sin(y[1]))
    #x-položaj
```

Cijeli kod dostupan na mom one-driveu u priložima pod [1]

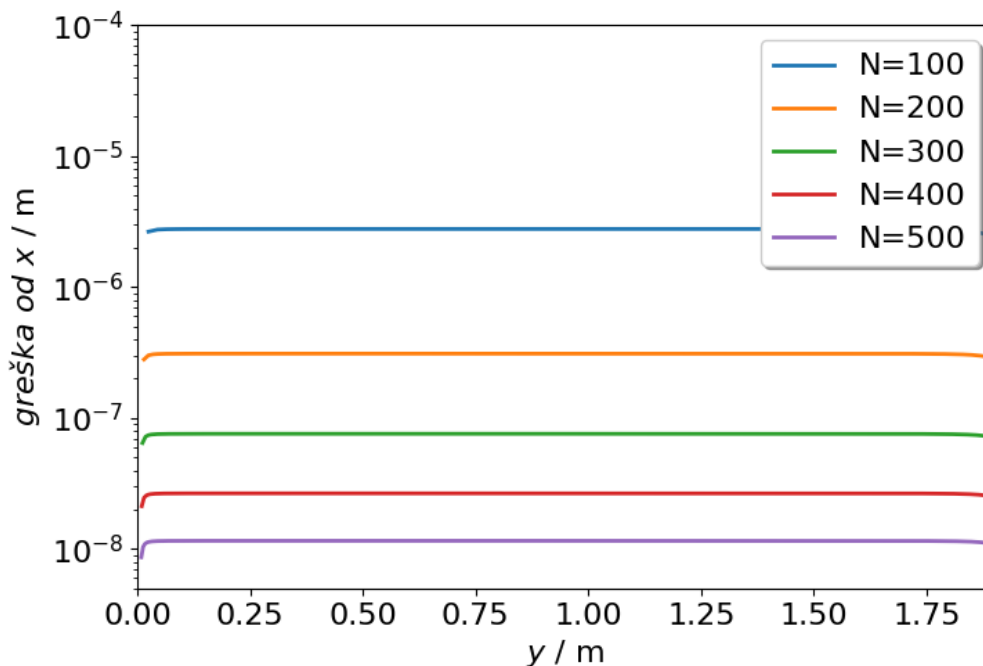
## 4 Rezultati

### 4.1 Rezultati problema brahistokrone u homogenom polju

Na crtežu 6 prikazana je numerički određena brahistokrona za konstantno gravitacijsko polje, a na crtežu 7 ovisnost apsolutne greške RK4 metode o diskretizaciji prostora.

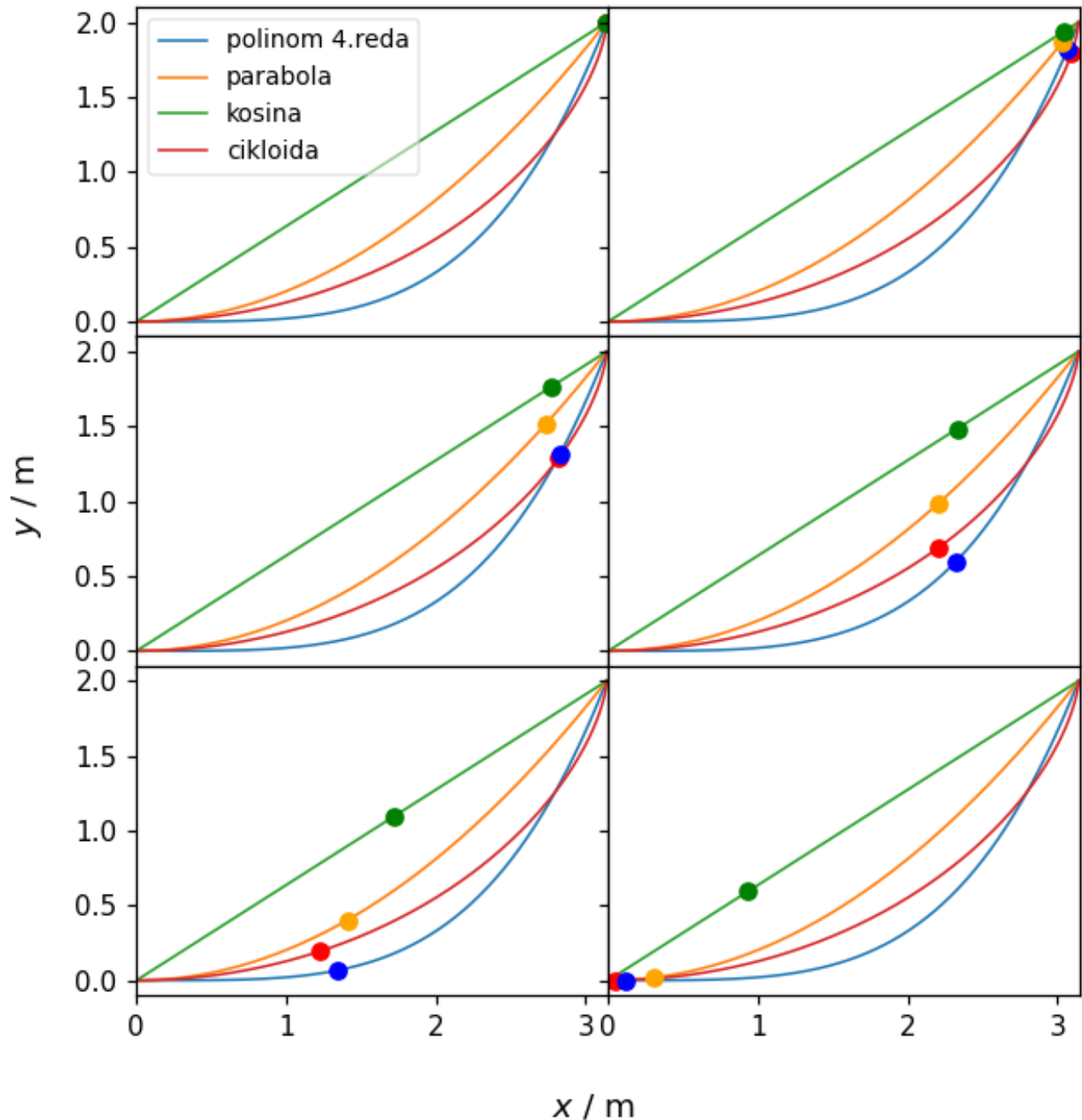


*Crtež 6: Cikloida, rezultat numeričke RK4 metode za N=500.*



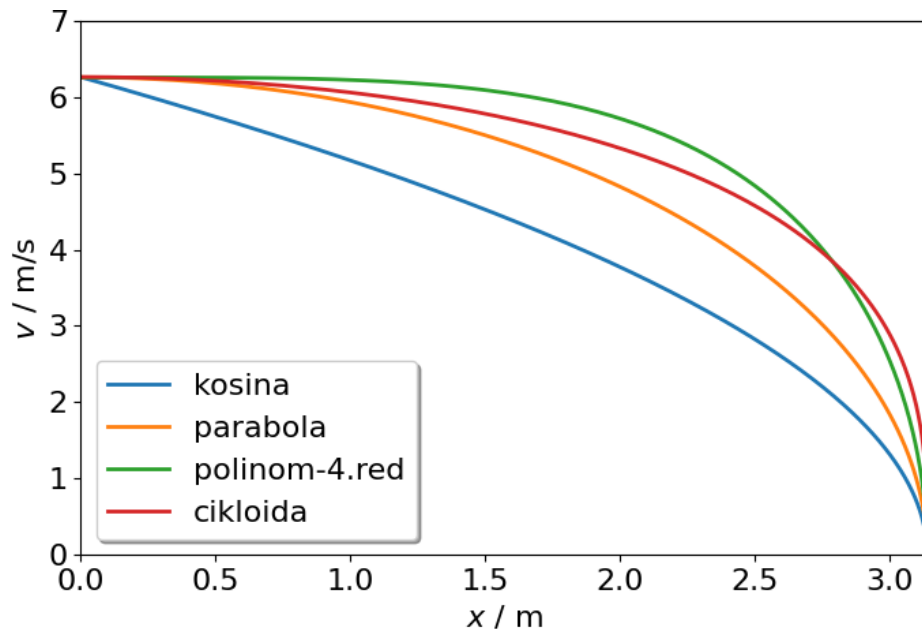
*Crtež 7: Greška numeričke metode u odnosu na egzaktno rješenje u ovisnosti o N.*

**Problem brahistokrone** prezentiran je na crtežu 8 gdje su na panelima u sukcesivnim trenucima redom s lijeva na desno pa prema dolje prikazani položaji