Teorija Van Hiele

Lozančić, Anamarija

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ANAMARIJA LOZANČIĆ

TEORIJA VAN HIELE

DIPLOMSKI RAD

Split, prosinac 2022.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

TEORIJA VAN HIELE

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Anamarija Lozančić

Mentor:
prof. dr. sc. Nikola
Koceić-Bilan

Split, prosinac 2022.

Na ovom mjestu bih se zahvalila mentoru prof. dr. sc. Nikoli Koceić-Bilanu na ukazanom povjerenju i vodstvu pri izradi ovog rada. Posebno bih se zahvalila svojim roditeljima Jozi i Ljubici koji su vjerovali u mene čak i onda kada ni sama nisam i davali mi bezuvjetnu podršku u svemu. Zahvalila bih se svojoj sestri i braći čija mi je podrška bila neizmjerno važna. Hvala mom Josipu koji mi je uljepšao studentske dane, te prijateljima koji su uvijek bili uz mene.

Uvod

Jeste li se ikad susreli s učenicima koji su mogli prepoznati neki geometrijski lik, ali ne i definirati ga? Jeste li primijetili da neki učenici ne razumiju da je svaki kvadrat pravokutnik? Jeste li imali studente koji se žale na to da moraju dokazati nešto što već "znaju", nešto što je „trivijalno“?

U ovom radu se pokušava odgovoriti upravo na ovakva i slična pitanja, koja su se zapitali i dvoje nizozemaca odgajatelji Van Hiele, te na tu temu osmislili novu teoriju koju nazivamo Van Hiele teorija, koja objašnjava geometrijsko razmišljanje učenika kroz pet različitih razina. Van Hiele teorija se bavi pitanjem „Zašto velik broj učenika ima problema s geometrijom, posebno s izvođenjem formalnih dokaza?“. Ona daje nekoliko prijedloga kako što lakše svladati ove probleme. Pierre i Dina Van Hiele smatraju da postoji pet diskretnih razina geometrijskog mišljenja, kroz koje se stiču različite sposobnosti za izvođenje formalnih dokaza i razumijevanje geometrija koja ne pripadaju Euklidskoj geometriji (kao što su Hiperbolička geometrija, Eliptička geometrija, sferna geometrija, itd.).

Također, u ovom radu ću se osvrnuti na nekoliko primjera kroz koje je lakše shvatiti na kojoj se razini pojedini učenici nalaze, te kako pomoći učeniku prijeći na veću razinu i pomoću kojih aktivnosti i faza učenja je to moguće postići. Dok u zadnjem poglavlju ovog rada možete pogledati kratko istraživanje o Van Hiele razinama geometrijskog razmišljanja, koje sam provela na studentima prve godine preddiplomskog studija, i druge godine diplomskog studija matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Splitu.

Sadržaj

Poglavlje 1

Teorija Van Hiele geometrijskog mišljenja

1.1 Razvoj teorije

Geometrija kao znanost se prvi put pojavljuje u starom Egiptu, Babilonu i Grčkoj. Po postanku geometrija je grčka riječ, a doslovno prevedena značila bi „mjerenje zemlje“. Upravo zbog mjerenja zemlje ova grana matematike jako se razvila upravo u Egiptu. Egipat koji se nalazi u dolini rijeke Nila ovisio je o vremenskim uvjetima i prirodnim pojavama oko rijeke. Nil im je nosio blagostanje, ali je nosio i redovite poplave. Poslije tih poplava granice zemljišnih posjeda bile bi izbrisane pa ih je trebalo ponovno odrediti – valjalo je redovito premjeravati zemljišta. Također izgradnja hramova i piramida zahtijevala je određena znanja iz geometrije.

I u staroj Grčkoj se geometrija brzo razvija, uz produbljivanje starih saznanja, također se otkrivaju i nove tvrdnje, i razvijaju se neke nove teorije. Geometrija je uvijek bila vrlo posebna grana matematike, a oduvijek se znalo da je za njezino razumijevanje potrebna određena razina razmišljanja. Još u staroj Grčkoj formirani su neki nerješivi geometrijski problemi, pa se generacijama nakon njih razmišljalo u tom smjeru, pokušavajući uvidjeti ono što prije nitko nije uspio. Zapitajmo se o našoj percepciji prizme ili piramide kao geometrijskih tijela, je li nam se prirodno pojavi slika tih tjela u mislima ili ne? Jedno je sigurno, a to je da to ne možemo odmah po rođenju, ni kada progovorimo i počnemo promatrati svijet oko sebe, pa čak ni kasnije. Danas, međutim, mnoga istraživanja pokazuju da se svatko rađa s nekim matematičkim znanjem i ima značajne logičke matematičke sposobnosti.

U nastavničkoj praksi često susrećemo učenike koji mogu prepoznati kvadrat, ali ne i definirati ga, učenike koji ne razumiju da je kvadrat pravokutnik, studente koji se žale na to da moraju dokazati nešto što već ”znaju”.

Nizozemka Dina van Hiele-Geldof i njezin suprug Pierre Marie van Hiele primijetili su poteškoće koje su njihovi učenici imali u svladavanju geometrije i shvaćanju određenih činjenica iz geometrije, te su svojim doktoratima na Sveučilištu Utrecht u Nizozemskoj 1957. i 1958. razvili teoriju o tom što se događa u ljudskom mozgu od trenutka kada može prepoznati određene geometrijske oblike do trenutka kada može razviti formalni dokaz za tvrdnju koja govori o pojedinim svojstavima geometrijskih likova. Pierre van Hiele je teoriju izvorno osmislio kao pet razina geometrijskog mišljenja, koje je nazvao vizualnom, deskriptivnom, apstraktnom, deduktivnom i rigoroznom razinom. Ubrzo nakon što je Dina preminula, njezin je suprug nastavio razvijati njihovu teoriju i 1986. objavio knjigu pod nazivom „Structure and insight, a theory of mathematics education“.

1.1. Razvoj teorije

Najčešći problemi koje učenici imaju u geometriji javljaju se u razumijevanju i povezivanju određenih svojstava i činjenica s određenim figurama, kao i u korištenju tih svojstava i razumijevanju pojedinih definicija. Van Hiele teorija objašnjava zašto jako puno učenika ima problema s učenjem i razumijevanjem geometrije, posebno kada promatraju formalne dokaze, a Van Hielovi daju nekoliko savjeta kako bi te probleme što lakše prevladali. Glavna razlika između Dininog i Pierrovog pogleda na ovu teoriju je ta što Pierre uvelike pokušava otkriti zašto učenici ne uspijevaju u geometriji, dok Dina pokušava osmisliti specifične nastavne metode koje mogu prevladati te probleme.

Van Hiele tvrde da postoji pet diskretnih razina razmišljanja u geometriji. Kako se napreduje po razinama tako se stječu nova znanja, a da bi se došlo do sljedeće razine potrebno je savladati prethodnu razinu. Sve je u učenju i usvajanju određenih materijala, a ne samo u čitanju i pamćenju. Nadalje, tvrde da starost nema utjecaj na napredak u razinama, nego nivo „geometrijskog“ obrazovanja. Neki ljudi ostaju na izvornoj razini tijekom cijelog života. U ovom dijelu rada ćemo detaljnije opisati ovu teoriju.

Neke od najčešćih miskoncepcija u odgovorima učenika, pronalazimo kod pitanja:

• Što je kvadrat, a što pravokutnik, te jesu li svi kvadrati pravokutnici ili su svi pravokutnici kvadrati?

• Jesu li dva lika sukladna ili jednaka?

• Ako imamo zadan odnos stranica (npr. a:b:c=3:4:5), koji je odnosu kutova u tom trokutu?

• Mogu li učenici, ako im prezentiramo dokaz Pitagorinog poučka i obrata, razumjeti taj dokaz ili samo reproduciraju viđeno?

1.2 Razrada teorije i primjeri iz prakse

Postoji pet razina razumjevanja geometrije prema Van Hiele teoriji. Razine teorije Van Hiele Pierre i Dina označavaju brojevima od nula do četiri, dok su znanstvenici u SADu tijekom istraživanja te razine označavali brojevima od jedan do pet, te uvode nultu razinu kojom su označavali razinu u kojoj učenici ne prepoznaju geometrijske oblike. Razine teorije Van Hiele su:

0. Razina pred-prepoznavanja

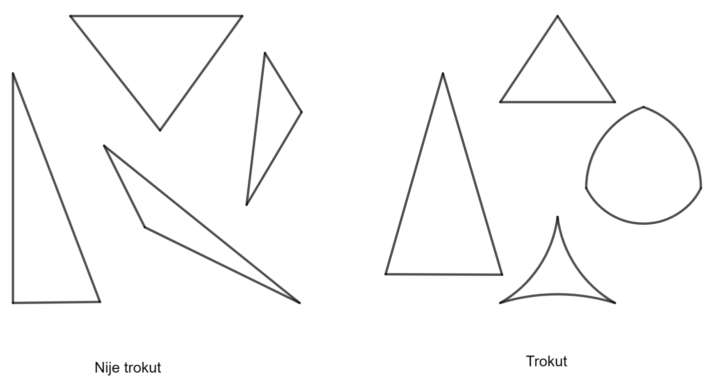
Ova razina nije izvorno dio Van Hiele teorije, nego je uvedena tek kasnije kada se shvatilo da postoje učenici koji imaju niži nivo shvaćanja od prve razine Van Hiele teorije. Ovu razinu shvaćanja geometrije imaju djeca od pet do šest godina i učenici s poteškoćama. Razmišljajući na ovoj razini učenici prepoznaju objekte samo po njihovom obliku, te mogu razumjeti samo neka svojstva tog objekta. Na ovom nivou učenici mogu razlikovati četverokut od kružnice ali ne i trokut od četverokuta ili bilo kojeg drugog mnogokuta, to je za njih samo lik koji ima vrhove, a kružnica ih nema pa se zbog toga razlikuju.

1. Razina vizualizacije ili prepoznavanja

Ova razina u Van Hiele teoriji izvorno je nazvana razina vizualizacije. Učenici na ovoj razini prosuđuju sve oblike po izgledu i promatraju ih kao "cjelinu" prije nego što razlikuju njihove dijelove (stranice, vrhove, kutove...).

1.2. Razrada teorije i primjeri iz prakse

Iako koriste osnovni naziv za oblik, obično ne daju objašnjenje niti povezuju oblik sa sličnim objektom. Izgled pojedinog oblika učenicima definira sam taj oblik. To možemo usporediti sa sposobnošću male djece da vizualno prepoznaju određene riječi, umjesto da razumiju kako se pojedina slova izgovaraju te kako se kombiniraju u riječi (ako riječi izgovarate slovkanjem, djeca mlađa od tri godine neće ih moći razumjeti). Svoje razmišljanje učenici na ovoj razini temelje na percepciji i donose odluke na temelju percepcije, ne obraćajući pozornost na bilo koja svojstva predmeta. Mogu prepoznati geometrijske likove poput trokuta, četverokuta ili kruga, ali ne prepoznaju njihova svojstva i često misle da je to samo taj objekt na temelju primjera.



