Slučajni zatvoreni skupovi i funkcionali kapaciteta

Grašo, Margarita

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

MARGARITA GRAŠO

SLUČAJNI ZATVORENI SKUPOVI I FUNKCIONALI KAPACITETA

DIPLOMSKI RAD

Split, kolovoz 2022.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

SLUČAJNI ZATVORENI SKUPOVI I FUNKCIONALI KAPACITETA

DIPLOMSKI RAD

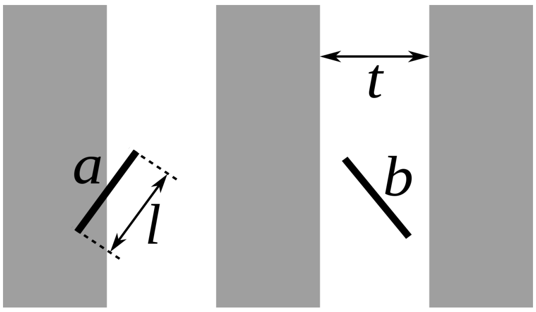
Studentica:
Margarita Grašo

Mentorica:
doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš

Split, kolovoz 2022.

Uvod

Najraniji problem geometrijske vjerojatnosti koji je u 18. stoljeću postavio francuski matematičar Georges-Louis Leclerc, Comte de Buffon poznata je Buffonova igla. Problem Buffonove igle glasi: kolika je vjerojatnost da igla duljine l slučajno ispuštena na prugastu površinu (gdje su pruge širine t) siječe dvije različite pruge, vidi Sliku 1.



Slika 1: Problem Buffonove igle.

Pojam slučajnog skupa javlja se već u samim temeljima matematičke teorije vjerojatnosti. Naime, A. N. Kolmogorov je 1933. godine napisao:

Neka je G izmjerivo područje ravnine čiji je oblik slučajan, tj. pridružimo svakom elementarnom događaju ξ određeno izmjerivo područje ravnine G. Označimo s J površinu područja G, a s $\mathbb{P}(x,y)$ vjerojatnost da točka (x,y) pripada području G. Tada vrijedi :

$$\mathbb{E}(J) = \int\int \mathbb{P}(x,y)dxdy.$$

Može se primijetiti da je ovo iskaz Robbinsova teorema i da je $\mathbb{P}(x, y)$ funkcija pokrivenosti slučajnog skupa G.

Začeci matematičke teorije slučajnih skupova mogu se pronaći kod [9]. U toj je knjizi G. Matheron formulirao točnu definiciju slučajnog zatvorenog skupa i razvio relevantne tehnike koje su obogatile konveksnu geometriju i postavile osnove matematičke morfologije. Općenito govoreći, doprinos konveksnoj geometriji odnosio se na svojstva funkcionala slučajnih skupova, dok se morfološki dio koncentrirao na operacije sa samim skupovima.

U ovom ćemo se radu baviti važnim konceptom u teoriji vjerojatnosti - funkcionalom kapaciteta. Naime, funkcional kapaciteta određuje distribuciju slučajnog zatvorenog skupa u lokalno kompaktnom Hausdorffovu separabilnom prostoru te je povezan s pozitivno definitnim funkcijama na polugrupama i rešetkama. Za razliku od vjerojatnosnih mjera, funkcional kapaciteta nije aditivan. Neaditivne mjere su općenito dobro istražene i primjenjuju se u teoriji igara gdje se koriste za određivanje dobiti koalicije igrača. Funkcional kapaciteta može se koristiti za karakterizaciju slabe konvergencije slučajnih skupova i nekih svojstava njihovih distribucija. To se posebno odnosi na unije slučajnih zatvorenih skupova gdje je svojstvo pravilnog variranja funkcionala kapaciteta od primarne važnosti. Moguće je razmotriti slučajne kapacitete koji objedinjuju koncepte slučajnog zatvorenog skupa i slučajne odozgo poluneprekidne funkcije. Međutim, funkcional kapaciteta ne pomaže u rješavanju niza drugih pitanja, na primjer u definiranju očekivanja slučajnog zatvorenog skupa.

U prvom poglavlju rada navode se neki teorijski rezultati koji će se koristiti u glavnom dijelu koji se bavi slučajnim skupovima. U središnjem dijelu rada najprije ćemo definirati pojam slučajnih zatvorenih skupova. Za prostor $\mathbb{E}$, kojemu pripadaju slučajni skupovi, vrlo se često pretpostavlja da je lokalno kompaktan Hausdorff s prebrojivom bazom, no kako je Euklidski prostor $\mathbb{R}^d$ osnovni primjer takvog prostora, u ovom ćemo se radu ograničiti na taj posebni slučaj. Dokazat ćemo Choquetov teorem o postojanju distribucija slučajnih skupova te opisati koncept funkcionala kapaciteta i njegove povezanosti sa svojstvima slučajnih skupova. Većina teorijskih rezultata koji su prikazani u ovom radu preuzeta je od [13].

Slučajni skupovi igraju ključnu ulogu u modeliranju brojnih procesa u biologiji, medicini i znanosti o materijalima. Primjeri nekih takvih su dinamika stanica u organizmima [16, 7], prisutnost različitih biljaka u ekosustavima [2, 15] ili čestica u materijalima [6, 18] i drugi. Ponekad ti procesi budu prekompleksni pa ih je teško opisati nekim jednostavnim modelom, stoga može biti teško klasificirati ih ili usporediti njihove realizacije. Motivirani prethodnim činjenicama, u posljednjem poglavlju iskazat ćemo rezultate provedene simulacijske studije čiji je cilj ispitati koliko dobro funkcional kapaciteta opisuje pojedinu realizaciju slučajnog skupa te mogu li se realizacije različitih modela razlučiti pomoću neke mjere udaljenosti bazirane na funkcionalima kapaciteta.

Sadržaj

Poglavlje 1

Teorijska pozadina

Kako bismo bolje razumjeli terminologiju korištenu u ovom radu, kratko ćemo se prisjetiti osnovnih definicija i tvrdnji iz srodnih područja koje će nam biti važne u nastavku.

1.1 Topološki prostori

Definicija 1.1 ***Topologija*** *na skupu* Ω *je familija* $\mathcal{T}$ *podskupova od* Ω *koja ima sljedeća svojstva:*

- $\mathcal{T}$ *sadrži* $\emptyset$ *i* Ω.
- $\mathcal{T}$ *je zatvorena na proizvoljne unije.*
- $\mathcal{T}$ *je zatvorena na konačne presjeke.*

Skup Ω *na kojem je definirana toplogija* $\mathcal{T}$ *naziva se* ***topološki prostor****.*

Ako je Ω topološki prostor s topologijom $\mathcal{T}$, onda za podskup U od Ω kažemo da je **otvoreni skup** u Ω ako pripada familiji $\mathcal{T}$. Kažemo da je podskup A topološkog prostora Ω **zatvoreni skup** u Ω ako je skup A^C otvoren.

Kažemo da je familija $\mathcal{A}$ podskupova prostora Ω **pokrivač** od Ω ako je unija elemenata iz $\mathcal{A}$ jednaka Ω. Ako su elementi familije $\mathcal{A}$ otvoreni skupovi u Ω, onda kažemo da je $\mathcal{A}$ **otvoreni pokrivač** od Ω.

Definicija 1.2 *Topološki prostor Ω je **kompaktan** ako svaka familija otvorenih skupova koja pokriva Ω sadrži konačnu potfamiliju koja također pokriva Ω. Kaže se da svaki otvoren pokrivač sadrži konačan potpokrivač.*

Definicija 1.3 *Najmanji zatvoreni skup koji sadržava zadani skup A u topološkome prostoru Ω naziva se **zatvorenje** skupa A i označava s $cl(A)$.*

Definicija 1.4 ***Interior** od A, u oznaci $int(A)$, najveći je otvoren skup sadržan u A.*

Definicija 1.5 *Kažemo da je topološki prostor Ω **lokalno kompaktan u točki** $x \in \Omega$ ako postoji kompaktan skup $C \subseteq \Omega$ koji sadrži neku otvorenu okolinu od x. Ako je Ω lokalno kompaktan u svakoj točki, kažemo da je Ω **lokalno kompaktan** topološki prostor.*

Definicija 1.6 *Kažemo da je topološki prostor **Hausdorffov** ako za svake dvije različite točke postoje okoline tih točaka koje su disjunktne.*

Primijetimo da je $\mathbb{R}^d$ lokalno kompaktan Hausdorffov prostor jer je svaki $x \in \mathbb{R}^d$ sadržan u nekom otvorenom skupu $\langle a_1, b_1\rangle \times \langle a_2, b_2\rangle \times ... \times \langle a_d, b_d\rangle$ koji je podskup kompaktnog skupa $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times ... \times [a_d, b_d] \subseteq \mathbb{R}^d$.

Definicija 1.7 *Za podskup M topološkog prostora Ω kažemo da je **relativno kompaktan** ako mu je zatvorenje $cl(M)$ kompaktan skup.*

Definicija 1.8 *Neka je Ω skup i $d : \Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ realna funkcija koja ima sljedeća svojstva:*

(M1) Za svaki $x, y \in \Omega$ *je* $d(x, y) \geq 0$,

(M2) Za svaki $x, y \in \Omega$ $d(x, y) = 0$ *ako i samo ako je* $x = y$,

(M3) Za svaki $x, y \in \Omega$ *je* $d(x, y) = d(y, x)$,

(M4) Za svaki $x, y, z \in \Omega$ *vrijedi* $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

Funkcija d *naziva se* ***metrikom*** *(udaljenoću) na skupu* Ω, *a par* (Ω, d) *naziva se* ***metričkim prostorom***.

Definirajmo sada topologiju na metričkom prostoru.