kuglica koje se kreću putanjama raznih oblika. Točka na kosini je najsporija iako ima najkraći put. Čestica na polinomu 4.stupnja ima najveću brzinu pri kraju, međutim predugu putanju i osvaja 2.mjesto. **Cikloida je optimalna putanja koja minimizira vrijeme i optimizira ubrzanje čestice.**

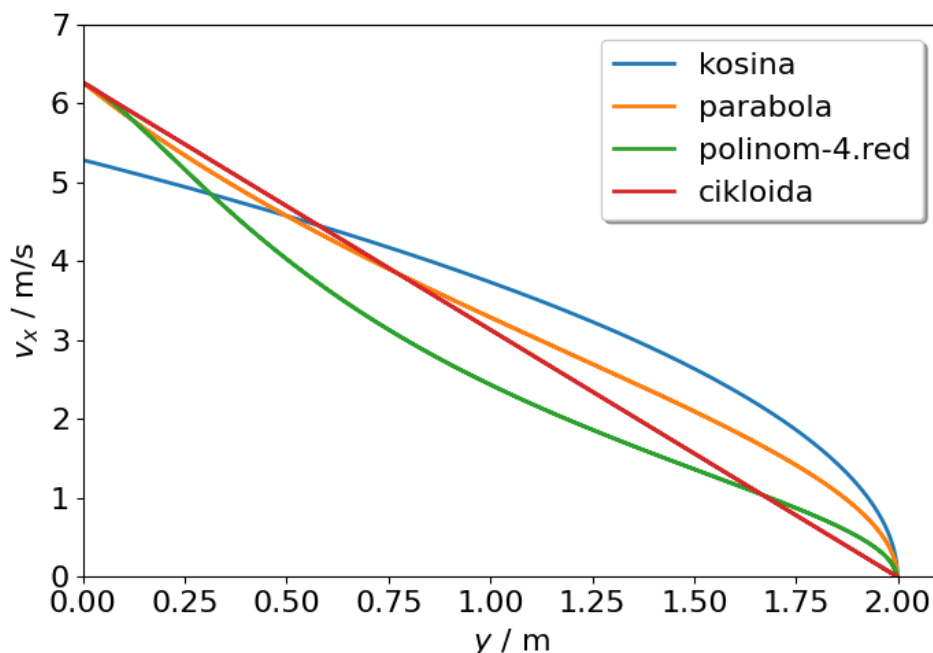


*Crtež 8: Isječci iz moje animacije. Video pogledati na [anima](#) [1].*

Na crtežu 9 vidimo da cikloida u samom početku ima najveću brzinu od ostalih krivulja zbog njezina strmog oblika. Na kraju za  $x = 0$  sva tijela imaju istu brzinu zbog zakona očuvanja energije pošto sve čestice imaju jednaku promjenu visine. Zanimljivo je da na crtežu 10 za cikloidu vidimo linearnu ovisnost  $x$  komponente brzine i visine tijela  $y$ .