Slika 1.

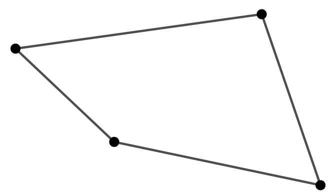
Razmišljanje učenika koji je na razini vizualizacije se odvija na način da on klasificira pod trokute sve likove prikazane na desnoj strani slike iznad, dok za trokute koji su na lijevoj strani slike iznad, tvrdi da nisu trokuti. Ne uočavaju da su stranice nekih trokuta desno zaobljene, nego mu cijela slika djeluje „trokutasto" zato je sve takve likove klasificirao kao trokute. Na ovoj razini također učenici mogu mjeriti i argumentirati svojstva nekog oblika, ali o svojstvima ne razmišljaju u smislu da ih razumiju i razumiju njihovu povezanost, nego samo mogu reproducirati naučeno bez razumjevanja. Kako je slika objekta na ovoj razini ono po čemu učenici prepoznaju taj objekt, odnosno izgled nadvladava svojstva objekta. Na primjer, kvadrate koji su rotirani za neki kut učenici na ovoj razini vizualizacije ih neće prepoznati kao kvadrate. Na ovoj razini sortiraju i klasificiraju oblike na temelju vizualizacija: „Stavljam ove skupa jer svi izgledaju slično".

Učenik koji razmišlja na razini vizualizacije može prepoznati likove bez obraćanja pažnje na stranice, kutove, i ostale elemente, te svojstva tog lika. Na primjer, pravokutnik će učenik prepoznati jer sliči na vrata („stoji ravno"), a da ne može uočiti svojstva kao što su četiri prava kuta i dva para paralelnih stranica jednakih duljina. Također, učenik zanemaruje svojstva geometrijskog oblika, da je kvadrat lik koji ima četiri stranice jednakih duljina, četiri prava kuta, dok zapaža položaj nacrtanog lika. Tako će za učenika na ovoj razini pravokutnik biti samo onaj pravokutnik koji stoji uspravno, kao kod kvadrata, no, ako mu promijenimo položaj (rotiramo ga za određeni kut), učenik će tvrditi da se u tom slučaju ne radi o pravokutniku.
Preporuka da bi se poboljšalo uočavanje svojstava pojedinog objekta:

1. Promatrati primjere i protuprimjere

Primjer pravokutnika:
Matematičar iznosi tvrdnju: „Svi pravokutnici su kvadrati." Zanima ga je li ova izjava istinita ili lažna?
U ovom slučaju, on može pokušati dokazati istinitost tvrdnje koristeći deduktivno zaključivanje, ili pokušava pronaći protuprimjer tvrdnje ako misli da je

lažna, te na taj način dokazati tvrdnju. U ovom slučaju, jedan protuprimjer je pravokutnik koji nije kvadrat, poput pravokutnika s dvije stranice duljine 8 i dvije stranice duljine 3. Ali, unatoč tom što smo pronašli pravokutnike koji nisu kvadrati, svi pravokutnici koje možemo načiniti na taj način imaju četiri stranice. Sada iznosimo novu pretpostavku "Svi pravokutnici imaju četiri stranice". To je slabija tvrdnja od početne, jer svaki kvadrat ima četiri stranice, ali nije svaki četverokut kvadrat (slika ispod).



Slika 2.

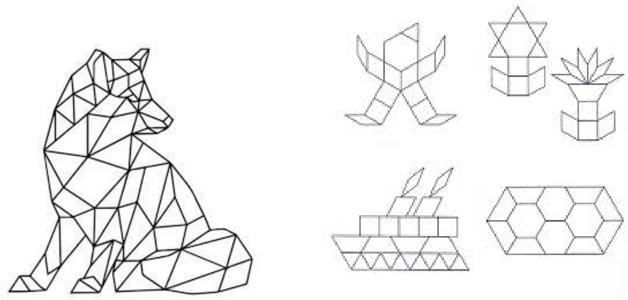
Gornji primjer objašnjava da matematički možemo oslabiti pretpostavku da bi tvrdnju dokazali protuprimjerima, ali protuprimjerima se također mogu dokazati nužnosti određenih uvjeta. Na primjer, ako pretpostavimo da smo se nakon nekog vremena zaustavili na tvrdnji s novim uvjetima "Svi oblici koji su pravokutnici i imaju četiri stranice jednake duljine su kvadrati". Ovakva tvrdnja ima dva dijela uvjeta: oblik mora biti „pravokutnik“ i mora imati „četiri stranice jednake duljine“. Matematičar bi tada želio znati može li ukloniti bilo koji uvjet i dalje zadržati istinitost svoje tvrdnje. To znači da on treba provjeriti istinitost sljedeće dvije izjave:

1) "Svi oblici koji su pravokutnici su kvadrati."

2) "Svi oblici koji imaju četiri stranice jednake duljine su kvadrati". Protuprimjer za 1) smo već naveli u gornjem tekstu, a protuprimjer za 2) je oblik koji ima četiri stranice jednake duljine da nije kvadrat što je romb. Pa matematičar zna da sada su obje pretpostavke doista bile nužne.

2. Pronađi skriveni lik

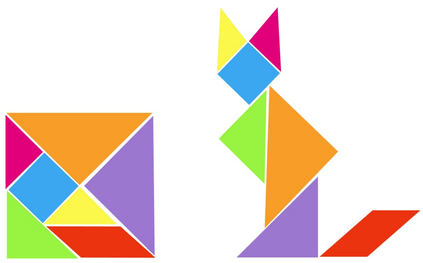
Ova aktivnost učenicima pomaže razlikovati geometrijske likove (trokute, kvadrate, pravokutnike...), te prepoznati ih u različitim položajima.



Slika 3.

3. Tangrami

Tangrami su aktivnost u kojoj učenici slažu geometrijske likove u zadani oblik. Ova aktivnost pomaže pri vizualizaciji i klasificifikaciji geometrijskih likova.



Slika 4.

4. Mozaične puzzle

Zadatak je postaviti sve pločice tako da čine veliki kvadrat. Akrivnost može biti samostalna ili grupna. Puzzle imaju bezbroj rješenja i svako rješenje je jedinstveno.

Slika 5.

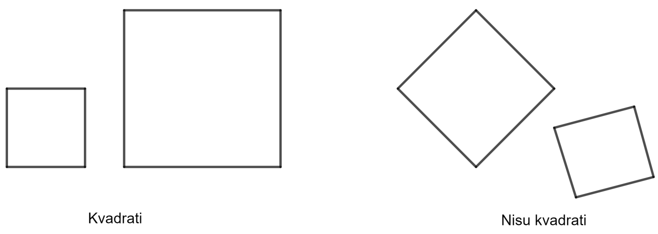
2. vanjština geometrije ili analiza

Ta se razina u Van Hiele teoriji izvorno naziva razinom analize. Učenici na ovoj razini sposobni su prepoznati i opisati karakteristike dijelova i svojstva različitih geometrijskih oblika. Na primjer, jednakostranični trokut se može razlikovati od ostalih trokuta, jer ima tri jednake stranice, jednake kutove i simetričan je. Učenici na ovoj razini trebali bi razviti korektan matematički jezik koji je u skladu s formalnim geometrijskim pojmovima te povezati svojstva svakog oblika i razumjeti njihovu povezanost. Na primjer, u jednakostraničnim trokutima, oni ne razumiju da ako trokut ima tri jednake stranice, to znači da mora imati i tri jednaka kuta. Ili kod jednakokračnog trokuta da kutovi između kraka i osnovice moraju biti jednakih veličina.

Na ovoj razini lakše se uzimaju u obzir svi oblici unutar jedne klase nego pojedinačni oblik. Umjesto razmišljanja o točno jednom kvadratu (koji se uzme kao primjer), mogu razmišljati o cijeloj klasi kvadrata. Stavljanjem fokusa na klasu oblika, učenici su u mogućnosti razmišljati o tom što kvadrat čini kvadratom (četiri stranice, suprotne stranice paralelne, sve četiri stranice jednake duljine, četiri prava kuta, dijagonale jednake duljine, itd.). Neka svojstva kao što su veličina ili položaj tog lika padaju u pozadinu. Na ovoj razini učenici počinju shvaćati da oblike možemo promatrati kroz klasu, zbog njihovih svojstava. Klase koje učenik prepoznaje na ovoj razini strogo su disjunktne, definicije se navode, ali ne razumiju i empirijski se provjerava istinitost tvrdnji (istraživanjem, a ne izvođenjem iz teorije).

Ovdje se svi oblici mogu generalizirati na klase tih oblika. Na primjer, ako neki oblik pripada nekoj klasi, uzmimo primjer kocke, ona ima sva odgovarajuća svojstva te klase : „kocka ima šest strana i svaka od tih strana je kvadrat." Ova svojstva bila su obuhvaćena još na razini vizualizavcije, ali sada na razini analize, učenik može navesti neka svojstva pojedinih likova i smjestiti ih u klase bez da uvidi da pojedini oblici mogu biti podklase, na primjer: ne vidi da su svi kvadrati ujedno i pravokutnici, ili da su svi pravokutnici paralelogrami. Također, tijekom definiranja oblika učenik koji je na ovoj razini će navoditi sva svojstva tog oblika koja poznaje.

Učenik se na ovoj razini fokusira kroz analizu na dijelove lika, kao što su stranice i kutovi. Komponentama lika i njihovim svojstvima učenik se koristi za opisivanje i karakterizaciju lika. Također, razlikuje prava svojstva određenog lika. Učenik i zna da rotacija kvadrata neće promijeniti taj kvadrat. Ilustracija desno prikazuje kvadrat koji prema razmišljanju učenika koji se nalazi na razini vizualizacije nije kvadrat, jer je rotiran, te slike kvadrata koje učenik u analitičkoj razini smatra kvadratima, za razliku od prethodne razine vizualizacije gdje to nije bilo moguće.



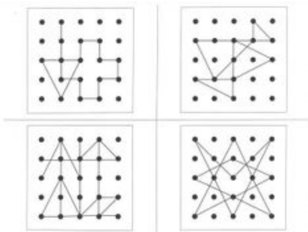
Slika 6.

Ono što učenik na ovoj razini ne može razumijeti i u čemu često griješi su veze između likova i popopćavanje likova. Tako će, na primjer, za pravokutnik reći da nije paralelogram i neće uočiti neka zajednička svojstva kvadrata, pravokutnika, romba, paralelograma.

