

# Jednostavna računalna simulacija DART misije za planetarnu obranu

---

Ćavar, Ana

Undergraduate thesis / Završni rad

2022

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:517642>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-11-23**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet

**Jednostavna računalna simulacija DART misije  
za planetarnu obranu**

Završni rad

Ana Čavar

Split, rujan 2022.

## Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet  
Odjel za fiziku  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

### Jednostavna računalna simulacija DART misije za planetarnu obranu

Ana Ćavar

Sveučilišni preddiplomski studij Fizika

#### Sažetak:

U ovom radu razvijena je jednostavna računalna simulacija inspirirana NASA-inom DART misijom koja istražuje mogućnost odvratanja asteroida s putanje k sudaru sa Zemljom. Zemlju svakoga dana obasipaju manji meteori, ali statistička je nužnost da se svako toliko na putu prema Zemlji pojavi i neki veći asteroid. U neposrednoj blizini Zemlje obitavaju tisuće asteroida i njih je čak 1400 prozvano potencijalno opasnim za Zemlju. Istraživana metoda planetarne obrane je gađanje asteroida letjelicom poslanom sa Zemlje, kako bi se jednostavnim prijenosom količine gibanja asteroid preusmjerio s putanje dovoljno da se izbjegne sudar sa Zemljom i spasi život. Tehnologija korištena u razvijanju simulacije je programski jezik Python i njegova poznata numerička biblioteka NumPy, dok se za prikazivanje rezultata koristi Matplotlib. Pokazano je da čak i jednostavna računalna simulacija pokazuje potencijal te ohrabruje da ovakva metoda obrane ima perspektivu za uspjeh. S druge strane, za ozbiljnu simulaciju trebalo bi značajno unaprijediti numeričke metode te moć i brzinu računanja rješenja ovakvih problema.

**Ključne riječi:** DART misija, udar asteroida, Zemlja, planetarna obrana, računalna simulacija

**Rad sadrži:** 22 stranice, 13 slika, 0 tablica, 17 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku.

**Mentor:** doc. dr. sc. Toni Šćulac

**Ocjenjivači:** doc. dr. sc. Toni Šćulac,  
doc. dr. sc. Ivana Weber  
mag. phys. Tamara Rom

**Rad prihvaćen:** 15. rujan 2022.

Rad je pohranjen u Knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

<b>Basic documentation card</b>
---------------------------------

University of Split  
Faculty of Science  
Department of Physics  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Bachelor thesis

**A simple computer simulation of the DART planetary defense mission**

Ana Ćavar

University undergraduate study programme Physics

**Abstract:**

In this paper, a simple computer simulation inspired by NASA's DART mission was developed, which explores the possibility of deflecting an asteroid from its path to a collision with the Earth. The Earth is showered by small meteors every day, but it is a statistical necessity that every now and then a larger asteroid appears and threatens our planet. Thousands of asteroids live in the immediate vicinity of the Earth, and as many as 1,400 of them have been identified as potentially dangerous for the Earth. The researched method of planetary defense is shooting the asteroid with a spacecraft sent from Earth so that the asteroid is diverted from its path by simple transfer of momentum and in that way avoids a collision with the Earth. The technology used to develop the simulation is the Python programming language and its well-known numerical library NumPy, while Matplotlib is used to visualize the results. In conclusion it is found that even a simple computer simulation such as this one shows potential for this kind of method of planetary defense and has perspective for success. On the other hand, in order to develop a more serious simulation, the numerical methods used, the power and speed of calculation should be significantly improved.

**Keywords:** DART mission, asteroid impact, Earth, planetary defense, computer simulation

**Thesis consists of:** 22 pages, 13 figures, 0 tables, 17 references. Original language: Croatian.

**Supervisor:** Assist. Prof. Dr. Toni Šćulac

**Reviewers:** Assist. Prof. Dr. Toni Šćulac  
Assist. Prof. Dr. Ivana Weber,  
Tamara Rom, MSc. Phys.

**Thesis accepted:** September 15, 2022

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

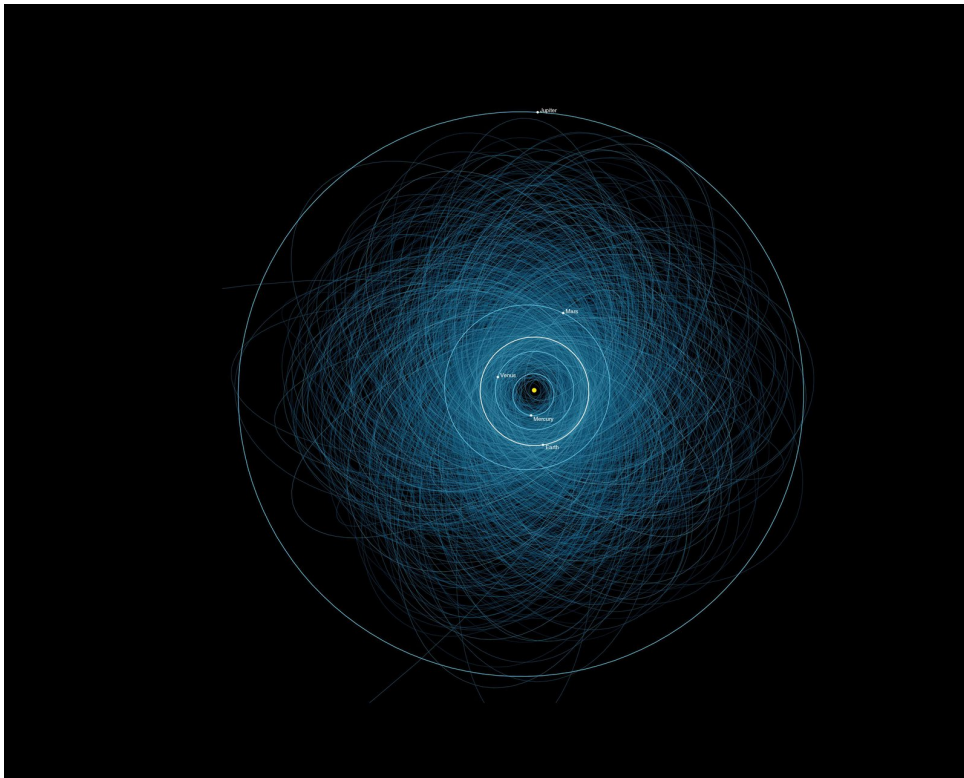
# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b> . . . . .	<b>1</b>
1.1	Detalji DART misije . . . . .	2
1.2	Računalna simulacija . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Metoda rada</b> . . . . .	<b>4</b>
2.1	Postavljanje problema . . . . .	4
2.2	Numeričko rješavanje . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Rezultati</b> . . . . .	<b>11</b>
<b>4</b>	<b>Rasprava</b> . . . . .	<b>18</b>
<b>5</b>	<b>Zaključak</b> . . . . .	<b>20</b>

# 1 Uvod

Svakog dana u Zemljinu atmosferu uleti više od 100 tona materijala, većinom svemirske prašine i čestica veličine zrna pijeska. Većina meteora koji vidljivo sagorijevaju na noćnom nebu promjera je nekoliko centimetara. No ponekad u atmosferu ulete i veće čestice. Prosječno jednom godišnje u Zemljinu atmosferu uleti asteroid promjera nekoliko metara. Asteroidi ovih veličina još uvijek će najvjerojatnije potpuno sagorijeti u atmosferi, dok se otprilike svakih 2000 godina pojavi asteroid promjera nekoliko desetaka metara te padne na Zemlju i načini lokalnu štetu. Svakih pak nekoliko milijuna godina, pojavi se asteroid dovoljno velik da ugrozi civilizaciju i život na Zemlji. [1] Ove statistike dobivene su proučavanjem površine Mjeseca i drugih nebeskih tijela unutar Sunčevog sustava. Naime, vidljivo je da su površine svih tijela u Sunčevom sustavu izbrazdane ožiljcima od udara meteorita i asteroida, dok su na Zemlji tragovi istih većinom erodirani pod utjecajem vremenskih uvjeta. [2] NASA vjeruje kako bi udar bilo kakvog objekta većeg u promjeru od jedan ili dva kilometra mogao imati globalne posljedice. [1] Primjerice, danas je u znanstvenoj zajednici većinski prihvaćena Alvarezova hipoteza, koja kaže da je kredno-paleogensko izumiranje, za vrijeme kojeg je nestalo gotovo 75% bioloških rodova na Zemlji, bilo uzrokovano udarom ogromnog asteroida, promjera oko 10 - 15 kilometara, u područje današnjeg poluotoka Yucatána u Meksiku. [3]

Asteroidi koji se smatraju potencijalno opasnima za Zemlju, (eng. *Potentially Hazardous Asteroids (PHAs)*), nalaze se na putanjama koje prolaze relativno blizu Zemljine, s udaljenošću do 7.5 milijuna kilometara, te su promjera minimalno 140 metara. Trenutno je poznato i praćeno njih preko 1400, kao što je prikazano na slici 1. Za sad niti jedan od njih nije nađen na putanji koja direktno ugrožava Zemlju. [4] Ipak, njihove putanje promjenjive su pod gravitacijskim utjecajima planeta ili sudarima s drugim asteroidima. Također, neprestano se pronalaze novi asteroidi, u prosjeku njih čak 40 tjedno [5], i to često tek kad su već u blizini Zemlje budući da je asteroide daleko teže uočiti od planeta i kometa.