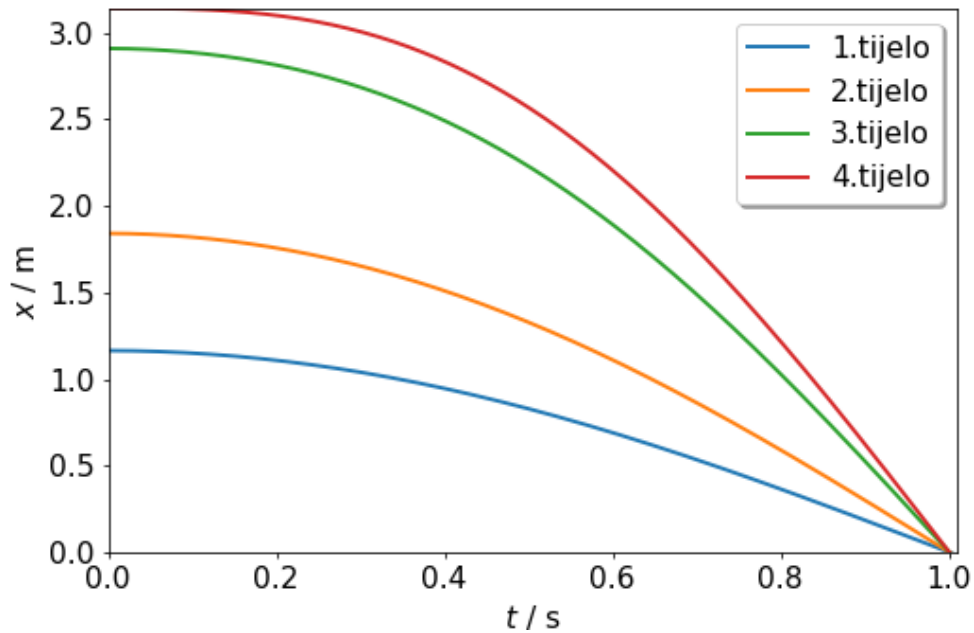
*Crtež 9: Ovisnost apsolutne brzine i položaja  $x$ .*



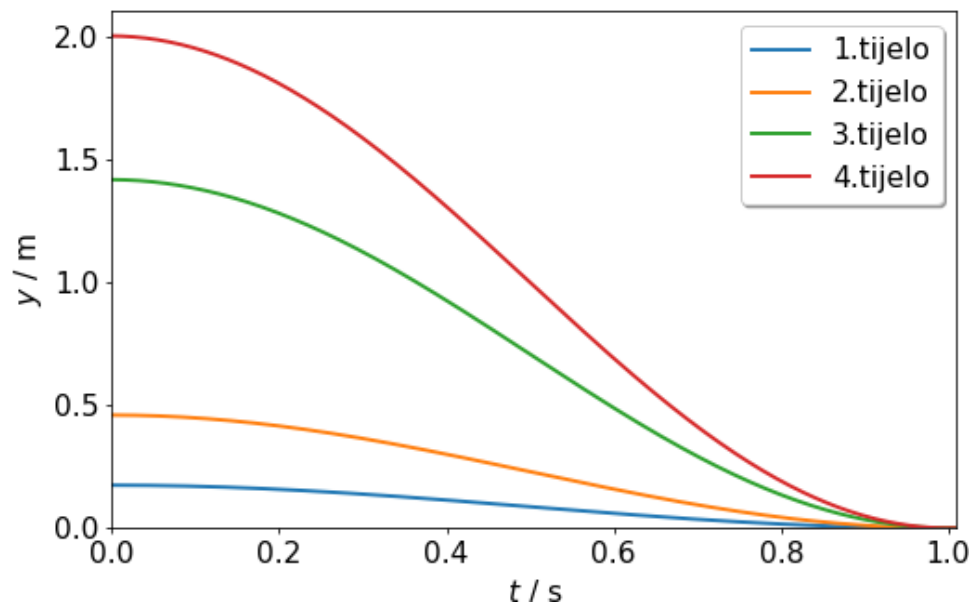
*Crtež 10: Ovisnost brzine u  $x$ -smjeru i visine tijela.*

### 4.3 Problem tautochrone

**Problem tautochrone** (iz grčkoga: tauto-jednako, hronos-vrijeme) odnosi se na određivanje krivulje koja ima jednako vrijeme spuštanja čestica za bilo koji početni položaj. Demonstrirat ćemo, da se se radi o cikloidi, prikazom x koordinata na crtežu 11 i y koordinata na crtežu 12 za 3 tijela. Tri tijela kreću iz različitih početnih položaja te u isto vrijeme dolaze u dno cikloide.

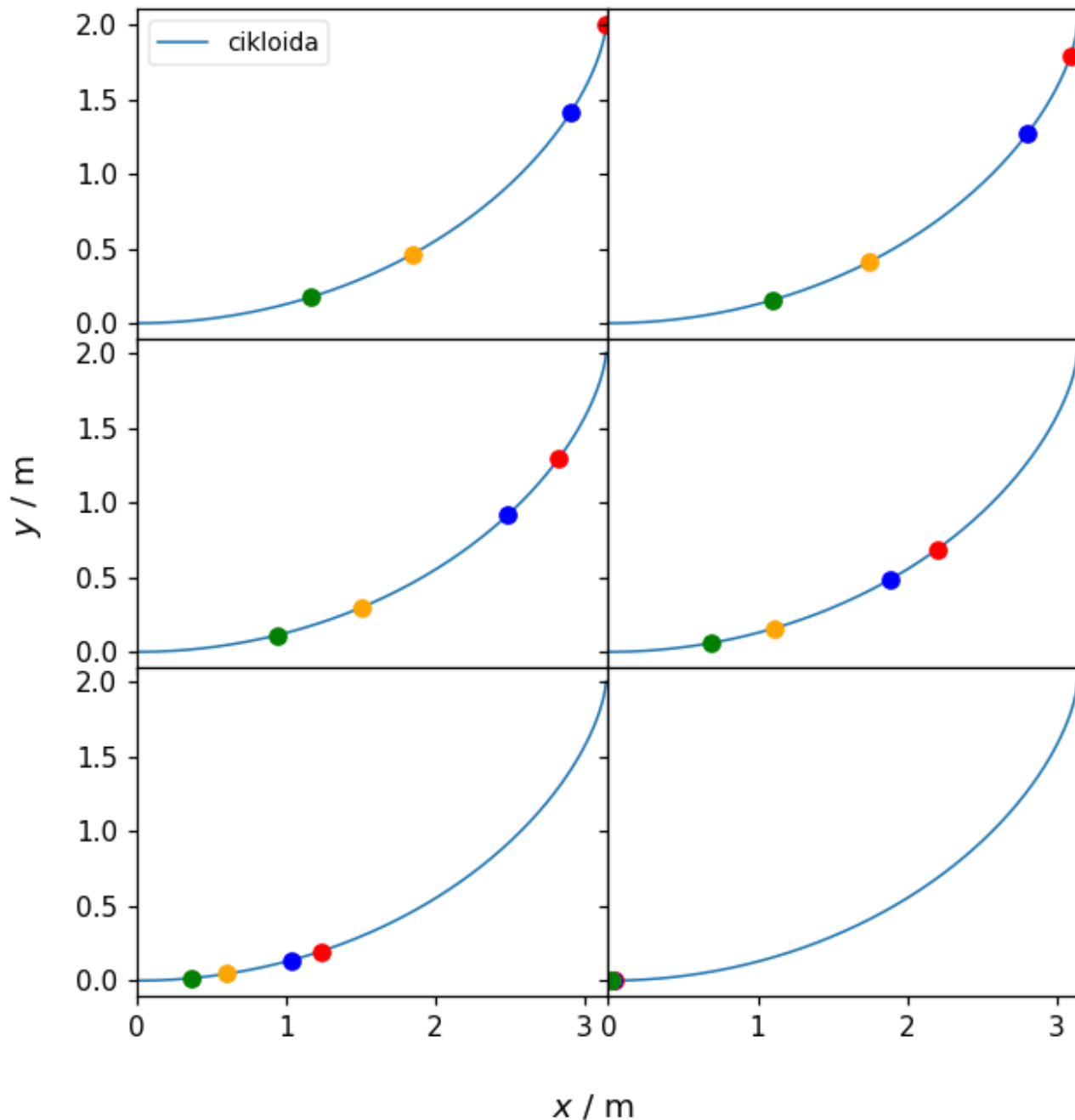


*Crtež 11:  $x(t)$  ovisnost. Tri čestice dolaze istovremeno u  $x=0$ .*