Preporuka da bi se poboljšali nedostaci na ovoj razini te lakše prešlo na iduću razinu:

1. Geoploča

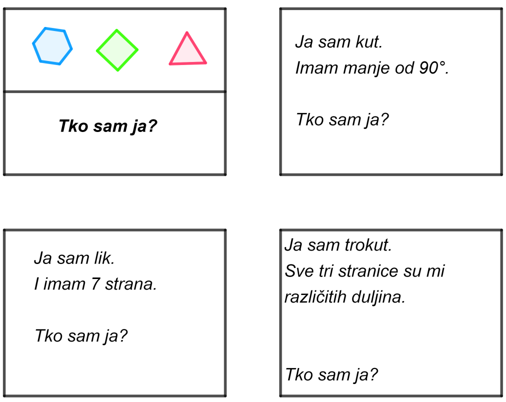
Geoploča je ploča s čavlićima koji su raspoređeni u kvadratnu mrežu ili kružnicu, a oko kojih je moguće rastezati elastične (gumene) vrpce. Kroz ovu aktivnost učenik razvija svoju kreativnost, uočava prostorne odnose, simetriju, boje, brojeve i slično.



Slika 7.

2.Igra "Tko sam ja?"

Ovo je igra u kojoj učenik treba pogoditi tko je lik prema svojstvima opisanim na kartici. Igra omogućava učeniku prepoznati svojstva pojedinih likova i smjestiti ih u klase, te uvidjeti da mogu biti podklase, na primjer: uvidjeti da su svi kvadrati ujedno i pravokutnici, ili da su svi pravokutnici paralelogrami, prema opisanim svojstvima.



Slika 8.

3.Identificirati relacije savijanjem papira, mjerenjem, traženjem simetrije
4.Bez korištenja slika, učenik treba opisati lik nekomu tko ga nikad nije vidio.
5. Savijanje papira i rezanje; predviđanje oblika.
6. Origami
Origami je stara tradicionalna japanska umjetnost savijanja papira u razne modele i oblike, bez korištenja škara i ljepila. Papir koji savijamo može biti jednobojan ili dvobojan.

Slika 9.

3.Srž geometrije ili apstrakcija ili neformalna dedukcija

Na razini neformalne dedukcije odnosno izvorno apstrakcije učenici mogu logički povezati svojstva oblika, mogu shvatiti što znači da jedno svojstvo prethodi ili slijedi iz drugog, i mogu izvesti jedno svojstvo iz drugog. Mogu primijeniti ono što već znaju kako bi objasnili odnose među oblicima i kako bi formulirali korektne definicije, također na ovoj razini učenici prihvaćaju različite ekvivalentne tvrdnje (karakterizacije) kao definiciju istog pojma. Na primjer, mogu objasniti zašto su svi kvadrati pravokutnici: „Ako su sva četiri kuta prava, oblik mora biti pravokutnik. Ako je kvadrat, svi kutovi su pravi. Ako je kvadrat, mora biti pravokutnik“.

Učenici na ovoj razini imaju sposobnost razumjeti način povezivanja izjava modus ponens „ako-onda“. Oblike mogu smještati u klase korištenjem minimalnog broja karakteristika tog oblika. Na primjer, nasuprotne stranice jednake duljine i barem jedan pravi kut su dovoljni da bi se definirao pravokutnik, da su pravukutnici zapravo parelelogrami s pravim kutovima. Također učenik na ovoj razini promatra lik iznad njegovih svojstava i pažnju obraća na logičke argumente o svojstvima.

Iako neformalna dedukcija čini bazu formalne dedukcije, uloga definicija, aksioma, teorema i njihovih obrata na ovoj razini se ne razumije. Učenik na ovoj razini neformalne dedukcije moći će pratiti i cijeniti neformalan deduktivan argument o oblicima i njihovim svojstvima, upravo iz razloga jer dokazi mogu biti intuitivniji nego rigorozno deduktivni dokazi. Razumijevanje aksiomatske strukture formalnog deduktivnog sustava ostaje ispod površine. Učenici ne razumiju ulogu aksioma, definicija, teorema i dokaza (njima to sve predstavlja skup pravila).

Na ovoj razini se ne razumije apstraktna veza između likova. Učenik razumije da su kvadrati rombovi i da su to likovi s dvama parovima stranica jednakih duljina, te učenik zna da su kvadrati zapravo i pravokutnici, jer su četverokuti s četirima pravim kutovima. Na razini neformalne dedukcije učenici mogu uočavati više od samih svojstava oblika. Njihovo ranije razmišljanje proizlazilo je iz pretpostavke o odnosima među svojstvima.

Na ovoj razini učenici počinju razumijevati potrebu za sustavom logike koja ostaje na minimalnom skupu pretpostavki iz kojih se druge istine mogu izvesti učenik je sposoban koristiti apstraktne tvrdnje o svojstvima nekog lika, te je u mogućnosti povezivati ih logički, ali ne može na temelju intuicije. Ova razina se smatra razinom tradicionalnog srednjoškolskog programa.

Preporuke:

U nastavi treba:

• poticati učenike na stvaranje i preispitivanje hipoteza (npr. Vrijedi li to uvijek?, Je li to istina za sve trokute ili samo za pravokutne?),

• osmisliti učeničke aktivnosti u kojima se ispituju svojstva oblika kako bi se odredili nužni i dovoljni uvjeti za oblike ili koncepte (npr. Što mislite, koje će svojstvo dijagonala jamčiti da se radi o kvadratu?),

• upotrebljavati jezik neformalne dedukcije: za svaki, za neke, ni za jedan, ako ... onda ..., što ako ... i sl.,

• poticati učenike da se okušaju u izvođenju neformalnih dokaza i zahtijevati da se uvjere u smislenost neformalnih dokaza koje ponudi nastavnik ili drugi učenici,

• koristiti u nastavi zadatke otvorenog tipa,

• izrada mentalnih mapa i hijerarhijskih stabala.

4. Uvid u teoriju geometrije ili dedukcija

Kada su učenici dostigli ovu razinu „zrelosti", onda su u mogućnosti shvatiti značenje i ulogu definicije, karakterizacije, aksioma, teorema i dokaza unutar aksiomatskog sustava kao cjeline. Na ovoj razini učenici shvaćaju značenje nužnog i dovoljnog uvjeta te mogu izvesti obrat postavljene tvrdnje. Također, mogu samostalno izvoditi dokaze srednjoškolskog nivoa, izvode zaključke iz prethodno poznatih tvrdnji određenih tvrdnji i to na više načina. Još uvijek nisu u mogućnosti provoditi indirektan dokaz i dokaz po kontrapoziciji.

Na primjer, da bi dokazali da je neki četverokut kvadrat znaju da treba dokazati da su sve četiri stranice jednakih duljina, ali i da su sva četiri kuta prava. Za četverokut kojemu su vrhovi na polovištima stranica kvadrata upisan u kvadrat učenik na ovoj razini bi mogao dokazati da je taj četverokut kvadrat, služeći se različitim teoremima (o sukladnosti trokuta, o srednjici trokuta, koristeći Pitagorin poučak i slično).

Preporuke:

• konstruiranje

Zadatak. Konstruirajmo pravokutni trokut ABC ako je zadan njegov kut α i zbroj $a + b$ duljina a i b njegovih kateta.

Zadatak. Konstruirajmo trokut ABC kojem su zadane duljine a i b dviju njegovih stranica i duljina v visine iz vrha A. ,

• dokazivanje (npr. teoremi o sukladnosti trokuta)

(S-K-S) Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut medu njima.

(K-S-K) Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne jedna stranica i dva kuta uz tu stranicu.

(S-S-S) Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne sve tri stranice.

(S-S-Kv): Dva trokuta su sukladna ako su im sukladne dvije stranice i kut nasuprot veće stranice.,

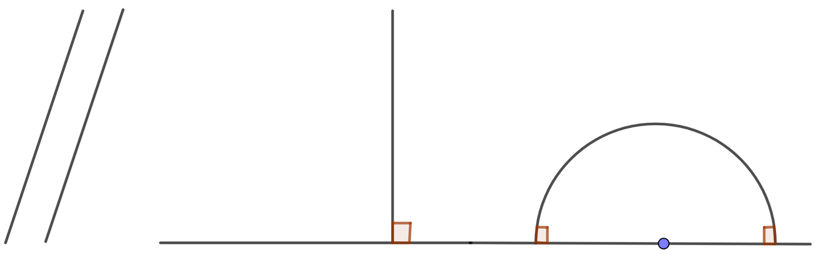
• uspoređivati i shvatiti različite vrste dokaza istog teorema – na primjer: Pitagorin teorem,

• zadaci otvorenog tipa,

• koristiti zadatke u kojima se pokazuje poznavanje nužnih i dovoljnih uvjeta, kao npr. Napiši definiciju kvadrata koja počinje sa: a) kvadrat je četverokut... b) kvadrat je paralelogram... c) kvadrat je ptavokutnik... d) kvadrat je paralelogram....

5. znanstveni uvid u teoriju geometrije ili strogost

Na ovoj su razini stariji učenici/mlađi studenti u mogućnosti proučavati različite aksiomatske sustave i međusobno ih uspoređivati. Učenici su na ovoj razini u mogućnosti shvatiti da postoje i drugi geometrijski sustavi osim euklidskog, te mogu prepoznati sličnosti i razlike tih sustava. Na primjer, iako vizualni prikaz paralelnih pravaca u euklidskoj i neuklidskoj geometriji može izgledati kao da se radi o različitim objektima (pojmovima), na ovoj razini učenici su u mogućnosti taj pojam tumačiti s razumjevanjem u rezličitim geometrijskim sustavima te koristiti odgovarajuća svojstva i odnose za pojedini geometrijski sustav.


Paralelni pravci u euklodskoj i neeuklidskoj geometriji (hiperbolička geometrija)

Slika 10.

Na ovoj razini učenici mogu razumijeti konzistentnost, nezavisnost i potpunost aksiomatskog sustava, i uspoređivati različite sustave. Također, mogu razumjeti indirektni dokaz – dokazivanje korištenjem kontrapozicije, te razumijeti geometrijske sustave koji nisu Euklidski (kao što je na primjer sferna geometrija gdje su objekti smješteni na sferu, a ne u ravninu kao kod Euklidske geometrije). Učenici razumiju važnost strogosti i razumije se dedukcija. Učenici mogu reducirati apstraktne pojmove (na primjer, mogu razumjeti neeuklidsku geometriju).

Preporuke:

- daljnje razvijanje viših razina apstrakcije,
- inzistiranje na strogom formalnom dokazu,
- usporedba euklidskih i ne-euklidskih prostora.

1.3 Faze učenja prema Van Hiele teoriji

Budući da postoji ovih pet razina mišljenja, Van Hiele-ovi preporučuju pet faza učenja za napredovanje kroz navedene razine razmišljanja odgovarajućim postupcima koji bi učenicima pomogli u savladavanju navedenih razina. To su faze:

1. **Faza pitanja i informiranja:**

Nastavnik postavlja ciljano odabrana pitanja, te tim učenike navodi na raspravu i aktivno razmišljanje o određenoj temi. Tim postižemo dva cilja; kroz uvodnu raspravu otkrivamo što učenici znaju o određenoj temi i istodobno učenike usmjeravamo na temu koja će se obrađivati.