Definicija 1.9 *Neka je* (Ω, d) *metrički prostor,* $x_0 \in \Omega$ *njegova točka, a* $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, *realan broj. Pod* ***otvorenom kuglom*** *u prostoru* Ω *sa središtem u* x_0 *i radijusom* r *podrazumjevamo skup* $B(x_0, r) = \{x \in \Omega : d(x, x_0) < r\}$.

Neka je $U \subseteq \Omega$. *Kažemo da je* U ***otvoren skup*** *u prostoru* Ω *ako se može prikazati kao unija otvorenih kugala iz tog prostora.*

Relativno kompaktan skup u metričkom prostoru možemo karakterizirati na sljedeći način.

Teorem 1.10 *Neka je* M *podskup metričkog prostora* Ω. *Skup* M *je relativno kompaktan ako i samo ako svaki niz u* M *ima konvergentan podniz, tj.*

$$(\forall (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M)(\exists (x_{n_k k\in\mathbb{N}} \subseteq (x_n)_{n\in\mathbb{N}}))x_{n_k} \overset{k\to\infty}{\to} x_0, x_0 \in \Omega.$$

Ako je pri tome $x_0 \in M$, *onda je* M *kompaktan skup.*

Prisjetimo se sada definicije baze i podbaze topologije.

Definicija 1.11 *Neka je* $\mathcal{T}$ *topologija na* Ω *i neka je* $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{T}$ *neka podmnožina od* $\mathcal{T}$. *Kažemo da je* $\mathcal{B}$ ***baza*** *topologije* $\mathcal{T}$ *ako se svaki otvoreni skup* $U \in \mathcal{T}$ *može prikazati kako unija neke familije elemenata iz* $\mathcal{B}$.

Definicija 1.12 *Neka je $\mathcal{T}$ topologija na skupu Ω i $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{T}$ podmnožina od $\mathcal{T}$. Kažemo da je $\mathcal{P}$ **podbaza** topologije $\mathcal{T}$ ako je množina $\mathcal{B}$ svih konačnih presjeka elemenata iz $\mathcal{P}$ baza za $\mathcal{T}$.*

Kardinalni broj $\alpha = \min\{card\mathcal{B} : \mathcal{B} \text{ je baza topologije } \mathcal{T}\}$ naziva se **težina** topološkog prostora Ω i piše se $w(\Omega, \mathcal{T}) = \alpha$.

Definicija 1.13 *Za topološki prostor kažemo da je **2-prebrojiv** ili da **zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti** ako je $w(\Omega, \mathcal{T}) \leq \aleph_0$.*

Definicija 1.14 *Neka su $\mathcal{T}_1$ i $\mathcal{T}_2$ topologije na Ω. Kažemo da je $\mathcal{T}_1$ **grublja** od $\mathcal{T}_2$ (ili da je $\mathcal{T}_2$ **finija** od $\mathcal{T}_1$) i pišemo $\mathcal{T}_1 \leq \mathcal{T}_2$ ako je $\mathcal{T}_1 \subseteq \mathcal{T}_2$.*

Definicije i ostali rezultati iz ovog odjeljka preuzeti su od [17], [11], [5] i [12].

1.2 Teorija mjere

Prisjetimo se definicije algebre i σ-algebre.

Definicija 1.15 *Familiju Σ podskupova skupa Ω nazivamo **σ-algebra** skupova na skupu Ω ako ona ima sljedeća svojstva:*

1. $\Omega \in \Sigma$
2. $A \in \Sigma \Rightarrow A^C \in \Sigma$
3. *Unija prebrojivo mnogo elemenata iz Σ je element iz Σ, tj. za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ vrijedi $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$.*

*Za uređeni par (Ω, Σ) kažemo da je **izmjerivi prostor**. Svaki element od Σ zove se **izmjerivi skup**.*

Ako se u prethodnoj definiciji umjesto uvjeta 3. zahtijeva da Σ bude zatvorena na formiranje konačnih unija, dobiva se definicija **algebre** skupova na skupu Ω.

Ekavivalentno je umjesto gornjih uvjeta za σ-algebru zahtijevati sljedeća svojstva:

1.' $\emptyset \in \Sigma$ umjesto 1.

3.' Presjek prebrojivo mnogo elemenata iz Σ je element iz Σ, tj. za svaki niz $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz Σ vrijedi $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \Sigma$ umjesto 3.

Napomena 1.16 *Kažemo da je familija skupova $\mathcal{D}$ zatvorena na konačne unije (presjeke) ako za sve $M_1, M_2 \in \mathcal{D}$ vrijedi $M_1 \cup M_2 \in \mathcal{D}$ ($M_1 \cap M_2 \in \mathcal{D}$).*

Definicija 1.17 *Neka je Ω skup. Familiju podskupova od Ω koja je zatvorena na konačne presjeke zovemo* π***-sistem*** *na skupu Ω.*

Definirajmo sada prostor mjere.

Definicija 1.18 *Neka je Σ σ-algebra na skupu Ω. Mjera na Σ svako je preslikavanje $\mu : \Sigma \to \bar{\mathbb{R}}$ s ovim svojstvima:*

1. *(nenegativnost) $\mu(A) \geq 0$ za svaki $A \in \Sigma$,*

2. *$\mu(\emptyset) = 0$,*

3. *(σ-aditivnost ili prebrojiva aditivnost) Za svaki niz $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ disjunktnih skupova iz Σ vrijedi $\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.*

Za $\mu(A)$ kaže se da je ***mjera skupa*** *A. Trojka (Ω, Σ, μ) zove se* ***prostor mjere****.*

Propozicija 1.19 *Neka je $\mathcal{F}$ bilo koja familija podskupova skupa Ω. Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{\Sigma : \Sigma\; je\; \sigma - algebra,\; \mathcal{F} \subseteq \Sigma\}$$

*najmanja σ-algebra koja sadrži familiju $\mathcal{F}$. Za $\sigma(\mathcal{F})$ kažemo da je **σ-algebra generirana s $\mathcal{F}$**.*

Definicija 1.20 *σ-algebru generiranu topologijom na prostoru Ω nazivamo **Borelova σ-algebra** i označavamo s $\mathcal{B}(\Omega)$.*

Teorem 1.21 *Neka je σ-algebra Σ na skupu Ω generirana π-sistemom $\mathcal{E}$, tj. $\Sigma = \sigma(\mathcal{E})$. Nadalje, neka su $\mu, \nu : \Sigma \to [0, \infty]$ dvije mjere na σ-algebri Σ takve da je*

$$\mu(E) = \nu(E), \ \forall E \in \mathcal{E}.$$

Ako je ispunjen jedan od sljedeća dva uvjeta:

- $\mu(\Omega) = \nu(\Omega) < \infty$, *ili*
- *postoji rastući niz $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ skupova iz $\mathcal{E}$ sa svojstvom $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ i $\mu(E_n)$, $\nu(E_n) < \infty$, $\forall n \in \mathbb{N}$*

onda je $\mu = \nu$.

Definicija 1.22 *Neka je $(\Omega, \mathcal{U})$ Hausdorffov topološki prostor, a (Ω, Σ, μ) prostor mjere takav da je $\mathcal{B}(\Omega) \subseteq \Sigma$. Za mjeru μ kažemo da je regularna ili **Radonova mjera** ako vrijedi:*

(i) (regularnost izvana) za svaki skup $A \in \Sigma$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subseteq U, U otvoren\},$$

(ii) (regularnost iznutra) za svaki otvoren skup U

$$\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \subseteq U, K kompaktan\},$$

(iii) (konačnost na kompaktima) $\mu(K) < \infty$ za svaki kompaktan skup $K \subseteq \Omega$.

Rezultati iz ovog odjeljka preuzeti su iz [8].

1.3 Vjerojatnosti prostori i slučajni elementi

Definicija 1.23 *Neka je* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *prostor mjere. Ako je* $\mathbb{P}(A) = 1$*, kaže se da je* $\mathbb{P}$ ***vjerojatnosna mjera*** *ili* ***vjerojatnost****, a* Σ *zovemo* σ*-algebra događaja.*

Prostor mjere $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$, pri čemu je $\mathbb{P}$ vjerojatnosna mjera, nazivamo **vjerojatnosni prostor**.

Definicija 1.24 *Neka je* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Funkcija* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *je* ***slučajna varijabla*** *na* Ω *ako je* $X^{-1}(B) \in \Sigma$ *za svaki* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$*, tj.* $X^{-1}(\mathcal{B}(\mathbb{R})) \subseteq \Sigma$*.*

Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_X$ inducirana slučajnom varijablom X, tj.

$$\mathbb{P}_X(B) = \mathbb{P}(X \in B),\ B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

još se naziva **distribucija** ili zakon razdiobe slučajne varijable X.

Definicija 1.25 *Neka su* $(X, \mathcal{A})$ *i* $(Y, \mathcal{B})$ *izmjerivi prostori,* $A \subseteq X$ *skup i* $f : A \to Y$ *funkcija. Funkcija* f *je izmjeriva u paru* σ*-algebri* $\mathcal{A}$ *i* $\mathcal{B}$ *ili kraće* $\mathcal{A} - \mathcal{B}$ ***izmjeriva*** *ako je* $f^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ *za svaki* $B \in \mathcal{B}$*.*

Podsjetimo se definicije i osnovnih svojstava funkcije distribucije:

Definicija 1.26 *Neka je* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i neka je* X *slučajna varijabla na njemu. Funkciju* $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *koja realnom broju* x *pridružuje vjerojatnost da realizacija slučajne varijable bude manja ili jednaka tom broju, tj. funkciju definiranu s*

$$F_X(x) = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \le x\} = \mathbb{P}\{X \le x\} = \mathbb{P}\{X \in \langle -\infty, x]\} \qquad (1.1)$$

zovemo ***funkcija distribucije*** *slučajne varijable* X*.*

Teorem 1.27 *Neka je* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $X : \Omega \to \mathbb{R}$ *slučajna varijabla, a* $F_X : \mathbb{R} \to [0, 1]$ *njezina funkcija distribucije. Tada vrijedi:*

1. *Funkcija distribucije slučajne varijable* X *monotono je rastuća funkcija, tj. za svaki* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ *takve da je* $x_1 \leq x_2$ *slijedi* $F_X(x_1) \leq F_X(x_2)$.