*Crtež 12:  $y(t)$  ovisnost. Tri čestice dolaze istovremeno u  $y=0$ .*

Na crtežu 13 na panelima su u sukcesivnim trenucima redom s lijeva na desno pa prema dolje prikazani položaji kuglica koje kreću iz različitih točaka cikloide koje su prikazane na gornjem lijevom panelu. Zanimljivo je da u donjem-desnom panelu sve 4 čestice dolaze istovremeno u minimum cikloide. Za bilo koji proizvoljni početni položaj vrijedi isto vrijeme spuštanja.



*Crtež 13: Isječci iz moje animacije. Video pogledati na [anima](#) [1].*



## 4.5 Rezultati brahistokrone u nehomogenom polju

Gravitacijsko polje Zemlje je nehomogeno u prostoru i jakost polja ovisi o udaljenosti od centra Zemlje do čestice. Za male radijalne visine krivulje, polje je približno homogeno i imamo cikloidu kao rješenje problema brahistokrone. Pitanje je kakvu putanju imamo za veliku brahistokronu?

**Pogledajmo crtež 14.** Ove putanje predstavljaju rješenja problema brahistokrone u nehomogenom polju Zemlje za različite rubne točke. Primjetimo da je brahistokrona za  $Z=0.9$  cikloida jer u tom slučaju rubne točke su relativno bliske po radijusu pa je gravitacijsko ubrzanje približno konstantno. Cikloida je specijalni slučaj problema za nehomogena polja kada radijalni pomak između rubnih točaka nije velik. Kod većih pomaka između rubnih točaka krivulja se savija prema dolje i poprima L-oblik. U slučajevima kada su rubne točke otprilike na istom pravcu koji prolazi ishodištem sustava, tada imamo slobodni pad pa je krivulja dosta ravna kao kod slučaja  $Z=0.1$ .