Jedan od primjera takve aktivnosti je uvođenje učenika u temu pitanjima Što je kvadrat? Što je pravokutnik? Što je paralelogram? Što je romb? Po čemu su ti likovi slični, a po čemu se razlikuju? Što mislite bi li kvadrat mogao biti romb? Vrijedi li obratno? Kada? I tako dalje. Uz pitanja poželjno je koristiti i modele i slike.

2. Faza usmjerenog vođenja:

U ovoj fazi učenja učenik samostalno istražuje svjstva objekata po pažljivo osmišljenim zadacima. Učenici sami crtaju, mjere, izračunavaju, povezuju i slično, kako bi otkrili ili objasnili određene odnose među objektima koji im do tada nisu bili poznati ili im nisu bili jasni. Preporučuje se da takvi zadaci budu kratki s ciljem dobivanja točno određenog odgovora. Pri izradi zadataka također je potrebno razmišljati o razinama koje su učenici već savladali.

Primjer aktivnosti za fazu usmjerenog vođenja je zadavanje nastavnika učenike da u mreži ili geoploči prikažu pravokutnik sa susjednim stranicama jednakih duljina, romb sa jednakim dijagonalama, paralelogram s dva prava kuta i slično. Zadatke trebamo osmisliti tako da učenike vodima prema točno određenim zaključcima, do kojih trebaju samostalno doći.

3. Faza objašnjavanja:

Nakon obavljenih zadataka u ovoj fazi učenik svojim riječima treba opisati ono što je radio te s drugim učenicima razmjeniti i objasniti zaključke do kojih je došao. Važno je da svaki učenik prvo samostalno iznese svoj zaključak bez uticaja nastavnika i ispravljanja. Nastavnik treba pozorno pratiti istarživanje učenika te ga usmjeriti na korištenje točnog i preciznog načina matematičkog izražavanja.

Primjer aktivnosti za ovu fazu učenja je: ako su postavljeni zadaci uspješno rješeni do izražaja treba doći odnos među likovima: pravokutnik kojemu su susjedne stranice jednakih duljina je kvadrat, romb s dijagonalama jednakih duljina je kvadrat, paralelogram s dva prava kuta je pravokutnik itd. Pojedini učenici možda će već u ovoj fazi doći do zaključka da je svaki kvadrat romb, ali da svaki romb ne mora biti kvadrat.

4. Faza slobodnog usmjeravanja (otvorenog tipa):

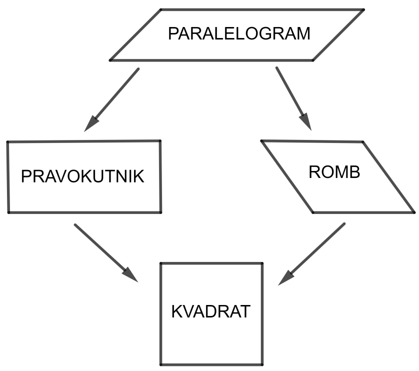
Ovo je faza u kojoj se primjenjuju dotadašnja znanja za rješavanje konkretnih problema. Nakon izvedenih zaključaka učenik ih sada primjenjuje na rješavanje složenijih zadataka. U ovoj fazi je dobro koristiti zadatke s više ključnih koraka, te zadatke otvorenog tipa (jer ih je moguće riještit na više različitih načina) jer tako potičemo kreativnost učenika.

Primjer aktivnosti: Što možete reći o sjecištu dijagonala pravokutnika, kvadrata, romba, paralelograma? Usporedite kutove nastale presjecanjem dijagonala? Objesnite zašto se površina romba i kvadrata može odrediti kao polovica umnoška duljina dijagonala i slično.

5. Faza integriranja (povezivanja):

U ovoj fazi se objedjinjavaju prethodna znanja, i te obrađene informacije pamte. Jako je važno da učenici u ovoj fazi učenja promotre i opišu čim su se bavili i koji su to zaključci do kojih su došli. Potrebno je objediniti sve što su istražili i naučiti se struktuirati to u jednu funkcionalnu mrežu relacija i objekata. Nastavnikova uloga je da ih vodi u aktivnosti i usmjerava zbog sveobuhvatnosti, preciznosti, i točnosti naučenog.

Primjer aktivnosti ove faze učenja: nastavnik usmjerava učenika prema klasifikaciji promatranih likova (u našem primjeru paralelograma). Objediniti podatke mogu na različite načine a posebno koristan je vizualni prikaz, na kojem će učenik istaknuti određene veze među objektima (kao na slici ispod).



Slika 11.

Kada rade na ovaj način kroz izdvojene faze učenja učenik nema dojam da uči nešto novo, a ipak razvija nove procese mišljenja koji će poboljšati one slabije stare, čime će zapravo dosegnuti novu razinu razmišljanja prema Van Hiele teoriji.

Poglavlje 2

Teorija Van Hiele u ostalim područjima matematike

2.1 Jezik o funkcijama

Sukladno istraživanjima razvijenosti jezika učenika u opisivanju funkcija i povijest opisa gibanja i razvoja računa (Isoda (1987., 1988., 1990.)) predložio je sljedeće razine mišljenja 'jezika o funkcijama'.

Razina 1. Razina svakodnevnog jezika funkcija

Učenici na ovoj razini mogu opisati odnose između zavisne i nezavisne varijable, ali na jako čudan i zbunjujući način. Govore o promjenama u brojevima pomoću izračuna, na primjer za vrijednost zavisne varijable računaju vrijednost nezavisne i obrnuto. Njihovi opisi se svode na korištenje ili fokusiranje na jednu fizički vidljivu varijablu, odnosno nezavisnu varijablu. Čak i ako su svjesni povezanosti dviju varijabli teško im je to adekvatno objasniti, jer je njihovo razumjevanje povezanosti varijabli jako oskudno čak i ako koriste "svakodnevni jezik". Stoga im je teško promatrati što se događa s više varijabli u isto vrijeme. Primjer učenika na ovoj razini je: "Za zadanu funkciju $f(x) = 2x + 5$, ako je zadano $x = 2$ računa vrijednost funkcije i obrnuto, ali ne razumije povezanost ovih dviju varijabli. Za zadanu funkciju $f(x, y) = 3x + 5y + 7$, nije u mogućnosti objasniti ni shvatiti povezanost varijabli. "

Razina 2. Razina aritmetike

Na ovoj razini učenici funkcije opisuju tablicama koje izrađuju i istražuju pomoću aritmetike (za zadanu točku računaju vrijednost funkcije). Opisi funkcija na taj način su više precizni s tablicama nego korištenjem "svakodnevnog jezika o funkcijama" na 1. razini. Učenici imaju općenite koncepte o nekim pravilima i vezama, na primjer proporcijama, te opisuju pravila povezanosti kao kovarijaciju, pa čak i kada čitaju tablice, njihova interpretacija kovarijacije varijabli je jaka kao njihova interpretacija korespodencije. Koristite uglavnom formule i grafove za predstavljanje pravila i odnosa, ali im nije lako prevoditi jedan zapis u drugi.

Razina 3. Razina algebre i geometrije

Učenici na ovoj razini opisuju funkcije koristeći jednadžbe i grafove. Za istraživanje funkcija, promatraju i prevode njihov zapis iz jednog oblika u drugi između tabličnog zapisa, jednadžbi i grafova i koriste algebru i geometriju. Zapis funkcija, koji je već dobro razumljiv, uključuje predstavljanje različitog zapisivanja koje je već uključeno u njihovu mentalnu sliku. Na primjer, lako mogu pronaći jednadžbu koja nastaje iz grafa, i graf iz jednadžbe.

Razina 4. Razina računa

Opisuju funkcije koristeći račun. U računu, funkcije su opisane u smislu deriviranih ili primitivnih funkcija. Na primjer, kako bismo opisali svojstva funkcija, koriste njenu derivaciju, koja im je već poznata. Teorija računa je generalizirana teorija ovakvog tipa opisivanja.

Razina 5. Razina analize

Za primjer jezika za opisivanje jest funkcionalna analiza, koja je metateorija računa. Potvrda za ovu razinu utemeljena je povijesnim razvojem i nije još istražena.

2.2 Boolova algebra

Sukladno istraživanjima razvijenosti Boolove algebre, de Villiers, (1986.) predložio je sljedeće razine mišljenja.

Razina 1. Interpretacija i prikaz komunikacijskih krugova

Na ovoj razini učenici mogu spajati prekidače u paralelne ili serijske krugove prema prikazu dijagrama, ili obrnuto. Ne mogu prepoznati ili označiti niti jedno od svojstava komunukacijskih krugova (na primjer: svojstvo distributivnosti, de Morganova pravila itd.).

Razina 2. Analiza svojstava

Počinju analizirati i više su svjesni strukturnih svojstava komunikacijskih krugova. Mogu označiti, čitati, stvarati i pojednostavljivati komunikacijske krugove. Nemaju sposobnost uvidjeti logičke odnose između različitih svojstava. Mogu provjeravati istinitost tvrdnji pomoću popunjavanja tablica istintosti.

Razina 3. Logičke posljedice-dedukcija

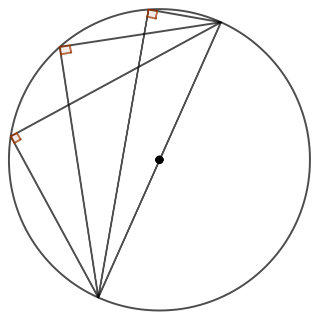
Učenici su svjesni logičkih odnosa među svojstvima, tj. na ovoj razini shvaćaju da određena svojstva mogu biti izvedena iz drugih. Shvaćaju važnost aksioma, što karakterizira ovu razinu. U mogućnosti su pojedinu matematičku teoriju shvatiti kao logički sustav i sistematizirati matematičke tvrdnje.

2.3 Trigonometrija

Sukladno istraživanjima razvijenosti razumijevanja u opisivanju trigonometrijskih funkcija de Villiers, Jugmohan predlažu sljedeće razine trigonometrije.

Razina 1. Vizualizacija

Učenik na ovoj razini prepoznaje pravokutne trokute, te ih zna razlikovati prema duljini stranica i identificirati pravokutni trokut na kružnici. Može razlikovati katete od hipotenuze pravokutnog trokuta.



Slika 12.