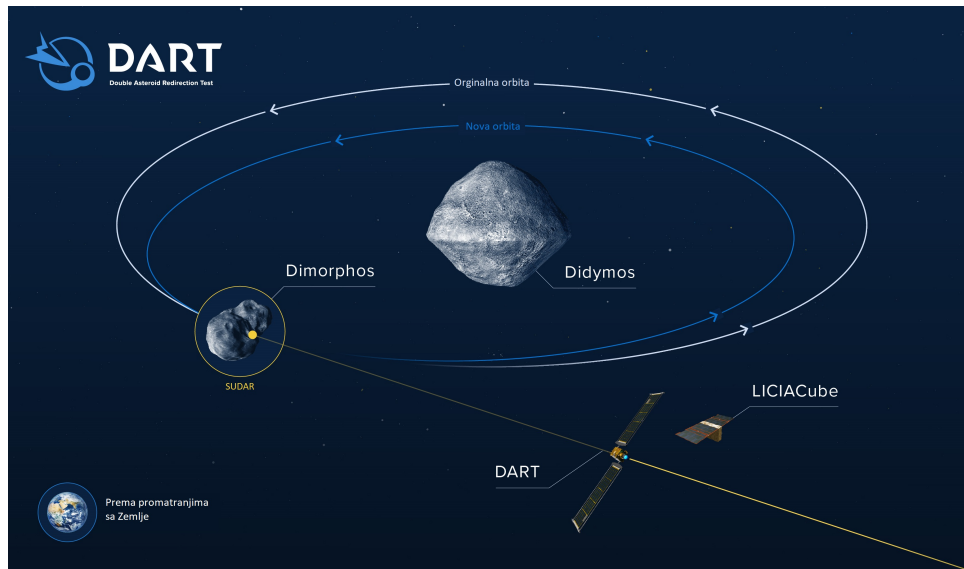
**Slika 1:** Slika prikazuje orbite svih poznatih asteroida potencijalno opasnih po Zemlju, njih preko 1400, prema podacima iz 2013. (slika preuzeta s <https://www.jpl.nasa.gov/> [4])

Dakle, statistički gledano, pitanje nije hoće li, već kad će se pojaviti neki veliki asteroid i ugroziti život na Zemlji. U svrhu toga, NASA je 2021. godine u studenom lansirala prvu misiju u svrhu obrane planeta Zemlje od udara asteroida.

## 1.1 Detalji DART misije

DART (*Double Asteroid Redirection Test*) je NASA-ina misija čija je osnovna zadaća istraživanje metode prijenosa količine gibanja pri sudaru dva tijela kao potencijalne metode odvratanja ugrožavajućeg asteroida od njegove trajektorije prema Zemlji. [6] U fokusu misije nalazi se binarni asteroidni sustav Didymos (na grčkom "blizanac"), jedan od poznatih potencijalno opasnih asteroida. Cilj misije jest letjelicom pogoditi manje tijelo sustava, Didymosov prirodni satelit Dimorphos, i utjecati na promjenu njegove orbite oko asteroida, kako je ilustrirano na slici 2. Inicijalna procjena utjecaja sudara zatim će biti opažavana sa Zemlje kao promjena perioda vrtnje binarnog sustava. Nekoliko godina kasnije očekuje se i drugi nastavak misije, slanje sljedeće letjelice kako bi se točnije procijenio utjecaj predaje količine gibanja pri sudaru. Naime, postoji efekt "povećanja količine gibanja" (eng. *momentum enhancement*), u kojem ukupna količina gibanja prenesena na veće tijelo može biti i nekoliko puta veća od inicijalnog zamaha udarnog tijela. Do ovog efekta dolazi zbog negativnog zamaha mase materijala izbačenog u suprotnom smjeru prilikom neelastičnog sudara, zbog čega je njegov učinak teško

predvidjeti. [7] Jedan od glavnih zadataka NASA-ine misije upravo je i proučavanje ovog efekta. Sudar NASA-ine letjelice sa asteroidom očekuje se 26. rujna 2022.



**Slika 2:** Cilj DART misije je letjelicom pogoditi mjesec Dimorphos, prirodni satelit asteroida Dydymosa, te prijenosom količine gibanja promijeniti njegovu putanju oko asteroida. DART misija (slika preuzeta s <https://dart.jhuapl.edu/> [6])

## 1.2 Računalna simulacija

Inspirirano DART misijom, glavna ideja ovog rada je istražiti na koji način letjelica lansirana sa Zemlje prijenosom količine gibanja može utjecati na putanju asteroida, te može li je skrenuti dovoljno da se izbjegne sudar s našim planetom. Ipak, za razliku od DART misije, test se ne izvodi na binarnom sustavu asteroida, alterirajući putanju jednog tijela oko drugog, već se direktno simulira asteroid na putanji prema sudaru sa Zemljom, te gađanje istog letjelicom u svrhu obrane. Model samog sudara pojednostavljen je pretpostavkom savršeno neelastičnog sudara, tako da će spomenuti efekt povećavanja količine gibanja biti zanemaren, budući da se sudarena tijela zajedno nastavljaju gibati združenim masama. Također, letjelica u simulaciji nema elitni navigacijski sustav poput NASA-ine, koja joj pomaže u orijentaciji prema meti, već je pojednostavljena i polijeće ravnom putanjom direktno prema asteroidu.

Dakle, zadatak računalne simulacije prvo je postaviti Sunčev sustav, rješavanjem klasično mehaničkog problema N tijela, zatim generirati asteroid na putanji ka Zemlji te naposljetku sudariti asteroid letjelicom koja polazi sa Zemlje pomoću zakona očuvanja količine gibanja.



## 2 Metoda rada

### 2.1 Postavljanje problema

Cijela fizika potrebna za rješavanje problema sastoji se od samo tri fizikalna zakona. Za postavljanje Sunčevog sustava dovoljna je primjena Newtonovog drugog te gravitacijskog zakona. Nakon toga, za ostvarenje sudara letjelice i asteroida, koristi se zakon očuvanja količine gibanja.

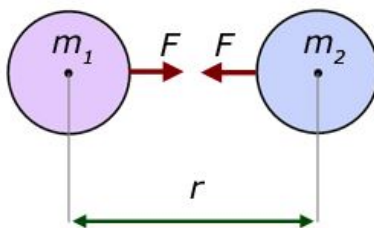
Newtonov drugi zakon, koji nam daje jednadžbe gibanja tijela na koje djeluje sila, glasi:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = m\vec{r}, \quad (2.1)$$

dok je Newtonov zakon gravitacije, koji određuje sila na pojedina tijela, sljedeći:

$$\vec{F} = -G \frac{m_1 m_2}{r^2} \hat{r}, \quad (2.2)$$

gdje su  $m_1$  i  $m_2$  mase dvaju tijela, a  $r$  udaljenost između njih kao što je ilustrirano na slici 3, dok gravitacijska konstanta iznosi  $G = 6,6743 \times 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2}$ .



**Slika 3:** Djelovanje Newtonovog zakona gravitacije između dva tijela (slika preuzeta s <https://byjus.com/> [8])

Generalna formulacija problema  $N$  tijela stoga glasi:

$$\vec{F}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|^3} = m_i \vec{r}_i \quad (2.3)$$

Ovaj skup jednadžbi nema analitičko rješenje, odnosno rješenje zatvorene forme. [9] Pri tome se misli na to da ne postoji rješenje koje se može zapisati koristeći konačan broj standardno definiranih matematičkih operacija i funkcija. [10] Ovo čak problem tri tijela čini izrazito teško rješivim, dok se za rješavanje problema za više tijela nužno pribjegava aproksimativnim i numeričkim metodama. Uz to, naravno da u stvarnom Sunčevom sustavu zapravo imamo nepre-

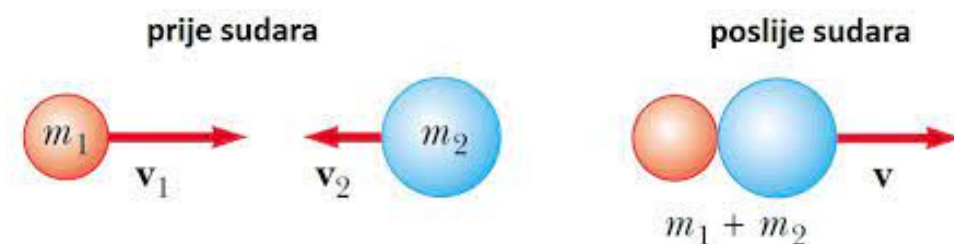
brojivo mnogo tijela koja su neprestano sva u gibanju i djeluju jedna na druga gravitacijom. Zato će cilj računalne simulacije biti dobiti stabilne putanje planeta za zadane stvarne parametre (mase i udaljenosti nebeskih tijela), za konačan broj tijela koja su najvažnija u razmatranjima ovog rada.