2. $\lim_{n \to -\infty} F_X(x) = F_X(-\infty) = 0$

3. $\lim_{n \to +\infty} F_X(x) = F_X(+\infty) = 1$

4. *Funkcija distribucije neprekidna je zdesna, tj.*

$$\lim_{h_n \to 0^+} F_X(x + h_n) = F_X(x)$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$.

Teorem 1.28 *Borelova* σ*-algebra* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *generirana je* π*-sistemom* $\{\langle -\infty, b] : b \in \mathbb{R}\}$.

S obzirom da vrijedi (1.1) po prethodnom teoremu i Teoremu 1.21 slijedi da funkcija distribucije jednoznačno određuje distribuciju slučajne varijable.

Definirajmo sada poopćenje pojma slučajne varijable.

Definicija 1.29 *Neka je* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $(E, \mathcal{E})$ *izmjerivi prostor.* ***Slučajni element*** *s vrijednostima u* E *je funkcija* $X : \Omega \to E$ *koja je* $(\Sigma, \mathcal{E})$*-izmjeriva.*

Vjerojatnosna mjera $\mathbb{P}_X$ inducirana slučajnim elementom X, tj.

$$\mathbb{P}_X(E) = \mathbb{P}(X \in E),\ E \in \mathcal{E}$$

naziva se **distribucija** ili zakon razdiobe slučajnog elementa X.

Prisjetimo se što znači oznaka (g.s.).

Definicija 1.30 *Kažemo da vrijedi* $X \in E$ *(g.s.) ako je* $\mathbb{P}\{X \in E\} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\}) = 1$.

Rezultati iz ovog odjeljka preuzeti su od [8] i [20].

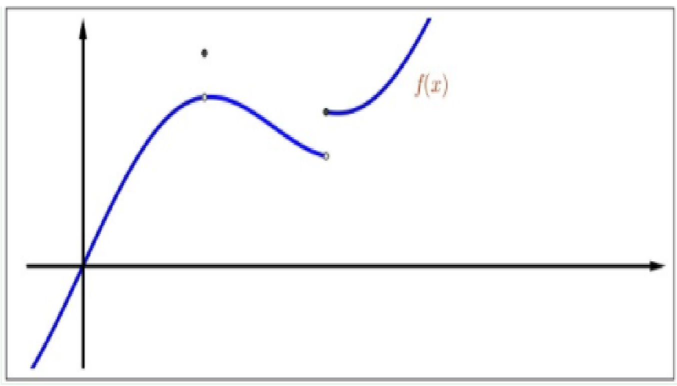
1.4 Poluneprekidnost

Definicija 1.31 *Neka je $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ i $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Kažemo da je f **odozgo poluneprekidna u točki** x_0 ako za svaki $\epsilon > 0$ postoji $\delta > 0$ takvi da je*

$$f(x) < f(x_0) + \epsilon \quad \text{za svaki} \quad x \in B(x_0, \delta)$$

*Kažemo da je f **odozgo poluneprekidna** ako je odozgo poluneprekidna u svakoj točki domene.*

Da bismo bolje doživjeli pojam odozgo poluneprekidnosti, pogledajmo primjer na Slici 1.1.



Slika 1.1: Primjer odozgo poluneprekidne funkcije.

Preuzeto od [10], [13] te [22].

1.5 Abelove polugrupe i polukarakteri

Definicija 1.32 ***Binarna operacija** na skupu G je preslikavanje s kartezijevog umnoška $G \times G$ u skup G.*

Za binarnu operaciju kažemo da je **asocijativna** ako vrijedi $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ za sve $a, b, c \in G$.

Ako je $a \cdot b = b \cdot a$ za sve $a, b \in G$, onda kažemo da je binarna operacija **komutativna**.

Definicija 1.33 ***Abelova polugrupa*** *je algebarska struktura koju definiramo kao neprazan skup G s asocijativnom i komutativnom binarnom operacijom.*

Definicija 1.34 *Neka je S proizvoljna Abelova polugrupa, tj. S je skup zajedno s komutativnom i asocijativnom binarnom operacijom koju zovemo zbrajanje i označavamo s $+$. Pretpostavljamo da postoji neutralni element koji označavamo s 0.* ***Polukarakter*** *na S je funkcija $\chi : S \to [-1, 1]$ za koju vrijedi $\chi(0) = 1$ i $\chi(s + t) = \chi(s)\chi(t)$ za svaki $s, t \in S$.*

Skup svih polukaraktera na S, u oznaci $\hat{S}$, sam je po sebi Abelova polugrupa s obzirom na točkovno množenje s neutralnim elementom polukarakterom identički jednakim 1.

Definicija 1.35 *Za funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ kažemo da je* ***pozitivno definitna****, u oznaci $f \in P(S)$, ako je f omeđena i matrica $||f(s_i + s_j)||_{i,j=1,\dots,n}$ je pozitivno semidefinitna za svaki $n \geq 1$ i svaku n-torku $s_1, ..., s_n \in S$.*

Za funkciju $f : S \to \mathbb{R}$ uvodimo pojam uzastopne razlike na sljedeći način:

$$\Delta_{s_1} f(s) = f(s) - f(s + s_1)$$

$$\Delta_{s_n \dots s_1} f(s) = \Delta_{s_{n-1} \dots s_1} f(s) - \Delta_{s_{n-1} \dots s_1} f(s + s_n), n \geq 2$$

gdje su $s_1, ..., s_n, s \in S$.

Definicija 1.36 *Kažemo da je funkcija $f : S \to \mathbb{R}_+$* ***potpuno monotona****, u oznaci $f \in M(S)$, ako je $\Delta_{s_n \dots s_1} f(s) \geq 0$ za svaki $n \geq 1$ i $s_1, ..., s_n, s \in S$.*

Definicija 1.37 *Kažemo da je skup S* ***ekstremni podskup*** *skupa K ako za svaki $x, y \in K$ za koje je $(1-t)x + ty \in S$ za $0 < t < 1$ nužno slijedi da su $x, y \in S$.*

Definicija 1.38 ***Konus*** *u vektorskom prostoru V je skup $\mathbb{C} \subseteq V$ koji je zatvoren na zbrajanje i skalarno množenje.*

Iskažimo neke teoreme koji će nam biti potebni.

Teorem 1.39 *Skup M(S) svih potpuno monotonih funkcija ekstremni je podkonus familije P(S) pozitivno definitnih funkcija na S.*

Teorem 1.40 *Neka je S idempotentna polugrupa. Za $f \in P(S)$ postoji jedinstvena Radonova mjera μ na polukaratkterima $\hat{S}$ takva da je*

$$f(s) = \mu(\{\chi \in \hat{S} : \chi(s) = 1\}).$$

Rezultati iz ovog odjeljka preuzeti su od [1].

Poglavlje 2

Slučajni skupovi

2.1 Definicija slučajnog skupa

Intuitivno, slučajni je skup objekt čije su vrijednosti skupovi nekog topološkog prostora $\mathbb{E}$. Općenito zatijevamo da prostor $\mathbb{E}$ bude lokalno kompaktan Hausdorffov topološki prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, no, kako je $\mathbb{R}^d$ jedan takav, radi jednostavnosti koristit ćemo njega. Kako ne bismo promatrali familiju svih skupova topološkog prostora $\mathbb{R}^d$, ograničit ćemo se na familiju zatvorenih skupova koju ćemo označavati s $\mathcal{F}$. Familiju kompaktnih skupova označavat ćemo s $\mathcal{K}$, a standardnu topologiju na $\mathbb{R}^d$ s $\mathcal{G}$.

Prilikom definiranja slučajnih elemenata važno je utvrditi koje će nam informacije o promatranim događajima biti dostupne u okviru izmjerivog prostora (Ω, Σ) na kojem je definiran taj slučajni element. Željeli bismo osigurati da svi važni funkcionali budu slučajne varijable, ali da zahtjevi za izmjerivost ne budu prestrogi da bismo uključili što je više moguće slučajnih elemenata. Sljedeća definicija uvodi fleksibilan i koristan koncept slučajnog zatvorenog skupa.

Definicija 2.1 *Neka je* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Preslikavanje* $\boldsymbol{X} : \Omega \to \mathcal{F}$ *nazivamo* ***slučajni zatvoreni skup*** *ako za svaki kompaktan skup* K *u* $\mathbb{R}^d$ *vrijedi*

$$\{\omega \in \Omega : \boldsymbol{X}(\omega) \cap K \neq \emptyset\} \in \Sigma \tag{2.1}$$

.

Uvjet (2.1) intuitivno znači da promatranjem slučajnog zatvorenog skupa **X** uvijek možemo reći siječe li on zadani kompaktni skup K.