Razina 2. Analiza

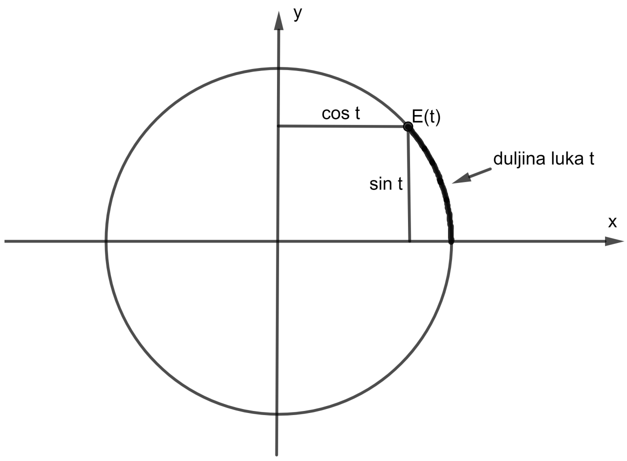
Na razini analize učenik shvaća odnose između kutova i stranica u trokutu (omjeri stranica u trokutu ostaju isti bez obzira na veličinu trokuta - pojam sličnosti trokuta). U mogućnosti su početi rješavati probleme pravokutnih trokuta koristeći trigonometrijske omjere.

Razina 3. Primitivna definicija

Trigonometrijski omjeri u pravokutnom trokutu se formaliziraju kao definicije. Shvaćaju rastuću i padajuću prirodu trigonometrijskih vrijednosti za kutove manje od 180°, kao i za njima pridružene inverzne funkcije.

Razina 4. Definicija na jediničnoj trigonometrijskoj kružnici

Razvija se pojam definicije fukcije na domeni realnih brojeva, u smislu definiranja jedinične kružnice. Razumiju pojam brojevne kružnice (kružnice na koju smo namotali brojevni pravac i smjestili u koordinatni sustav). Na jediničnoj trigonometrijskoj kružnici definiraju trigonometrijske funkcije u smislu koordinata x i y.



Slika 13.

Definiraju trigonometrijske funkcije pomoću domene i kodomene, te pravilom pridruživanja. Učenici razvijaju razumijevanje za periodičnost i grafičko predstavljanje trigonometrijskih funkcija, kao i trigonometrijske identitete kao sposobnost njihova dokazivanja. Povezuju vrijednosti trigonometrijskih funkcija s omjerima kuta u radijanima.

Razina 5. Sferna trigonometrija, itd.

Može se proširiti na sfernu trigonometriju i na druge plohe, hiperboličke funkcije, npr. sinh, cosh, kao i na analitičku obradu trigonometrijskih funkcija kao transcendentnih funkcija, i tako dalje. Možemo uključiti definicije trigonometrijskih funkcija kao različitih beskonačnih redova, kao i do primjene Fourijerovih i drugih redova na različite dijelove matematike i fizike.

Poglavlje 3

Provedena istraživanja

3.1 Eksperimentalno istraživaje (Hrvatska, Nives Baranović u 2014/2015)

Ovo istraživanje provedeno je na studentima učiteljskog studija koji su upisani na kolegij geometrije u Splitu i Zadru. U istraživanju je sudjelovalo ukupno 90 ispitanika: iz Splita 52 koji su tvorili eksperimentalnu skupinu i 38 iz Zadra koji su tvorili kontrolnu skupinu. Dobna razlika eksperimentalne i kontrolne skupine bila je neizbježna, jer se kolegij geometrije ne izvodi u istom semestru. Istraživanjem je testirana određena strategija poučavanja pri učenju euklidske geometrije kroz 13 tjedana. Van Hiele test preuzet je iz rada Usiskin Zalman, Van Hiele Levels and Achievemnt in Secondary School Geometry, CDASSG Project, 1982. by The University of Chicago. Van Hiele test sastoji se od 25 pitanja objektivnog tipa s jednim točnim odgovorom, (prvih 5 pitanja za prvu razinu mišljenja, sljedećih 5 pitanja za drugu razinu itd. o zadnjih 5 koji se odnose na petu razinu). Test je trajao 35 minuta. Ispitanici su testirani ovim testom prije i nakon slušanja kolegija geometrije, gdje je pokazano da nema statistički značajnih razlika između eksperimentalne i kontrolne skupine na početku semestra, što znači da se mogu razmatrati kao homogena cjelina.

Nakon prvog provedenog testa vidljivo je da se dvije trećine studenata nalazi na prve dvije razine, petina studenata na trećoj ´ razini, dok ih je na četvrtoj i petoj zanemarivo malo (po 1 student).

Nakon 13 tjedana poučavanja (planimetrija i stereometrija), ispitanici su ponovno testirani istim testom s ciljem određivanja je li, i u kojoj mjeri, provedeno poučavanje i učenje dovelo do napretka u svakoj od skupina. Usporednom analizom utvrđena je statistički značajna razlika rezultata eksperimentalne grupe u odnosu na kontrolnu grupu čim je potvrđeno da ciljano odabrana strategija poučavanja utječe na razvoj geometrijskog mišljenja prema van Hiele-ovom modelu. Uspoređujući samo rezultate eksperimentalne skupine vidljivo je da većina studenata nakon semestra učenja geometrije je napredovala na višu razinu geometrijskog mišljenja te da se skoro polovica njih sada nalazi na trećoj razini. A uvidom u detaljniji prikaz podataka može se reći da nitko od studenata nije nazadovao, što se ipak dogodilo u kontrolnoj grupi.

3.2 Razine Van Hiele geometrijskog razmišljanja učitelja Matematike, Josip Kličinović,2022.

Istraživanje se provodilo na učiteljima i nastavnicima Matematike zaposlenima u školama u Republici Hrvatskoj. I kao u prethodnom istraživanju korišten je Usiskinov test. Nakon prikupljanja podataka izvršeno je stratificiranje po županijama, vrsti škole u kojoj rade, vrsti obrazovanja učitelja/nastavnika, te se nakon toga slučajno odabiru testovi za daljnju analizu. U istraživanju su sudjelovala 704 ispitanika.

Zaključci istraživanja:

- Najvišu VH razinu pokazuju nastavnici zaposleni u gimnazijama, potom učitelji zaposleni u osnovnim školama, a naposljetku nastavnici zaposleni u strukovnim ili obrtničkim školama.

- Najvišu VH razinu pokazuju učitelji/nastavnici koji su završili nastavnički ili inženjerski studij matematike, potom učitelji razredne nastave s pojačanom matematiku, a naposljetku učitelji/nastavnici koji su završili neki tehnički fakultet uz uvjerljivo najniže rezultate

- Ne postoji statistički značajna razlika u distribuciji VH razina među učiteljima/nastavnicima koji su završili nastavnički studij matematike i inženjerski studij matematike.

- Ne postoji statistički značajna razlika u distribuciji VH razina po skupinama po grupama godina života, ali , zanimljivo je primijetiti da su ipak nešto malo lošiji rezultati skupine koja ima preko 56 godina života, no ne statistički značajno.

- osnovna skola: Najvišu VH razinu pokazuju učitelji/nastavnici koji su završili nastavnički ili inženjerski studij matematike, potom učitelji razredne nastave s pojačanom matematiku, a naposljetku učitelji/nastavnici koji su završili neki tehnički fakultet uz uvjerljivo najniže rezultate; čak i niže nego kad se gledaju sve škole.

- srednja skola: samo 3 ispitanika koji su završili neki tehnički fakultet predaju matematiku u srednjoj školi.

U istraživanju u Hrvatskoj provedenom u veljači i ožujku 2022. godine, pouzdanost cijelog testa je 0.68. Autor ovog rada kao razlog jako niske pouzdanosti navodi da testiranja učitelja i nastavnika matematike, a pogotovo za razinu 1 jest u tome što se u ovom istraživanju ipak testiraju učitelji i nastavnici Matematike, a sami zadaci za pojedinu razinu su preelementarni za razinu obrazovanja učitelja i nastavnika matematike.

3.3 Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry- CDASSG Project (Usiskin, 1982)

Ovo je jedan od najbitnijih radova vezanih za Van Hiele teoriju u kojem je provedeno veliko istraživanje, te se kroz mnogobrojna istraživačka pitanja na velikom broju učenika(ispitanika) došlo do nekih bitnih zaključaka.

istraživanje je provedeno nad slučajno odabranim uzorkom od 2699 učenika iz 13 škola, koje su također random odabrane temeljem različitih kriterija, te tim omogućuju visoku pouzdanost podataka.

Istraživanje se sastojalo od pet testova i baziralo se uglavnom na pitanje hoće li učenici nakon predmeta geometrije postići veću Van Hiele razinu:

- Entering Geometry Test (EG) i Van Hiele Level Test (VHF-fall)-ispitanici su pisali na početku nastavne godine
- Van Hiele Level Test (VHS-spring), Comprehensive Assessment Program Geometry Test (CAP) i Proof Test (Prf)- na kraju godine

Obzirom da je istraživanje opsežno izdvojila sam samo krajnje zaključke, a to su:

- Nakon provođenja Prf testa zaključuje se da: oko 70% učenika može izvesti jednostavnije dokaze (uz samo jednu dedukciju), Kod dokaza koji zahtjevaju dodatna znanja uspjeh je znatno niži, oko 50% učenika dokazuje više od jedne jednostavne tvrdnje

- 47% učenika ne upišu predmet geometrije, 6% upiše predmet, ali ga ne završe, 7% je upisano na predmet na kojem se ne traži dokazivanje u geometriji, 11% upisanih uči dokazivanje, ali ga ne svladaju, 9% upisanih može izvoditi samo trivijalne dokaze, 13% upisanih je uspješno u dokazivanju

Također, u usporedbi s Hrvatskim sustavom školstva u SAD-u geometrija se proučava kao zaseban predmet, pa je zbog takvog načina učenicima onemogućeno povezivanje geometrije s ostalim matematičkim područjima.

Navodi se i to da petu razinu nije moguće provjeriti testom i da je Van Hiele test na početku nastavne godine odličan prediktor uspjeha na kraju nastavne godine. Također je važno spomenuti da je ovaj projekt jedan od prvih istraživanja koji je „razbio“ mišljenje da su, što se geometrije tiče, dječaci bolji od djevojčica. Pokazano je da ne postoji statistički značajna razlika.

Poglavlje 4

Razine Van Hiele geometrijskog razmišljanja studenata matematike Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu

Istraživanjem se želi utvrditi razlika Van Hiele razina geometrijskog razmišljanja između studenata prve i pete godine nastavničkog smijera matematike na PMF-u u Splitu. Mjerni instrument ovog istraživanja je modificirani test koji je, dizajnirao profesor emeritus Usiskin 1980. godine, te ga proveo na uzorku od oko 3 000 učenika. Test se sastoji od 25 pitanja višestrukog izbora, gdje je u svakom pitanju samo jedan točan odgovor. Test je trajao 35 minuta.

Test je ispunilo 55 ispitanika, od toga 6 studenata druge godine diplomskog studija matematike, smjer nastavnički i 49 studenata prve godine preddiplomskog studija matematike.