Na kraju, nakon što je Sunčev sustav s asteroidom postavljen, sljedeću važnu ulogu igra zakon očuvanja gibanja, i to za slučaj savršeno neelastičnog sudara, gdje se tijela pri sudaru potpuno stapaju i nastavljaju zajednički putovati istom brzinom [11] kao što je prikazano na slici 4. Lako se računa konačna brzina tijela nakon sudara:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v} \quad (2.4)$$

$$\vec{v} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.5)$$

Na taj način letjelica će pokušati skrenuti asteroid sa putanje ka Zemlji.



**Slika 4:** Nakon savršeno neelastičnog sudara tijela se nastavljaju gibati zajedno (slika preuzeta s <https://fer.unizg.hr/> [12])

## 2.2 Numeričko rješavanje

Za razvijanje simulacije odabran je programski jezik Python i numerička biblioteka NumPy, zbog svoje fleksibilnosti i dobro razvijenih matematičkih alata. Izvorni kod pisan je objektno orijentirano te se može naći na poveznici na GitHub repozitorij: [13].

Problem se razmatra u dvije dimenzije radi jednostavnosti, ali i jer uvođenje treće dimenzije ne bi bitno mijenjalo fiziku problema. Na početku gibanja, osim postavljanja odnosa gravitacijskih sila između tijela, trebalo je i Suncu predan inicijalni zamah jednak minusu ukupne količine gibanja ostalih tijela kako bi se sustav postavio u centar mase, budući da ukupna količina gibanja zatvorenog sustava mora biti stalna. [14] Numeričke metode koje su korištene za nalaženje putanja su Eulerova metoda i Runge-Kutta. Na početku je korištena najjednostavnija numerička metoda, Eulerova metoda. Ideja Eulerove metode je svaki komad putanje aproksimirati tangentom u točki te na temelju toga izračunati sljedeću točku putanje. [15] U ovom slučaju, kalkilirane veličine su bile komponente vektora pozicija planeta te pripadne

komponente brzine:

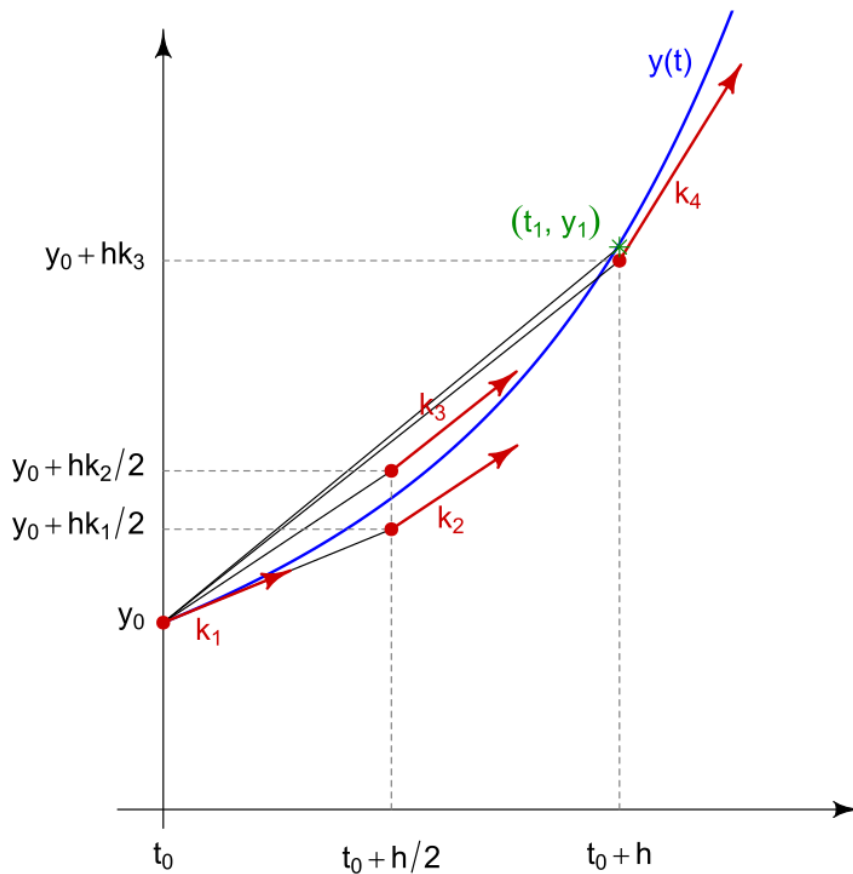
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \approx \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} \implies x_{n+1} = x_n + v_n \Delta t \quad (2.6)$$

$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \approx \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t} \implies v_{n+1} = v_n + a_n \Delta t \quad (2.7)$$

Eulerova metoda bila je dovoljno dobra da uspostavi stabilne putanje svih planeta oko Sunca. Podaci koji su iskorišteni za postavljanje početnih uvjeta Sunca i planeta preuzeti su sa službene stranice NASA-e [16]. Valja napomenuti da su svi planeti u početne pozicije stavljeni na isti pravac te je uzeta srednja vrijednost njihovih udaljenosti od Sunca. U stvarnosti vrijednosti udaljenosti pojedinog planeta od Sunca vjerojatno variraju u ovisnosti o njegovim pozicijama na putanji, ali to je teško odrediti te ne bi bitno utjecalo na rezultate ovog rada.

Sljedeći korak bio je uvođenje asteroida. Kako bi se postigao pogodak asteroida u Zemlju, asteroid je prvo trebao biti postavljen na poziciju Zemlje (ali ne točno u sredinu kako bi se izbjeglo dijeljenje s nulom u izračunu gravitacije), a zatim je odabranom udarnom brzinom poslan prema svemiru. To se postiže negativnom evolucijom sustava, u kojoj je jednostavno invertirano vrijeme, što je moguće napraviti jer su Newtonovi zakoni simetrični na smjer vremena. Time se dobivaju početni uvjeti svih planeta u sustavu, koji vode prema pogotku. Drukčije je gotovo nemoguće nacičiti Zemlju, jer se zahtjeva iznimna preciznost početnih uvjeta kako bi se postigao pogodak. Dakle, uz dobivene početne uvjete, preostaje pokrenuti pozitivnu evoluciju te tako asteroid pogađa Zemlju. Ipak, Eulerova metoda tu više nije bila dovoljno precizna, te ne bi uspjela ponoviti točne korake nazad prema Zemlji i pogodak se nije uspješno ostvarivao.

Zato prelazimo na precizniju numeričku metodu, metodu Runge Kutta 4. Ova metoda dolazi do svake sljedeće vrijednosti procjenom derivacije između dva koraka u četiri točke. [17] Princip rada metode je prikazan na slici 5. Postoje i više metoda Runge Kutta koje procjenjuju derivaciju kroz još više točaka, ali za ovaj rad je metoda Runge Kutta 4 ostvarila dovoljnu preciznost.



**Slika 5:** Numerička metoda Runge Kutta procjenjuje vrijednost derivacije u 4 točke. (Autor slike je Hilber Traum [18])

Vrijednosti u metodi Runge Kutta 4 se računaju na sljedeći način:

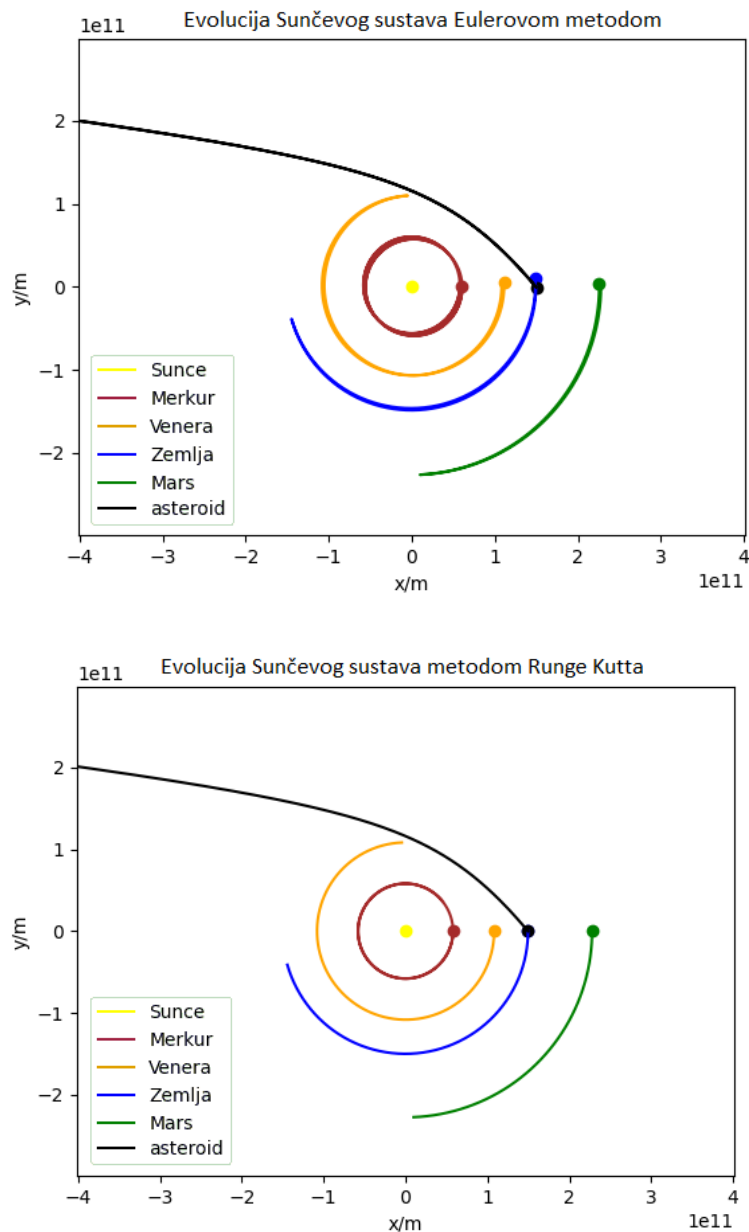
$$\begin{aligned} v_{n+1} &= v_n + \frac{1}{6}(k_{1v} + 2k_{2v} + 2k_{3v} + k_{4v}) \\ x_{n+1} &= x_n + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x}) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Odgovarajući koeficijenti  $k$  računaju se kao:

$$\begin{aligned}v_{1v} &= a(x_n, v_n, t_n)dt \\k_{1x} &= v_n dt \\k_{2v} &= a\left(x_n + \frac{k_{1x}}{2}, v_n + \frac{k_{1v}}{2}, t_n + \frac{dt}{2}\right) dt \\k_{2x} &= \left(v_n + \frac{k_{1v}}{2}\right) dt \\k_{3v} &= a\left(x_n + \frac{k_{2x}}{2}, v_n + \frac{k_{2v}}{2}, t_n + \frac{dt}{2}\right) dt \\k_{3x} &= \left(v_n + \frac{k_{2v}}{2}\right) dt \\k_{4v} &= a(x_n + k_{3x}, v_n + k_{3v}, t_n + dt) dt \\k_{4x} &= (v_n + k_{3v})dt\end{aligned}\tag{2.9}$$

Funkcija  $a$  u računici predstavlja funkciju akceleracije. U ovom slučaju, kako akceleracija  $a$  ovisi samo o prostornoj koordinati, iz računanja koeficijenata izostavljene su ovisnosti o brzini i vremenu.

Na slici 6 prikazana je vidljiva razlika u preciznosti računanja putanja negativnih i pozitivnih evolucija planeta dviju korištenih numeričkih metoda.



**Slika 6:** Usporedba putanja negativne i pozitivne evolucije nebeskih tijela različitim numeričkim metodama. Na lijevoj slici vidljiva je nepreciznost Eulerove metode, dok je na desnoj slici korištena metoda Runge Kutta 4.

Naposljetku je lansirana letjelica od Zemlje prema asteroidu. Zbog zahtjeva iznimne preciznosti pri gađanju asteroida letjelicom (tijela su još manja, a i ne može se ponovno iskoristiti trik negativne evolucije kao kod gađanja Zemlje asteroidom), gravitacijsko djelovanje na letjelicu potpuno je zanemareno pod pretpostavkom da je letjelica lagana i brza. Ova aproksimacija nije potpuno opravdana, posebno za putanje koje prolaze vrlo blisko do Zemlje, no točna računica putanje letjelice je sama po sebi vrlo komplicirana te je izvan okvira ovog rada. Za ovaj rad puno je važnije razmatrati krajnji učinak udara letjelice u asteroid. Budući da pozicije tijela u Python kodu predstavljaju liste, početna i konačna pozicija letjelice odabrane su indek-

sima, prva iz liste pozicija Zemlje, a druga iz liste pozicija asteroida. Naravno, odabrani indeks pozicije asteroida mora biti veći od indeksa pozicije Zemlje, kako se letjelica ne bi morala kretati unatrag kroz vrijeme. Uzmemo li početni trenutak kao  $t_0$ , dobivamo dvije točke fiksirane prostornim i vremenskim koordinatama  $(x(t_0), y(t_0), t_0)$  i  $(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t), t_0 + \Delta t)$ , te se iz njih lako određuju iznos i smjer brzine potrebni da letjelica precizno stigne na odredište.

$$v = \frac{\sqrt{(x(t_0 + \Delta t) - x(t_0))^2 + (y(t_0 + \Delta t) - y(t_0))^2}}{\Delta t} \quad (2.10)$$

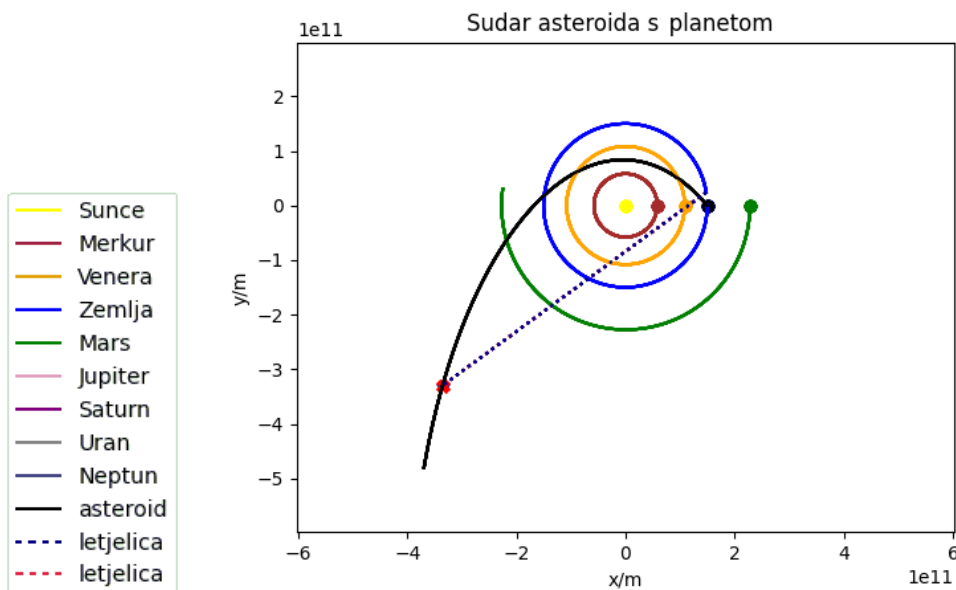
$$\phi = \arctan \left( \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)} \right) \quad (2.11)$$

Pri čemu je  $\Delta t$  dobiven preko odabranih indeksa pozicija i vremenskog koraka korištenog u numeričkoj metodi:

$$\Delta t = (i_{asteroida} - i_{Zemlje})dt \quad (2.12)$$

### 3 Rezultati

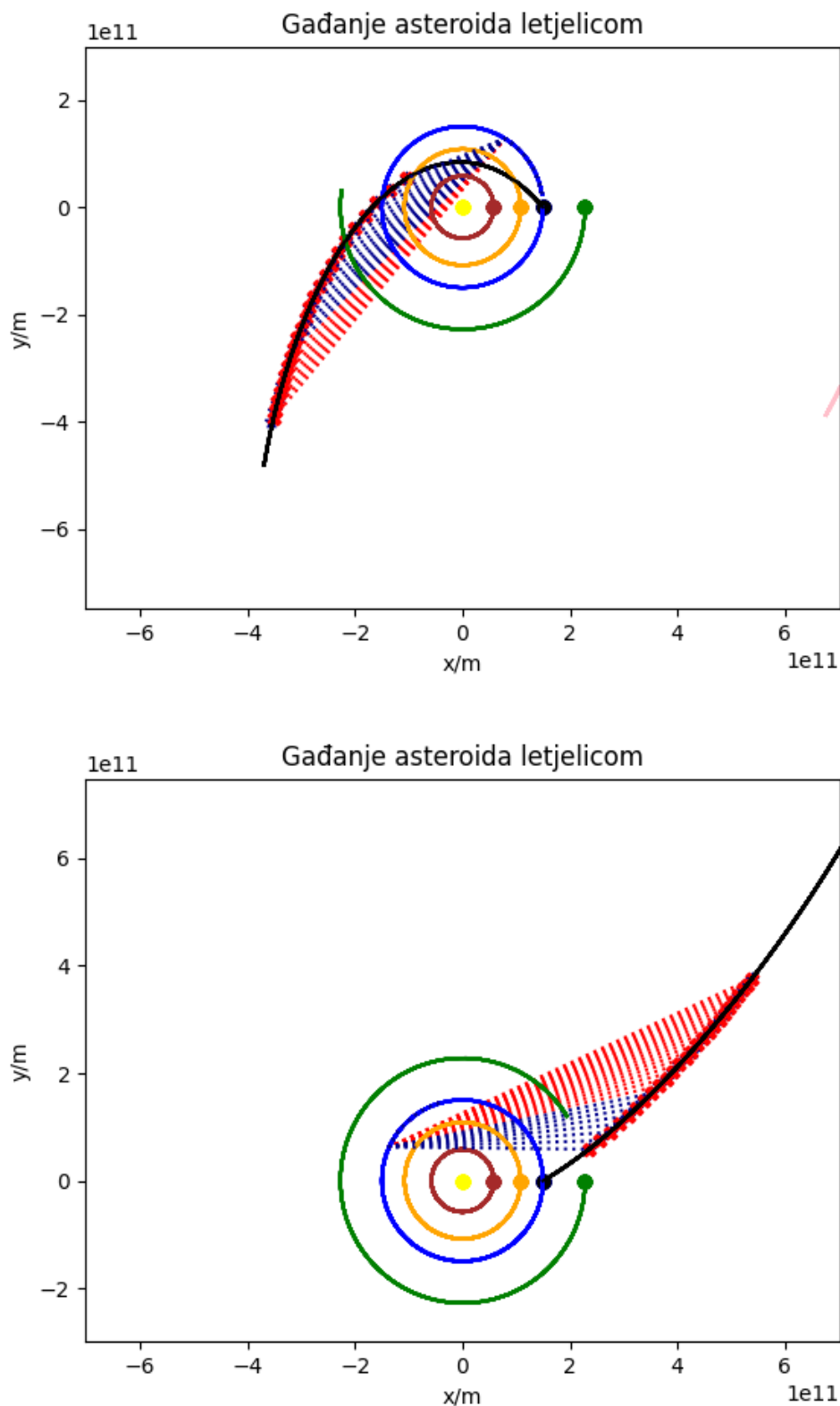
Računalna simulacija uspješno je postavila stabilne putanje svih planeta u Sunčevom sustavu, kao što je vidljivo na slici 7. Također je uspješno postignut pogodak Zemlje asteroidom za većinu proizvoljno postavljenih početnih uvjeta, definiranih u trenutku sudara sa Zemljom. Na poslijetku je ostvarena potpuna točnost gađanja asteroida letjelicom iz proizvoljne točke putanje u proizvoljnu odredišnu točku na putanji asteroida.



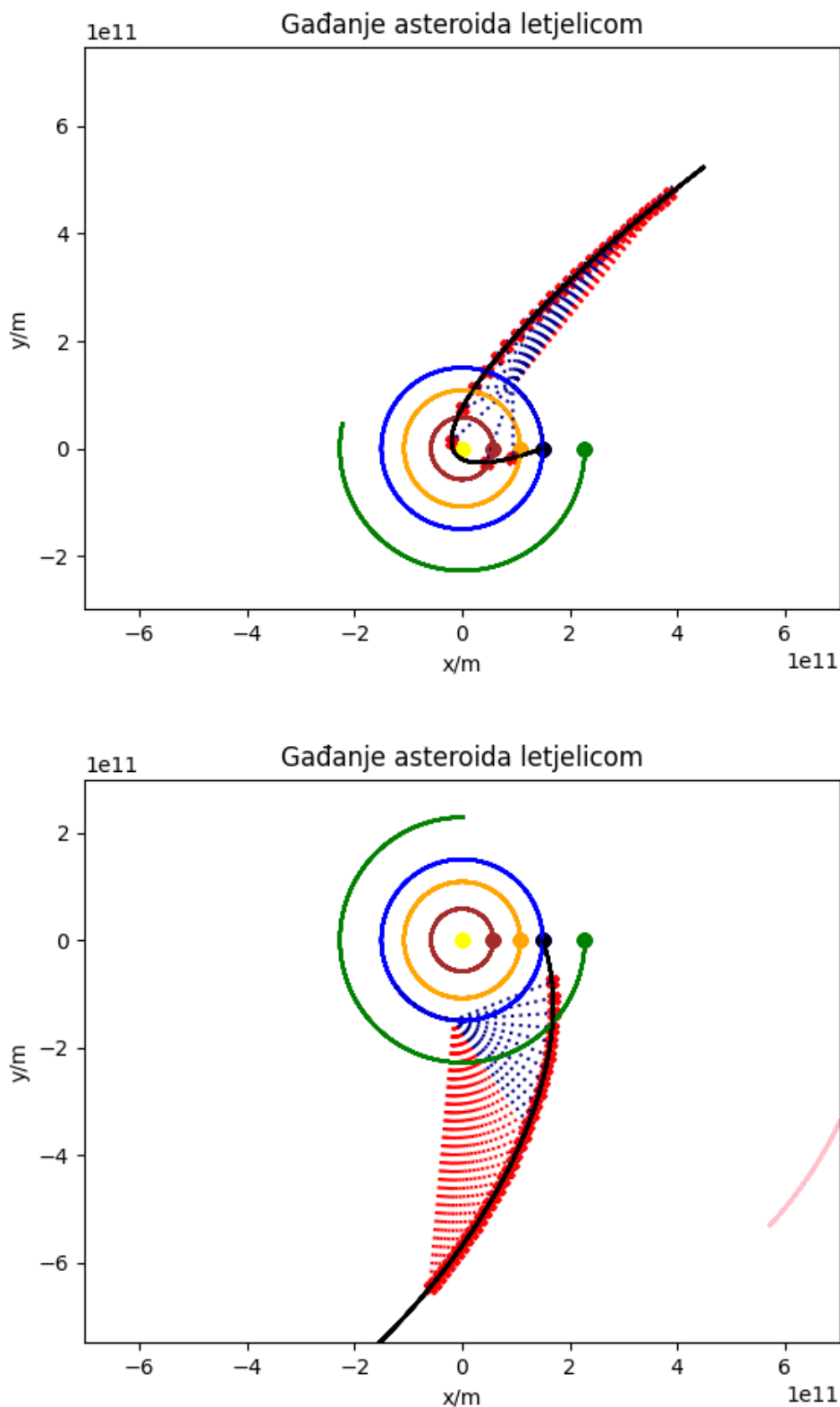
**Slika 7:** Na slici se nalazi primjer pogotka Zemlje asteroidom i letjelice koja je presrela asteroid. Crvena putanja letjelice, koja označava uspješan pokušaj odvratanja asteroida, dok plava pokazuje neuspješan. Putanje planeta od Jupitera nadalje se ne vide zbog skale grafa, iako su oni uključeni u gibanje. Na ovoj skici crvene putanje letjelice nisu vidljive jer su prekrivene plavim putanjama pri mijenjanju parametra mase letjelice (graf 12). Crvena oznaka na putanji asteroida označava točku sudara dvaju tijela.

Nakon postizanja svih funkcionalnosti, razmatraju se dva istraživanja, svako u ista četiri slučaja koja se razlikuju samo po upadnom kutu asteroida. Rezultati su dobiveni za odabranu masu asteroida koja iznosi  $m_A = 5.27 \times 10^8 \text{ kg}$ , udarnu brzinu asteroida  $v_A = 4 \times 10^4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ , te masu letjelice  $m_L = 3.05 \times 10^3 \text{ kg}$ . Parametri su izabrani tako da daju dobre rezultate za sve promatrane slučajeve, dok su u isto vrijeme uvjerljivi. (Može se zamisliti da se asteroid tih parametara zaputio prema Zemlji te da ga letjelicom navedene mase pokušavamo spriječiti.) Prvo istraživanje proučava efikasnost obrane Zemlje letjelicama lansiranim iz iste točke na putanji Zemlje prema različitim točkama putanje asteroida, kao što se vidi na slikama 8 i 9. Drugo istraživanje proučava efikasnost obrane letjelicama lansiranim iz različitih točaka Zemljine putanje, prema istoj točki na putanji asteroida, kao što se vidi na slikama 10 i 11. U oba istraživanja moralo se paziti, budući da je svaka točka putanje određena prostornim i vremenskom koordinatom, da polazna točka letjelice ne premašuje odredišnu točku na putanji asteroida. To jest, nije moguće letjelicom presresti asteroid u točki koju je on već prošao prije trenutka lansiranja letjelice.