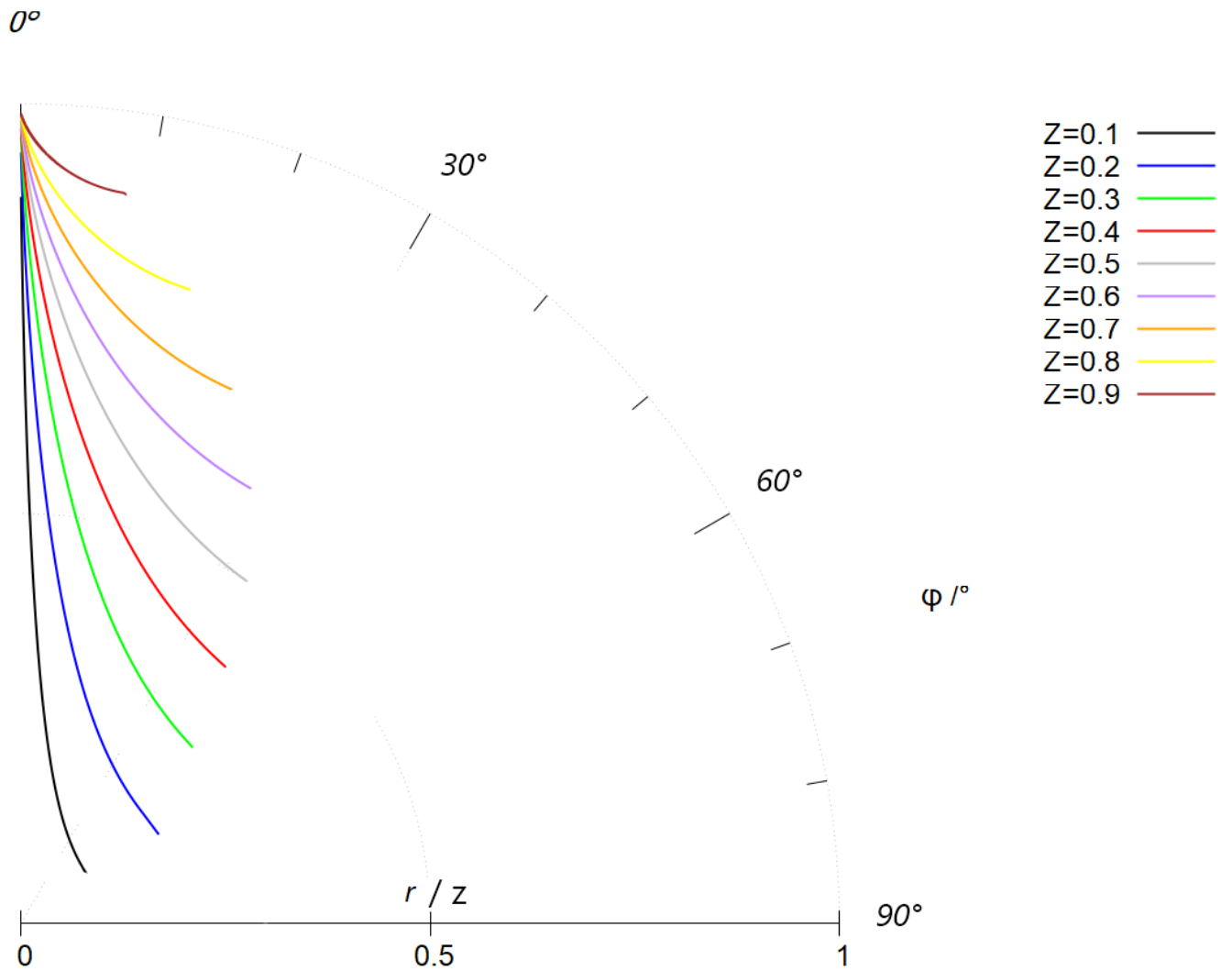
**Pogledajmo crtež 15.** Odabrali smo 4 krivulje sa prethodnog crteža koje smo produžili tako da smo krivulje sa crteža 14 zrcalili s obzirom na os zrcaljenja koja prolazi ishodištem polarnog sustava i točkom  $r_{\min}$  (minimalna radijalna duljina) respektivno za svaku krivulju. Time smo dobili rješenja nehomogenog problema brahistokrone za slučajeve velikih kutnih pomaka i kada se tijelo uspinje po krivulji od točke  $r_{\min}$  do F gubeći brzinu. Naime krivulja koja je rješenje problema brahistokrone vrijedi za dvije situacije:

- kada se tijelo spušta i ubrzava niz tu krivulju bez trenja,
- kada tijelo ima početnu brzinu pa se uspinje i usporava po toj krivulji bez trenja.