Usiskin je predložio dva kriterija za smještanje ispitanika na Van Hiele razine. Kod blažeg kriterija smatra se da je ispitanik svladao razinu ako je riješio barem tri od pet zadataka pojedine razine, a kod strožeg kriterija smatra se da je ispitanik svladao razinu ako je riješio barem četiri od pet zadataka pojedine razine. Pri tome se za zadovoljenu razinu n dodijelilo 2^{n-1} bodova (za prvu razinu se dodjeli 1 bod, drugu razinu 2 boda, treću razinu 4 boda. četvrtu razinu 8 bodova i petu razinu 16 bodova), te se zbrojem bodova po strožem kriteriju i prateći Usiskinovu metodologiju došlo do Van Hiele razine pojedinog ispitanika. Na primjer, rezultat od 19 bodova označava da je ispitanik ispunio kriterij na razinama 1, 2 i 5. Na taj način, broj bodova od 0 do 31 je jednako kao da imate 5 odvojenih Da-Ne odluka na svih 5 razina. Za određivanje Van Hiele razine u ovom istraživanju odabran je blaži kriterij kojeg je predložio Usiskin (1982.), te je korišteno svojstvo hijerarhije Van Hiele teorije geometrijskog razmišljanja, koje glasi: „Da bi osoba bila na razini n, nužno mora biti i na svim prethodnim razinama, a svi ispitanici koji to ne zadovoljavaju smješteni su u kategoriju no fit".

Usiskin je proveo veliko istraživanje nad učenicima u SAD (oko 3000 učenika) te je u svom izvještaju objasnio pripajanje Van Hiele razina 4 i 5 uz komentar da je razinu 5 nemoguće testirati. Tom je prilikom osmislio modificiranu teoriju Van Hiele razina (odnosi se na smještanje ispitanika na Van Hiele razine) korištenu u ovom istraživanju. Razinu 4 karakterizira snažan matematički aparat, dedukcija, razumijevanje razlike između nužnih i dovoljnih uvjeta te provođenje dokaza. U školama se poučava do (i uključujući) razine 4, te se stoga očekuje da svi studenti budu barem na 3. razini.

4.1 Studenti druge godine diplomskog studija matematike,smjer nastavnički

U tablici ispod nalaze se rezultati testova studenata druge godine diplomskog studija. Svi ispitanici su test pisali barem 20 minuta. Kao što je vidljivo tri testa od ukupno šest su nevažeći iz razloga jer su Student 2, Student 4 i Student 5 imali više od tri točna odgovora na višim razinama, a niže razine nisu zadovoljili, zbog svojstva hijerarhije Van Hiele teorije geometrijskog razmišljanja („Da bi osoba bila na razini n, nužno mora biti i na svim prethodnim razinama") što je rezultiralo da se njihovi rezultati smatraju ne važećima (no fit).

	VH1	VH2	VH3	VH4	VH5	REZULTAT
Student 1	5	4	5	3	5	*5*
Student 2	2	5	2	5	5	*ne važeći*
Student 3	4	4	4	5	3	*5*
Student 4	5	4	2	3	3	*ne važeći*
Student 5	5	4	3	2	3	*ne važeći*
Student 6	3	5	3	4	5	*5*

Također iz tablice vidimo da su svi studenti čiji su rezultati važeći prema Van Hiele teoriji geometrijskog mišljenja na razini 5, što je i očekivano. Kod ne važećih testova imamo Studenta 2 koji nije zadovoljio prvu razinu (odgovori na pitanja 3., 4. i 5. bili su pogrešni) i treću razinu, a imao je sve točne odgovore na višim razinama (četvrtoj i petoj), te trećoj razini, što je donekle zabrinjavajuće. Studenti 4 i 5 imali su približno jednak broj točnih odgovora na trećoj četvrtoj i petoj razini, ali zbog pravila da je ispitanik svladao razinu ako je riješio barem tri od pet zadataka pojedine razine, ove testove smatramo nevažećima.

4.2 Studenti prve godine preddiplomskog studija matematike

U idućoj tablici nalaze se rezultati testova studenata prve godine preddiplomskog studija matematike. U istraživanju je sudjelovalo ukupno 49 ispitanika, od toga je 10 testova nevažećih, zbog nezadovoljavanja hijerarhije Van Hiele teorije geometrijskog razmišljanja („Da bi osoba bila na razini n, nužno mora biti i na svim prethodnim razinama“), a 39 testova je valjano te je određena razina Van Hiele teorije geometrijskog mišljenja. Svi ispitanici su test pisali između 15 minuta i 35 minuta.

Iz tablice možemo lako vidjeti da studenti čiji su testovi važeći nalaze se na razinama 1 - 5 geometrijskog mišljenja prema Van Hiele teoriji.

	VH1	VH2	VH3	VH4	VH5	REZULTATI
Student 1	5	5	4	2	4	*ne važeći*
Student 2	3	5	4	2	4	*ne važeći*
Student 3	4	5	5	2	3	*ne važeći*
Student 4	5	4	5	0	2	*3*
Student 5	5	4	3	4	2	*4*
Student 6	4	4	3	1	2	*3*
Student 7	5	5	3	3	4	*5*
Student 8	5	4	4	3	4	*5*
Student 9	5	5	5	3	4	*5*
Student 10	5	3	3	2	0	*3*
Student 11	5	5	5	3	4	*5*
Student 12	5	3	2	2	2	*2*
Student 13	5	2	2	1	1	*1*
Student 14	5	4	3	1	1	*3*
Student 15	5	3	4	1	2	*3*
Student 16	5	2	4	2	3	*ne važeći*
Student 17	3	4	3	2	2	*3*
Student 18	3	3	5	4	3	*5*
Student 19	3	5	1	0	2	*2*
Student 20	5	4	0	0	1	*2*
Student 21	5	3	4	1	2	*3*
Student 22	5	5	5	3	4	*5*

4.2. Studenti prve godine preddiplomskog studija matematike

Student 23	5	4	3	0	2	*3*
Student 24	3	3	3	3	2	*4*
Student 25	5	4	2	3	2	*ne važeći*
Student 26	4	1	2	1	2	*1*
Student 27	4	5	4	2	1	*3*
Student 28	5	5	3	3	5	*5*
Student 29	5	4	5	2	3	*ne važeći*
Student 30	4	2	1	2	2	*1*
Student 31	4	4	3	1	3	*ne važeći*
Student 32	3	4	4	1	0	*3*
Student 33	5	5	1	2	1	*2*
Student 34	4	3	4	4	3	*5*
Student 35	5	4	5	3	2	*4*
Student 36	5	3	5	2	3	*ne važeći*
Student 37	5	4	2	0	2	*2*
Student 38	5	5	4	3	1	*4*
Student 39	4	4	3	1	3	*ne važeći*
Student 40	4	2	2	2	0	*1*
Student 41	5	2	0	2	1	*1*
Student 42	5	4	4	1	3	*ne važeći*
Student 43	5	4	2	1	2	*2*
Student 44	5	4	4	3	1	*4*
Student 45	4	3	4	2	2	*3*
Student 46	4	3	2	1	2	*2*
Student 47	5	4	3	1	2	*3*
Student 48	3	3	2	2	0	*2*
Student 49	5	5	4	3	4	*5*

Vidimo da se 5 od ukupno 39 studenata čiji su testovi važeći nalazi na razini 1, razini prepoznavanja geometrijskih likova Van Hiele geometrijskog mišljenja, što je zabrinjavajuće, jer su to studenti koji su završili srednju školu i upisali matematiku na preddiplomskom studiju Sveučilišta u Splitu. Također je vidljivo da se 8 od 39 studenata nalazi na razini 2 (u razini analize) geometrijskog mišljenja, što znači da nisu u mogućnosti prepoznati svojstva geometrijskih likova kao što su pravokutnik, kvadrat, romb, jednakokračan trokut. Na trećoj ranini geometrijskog mišljenja nalazi se 12 od ukupno 39 studenata prve godine preddiplomskog studija, što čini većinu. Na četvrtoj se razini nalazi 5 od 39 studenata, a na petoj razini (strogosti) je 9 od ukupno 39 studenata čiji su testovi važeći.

Poglavlje 5

Test Van Hiele

Upute: Pozorno pročitajte sve upute i slijedite ih.
Ne okrećite stranicu i ne rješavajte zadatke dok to ne odobri voditelj ispitne prostorije.

-Test se sastoji od **25 pitanja** višestrukog izbora.

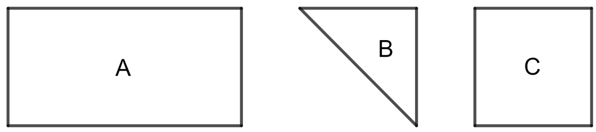
-Test traje **35 min**.

-Pročitajte pažljivo svako pitanje.

-Promislite o točnom odgovoru na postavljeno pitanje. U svakom je pitanju ponuđen samo **jedan točan odgovor**.
Upotrebljavajte isključivo kemijsku olovku kojom se piše plavom ili crnom bojom. Kada riješite zadatke, provjerite odgovore.
Želimo Vam mnogo uspjeha![1]

[1] Ovaj je test modificirani van Hiele test © 1980. godina, The University of Chicago. Profesora Zalmana Uskikina, voditelja The Cognitive Development and Achievement in Secondary School Geometry (CDASSG) projekta Sveučilišta u Chicagu.
Test je modificirala Anamarija Lozančić (alozancic@pmfst.hr)
Test je pregledao prof. dr. sc. Nikola Koceić-Bilan.

1. Koji od prikazanih likova je kvadrat?



(A) Samo A.

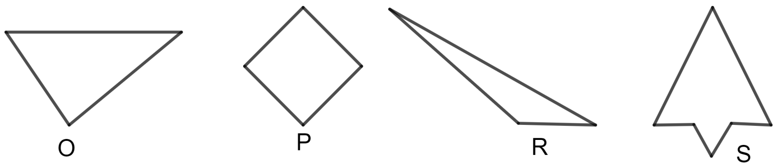
(B) Samo B.

(C) Samo C.

(D) Samo A i C.

(E) Svi su prikazani likovi kvadrati.

2. Koji je lik od prikazanih trokut?



(A) Samo S.

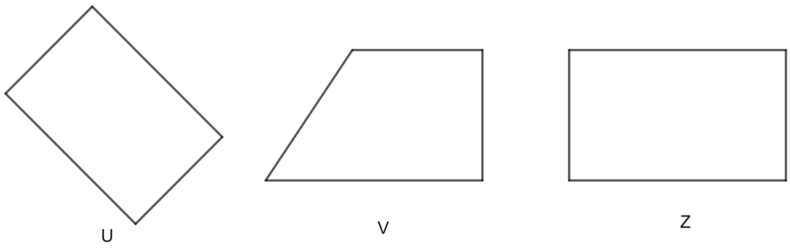
(B) Nijedan prikazani lik nije trokut.

(C) Samo O.

(D) Samo O i R.

(E) Samo R i S.

3. Koji je lik od prikazanih pravokutnik?



(A) Samo Z.