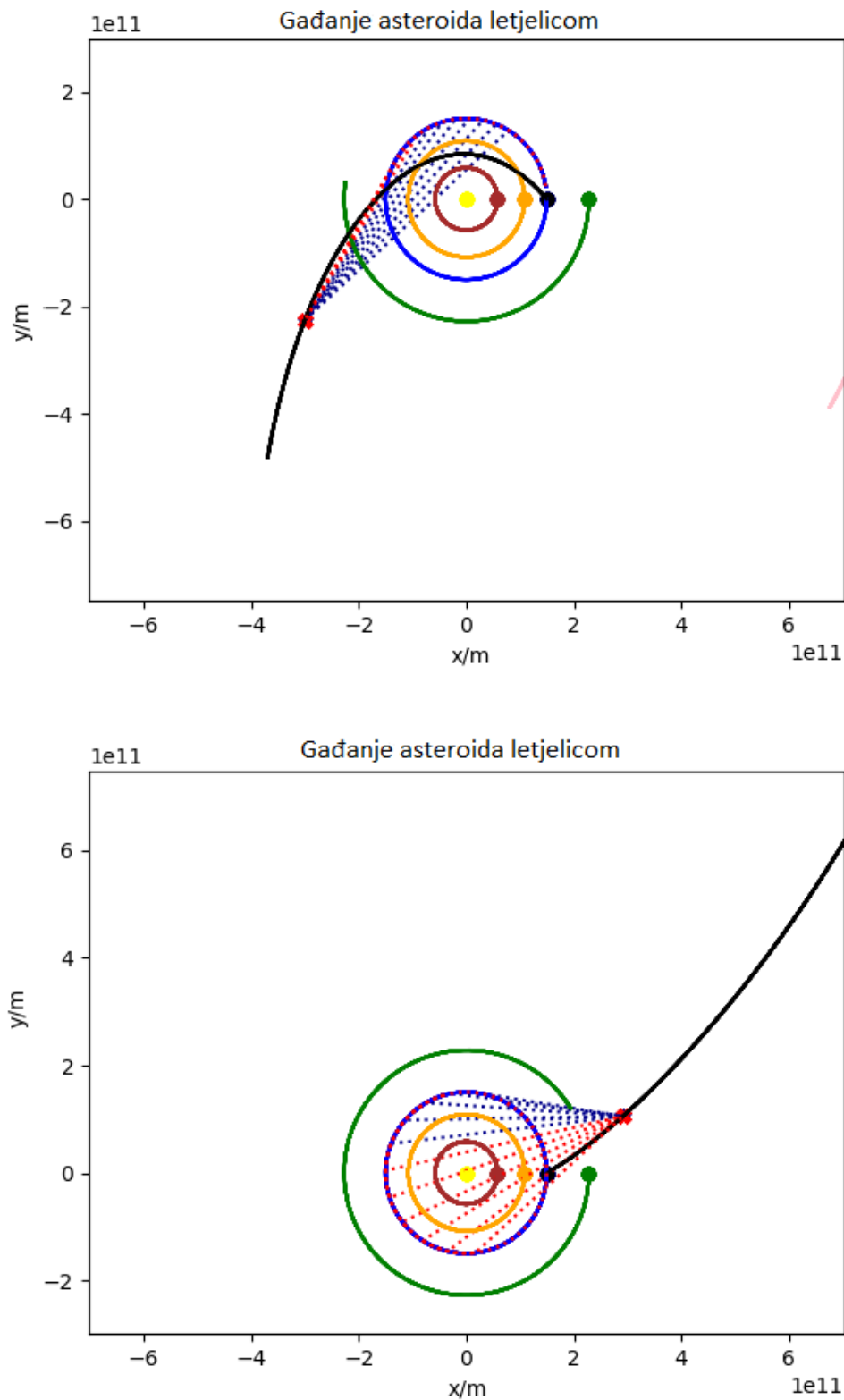




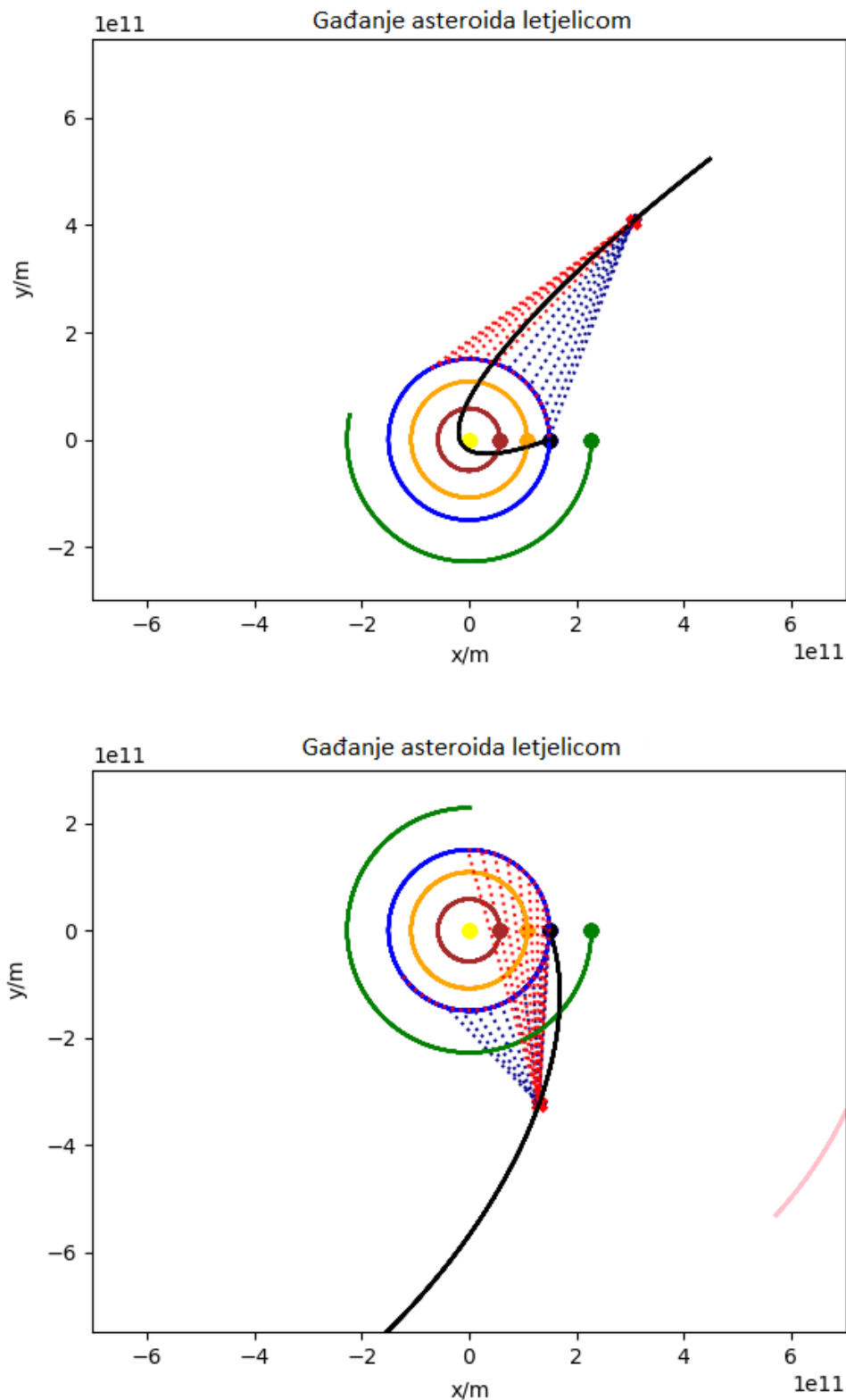
**Slika 8:** Slika se sastoji od istraživanja prva dva slučaja koji se razlikuju po smjeru upada asteroida. Na svakom od primjera letjelica je iz iste točke na Zemljinoj putanji lansirana prema različitim točkama na putanji asteroida. Crvene putanje letjelice označavaju uspješne pokušaje odvrćanja asteroida, dok plave označavaju neuspjele pokušaje u kojima je sudar ostvaren, ali nedovoljno jak.



**Slika 9:** Slika se sastoji od istraživanja druga dva slučaja koji se razlikuju po smjeru upada asteroida. Na svakom od primjera letjelica je iz iste točke na Zemljinoj putanji lansirana prema različitim točkama na putanji asteroida. Crvene putanje letjelice označavaju uspješne pokušaje odvratanja asteroida, dok plave označavaju neuspjele pokušaje u kojima je sudar ostvaren, ali nedovoljno jak.