Za svaki $A \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}_A = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A \neq \emptyset\}$$

označava familiju zatvorenih skupova koji imaju neprazan presjek s A, a

$$\mathcal{F}^A = \{F \in \mathcal{F} : F \cap A = \emptyset\}$$

familiju zatvorenih skupova koji ne sijeku A. **Fellova topologija** na $\mathcal{F}$ topologija je generirana skupovima $\mathcal{F}_G$ za sve $G \in \mathcal{G}$ i $\mathcal{F}^K$ za sve $K \in \mathcal{K}$. σ-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ nad $\mathcal{F}$ generirana skupovima $\mathcal{F}_K$ za svaki $K \in \mathcal{K}$ naziva se **Effrosova σ-algebra**. Effrosova σ-algebra sadrži $\mathcal{F}^K$ za svaki $K \in \mathcal{K}$ i $\mathcal{F}_G$ za svaki $G \in \mathcal{G}$ jer svaki $\mathcal{F}_G$ možemo prikazati kao

$$\mathcal{F}_G = \bigcap_n \mathcal{F}_{K_n}$$

gdje je $\{K_n, n \geq 1\}$ niz kompaktnih skupova za koji vrijedi $K_n \uparrow G$. Iz prethodnog možemo zaključiti kako se Borelova σ-algebra generirana Fellovom topologijom na $\mathcal{F}$ poklapa s Effrosovom σ-algebrom pa definiciju slučajnog zatvorenog skupa možemo preformulirati na sljedeći način:

Definicija 2.2 *Neka je* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor i* $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ *Borelova* σ*-algebra generirana Fellovom topologijom na* $\mathcal{F}$*.* ***Slučajni zatvoreni skup*** *u* $\mathbb{R}^d$ *izmjerivo je preslikavanje iz* (Ω, Σ) *u* $(\mathcal{F}, \mathcal{B}(\mathcal{F}))$*.*

Primjer 2.3 *Neka je* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Ako je* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^d$ *slučajni element u* $\mathbb{R}^d$*, onda je jednočlani skup* $\boldsymbol{X} = \{\xi\}$ *slučajni zatvoreni skup.*

Primjer 2.4 *Neka je* $(\Omega, \Sigma, \mathbb{P})$ *vjerojatnosni prostor. Neka je* $R : \Omega \to \mathbb{R}$ *nenegativna slučajna varijabla. Tada je* $\boldsymbol{X} = B(x, R)$*, disk sa središtem u* $x \in \mathbb{R}^d$ *i slučajnim radijusom* R*, slučajni zatvoreni skup.*

2.2 Funkcionali kapaciteta

Definicija 2.5 ***Distribucija slučajnog skupa*** $\boldsymbol{X}$ *dana je izrazom* $\mathbb{P}_{\boldsymbol{X}}(\chi) = \mathbb{P}\{\boldsymbol{X} \in \chi\} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \boldsymbol{X}(\omega) \in \chi\})$ *za* $\chi \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$*.*

Kako je Effrosova σ-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ generirana skupovima $\mathcal{F}_K$ za $K \in \mathcal{K}$, distribucija slučajnog skupa $\mathbf{X}$ određena je izrazom $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(\mathcal{F}_K) = \mathbb{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{F}_K\} = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \in \mathcal{F}_K\}) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \mathbf{X}(\omega) \cap K \neq \emptyset\})$. Kažemo da dva slučajna skupa $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ imaju istu distribuciju, u oznaci $\mathbf{X} \overset{\mathcal{D}}{=} \mathbf{Y}$, ako vrijedi $\mathbb{P}\{\mathbf{X} \in \chi\} = \mathbb{P}\{\mathbf{Y} \in \chi\}$ za svaki $\chi \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$.

Definicija 2.6 *Kažemo da je funkcional* $T_{\boldsymbol{X}} : \mathcal{K} \to [0, 1]$ *dan s*

$$T_{\boldsymbol{X}}(K) = \mathbb{P}\{\boldsymbol{X} \cap K \neq \emptyset\}, K \in \mathcal{K} \tag{2.2}$$

funkcional kapaciteta *od* $\boldsymbol{X}$*. Često umjesto* $T_{\boldsymbol{X}}(K)$ *pišemo* $T(K)$ *kada ne dolazi do dvosmislenosti.*

Primjer 2.7 *Ako je* $\boldsymbol{X} = \{\xi\}$ *slučajni jednočlani skup, onda je* $T_{\boldsymbol{X}}(K) = \mathbb{P}\{\xi \in K\}$ *pa je funkcional kapaciteta vjerojatnosna distribucija slučajnog elementa* ξ*.*

Primjer 2.8 *Neka je* $\boldsymbol{X} = \{\xi_1, \xi_2\}$ *skup formiran od dvaju nezavisnih jednakodistribuiranih slučajnih elemenata u* $\mathbb{R}^d$*. Tada je* $T_{\boldsymbol{X}}(K) = 1 - (1 - \mathbb{P}\{\xi_1 \in K\})^2$*. Na primjer, ako su* ξ_1 *i* ξ_2 *brojevi koji su pali na dvjema kockama, onda je* $T_{\boldsymbol{X}}(\{6\})$ *vjerojatnost da je pala barem jedna šestica.*

Navest ćemo propoziciju koju ćemo koristiti u daljnjem razmatranju funkcionala kapaciteta.

Napomena 2.9 *Kažemo da je preslikavanje* $T : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ *rastuće ako vrijedi:*

$T(K_1) \leq T(K_2)$ *za svaka dva kompaktna skupa* $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$ *takva da je* $K_1 \subseteq K_2$*.*

Napomena 2.10 *Kažemo da* $K_n \downarrow K$ *ako je* K_n *nerastući niz skupova za koje vrijedi* $K = \cap K_n$*.*

Kažemo da $T(K_n) \downarrow T(K)$ *kako* $n \to +\infty$ *ako je* $\lim_{n\to+\infty} T(K_n) = T(K)$*.*

Propozicija 2.11 *Rastuće preslikavanje* $T : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ *je odozgo poluneprekidno ako i samo ako* $T(K_n) \downarrow T(K)$ *kako* $K_n \downarrow K$ *i* $n \to +\infty$*.*

Promotrimo sada neka svojstva funkcionala kapaciteta. Direktno iz definicije možemo zaključiti kako vrijedi

$$T(\emptyset) = 0 \tag{2.3}$$

i

$$0 \leq T(K) \leq 1, K \in \mathcal{K}. \tag{2.4}$$

Budući da vrijedi $\mathcal{F}_{K_n} \downarrow \mathcal{F}_K$ kako $K_n \downarrow K$, po svojstvu neprekidnosti u odnosu na padajuću familiju događaja za vjerojatnosnu mjeru $\mathbb{P}$ zaključujemo da je funkcija T odozgo poluneprekidna pa po Propoziciji 2.11 vrijedi

$$T(K_n) \downarrow T(K) \quad \text{kada} \quad K_n \downarrow K \quad \text{u} \quad \mathcal{K}. \tag{2.5}$$

Lako se pokaže da je funkcional kapaciteta T monotono rastuća funkcija, tj.

$$T(K_1) \leq T(K_2) \quad \text{ako je} \quad K_1 \subseteq K_2.$$

Da bismo opisali jače svojstvo monotonosti koje T zadovoljava, uvodimo oznaku za uzastopne razlike:

$$\Delta_{K_1} T(K) = T(K) - T(K \cup K_1) \tag{2.6}$$

$$\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1} T(K) = \Delta_{K_{n-1}} ... \Delta_{K_1} T(K) - \Delta_{K_{n-1}} ... \Delta_{K_1} T(K \cup K_n) \quad \text{za} \quad n \geq 2 \tag{2.7}$$

Ako je T iz (2.2) funkcional kapaciteta od $\mathbf{X}$, onda vrijedi

$$\begin{aligned}
\Delta_{K_1} T(K) &= T(K) - T(K \cup K_1) \\
&= \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\} - \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap (K \cup K_1) \neq \emptyset\} \\
&= \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\} - \mathbb{P}(\{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\} \cup \{\mathbf{X} \cap K_1 \neq \emptyset\}) \\
&= \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\} - (\mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\} + \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K_1 \neq \emptyset\} \\
&- \mathbb{P}(\{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\} \cap \{\mathbf{X} \cap K_1 \neq \emptyset\})) \\
&= -(\mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K_1 \neq \emptyset\} - \mathbb{P}(\{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\} \cap \{\mathbf{X} \cap K_1 \neq \emptyset\})) \\
&= -\mathbb{P}(\{\mathbf{X} \cap K_1 \neq \emptyset\} \backslash (\{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\} \cap \{\mathbf{X} \cap K_1 \neq \emptyset\})) \\
&= -\mathbb{P}(\{\mathbf{X} \cap K_1 \neq \emptyset\} \backslash \{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\}) \\
&= -\mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K_1 \neq \emptyset, \mathbf{X} \cap K = \emptyset\}
\end{aligned}$$

Analogno bismo dobili vezu između uzastopnih razlika višeg reda i distribucije od $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned}
\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1} T(K) &= -\mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K = \emptyset, \mathbf{X} \cap K_i \neq \emptyset, i = 1, ..., n\}) \\
&= -\mathbb{P}\{\mathbf{X} \in \mathcal{F}^K_{K_1, ..., Kn}\},
\end{aligned}$$

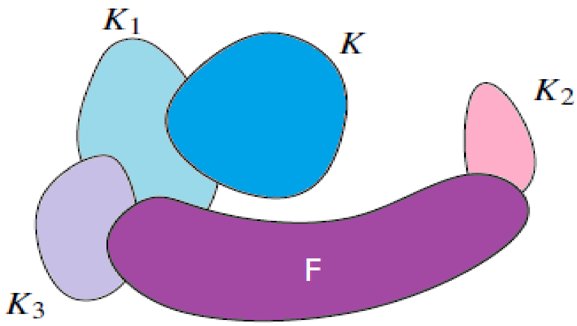
gdje je

$$\mathcal{F}^K_{K_1, ..., Kn} = \{F \in \mathcal{F} : F \cap K = \emptyset, F \cap K_1 \neq \emptyset, ..., F \cap K_n \neq \emptyset\}$$

Iz prethodnog možemo zaključiti da za svaki $n \geq 1$ i $K_1, ..., K_n \in \mathcal{K}$ vrijedi

$$\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1} T(K) \leq 0 \tag{2.8}$$

Konkretan primjer skupa $\mathcal{F}^{K}_{K_1,...,Kn}$ možemo vidjeti na Slici 2.1.