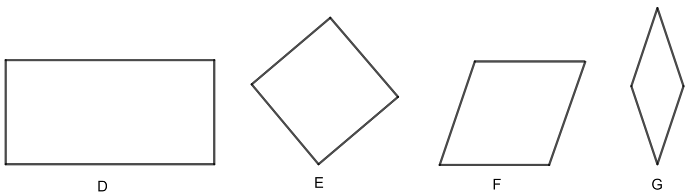
(B) Samo U.

(C) Samo Z i U.

(D) Samo V i Z.

(E) Svi su prikazani likovi pravokutnici.

4. Koji je lik od prikazanih kvadrat?



(A) Nijedan prikazani lik nije kvadrat.

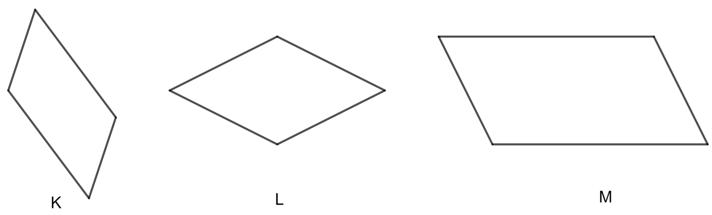
(B) Samo E.

(C) Samo E i F.

(D) Samo F i H.

(E) Svi su prikazani likovi kvadrati.

5. Koji je lik od prikazanih paralelogram?



(A) Samo L.

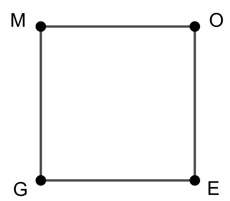
(B) Samo M.

(C) Samo M i L.

(D) Svi su prikazani likovi paralelogrami.

(E) Nijedan prikazani lik nije paralelogram.

6. Prikazan je kvadrat GEOM.



Što je od ponuđenoga istinito za sve kvadrate?

(A) Dužine $\overline{ME}$ i $\overline{EG}$ su jednakih duljina.

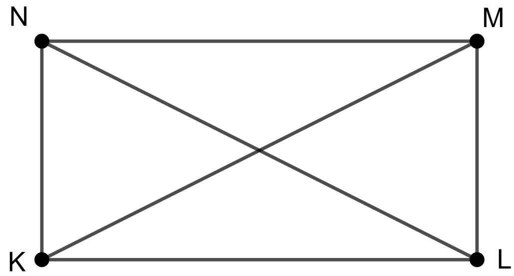
(B) Dužine $\overline{ME}$ i $\overline{GO}$ međusobno su okomite.

(C) Dužine $\overline{MG}$ i $\overline{EO}$ međusobno su okomite.

(D) Dužine $\overline{MG}$ i $\overline{OG}$ jednakih su duljina.

(E) Mjera kuta uz vrh O veća je od mjere kuta uz vrh E.

7. U pravokutniku KLMN, dužine $\overline{KM}$ i $\overline{LN}$ su *dijagonale*.



Koja tvrdnja (A)-(D) **nije** istinita za *svaki* pravokutnik?

(A) Četiri su stranice.

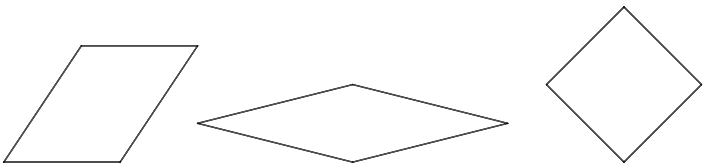
(B) Četiri su prava kuta.

(C) Nasuprotne stranice su jednakih duljina

(D) Dijagonale su jednakih duljina

(E) Sve tvrdnje (A)-(D) su istinite za svaki pravokutnik.

8. *Romb* je četverokut kojemu su sve stranice jednake duljine. Slijede tri primjera.



Koja tvrdnja (A)-(D) **nije** istinita za *svaki* romb?

(A) Dijagonale su okomite.

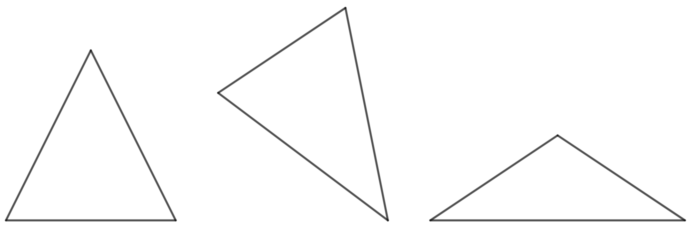
(B) Dijagonale su jednake duljine.

(C) Dijagonale raspolavljaju dva kuta romba.

(D) Nasuprotni kutovi jednake su mjere.

(E) Sve tvrdnje (A)-(D) su istinite za svaki romb.

9. Jednakokračan trokut je trokut kojemu su dvije stranice jednake duljine. Slijede tri primjera.



Koja tvrdnja (A)-(D) je istinita za svaki jednakokračan trokut?

(A) Tri stranice moraju biti jednakih duljina.

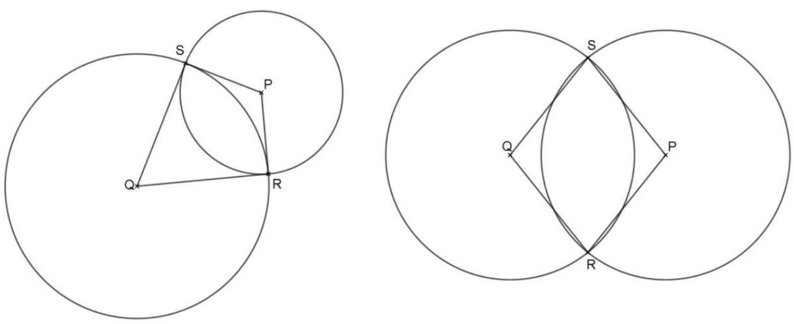
(B) Sva tri kuta moraju biti jednakih mjera.

(C) Barem dva kuta moraju biti jednake mjere.

(D) Jedna stranica mora biti dvostruko veća od druge.

(E) Niti jedna tvrdnja (A)-(D) nije istinita za svaki jednakokračan trokut.

10. Kružnice s centrom u točki P, odnosno Q, sijeku se u točkama R i S te tvore četverokut PRQS. Slijede dva primjera.



Koja od tvrdnji (A)-(D) **nije** uvijek istinita?

(A) PRQS ima barem dva jednaka kuta.

(B) Dužine $\overline{PQ}$ i $\overline{RS}$ međusobno su okomite.

(C) PRQS ima dva para stranica jednakih duljina.

(D) Kutovi uz vrhove P i Q jednake su mjere.

(E) Sve su tvrdnje (A)-(D) uvijek istinite.

11. Dane su dvije tvrdnje.

Tvrdnja 1. Geometrijski lik G je kvadrat.

Tvrdnja 2. Geometrijski lik G je trokut.

Koja je od tvrdnji (A)-(E) točna?

(A) Ako je Tvrdnja 1, istinita, onda je Tvrdnja 2. istinita.

(B) Ako Tvrdnja 1, nije istinita, onda je Tvrdnja 2. istinita.

(C) Tvrdnje 1. i 2. ne mogu obje biti istinite.

(D) Tvrdnje 1. i 2. ne mogu obje biti neistinite.

(E) Nijedna od tvrdnji (A)-(D) nije točna.

12. Dane su dvije tvrdnje.

Tvrdnja M. Trokut ABC ima sve tri stranice jednake duljine.

Tvrdnja N. U trokutu ABC, kutovi uz vrhove B i C jednake su mjere.

Koja je od tvrdnji (A)-(E) točna?

(A) Ako je Tvrdnja M istinita, onda je Tvrdnja N istinita.

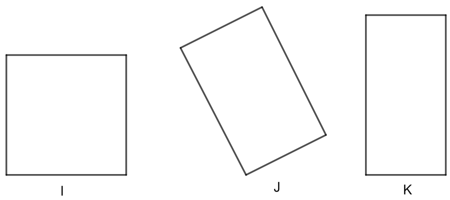
(B) Tvrdnje M i N ne mogu obje biti istinite.

(C) Ako je Tvrdnja N istinita, onda je Tvrdnja M istinita.

(D) Ako Tvrdnja M nije istinita, onda Tvrdnja N nije istinita.

(E) Nijedna od tvrdnji (A)-(D) nije točna.

13. Koji su od prikazanih likova pravokutnici?



(A) Svi su prikazani likovi pravokutnici.

(B) Samo J.

(C) Samo K.

(D) Samo J i K.

(E) Samo I i K.

14. Koja je od tvrdnji (A)-(E) istinita?

(A) Sva su svojstva kvadrata svojstva svih pravokutnika.

(B) Sva su svojstva pravokutnika svojstva svih kvadrata.

(C) Sva su svojstva kvadrata svojstva svih paralelograma.

(D) Sva su svojstva pravokutnika svojstva svih paralelograma.

(E) Nijedna od tvrdnji (A)-(D) nije točna.

15. Što svi pravokutnici imaju, a neki paralelogrami nemaju?

(A) Dijagonale jednake duljine.

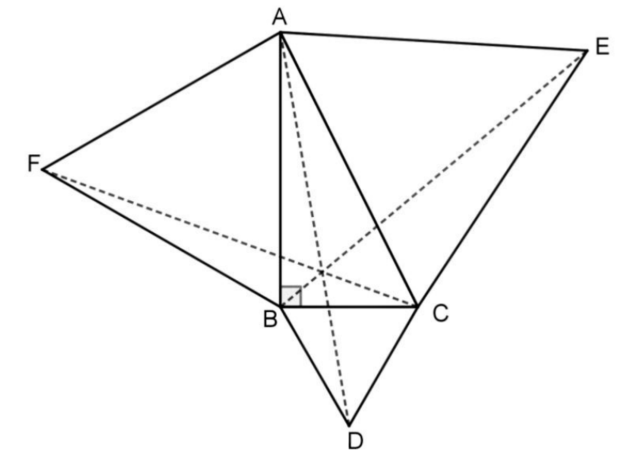
(B) Nasuprotne stranice paralelne.

(C) Nasuprotne stranice jednake duljine.

(D) Nasuprotne kutova jednake mjere.

(E) Nijedna od tvrdnji (A)-(D) nije točna.

16. Prikazan je pravokutni trokut $\triangle ABC$. Jednakostranični trokuti $\triangle ACE$, $\triangle BAF$ i $\triangle CBD$ konstruirani su nad stranicama trokuta $\triangle ABC$.



Pomoću ovih informacija, moguće je dokazati da stranice imaju zajedničku točku.
Što nam taj dokaz govori?

(A) Samo u ovome prikazanom trokutu možemo biti sigurni da $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ imaju zajedničku točku.

(B) U nekima, ali ne u svim pravokutnim trokutima, dužine $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ imaju zajedničku točku.

(C) U svim trokutima dužine $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ imaju zajedničku točku.

(D) U svim pravokutnim trokutima dužine $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ imaju zajedničku točku.

(E) U svim jednakostraničnim trokutima $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ i $\overline{CF}$ imaju zajedničku točku.