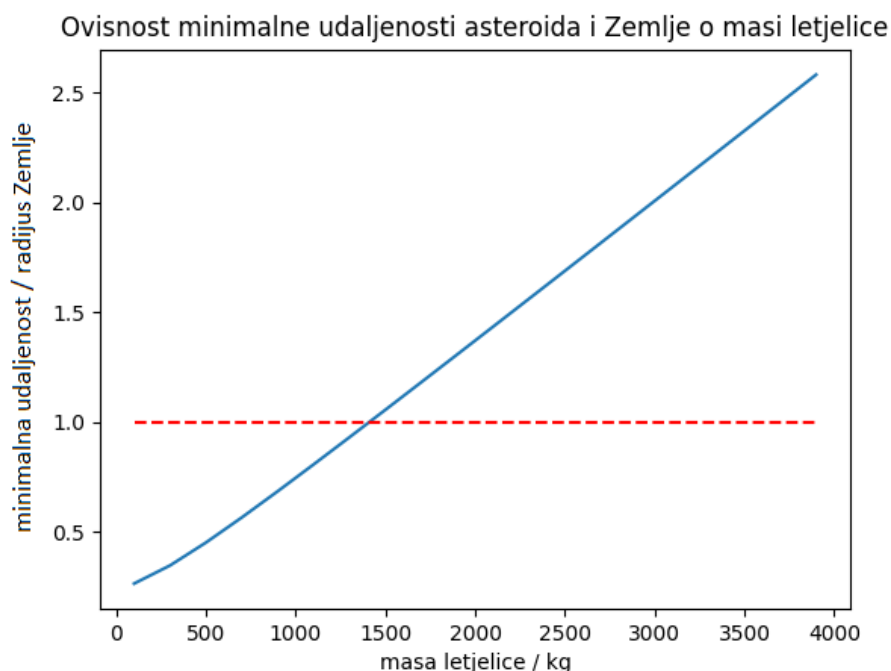
**Slika 10:** Slika se sastoji od prva dva slučaja koji se razlikuju po smjeru upada asteroida. Na svakom od primjera letjelica je lansirana prema istoj točki na putanji asteroida iz različitih točaka Zemljine putanji. Crvene putanje letjelice označavaju uspješne pokušaje odvrćanja asteroida, dok plave označavaju neuspjele pokušaje u kojima je sudar ostvaren, ali nedovoljno jak.



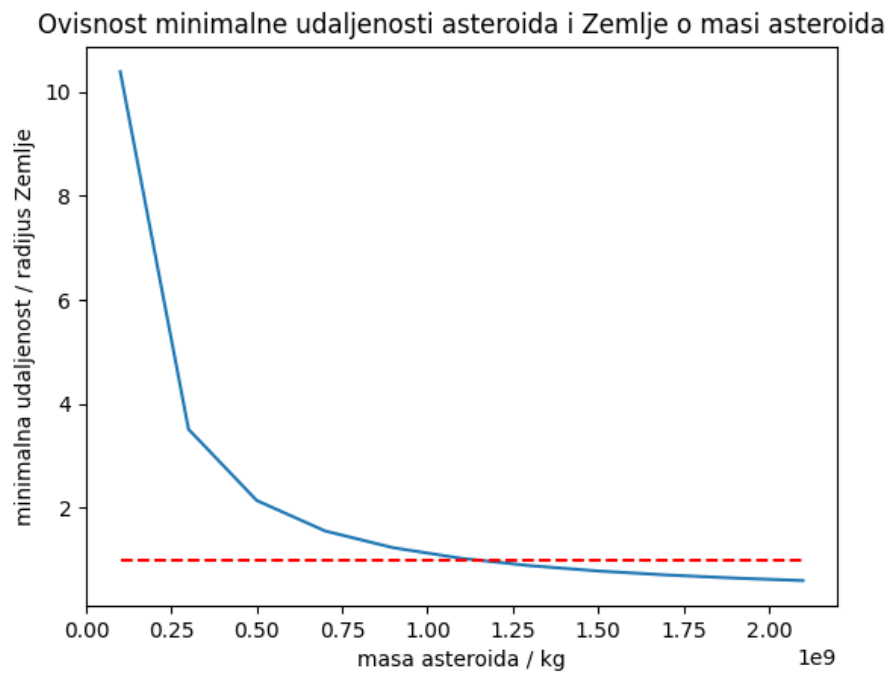
**Slika 11:** Slika se sastoji od druga dva slučaja koji se razlikuju po smjeru upada asteroida. Na svakom od primjera letjelica je lansirana prema istoj točki na putanji asteroida iz različitih točaka Zemljine putanji. Crvene putanje letjelice označavaju uspješne pokušaje odvratanja asteroida, dok plave označavaju neuspjele pokušaje u kojima je sudar ostvaren, ali nedovoljno jak.

Na skicama prvog istraživanja (slike 8 i 9) jasno je vidljivo da je pokušaj odvratanja asteroida sudarom letjelice bio uspješniji što je asteroid prije presretnut. Drugo istraživanje (slike 10 i 11) bilo je nešto teže za demonstrirati, jer je učinak mijenjanja polazne točke letjelice osjetno slabiji. Kako bi se demonstrirao učinak lansiranja rakete sa različitih točaka Zemljine putanje pažljivo je odabrana točka na putanji asteroida koristeći podatke iz prvog istraživanja. Naime, odabrana točka putanje asteroida nalazi se negdje oko granice uspješnih i neuspješnih pokušaja prvog istraživanja te na taj način slabiji utjecaj variranja polazišne točke više dolazi do izražaja. Rezultati su ovdje i nešto manje jasni, ali izgleda da su kasniji pokušaji odvratanja asteroida bili uspješniji.

Također, misija pri definiranim parametrima putanje asteroida nije bila uspješna u svim slučajevima. Veliku ulogu su igrale mase asteroida i letjelice. Na slikama 12 i 13 istražena je ovisnost uspješnosti odvratanja asteroida za različite mase letjelice, odnosno asteroida. Skica slučaja za koji su mjerenja obavljena nalazi se na slici 7. Putanje asteroida nisu bile identične budući da su ih parametri mase asteroida i brzine udara letjelice mijenjali, ali su bile vizualno nerazlučive. Iz grafova se vidi da minimalna udaljenost Zemlje i asteroida linearno raste povećavanjem mase letjelice, dok povećanjem mase asteroida minimalna udaljenost Zemlje i asteroida inverzno pada. Crvena linija označava granicu pogotka (neuspješne obrane), odnosno promašaja (uspješne obrane planeta).



**Slika 12:** Slika prikazuje istraživanje ovisnosti minimalne udaljenosti Zemlje o masi letjelice koja pogađa asteroid za slučaj prikazan na slici 7. Na x-osi nalaze se mase letjelice, a na y-osi se nalaze minimalne udaljenosti Zemlje i asteroida iskazane u radijusima Zemlje. Crvena linija prikazuje graničnu vrijednost sudara Zemlje i asteroida.



**Slika 13:** Slika prikazuje istraživanje ovisnosti minimalne udaljenosti Zemlje o masi asteroida za slučaj prikazan na slici 7. Na x-osi nalaze se mase letjelice, a na y-osi se nalaze minimalne udaljenosti Zemlje i asteroida iskazane u radijusima Zemlje. Crvena linija prikazuje graničnu vrijednost sudara Zemlje i asteroida.

## 4 Rasprava

U prvom istraživanju, kako je ilustrirano na slikama 8 i 9, vidljivo je da su najuspješniji pokušaji oni u kojima letjelica presreće asteroid dok je još daleko od Zemlje. To može imati više razloga. Sigurno veliku ulogu igraju velike brzine letjelice koje su potrebne da bi se asteroid dostigao tako daleko od Zemlje. Na taj način one prenose asteroidu veliku količinu gibanja te mu uspješnije mijenjaju putanju. Također, na tim udaljenostima asteroid ima puno vremena za devijaciju nakon pogotka. Na kraju, moguće je i da ulogu igra činjenica da su brzine tijela koje se nalaze daleko od žarišta elipsi po kojima putuju manje te da im je zato lakše skrenuti putanju. Kod drugog istraživanja, prikazanog na slikama 10 i 11, kasniji pokušaji su vjerojatno bili uspješniji zbog manjeg vremenskog prozora koji je ostavljen letjelicama da dostignu svoj cilj, time uvjetujući veću brzinu. Također, na mnogo skica tijela su pozicionirana tako da se osim smanjivanja vremenskog prozora, produžuje i putanja letjelice prema odredištu, na taj način stavljajući još više pritiska na brzinu. Čini se nezgodnim to što u ovoj simulaciji toliko parametara, pri čemu su brzine letjelice jedan od najznačajnijih, ovisi o samim putanjama tijela. Recimo kod trećeg istraživanja mijenjajući masu, zapravo mijenjamo i samu putanju tijela, iako se nadamo da je utjecaj dovoljno mali da ga možemo zanemariti. Spomenuto je i da je teže bilo namjestiti slučaj drugog istraživanja vrijedan proučavanja, budući da je utjecaj početne pozicije letjelice bio od manjeg značaja. Tomu je vjerojatno razlog relativna sličnost udaljenosti različitih točaka putanje Zemlje iz perspektive asteroida koji dolazi izdaleka.