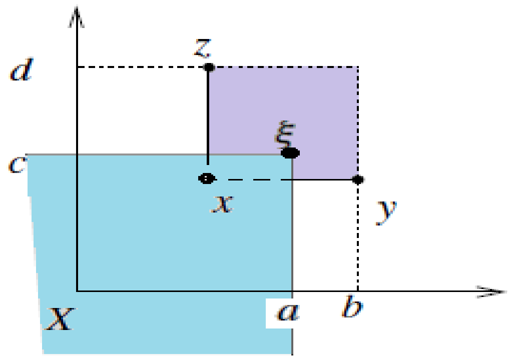
Slika 2.1: Primjer skupa $F \in \mathcal{F}^{K}_{K_1,K_2,K3}$.

Primjer 2.12 *Ako je $\boldsymbol{X} = \{\xi\}$ slučajni jednočlani skup s distribucijom $\mathbb{P}$, onda je*

$$\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1} T(K) = -\mathbb{P}\{\xi \in (K_1 \cap ... \cap K_n \cap K^C)\}$$

Primjer 2.13 *Neka je $\boldsymbol{X} = \langle -\infty, \xi_1] \times \langle -\infty, \xi_2]$ slučajni zatvoreni skup u ravnini $\mathbb{R}^2$, kao na Slici 2.2. Tada je*

$$\Delta_{\{x\}} T(\{y, z\}) = -\mathbb{P}\{\xi \in [a, b\rangle \times [c, d\rangle\} \quad za \quad x = (a, c), \quad y = (b, c), \quad z = (a, d), \quad \xi = (\xi_1, \xi_2)$$



Slika 2.2: Skup $\mathbf{X}$ zajedno s točkama x, y i z.

Svojstvo odozgo poluneprekidnosti (2.5) je slično neprekidnosti zdesna, a (2.8) generalizacija je koncepta monotonosti pa možemo reći da funkcional kapaciteta po svojstvima nalikuje na funkciju distribucije. Svojstvo koje ga razlikuje od mjera je što nije aditivna funkcija već samo subaditivna, tj. za sve kompaktne skupove K_1 i K_2 vrijedi

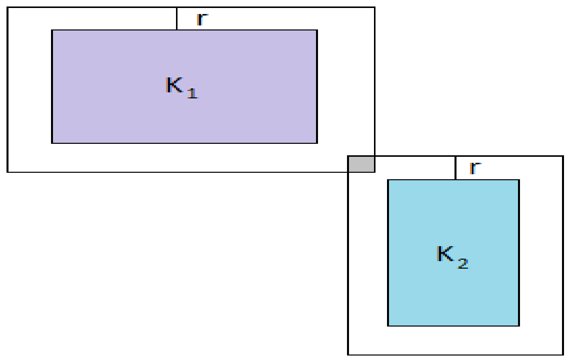
$$T(K_1 \cup K_2) \leq T(K_1) + T(K_2)$$

Uvjerimo se da T nema svojstvo aditivnosti sljedećim primjerom:

Primjer 2.14 *Ako je* $\boldsymbol{X} = B(\xi, r)$ *disk radijusa* r *sa središtem u slučajnoj točki* ξ *u* $\mathbb{R}^d$ *i* K^r r*-ovojnica kompaknog skupa* K*, tj. skup* $\{x \in \mathbb{R}^d : d(x, K) \leq r\}$*, onda je*

$$T_{\boldsymbol{X}}(K) = \mathbb{P}\{\xi \in K^r\}$$

$T_{\boldsymbol{X}}$ *nije mjera jer* r*-ovojnice* K_1^r *i* K_2^r *disjunktnih skupova* K_1 *i* K_2 *ne moraju biti disjunktne, vidi Sliku 2.3.*



Slika 2.3: r-ovojnice skupova K_1 i K_2.

S obzirom na važna svojstva funkcionala kapaciteta T željeli bismo promatrati općenito funkcionale na $\mathcal{K}$ koji nisu direktno povezani s distribucijom slučajnog zatvorenog skupa. **Funkcionalom kapaciteta** nazivat ćemo svaki funkcional $\varphi : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ koji poprima vrijednosti iz skupa $[0, 1]$, praznom skupu pridjeljuje vrijednost 0, odozgo je poluneprekidan i potpuno alternira na $\mathcal{K}$, tj. funkcional za koji vrijede svojstva (2.3), (2.4), (2.5), (2.8), pri čemu ćemo pojam potpuno alternirajućeg funkcionala uvesti sljedećom definicijom:

Definicija 2.15 *Neka je $\mathcal{D}$ familija skupova zatvorena na konačne unije. Kažemo da je funkcional $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$*

- ***potpuno alternirajući*** *(potpuno $\cup$-alternirajući), u oznaci $\varphi \in \mathsf{A}(\mathcal{D})$ ili $\varphi \in \mathsf{A}_\cup(\mathcal{D})$ ako vrijedi*

$$\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1} \varphi(K) \leq 0 \quad za \quad n \geq 1, \quad K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{D}$$

  Ako gornja nejednakost vrijedi za sve $n \leq m$, kažemo da je φ alternirajući stupnja m (m-alternirajući).

- ***potpuno $\cup$-monoton***, *u oznaci $\varphi \in \mathsf{M}_\cup(\mathcal{D})$ ako vrijedi*

$$\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1} \varphi(K) \geq 0 \quad za \quad n \geq 1, \quad K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{D}$$

Uvedimo sada novu vrstu uzastopnih razlika u kojima koristimo presjek:

$$\nabla_{K_1}\varphi(K) = \varphi(K) - \varphi(K \cap K_1) \tag{2.9}$$

$$\nabla_{K_n}...\nabla_{K_1}\varphi(K) = \nabla_{K_{n-1}}...\nabla_{K_1}\varphi(K) - \nabla_{K_{n-1}}...\nabla_{K_1}\varphi(K \cap K_n) \quad \text{za} \quad n \geq 2 \tag{2.10}$$

Definicija 2.16 *Neka je $\mathcal{D}$ familija skupova zatvorena na konačne presjeke. Kažemo da je funkcional $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$*

- ***potpuno $\cap$-alternirajući**, u oznaci $\varphi \in \mathsf{A}_\cap(\mathcal{D})$ ako vrijedi*

$$\nabla_{K_n}...\nabla_{K_1}\varphi(K) \leq 0 \quad za \quad n \geq 1, \quad K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{D}$$

- ***potpuno monoton** (potpuno $\cap$-monoton), u oznaci $\varphi \in \mathsf{M}(\mathcal{D})$ ili $\varphi \in \mathsf{M}_\cap(\mathcal{D})$ ako vrijedi*

$$\nabla_{K_n}...\nabla_{K_1}\varphi(K) \geq 0 \quad za \quad n \geq 1, \quad K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{D}$$

Definicija 2.17 *Neka je $\varphi : \mathcal{D} \to [0, 1]$ funkcional. Funkcional $\tilde{\varphi} : \mathcal{D}' \to [0, 1]$, gdje je $\mathcal{D}' = \{K^C : K \in \mathcal{D}\}$ familija komplemenata skupova iz $\mathcal{D}$, definiran s*

$$\tilde{\varphi}(K) = 1 - \varphi(K^C) \quad za \quad K^C \in \mathcal{D} \tag{2.11}$$

*naziva se **dualni funkcional** funkcionala φ.*

Propozicija 2.18 *Neka je $\varphi : \mathcal{D} \to [0, 1]$. Tada vrijede sljedeće ekvivalencije:*

1. *$\varphi \in \mathsf{A}_\cup(\mathcal{D})$ ako i samo ako za svaki fiksni $L \in \mathcal{D}$ vrijedi*

$$-\Delta_L\varphi(K) = \varphi(K \cap L) - \varphi(K) \in \mathsf{M}_\cup(\mathcal{D})$$

2. *$\varphi \in \mathsf{A}_\cap(\mathcal{D})$ ako i samo ako za svaki fiksirani $L \in \mathcal{D}$ vrijedi*

$$-\nabla_L \varphi(K) = \varphi(K \cup L) - \varphi(K) \in \mathsf{M}_\cap(\mathcal{D})$$

3. *$\varphi \in \mathsf{A}_\cap(\mathcal{D})$ ako i samo ako za dualni funkcional $\tilde{\varphi}$ na $\mathcal{D}' = \{K^C : K \in \mathcal{D}\}$ vrijedi $\tilde{\varphi}(K) \in \mathsf{M}_\cup(\mathcal{D})$*

4. *$\varphi \in \mathsf{A}_\cup(\mathcal{D})$ ako i samo ako za dualni funkcional $\tilde{\varphi}$ na $\mathcal{D}' = \{K^C : K \in \mathcal{D}\}$ vrijedi $\tilde{\varphi}(K) \in \mathsf{M}_\cap(\mathcal{D})$*

Dokaz.

1. Treba dokazati: $\varphi \in \mathsf{A}_\cup(\mathcal{D})$ ako i samo ako $-\Delta_L \varphi(K) = \varphi(K \cap L) - \varphi(K) \in \mathsf{M}_\cup(\mathcal{D})$ za svaki fiksirani $L \in \mathcal{D}$. Po Definiciji 2.15 to je ekvivalentno kao dokazati: $\Delta_{L_m} ... \Delta_{L_1} \varphi(K) \leq 0$ za $m \geq 1, \quad K, L_1, ..., L_m \in \mathcal{D}$ ako i samo ako $\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1}(-\Delta_L \varphi(K)) \geq 0$ za $n \geq 1, \quad K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{D}$ i za svaki fiksirani $L \in \mathcal{D}$. Budući da vrijedi $\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1}(-\Delta_L \varphi(K)) = -\Delta_L \Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1} \varphi(K)$, tvrdnja očito vrijedi.