17. Navedena su neka svojstva nekog lika.

Svojstvo D: Dijagonale su jednake duljine.

Svojstvo K: Lik je kvadrat.

Svojstvo P: Lik je pravokutnik.

Što je od ponuđenoga istinito:

(A) P implicira D koji implicira K.

(B) D implicira K koji implicira P.

(C) D implicira P koji implicira K.

(D) K implicira P koji implicira D.

(E) P implicira K koji implicira D.

18. Dane su dvije izjave.

(1) Ako je lik pravokutnik, dijagonale se međusobno raspolavljaju.

(2) Ako se dijagonale međusobno raspolavljaju, lik je pravokutnik.

Što je od navedenoga točno?

(A) Kako bi se dokazalo da je izjava (1) istinita, dovoljno je dokazati da je izjava (2) istinita.

(B) Kako bi se dokazalo da je izjava (2) istinita, dovoljno je dokazati da je izjava (1) istinita.

(C) Kako bi se dokazalo da je izjava (2) istinita, dovoljno je naći jedan pravokutnik kojemu se dijagonale međusobno raspolavljaju.

(D) Kako bi se dokazalo da izjava (2) nije istinita, dovoljno je pronaći jedan lik koji nije pravokutnik, a čije se dijagonale međusobno raspolavljaju

(E) Ništa od ponuđenoga nije točno.

19. U geometriji:

(A) Neki pojmovi moraju ostati nedefinirani, ali za svaku istinitu izjavu može biti dokazano da je istinita.

(B) Svaki se pojam može definirati i svakoj se istinitoj izjavi može dokazati istinitost.

(C) Svaki se pojam može definirati, ali je nužno pretpostaviti da su određene izjave istinite.

(D) Neki pojmovi moraju ostati nedefinirani, i nužno je imati neke izjave za koje se istinitost pretpostavlja.

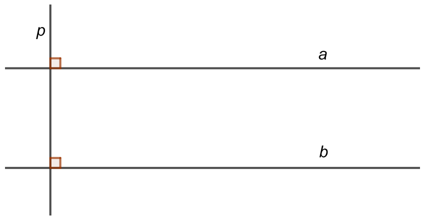
(E) Ništa od ponuđenoga nije točno.

20. Prouči ove tri izjave:

(1) Dva pravca okomita na isti pravac međusobno su paralelni.
(2) Pravac koji je okomit na jedan od dva paralelna pravca okomit je i na drugi.
(3) Ako je svaka točka jednog pravca jednako udaljena od drugoga pravca, onda su oni paralelni.

Na slici su prikazani međusobno okomiti pravci a i p te međusobno okomiti pravci b i p.

Koja je od navedenih izjava razlog što je pravac a paralelan s pravcem b?



(A) Samo (1).

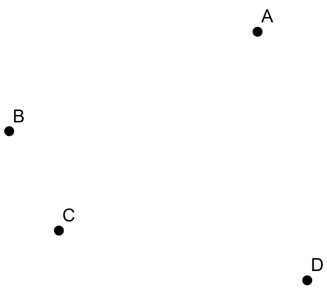
(B) Samo (2).

(C) Samo (3).

(D) Izjava (2) ili (3) .

(E) Izjava (1) ili (2).

21. U F-geometriji, drugačijoj od one koju ste navikli, točno su četiri točke i šest pravaca. Svaki pravac sadrži točno dvije točke. Ako su točke A, B, C, D, pravci su: $\{A, B\}, \{A, C\}, \{A, D\}, \{B, C\}, \{B, D\}$ i $\{C, D\}$.



Ovako su u F-geometriji definirani paralelni su i sijeku se.

Pravci {A,B} i {A,C} *sijeku se* u točki A jer je pravcima {A,B} i {A,C} točka A zajednička.
Pravci {A,B} i {C,D} *paralelni su* jer nemaju zajedničkih točaka.

Što je od ponuđenoga točno?

(A) Pravci se {A,C} i {B,D} sijeku.

(B) Pravci su {A,C} i {B,D} paralelni.

(C) Pravci su {B,C} i {C,D} paralelni.

(D) Pravci se {A,D} i {C,B} sijeku.

(E) Ništa od iznad ponuđenog nije točno.

22. **Trisekcija** kuta znači podijeliti kut na tri dijela jednake mjere. P. L. Wantzel je godine 1847. dokazao da je općenito nemoguće napraviti trisekciju kuta koristeći samo šestar i neoznačeno ravnalo.

Što se može valjano zaključiti iz njegova dokaza?

(A) Općenito nije moguće podijeliti kut na dva dijela jednake mjere koristeći samo šestar i neoznačeno ravnalo.

(B) Općenito nije moguće napraviti trisekciju kuta koristeći samo šestar i označeno ravnalo.

(C) Općenito nije moguće napraviti trisekciju kuta koristeći bilo kakav crtaći pribor.

(D) Moguće je da će u budućnosti netko pronaći općeniti način kako napraviti trisekciju kuta koristeći samo šestar i neoznačeno ravnalo.

(E) Nitko nikada neće moći naći neku općenitu metodu kako napraviti trisekciju kuta koristeći samo šestar i neoznačeno ravnalo.

23. Postoji geometrija koju je osmislio matematičar M u kojoj je istinito:

Suma veličina svih kutova trokuta manje je od 180°.

Što je od ponuđenoga točno?

(A) M je pogrešno izmjerio kutove trokuta.

(B) M je krenuo od drugačijih pretpostavka od onih u uobičajenoj geometriji.

(C) M je napravio grešku u logičkom promišljanju.

(D) M ima pogrešnu ideju značenja pojma „istinito“.

(E) Ništa od ponuđenog nije točno.

24. Dva udžbenika iz geometrije drugačije definiraju pojam trokuta.

Što je od ponuđenoga točno?

(A) Jedan od udžbenika ima pogrešku.

(B) Trokuti u jednom od udžbenika imaju drugačija svojstva od trokuta iz drugog udžbenika.

(C) Jedna je definicija pogrešna. Ne mogu postojati dvije različite definicije trokuta.

(D) Trokuti u jednom od udžbenika moraju imati ista svojstva kao i trokuti iz drugog udžbenika.

(E) Svojstva se trokuta u ta dva udžbenika možda razlikuju.

25. Dane su dvije izjave:

(i) Ako p, onda q.

(ii) Ako s, onda ne q.

Koja izjava slijedi iz izjava (i) i (ii)?

(A) Ako p, onda s.

(B) Ako ne s, onda p.

(C) Ako ne p, onda ne q.

(D) Ako s, onda ne p.

(E) Ako p ili q, onda s.

Literatura

[1] Z. Usiskin, (1982). Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry. The University of Chicago

[2] J. Kličinović, N. Koceić-Bilan (2020), Ispitni rad, Van Hiele razine geometrijskog razmišljanja, Znanstvene metode u nastavi matematike, Split: Prirodoslovno-matematički fakultet

[3] H. Vlasnović, M. Cindrić, (2014) Razumijevanje geometrijskih pojmova i razvitak geometrijskog mišljenja učenika nižih razreda osnovne škole prema Van Hieleovoj teoriji, UDK: 372.851 159.955 Izvorni znanstveni članak

[4] D. A. Romano, (2009) VAN HIELE-OVA TEORIJA O UČENJU GEOMETRIJE, Metodički obzori 41-2 Pregledni rad, Prirodno-matematički fakultet, Banja Luka (Bosna i Hercegovina)

[5] N. Baranović, (2015) Simpozijum MATEMATIKA I PRIMENE, Matematički fakultet, Univerzitet u Beogradu

[6] J. Mayberry, (1983). The Van Hiele Levels of Geometric Thought in Undergraduate Preservice Teachers. Journal for Research in Mathematics Education, 14(1), 58. https://doi.org/10.2307/748797

[7] C. L. Watson,(2012). A Comparison of Van Hiele Levels and Final Exam Grades of Students at the University of Southern Mississippi. The University of Southern Mississippi.

[8] Van Hiele, P. M. (1999). Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play. Teaching Children Mathematics, 5(6), 310–316. https://doi.org/10.5951/TCM.5.6.0310

[9] Burger W.F., Shaughnessy J.M., (1986), Characterising the van Hiele levels of development in geometry. Journal for research in Mathematics education, (str. 31-48)

[10] Hoffer, A. (1981). Geometry is more than proof. The Mathematics Teacher, 74(1), 11–18. https://doi.org/10.5951/MT.74.1.0011

[11] Van de Valle J. A., (2007.), Elementary and Middle School Mathematics: teaching developmentally, Virginia Commonwealth University, (str. 431.-472.) Boston, Pearson Education, Inc.

[12] Crowley, Mary L., (1987.), "The van Hiele Model of the Development of Geometric Thought" u Learning and teaching geometry, Reston Va., National Council of teachers of Mathematics

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

TEORIJA VAN HIELE

Anamarija Lozančić

Sažetak: *Teorija Van Hiele pokušava dati odgovor na pitanje razine razumijevanja geometrije kao grane matematike, a sastoji se od pet razina koje opisuju razmišljanje ispitanika i sukladno tom ih smješta na jednu od tih pet razina. U radu su predstavljena moguća proširenja Van Hiele teorije na ostala područja matematike. Provedena su brojna istraživanja nad učenicima, a za potrebe ovog rada osmišljeno je kratko istraživanje nad studentima matematike prve godine preddiplomskog studija i druge godine diplomskog studije, smjer natavnički, Prirodoslovno-matematičkog fakulteta u Splitu.*

Ključne riječi: *geometrijsko razmišljanje, pet razina, istraživanje*

Podatci o radu: *52 stranice, 2 tablice, 27 slika*

Mentor: *prof. dr. sc. Nikola Koceić-Bilan*

Članovi povjerenstva:

Doc. dr. sc. Snježana Braić, docent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu

Prof., v.pred., Željka Zorić, viši predavač Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad: *Prosinac, 2022.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

VAN HIELE MODEL

Anamarija Lozančić

Abstract: *The Van Hiele theory tries to answer the question about the level of understanding of geometry as a branch of mathematics, and consists of five levels that describe the thinking of respondents and accordingly puts them on one of those five levels. In this paper possible expansions of Van Hiele theory on other mathematical branches are presented. Numerous studies have been been conducted on students all around the world and for the purposed of this paper, a short research was designed on mathematics students in the first year of undergraduate studies and the second year of graduate students, majoring in teaching at the Faculty of Science, University of Split.*

Key words: *five levels, understanding of geometry, research*

Specifications: *52 pages, 2 tables, 27 figures*

Mentor: *Nikola Koceić-Bilan, Ph.D., Full Professor of Faculty of Science, University of Split*

Committee:

Snježana Braić, Ph.D., Assistant Professor of Faculty of Science, University of Split

Željka Zorić, MSc., Senior lecturer Professor of Faculty of Science, University of Split

This thesis was approved by a Thesis commettee on: *December, 2022.*