Preciznost i multivarijabilnost problema najizazovniji su dijelovi računalne simulacije DART misije. Osvrnimo se još jednom na numeričku metodu. Ranije je na slici 6 komentirana razlika u preciznosti dvije korištene metode, Eulerove i Runge Kutta metode. Naime, u simulaciji Sunčevog sustava radi se s ogromnim skalama, tako da dok na slici nešto izgleda kao ista točka, u stvarnosti se pogreška može mjeriti u desecima tisuća radijusa Zemlje što nikako nije dobro ako želimo ostvariti pogodak, odnosno minimalnu udaljenost Zemlje i asteroida ograničiti unutar jednog Zemljinog radijusa. S druge strane moramo u obzir uzimati i vremenski korak  $\Delta t$  koji ne smije biti prevelik, ali ni premali. Ukoliko je korak prevelik, to naravno vodi do većih devijacija putanja, ali i težeg određivanja pogotka. Recimo, ako asteroid u jednom vremenskom koraku proputuje 10 Zemljinih radijusa, a Zemlja 5, lako se može dogoditi da se tijela nesretno promaše i da zbog kvantizirane prirode putanje pogodak ne bude registriran, iako su se putanje presjekle povučemo li pravce između susjednih točkaka. Povuku li se pak i presjeku pravci u kodu, opet ne možemo biti sigurni je li došlo do pogotka budući da gubimo informaciju o parametru vremena. Ukoliko je  $\Delta t$  pak premalen uzrokovat će jako dugo vrijeme izvršavanja koda. To ga čini nepraktičnim za efikasno testiranje multivarijabilnih problema kao što je ovaj.

Kod numeričkih metoda vrijedi prokomentirati još jedno pitanje - kako to da negativna i pozitivna evolucija ne daju iste putanje, budući da su svi korišteni Newtonovi zakoni simetrični na vrijeme? Odgovor na to pitanje vjerojatno je u tome što u različitim smjerovima evolucije

numeričke metode biraju različite točke kao procjenu sljedeće. Metoda će uvijek na temelju zadnje točke koju ima na raspolaganju računati sljedeću, tako da će negativna evolucija za svaki korak birati različitu točku od točke koju za isti korak bira pozitivna.

Pri postavljanju simulacije, kako bi se dobili zadovoljavajući rezultati, mora se uzeti u obzir i uskladiti jako puno parametara. Važnu ulogu igraju brzina i masa asteroida, kut pod kojim on udara Zemlju, udaljenost koju propuće do Zemlje, spomenuti vremenski interval  $\Delta t$ , te parametri letjelice - njena masa i koordinate koje joj definiraju brzinu. Primjerice, zahtjevi često vuku jedni druge - zahtjev velike mase asteroida i male mase letjelice zahtjeva dugačku putanju kako bi obrana bila perspektivnija. Dugačka putanja pak vuče nepreciznost ili predugo vrijeme izvršavanja koda. Naposljetku, kao što je već rečeno, mnogo stvari ovisi i o samim putanjama pa različiti slučajevi neće imati jednak broj koraka jer će različitim brzinama dostizati maksimalne udaljenosti, tijelo koje preblizu proleti Suncu imat će opet preveliku nepreciznost pri gađanju Zemlje itd. Zbog svega toga je teško kontrolirati problem za jednu varijablu, već se često mijenjajući jednu utječe na više njih. Za većinu slučajeva parametri se traže ručno kako bi se dobili lijepi rezultati, što, iako je možda katkad zamorno, može biti korisno za stvarni svijet, gdje se treba naći rješenje za već predodređene parametre. Posebno zanimljiv problem su i brzine letjelice, koje su predodređene izabranim izvorišnim i odredišnim prostorno vremenskim koordinatama pa se u teoriji ne mogu varirati. Naposljetku, valjalo bi voditi računa i o tome jesu li one fizički izvedive. Ali prije toga bi naravno trebalo preraditi model lansiranja letjelica tako da se uključi gravitacija i traže prave odredišne koordinate i pripadajuće brzine.



## 5 Zaključak

Računalna simulacija razvijena u ovom radu daje naslutiti kako bi metoda skretanja asteroida s putanje ka Zemlji putem prijenosa količine gibanja uistinu mogla biti perspektivna. Problem je multivarijabilan i kompleksan te se često trebaju pažljivo namještati parametri kako bi se postigao učinkovit sudar letjelice i asteroida. To se može činiti zamornim za zaključivanje općenitosti o problemu, ali bi zapravo moglo sličnu, profinjeniju simulaciju, činiti vrlo vrijednim alatom za određivanje parametara nužnih za obranu planeta od stvarnog asteroida čiji su nam parametri "zadani". Naravno, prva stvar koju bi u samom kodu trebalo unaprijediti je razvijanje preciznog i fizikalno uvjerljivog načina lansiranja letjelice prema asteroidu. Zatim dalje poboljšati numeričke metode, a i zadati točnije fizikalne podatke o tijelima i Sunčevom sustavu iz stvarnog svijeta. Stvarni svijet, osim novih problema i nepoznanica, ima i jedan skriveni as, a to je već otprije u uvodu spomenuti efekt povećanja količine gibanja, čiji će utjecaj uskoro pobliže proučiti NASA u pravoj DART misiji. Nadajmo se da će rezultati misije biti pozitivni te još više povećati perspektivu uspješnosti ovakvog zadatka. Značajno skretanje asteroida sa njegove prirodne putanje nije lagan zadatak. U ovisnosti o masi asteroida zahtijeva se rana intervencija, precizno mjerenje putanje asteroida, velika preciznost gađanja, snažne numeričke metode, sposobnost planiranja i testiranja te na kraju krajeva i velika inženjerska sposobnost za provesti plan u djelo, odnosno prevesti matematiku u fiziku.

## 6 Literatura

- [1] Asteroid Fast Fact | NASA, URL:  
[https://www.nasa.gov/mission\\_pages/asteroids/overview/fastfacts.html](https://www.nasa.gov/mission_pages/asteroids/overview/fastfacts.html) (11. 9. 2022.).
- [2] About Lunar Impact Monitoring | NASA, URL:  
<https://www.nasa.gov/centers/marshall/news/lunar/overview.html> (12. 9. 2022.).
- [3] Cretaceous-Paleogene extinction event - Wikipedia, URL:  
[https://en.wikipedia.org/wiki/Cretaceous%E2%80%93Paleogene\\_extinction\\_event](https://en.wikipedia.org/wiki/Cretaceous%E2%80%93Paleogene_extinction_event)  
(13.9.2022.).
- [4] Orbits of Potentially Hazardous Asteroids (PHAs), URL: <https://www.jpl.nasa.gov/images/pia17041-orbits-of-potentially-hazardous-asteroids-phas> (11. 9. 2022.).
- [5] Twenty Years of Tracking Near-Earth Objects, URL:  
<https://www.jpl.nasa.gov/news/twenty-years-of-tracking-near-earth-objects> (13.9.2022.).
- [6] DART, NASA's first planetary defense test mission, URL: <https://dart.jhuapl.edu/> (11. 9. 2022.).
- [7] James D. Walker, Sidney Chocron, Daniel D. Durda, Donald J. Grosch, Naor Movshovitz, Derek C. Richardson, Erik Asphaug, *Scale Size Effect in Momentum Enhancement*, Procedia Engineering, Volume 58, Pages 240-250, 2013.
- [8] Newton's Law of Universal Gravitation, URL:  
<https://byjus.com/questions/state-and-explain-newtons-law-of-universal-gravitation/> (13. 9. 2022.).
- [9] Kenneth Meyer, Glen Hall, Dan Offin, *Introduction to Hamiltonian Dynamical Systems and the N-Body Problem*, Springer-Verlag, New York 2009.
- [10] Closed-Form Solution – from Wolfram MathWorld, URL:  
<https://mathworld.wolfram.com/Closed-FormSolution.html> (13.9.2022.).
- [11] Samuel J. Ling, Jeff Sanny, William Moebs, *University Physics Volume 1*, OpenStax, Rice University, 2016.
- [12] Fizika 1 - predavanja, URL:  
[https://www.fer.unizg.hr/\\_download/repository/Fizika\\_1\\_predavanja\\_5.pdf](https://www.fer.unizg.hr/_download/repository/Fizika_1_predavanja_5.pdf) (13. 9. 2022.).
- [13] GitHub - anacavar/DART-simulation <https://github.com/anacavar/DART-simulation>

- [14] Fizika 1 - 3.7 Impuls sile i količina gibanja, URL: [https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/8b109d99-b37e-4aa4-821c-ab1d3c48e3d6/html/24127\\_\\_Impuls\\_sile\\_i\\_kolicina\\_gibanja.html](https://edutorij.e-skole.hr/share/proxy/alfresco-noauth/edutorij/api/proxy-guest/8b109d99-b37e-4aa4-821c-ab1d3c48e3d6/html/24127__Impuls_sile_i_kolicina_gibanja.html) (14. 9. 2022.).
- [15] Euler's Method – from Wolfram MathWorld, URL: <https://mathworld.wolfram.com/EulersMethod.html> (12. 9. 2022.).
- [16] Planetary Fact Sheet, URL: <https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/> (1. 9. 2022.).
- [17] Runge-Kutta Method – from Wolfram MathWorld, URL: <https://mathworld.wolfram.com/Runge-KuttaMethod.html> (12. 9. 2022.).
- [18] Hilber Traum, URL: <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=64366870> (13. 9. 2022.).