2. Analogno se dokaže kao pod 1.

3. Principom matematičke indukcije dokažimo pomoćnu tvrdnju: $\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1} \tilde{\varphi}(K) = -\nabla_{K_n^C} ... \nabla_{K_1^C} \varphi(K^C)$ za $n \geq 1, \quad K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{D}$

   (BI) Za $n = 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
\Delta_{K_1} \tilde{\varphi}(K) &\overset{(2.6)}{=} \tilde{\varphi}(K) - \tilde{\varphi}(K \cup K_1) \\
&\overset{(2.11)}{=} 1 - \varphi(K^C) - (1 - \varphi((K \cup K_1)^C)) \\
&= -(\varphi(K^C) - \varphi(K^C \cap K_1^C)) \\
&\overset{(2.9)}{=} -\nabla_{K_1^C}(\varphi(K^C))
\end{aligned}$$

   (PI) Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $\Delta_{K_n} ... \Delta_{K_1} \tilde{\varphi}(K) = -\nabla_{K_n^C} ... \nabla_{K_1^C} \varphi(K^C)$

(KI) Dokažimo tvrdnju za $n+1$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{K_{n+1}}...\Delta_{K_1}\tilde{\varphi}(K) &\overset{(2.7)}{=} \Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\tilde{\varphi}(K) - \Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\tilde{\varphi}(K\cup K_1)\\
&\overset{(PI)}{=} -\nabla_{K_n^C}...\nabla_{K_1^C}\varphi(K^C) - (-\nabla_{K_n^C}...\nabla_{K_1^C}\varphi((K\cup K_1)^C))\\
&= -(\nabla_{K_n^C}...\nabla_{K_1^C}\varphi(K^C) - \nabla_{K_n^C}...\nabla_{K_1^C}\varphi(K^C\cap K_1^C))\\
&\overset{(2.10)}{=} -\nabla_{K_{n+1}^C}...\nabla_{K_1^C}\varphi(K^C)
\end{aligned}$$

Treba dokazati: $\varphi \in \mathsf{A}_\cap(\mathcal{D})$ ako i samo ako $\tilde{\varphi} \in \mathsf{M}_\cup(\mathcal{D})$. Po Definiciji 2.15 i Definiciji 2.16 to je ekvivalentno kao dokazati: $\nabla_{L_m}...\nabla_{L_1}\varphi(L) \leq 0$ za $m \geq 1, \quad L, L_1, ..., L_m \in \mathcal{D}$ ako i samo ako $\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\tilde{\varphi}(K) \geq 0$ za $n \geq 1, \quad K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{D}$. S obzirom na pomoćnu tvrdnju $\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\tilde{\varphi}(K) = -\nabla_{K_n^C}...\nabla_{K_1^C}\varphi(K^C)$, tvrdnja 3. očito vrijedi.

4. Analogno se dokaže kao pod 3.

■

Tvrdnja 1 *Neka je μ mjera na $\mathcal{K}$. Za svaki $n \geq 1$ i svaki $K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{K}$ vrijedi*

$$-\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\mu(K) = \mu((K_1 \cap ... \cap K_n)\backslash K)$$

Dokaz. Dokaz ćemo provesti matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.

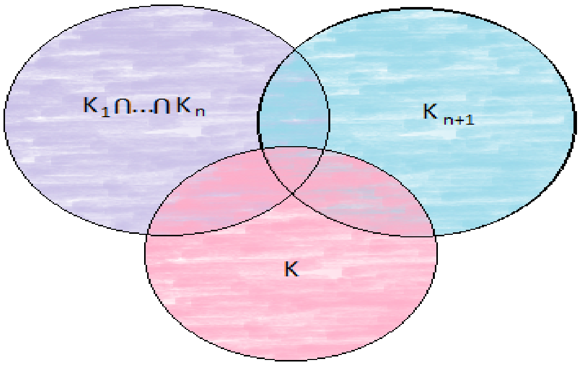
(BI) Za $n = 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned}
-\Delta_{K_1}\mu(K) &\overset{(2.6)}{=} -(\mu(K) - \mu(K\cup K_1))\\
&= \mu(K\cup K_1) - \mu(K)\\
&= \mu(K_1\backslash K)
\end{aligned}$$

(PI) Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne $K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{K}$ vrijedi $-\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\mu(K) = \mu((K_1 \cap ... \cap K_n)\backslash K)$

(KI) Dokažimo tvrdnju za $n+1$

$$\begin{aligned}
-\Delta_{K_{n+1}}...\Delta_{K_1}\mu(K) &\overset{(2.7)}{=} -(\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\mu(K) - \Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\mu(K\cup K_1)) \\
&\overset{(PI)}{=} \mu((K_1\cap ...\cap K_n)\backslash K) - \mu((K_1\cap ...\cap K_n)\backslash (K\cup K_{n+1})) \\
&= \mu(((K_1\cap ...\cap K_n)\backslash K)\backslash ((K_1\cap ...\cap K_n)\backslash (K\cup K_{n+1}))) \\
&\overset{\text{Slika 2.4}}{=} \mu((K_1\cap ...\cap K_n\cap K_{n+1})\backslash K)
\end{aligned}$$



Slika 2.4: Jednakost skupova $((K_1\cap ...\cap K_n)\backslash K)\backslash ((K_1\cap ...\cap K_n)\backslash (K\cup K_{n+1}))$ i $(K_1\cap ...\cap K_n\cap K_{n+1})\backslash K$

.

■

S obzirom da vrijedi $-\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\mu(K) = \mu((K_1\cap ...\cap K_n)\backslash K) \geq 0$, svaka je mjera μ potpuno alternirajući funkcional. Usto za disjunktne K i K_1 vrijedi $\Delta_{K_1}\mu(K) = -\mu(K_1\backslash K) = -\mu(K_1)$.

Primijetimo da je proizvoljni funkcional φ rastući ako i samo ako je

$$\Delta_{K1}\varphi(K) \overset{(2.6)}{=} \varphi(K) - \varphi(K\cup K_1) \leq 0$$

. Za $n = 2$ imamo

$$\begin{aligned}\Delta_{K_2}\Delta_{K1}\varphi(K) &\overset{(2.7)}{=} \Delta_{K_1}\varphi(K) - \Delta_{K_1}\varphi(K \cup K_2)\\ &\overset{(2.6)}{=} (\varphi(K) - \varphi(K \cup K_1)) - (\varphi(K \cup K_2) - \varphi(K \cup K_2 \cup K_1))\\ &= \varphi(K) - \varphi(K \cup K_1) - \varphi(K \cup K_2) + \varphi(K \cup K_1 \cup K_2)\end{aligned}$$

pa za φ vrijedi uvjet $\Delta_{K_2}\Delta_{K_1}\varphi(K) \leq 0$ ako i samo ako vrijedi

$$\varphi(K) + \varphi(K \cup K_1 \cup K_2) \leq \varphi(K \cup K_1) + \varphi(K \cup K_2). \tag{2.12}$$

Ako je $K = \emptyset$ i $\varphi(\emptyset) = 0$, onda gornji uvjet postaje

$$\varphi(K_1 \cup K_2) \leq \varphi(K_1) + \varphi(K_2),$$

tj. φ je subaditivna funkcija. Ako je φ rastuća, onda je (2.12) ekvivalentno s

$$\varphi(K_1 \cap K_2) + \varphi(K \cup K_1 \cup K_2) \leq \varphi(K_1) + \varphi(K_2) \tag{2.13}$$

za sve K_1, K_2. Funkcional φ koji zadovoljava (2.13) naziva se **konkavan** ili **jako subaditivan**. Funkcional koji zadovoljava obrnutu nejednakost nazivamo **konveksan** ili **jako superaditivan**. Primijetimo da je funkcional 2-alternirajući ako je konkavan i monoton.

Definicija 2.19 *Funkcija $\varphi : \mathcal{P} \to [-\infty, +\infty]$, gdje je $\mathcal{P}$ familija svih podskupova prostora $\mathbb{R}^d$, naziva se* ***kapacitet*** *($\mathcal{K}$ − kapacitet) ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

1. *ako je $M \subseteq M'$, onda je $\varphi(M) \leq \varphi(M')$*
2. *ako $M_n \uparrow M$, onda je $\varphi(M_n) \uparrow \varphi(M)$*
3. *ako $K_n \downarrow K$ za kompaktne K_n, K, onda je $\varphi(K_n) \downarrow \varphi(K)$.*

Može se pokazati da se kapacitet φ definiran na $\mathcal{K}$ može na prirodan način proširiti na familiju $\mathcal{P}$ svih podskupova od $\mathbb{R}^d$ tako da φ zadrži svojstva monotonosti ili alterniranja. Kada želimo proširiti funkcional kapaciteta slučajnog zatvorenog skupa, to radimo na sljedeći način:

$$T^*(G) = \sup\{T(K) : K \in \mathcal{K}, K \subseteq G\}, G \in \mathcal{G} \tag{2.14}$$

$$T^*(M) = \inf\{T^*(G) : G \in \mathcal{G}, M \subseteq G\}, M \in \mathcal{P} \tag{2.15}$$

Teorem 2.20 *Proširenje funkcionala kapaciteta T^* konzistentno je s T, tj. vrijedi:*

1. $T^*(K) = T(K)$ *za svaki* $K \in \mathcal{K}$
2. $T^*(B) = \sup\{T(K) : K \in \mathcal{K}, K \subseteq B\}$ *za svaki Borelov skup* B.

Dokaz. Dokažimo samo prvu tvrdnju:

1. Primijetimo da je $T^*(K)$ limes $T^*(G_n)$ za niz $G_n \in \mathcal{G}$ takvih da $G_n \downarrow K$. Odaberimo sada niz $K_n \in \mathcal{K}$ tako da je $K \subseteq K_n \subseteq G_n$ za svaki $n \in \mathcal{N}$. Sada zaključujemo da je $\lim_{n\to+\infty} T(K_n) = T^*(K)$, a iz odozgo poluneprekidnosti funkcije T slijedi $\lim_{n\to+\infty} T(K_n) = T(K)$ pa je $T^*(K) = T(K)$.