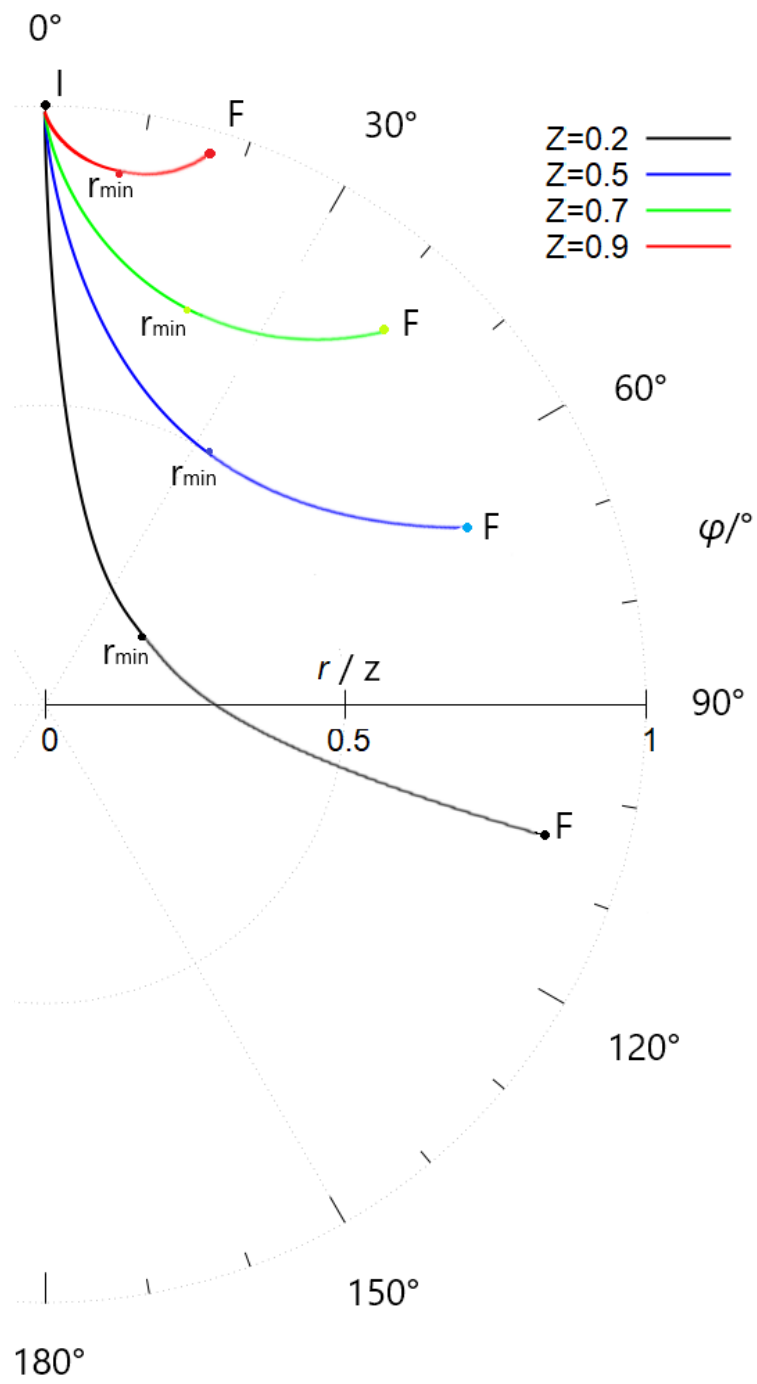
Na krivulji  $Z=0.2$  vidimo da tijelo ima neobičnu boomerang putanju. Tijelo se u početku od točke I do  $r_{\min}$  giba otprilike ravno prema ishodištu polarnog sustava gdje se nalazi planet Zemlja. Time tijelo postiže maksimalno ubrzanje u što kraćem vremenskom intervalu sve do točke  $r_{\min}$ . U točki  $r_{\min}$  postiže maksimalnu brzinu pa naglo promijeni smjer prema drugoj rubnoj točki F koja se nalazi na  $105^\circ$ . U tom periodu radijalna udaljenost mu se počinje povećavati i brzina mu se smanjuje. Međutim, i za tu situaciju rješenje je isto samo zrcalno s obzirom na već spomenutu os zrcaljenja. Isto tako vidimo cijelu cikloidu za  $Z=0.9$  u slučaju kada je radijalni pomak između rubnih točaka jako mali. To je ujedno i rješenje homogenog klasičnog problema brahistokrone.

**Ove krivulje sa crteža 15 mogu biti korisne pri određivanju putanja satelita i raketa u astronomskoj navigaciji kada nam treba najbrža putanja odnosno putanja najkraćeg vremena od točke I do F.**

Pozovimo se na izraz (1.42) koji predstavlja diferencijalnu jednadžbu brahistokrone u nehomogenom polju Zemlje. Pozovimo se na funkciju RK4 koja rješava diferencijalnu jednadžbu prvog reda. Rješenje prikazimo u polarnom sustavu za deset različitih parametara  $Z$  od 0.1 do 0.9.