■

S obzirom da se T i T^* poklapaju na $\mathcal{K}$, koristit ćemo oznaku T (umjesto T^*) na cijelom $\mathcal{P}$. Iz svojstva neprekidnosti vjerojatnosne mjere po prethodnom teoremu možemo zaključiti da vrijedi $T(B) = \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap B \neq \emptyset\}$ za svaki Borelov skup B.

2.3 Choquetov teorem

Kako je σ-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ vrlo bogata elementima, nemoguće je eksplicitno pridružiti mjeru svim njezinim elementima pa bismo željeli iskoristiti činjenicu da familije $\mathcal{F}_K$, $K \in \mathcal{K}$ generiraju tu σ-algebru. S obzirom na to, očekujemo da bi funkcional kapaciteta na $\mathcal{K}$ trebao na jedinstven način određivati distribuciju pripadajućeg slučajnog zatvorenog skupa. Choquetov teorem, koji ćemo iskazati u nastavku, govori kako odozgo poluneprekidni potpuno alternirajući kapaciteti na $\mathcal{K}$ odgovaraju distribucijama slučajnih zatvorenih skupova. Jedinstvenost u Choquetovu teoremu lako je dokazati iz činjenice da familija $\mathcal{F}_K$, $K \in \mathcal{K}$ generira σ-algebru $\mathcal{B}(\mathcal{F})$, no za dokaz egzistencije bit će nam potrebni još neki koncepti.

Teorem 2.21 (Choquetov teorem) *Funkcional $T : \mathcal{K} \to [0,1]$ takav da vrijedi $T(\emptyset) = 0$ funkcional je kapaciteta jedinstvenog slučajnog zatvorenog skupa u $\mathbb{R}^d$ ako i samo ako je T odozgo poluneprekidni potpuno alternirajući funkcional.*

Definicija 2.22 *Kažemo da je funkcional T **maksitivan** ako za svaka dva kompaktna skupa K_1, K_2 vrijedi :*

$$T(K_1 \cup K_2) = \max\{T(K_1), T(K_2)\} \tag{2.16}$$

Ako je T maksitivan funkcional na $\mathcal{K}$, onda (2.16) vrijedi i za proširenje funkcionala T na sve podskupove od $\mathbb{R}^d$.

Definicija 2.23 (Supremum mjere) *Supremum mjere uvodimo jer donose važnu familiju kapaciteta. Neka je dana funkcija $f : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}$. **Supremum integral** funkcije f je funkcija $f^\vee : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ dana s:*

$$f^\vee(G) = \bigvee_{t \in G} f(t), G \in \mathcal{G},$$

uz oznaku $\vee$ *za maksimum brojeva iz proširenog skupa realnih brojeva* $\overline{\mathbb{R}}$. *Funkciju* $\varphi : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ *nazivamo* ***supremum mjera*** *ako je* $\varphi(\emptyset) = 0$ *i za svaku familiju* $\{G_j, j \in J\}$ *otvorenih skupova vrijedi:*

$$\varphi(\bigcup_{j\in J} G_j) = \bigvee_{j\in J} \varphi(G_j)$$

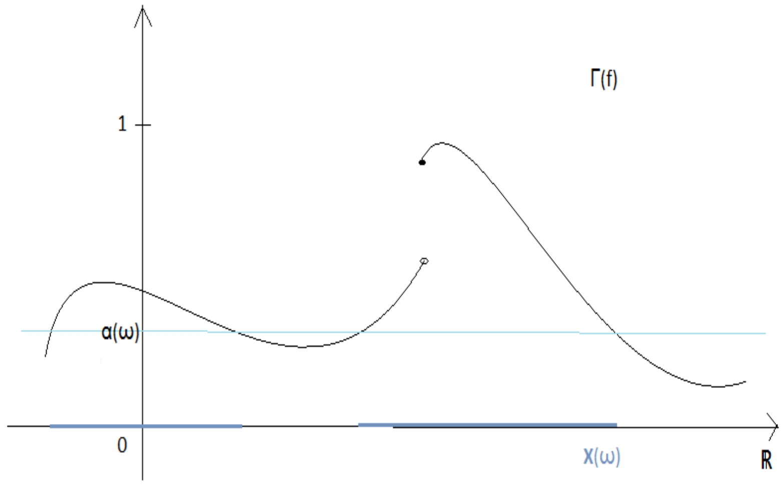
Primijetimo još da je svaka supremum mjera maksitivna, ali obrat ne vrijedi.

Primjer 2.24 *Definiramo* ***maksitivni kapacitet*** T *na sljedeći način:*

$$T(K) = \sup\{f(x) : x \in K\}, \tag{2.17}$$

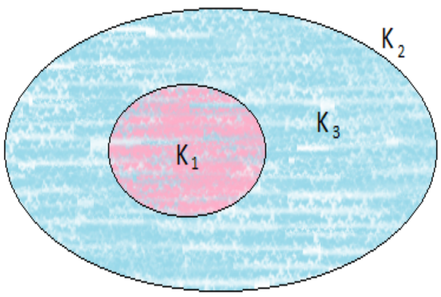
gdje je $f : \mathbb{R}^d \to [0,1]$ *odozgo poluneprekidna funkcija. Tada je* $T = f^\vee$ *supremum integral funkcije* f. *Funkcional kapaciteta* T *opisuje distribuciju slučajnog zatvorenog skupa* $\boldsymbol{X} = \{x \in \mathbb{R}^d : f(x) \geq \alpha\}$, *gdje je* α *slučajna varijabla uniformno distribuirana na* $[0,1]$, *vidi Sliku 2.5.*

$$\begin{aligned}
T_{\boldsymbol{X}}(K) &\overset{(2.2)}{=} \mathbb{P}\{\boldsymbol{X} \cap K \neq \emptyset\} \\
&= \mathbb{P}\{f(x) \geq \alpha, \quad \textit{za neki} \quad x \in K\} \\
&= \mathbb{P}\{\sup_{x\in K} f(x) \geq \alpha\} \\
&= \mathbb{P}\{\omega \in \Omega : \sup_{x\in K} f(x) \geq \alpha\} \\
&\overset{\underline{unif.}}{=} \int_0^{\sup_{x\in K} f(x)} \frac{1}{1-0} dy \\
&= \sup_{x\in K} f(x) - 0 \\
&= \sup\{f(x) : x \in K\} = T(K)
\end{aligned}$$



Slika 2.5: Primjer realizacije slučajnog skupa $\mathbf{X}$ u $\mathbb{R}^d$, za $d = 1$.

Napomena 2.25 *Primijetimo da je svaki maksitivni funkcional T monotono rastući. Naime, neka su K_1, K_2 skupovi iz familije skupova koji zadovoljavaju* (2.16) *takvi da je $K_1 \subseteq K_2$. Označimo s $K_3 = K_2 \backslash K_1 \subseteq K_2$. Sada vrijedi $T(K_2) \overset{Slika\ 2.6}{=} T(K_1 \cup K_3) \overset{(2.16)}{=} \max\{T(K_1), T(K_3)\} \geq T(K_1)$.*



Slika 2.6: Odnos skupova K_1, K_2 i K_3.

Propozicija 2.26 (Maksitivni odozgo poluneprekidni kapaciteti) *Ako je T maksitivni odozgo poluneprekidni funkcional s vrijednostima u* $[0, 1]$*, onda je T dan s* (2.17) *za odozgo poluneprekidnu funkciju $f : \mathbb{R}^d \to [0, 1]$.*

Dokaz. Kako je T odozgo poluneprekidna, po Propoziciji 2.11 vrijedi $T(K_n) \downarrow T(\{x\})$ ako $K_n \downarrow \{x\}$ te je funkcija f definirana s $f(x) = T(\{x\})$ odozgo poluneprekidna funkcija. Dakle vrijedi:

$$(\forall x \in \mathbb{R}^d)(\forall \epsilon > 0)(\exists G_\epsilon(x), \quad okolina) \quad T(G_\epsilon(x)) \leq T(\{x\}) + \epsilon = f(x) + \epsilon$$

Svaki se kompaktan skup $K \in \mathcal{K}$ može pokriti s $G_\epsilon(x), x \in K$. S obzirom da je K kompaktan, njegov se otvoreni pokrivač može reducirati na konačan potpokrivač $G_\epsilon(x_1), ..., G_\epsilon(x_n)$, tj. $K \subseteq G_\epsilon(x_1) \cup ... \cup G_\epsilon(x_n)$. Iz maksitivnosti funkcionala T slijedi:

$$\begin{aligned} T(K) &\overset{\text{Nap.2.25}}{\leq} T(G_\epsilon(x_1) \cup ... \cup G_\epsilon(x_n)) \\ &\overset{(2.16)}{=} \max\{T(G_\epsilon(x_1)), ..., T(G_\epsilon(x_n))\} \\ &\leq \max\{f(x_1), ..., f(x_n)\} + \epsilon \end{aligned}$$

iz čega odmah slijedi (2.17). ■

Ovom propozicijom pokazali smo da se od konačnog maksimuma u (2.16) možemo prebaciti općenito na supremum po svim jednočlanim skupovima uz pretpostavku odozgo poluneprekidnosti, tj. da Primjer 2.24 opisuje sve maksitivne kapacitete koji odgovaraju distribucijama slučajnih zatvorenih skupova. Usto iz propozicije slijedi kako je, uz pretpostavku odozgo poluneprekidnosti, funkcional T iz (2.16) supremum mjera.