**Crtelj 14:** Putanje za devet različitih parametara  $Z$ .



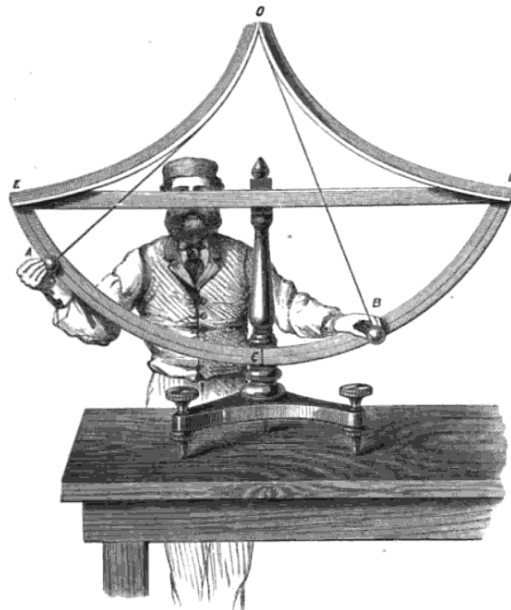
Crtež 15: Produžene putanje za 4 parametra Z.

## 5 Zaključak

Prvo smo izveli analitičko rješenje problema brahistokrone putem Euler-Lagrangeove jednačbe, dvije poznate parametarske jednačbe koje opisuju cikloidu. Numeričkom metodom Runge-Kutta 4 riješili smo nelinearnu diferencijalnu jednačbu iz izraza (1.25) i dobili također cikloidu. Radi lakše vizualizacije napravljene su animacije problema brahistokrone i tautohrone te je na kraju riješen problem brahistokrone u nehomogenom gravitacijskom polju gdje su rješenja to jest putanje prikazane u polarnom sustavu.

Cikloida ima zanimljiva geometrijska i fizikalna svojstva:

1. Nastaje putanjom fiksne točke na kružnici koja se kotrlja konstantom brzinom po horizontali.
2. Cikloida ima najkraće vrijeme spuštanja tijela od točke A do B, pa je ona rješenje klasičnog problema brahistokrone.
3. Cikloida ima jednako vrijeme spuštanja za bilo koji početni položaj T na cikloidi sve do najniže točke minimuma B, pa je ona rješenje i problema tautohrone.
4. Pogodna je za izradu cikloidnog (Huygensovog) njihala. Putanja tijela kod ovakvog njihala je cikloida. Postiže se konstrukcijom dviju letvi polucikloidalnog oblika i niti koja se naslanja na letve kao na crtežu 16. **Period ne ovisi o amplitudi to jest početnom položaju s kojeg ispuštamo tijelo.** Matematičko cirkularno (kružno) njihalo to zadovoljava aproksimativno za male kuteve tipa  $<10^\circ$ . Ovo je najprecizniji i najjednostavniji sat.



*Crtež 16: Cikloidalno (Huygensovo) njihalo. Izvor: [10].*

## 6 Prilog i literatura

- [1] **Moj one drive folder sa kodovima, grafovima i videima:** [anima](#)  
Klikom na link i prijavom u sustav za pmfst osobe moći ćete pristupiti mojem one-driveu.
- [2] Krešimir Burazin, Una Radojičić - *Uvod u varijacijski račun i njegova povijest, Osijek (2016)*,  
URL: <https://hrcak.srce.hr/file/264999> (9.4.2022).
- [3] Wikipedia - Brachistochrone curve,  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone\\_curve](https://en.wikipedia.org/wiki/Brachistochrone_curve) (9.4.2022).
- [4] Yutaka Nishiyama - *The Brachistochrone Curve Problem of Quickest Descent*, Osaka Keidai Ronshu (2011),  
URL: <https://www.tau.ac.il/~flaxer/edu/course/computerappl/exercise/Brachistochrone%20Curve.pdf> (9.4.2022).
- [5] D. S. Stutts - *Analytical Dynamics: Lagrange's Equation and its Application*, (2017).
- [6] Richard Hilbert, D.Courant - *Methods Of Mathematical Physics, Vol. 1, New York (1989)*,  
URL: <https://web.mst.edu/~stutts/SupplementalNotes/Lagrange.pdf> (15.5.2022).
- [7] Mohammad Lutfi - *The Effect of Gravitational Field on Brachistochrone Problem, Makassar - Indonesia (2017)*.
- [8] A.S. Parnovsky - *Some Generalisations of Brachistochrone Problem, Kiev-Ukraine(1996)*,  
URL: <http://info.ifpan.edu.pl/firststep/aw-works/fsV/parnovsky/parnovsky.pdf> (9.4.2022).
- [9] Morten Hjorth-Jensen - *Computational Physics, Oslo(2015)*.
- [10] Wikimedia - *Cycloidal pendulum demonstration*,  
URL: [https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cycloidal\\_pendulum\\_demonstration.png](https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cycloidal_pendulum_demonstration.png)  
(9.4.2022).