Napomena 2.27 *Kažemo da je T **maksitivni funkcional na** $\mathcal{D}$ ako vrijedi (2.16) za sve $K_1, K_2 \in \mathcal{D}$, gdje je $\mathcal{D}$ familija skupova zatvorena na konačne unije.*

Teorem 2.28 (Potpuna alternacija maksitivnog kapaciteta) *Svaki funkcional φ koji je maksitivan na familiji $\mathcal{D}$ zatvorenoj na konačne unije je potpuno alternirajući na $\mathcal{D}$.*

Dokaz. Neka su $K, K_1, ..., K_n \in \mathcal{D}$ proizvoljni. Principom matematičke indukcije pokažimo da uz pretpostavku da je $\varphi(K_1) = \min\{\varphi(K_1), ..., \varphi(K_n)\}$ vrijedi $\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\varphi(K) = \varphi(K) - \varphi(K \cup K_1)$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

(BI) Za $n = 1$ vrijedi $\Delta_{K_1}\varphi(K) \overset{(2.6)}{=} \varphi(K) - \varphi(K \cup K_1)$.

(PI) Pretpostavimo da za neki $n \in \mathbb{N}$ uz pretpostavku $\varphi(K_1) = \min\{\varphi(K_1), ..., \varphi(K_n)\}$ vrijedi $\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\varphi(K) = \varphi(K) - \varphi(K \cup K_1)$.

(KI) Dokažimo tvrdnju za $n + 1$ uz pretpostavku

$$\varphi(K_1) = \min\{\varphi(K_1), ..., \varphi(K_{n+1})\}. \tag{2.18}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_{K_{n+1}}...\Delta_{K_1}\varphi(K) &\overset{(2.7)}{=} \Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\varphi(K) - \Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\varphi(K \cup K_{n+1}) \\
&\overset{(PI)}{=} [\varphi(K) - \varphi(K \cup K_1)] - [\varphi(K \cup K_{n+1}) - \varphi(K \cup K_{n+1} \cup K_1)] \\
&\overset{\text{maksitivnost}}{=} [\varphi(K) - \varphi(K \cup K_1)] - [\max\{\varphi(K), \varphi(K_{n+1})\} - \\
&\max\{\varphi(K), \varphi(K_{n+1}), \varphi(K_1)\}] \\
&\overset{(2.18)}{=} [\varphi(K) - \varphi(K \cup K_1)] - 0 \\
&= \varphi(K) - \varphi(K \cup K_1)
\end{aligned}$$

Kako je φ maksitivan, to po Napomeni 2.25 slijedi $\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}\varphi(K) = \varphi(K) - \varphi(K \cup K_1) \leq 0$ za svaki $n \in \mathbb{N}$ pa je φ potpuno alternirajući. ∎

Definicija 2.29 *Kažemo da su slučajni zatvoreni skupovi $\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_n$* ***nezavisni*** *ako za svaki $\chi_1, ..., \chi_n \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$ vrijedi:*

$$\mathbb{P}\{\boldsymbol{X}_1 \in \chi_1, ..., \boldsymbol{X}_n \in_n\} = \mathbb{P}\{\boldsymbol{X}_1 \in \chi_1\}...\mathbb{P}\{\boldsymbol{X}_n \in \chi_n\}$$

Sljedećom propozicijom pokazat ćemo kako se nezavisnost slučajnih zatvorenih skupova može karakterizirati preko Choquetova teorema.

Propozicija 2.30 *Slučajni su zatvoreni skupovi $\boldsymbol{X}_1, ..., \boldsymbol{X}_n$ nezavisni ako i samo ako vrijedi:*

$$\mathbb{P}\{\boldsymbol{X}_1 \cap K_1 \neq \emptyset, ..., \boldsymbol{X}_n \cap K_n \neq \emptyset\} = \prod_{i=1}^{n} T_{\boldsymbol{X}_i}(K_i)$$

za sve $K_1, ..., K_n \in \mathcal{K}$.

2.4 Dokazi Choquetova teorema

U ovom ćemo se odjeljku baviti dokazom Choquetova teorema. S obzirom da smo nužnost pokazali u Odjeljku 2.2, ovdje ćemo se baviti samo dovoljnošću. Za početak će nam trebati nekoliko pomoćnih lema, no prije toga prisjetit ćemo se definicija skupova $\mathcal{F}_V$, $\mathcal{F}^V$ i $\mathcal{F}^V_{V_1,...,Vn}$.

Napomena 2.31

$$\mathcal{F}_V = \{F \in \mathcal{F} : F \cap V \neq \emptyset\} \tag{2.19}$$

$$\mathcal{F}^V = \{F \in \mathcal{F} : F \cap V = \emptyset\} \tag{2.20}$$

$$\mathcal{F}^V_{V_1,...,Vn} = \{F \in \mathcal{F} : F \cap V = \emptyset, F \cap V_1 \neq \emptyset, ..., F \cap V_n \neq \emptyset\} \tag{2.21}$$

te primijetimo da vrijedi:

$$(\mathcal{F}_V)^C \overset{(2.19)}{=} \mathcal{F} \backslash \{F \in \mathcal{F} : F \cap V \neq \emptyset\} = \{F \in \mathcal{F} : F \cap V = \emptyset\} \overset{(2.20)}{=} \mathcal{F}^V$$

$$(\mathcal{F}^V)^C \overset{(2.20)}{=} \mathcal{F} \backslash \{F \in \mathcal{F} : F \cap V = \emptyset\} = \{F \in \mathcal{F} : F \cap V \neq \emptyset\} \overset{(2.19)}{=} \mathcal{F}_V \tag{2.22}$$

Lema 2.32 *Neka je $\mathcal{V}$ familija podskupova od $\mathbb{R}^d$ koja sadrži $\emptyset$ i zatvorena je na konačne unije. Neka je $\mathfrak{D}$ najmanja familija zatvorena na konačne presjeke generirana skupovima $\mathcal{F}_V$ i $\mathcal{F}^V$, za $V \in \mathcal{V}$. Tada je $\mathfrak{D}$ algebra i svaki se neprazan skup $\mathcal{Y} \in \mathfrak{D}$ može prikazati kao*

$$\mathcal{Y} = \mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n} \tag{2.23}$$

za neki $n \geq 0$ i $V, V_1, ..., V_n \in \mathcal{V}$ za koje vrijedi $V_i \not\subseteq V \cup V_j$ za $i \neq j$. Tada kažemo da je (2.23) ***reducirana reprezentacija*** *od $\mathcal{Y}$.*

Ako je $\mathcal{Y} = \mathcal{F}^{V'}_{V'_1,...,V'_k}$ neka druga reducirana reprezentacija od $\mathcal{Y}$, onda je $V = V', n = k$ i za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ postoji $j_i \in \{1, ..., n\}$ takav da je $V \cup V_i = V \cup V'_{j_i}$.

Dokaz. Primijetimo da se svaki $\mathcal{Y} \in \mathfrak{D}$ može zapisati u obliku $\mathcal{Y} = (\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_{V_i}) \cap (\bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{F}^{W_j}) \overset{V := \bigcap_{j=1}^{m} \mathcal{F}^{W_j}}{=} (\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{F}_{V_i}) \cap \mathcal{F}^V \overset{(2.21)}{=} \mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n}$ za neke $V_1, ..., V_n, W_1, ..., W_m \in \mathfrak{D}$.

Pokažimo sada neke pomoćne tvrdnje koje ćemo koristiti u dokazu da je $\mathfrak{D}$ algebra.

Matematičkom indukcijom pokazati ćemo da za fiksni $F \in \mathcal{F}$ vrijedi:

$$A \mid A_1 \mid ... \mid A_n = A \mid (A^C \,\&\, A_1) \mid ((A \mid A_1)^C \,\&\, A_2) \mid ... \mid ((A \mid A_1 \mid ... \mid A_{n-1})^C \,\&\, A_n), \tag{2.24}$$

uz oznake $A = (F \cap V \neq \emptyset), A_i = (F \cap V_i = \emptyset)$ za $i = 1, ..., n$ te " $\mid$ " za logičko "ili" i "&" za logičko "i".

(BI) Za $n = 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned} A \mid A_1 &\overset{A \,\&\, A^C = \emptyset}{=} A \mid (A \,\&\, A^C) \mid A_1 \\ &= A \mid (A \,\&\, A_1) \mid (A^C \,\&\, A_1) \\ &\overset{A \,\&\, A_1 \subseteq A}{=} A \mid (A^C \,\&\, A_1) \end{aligned}$$

(PI) Pretpostavimo da za neki $n - 1 \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ vrijedi

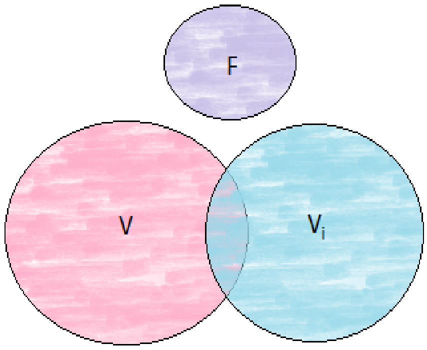
$$A \mid A_1 \mid ... \mid A_{n-1} = A \mid (A^C \,\&\, A_1) \mid ((A \mid A_1)^C \,\&\, A_2) \mid ... \mid ((A \mid A_1 \mid ... \mid A_{n-2})^C \,\&\, A_{n-1})$$

(KI) Dokažimo tvrdnju za $n + 1$

$$\begin{aligned} A \mid A_1 \mid ... \mid A_n &= (A \mid A_1 \mid ... \mid A_{n-1}) \mid A_n \\ &\overset{(BI)}{=} (A \mid A_1 \mid ... \mid A_{n-1}) \mid ((A \mid A_1 \mid ... \mid A_{n-1})^C \,\&\, A_n) \\ &\overset{(PI)}{=} A \mid (A^C \,\&\, A_1) \mid ((A \mid A_1)^C \,\&\, A_2) \mid ... \mid ((A \mid A_1 \mid ... \mid A_{n-2})^C \,\&\, A_{n-1}) \\ &\mid ((A \mid A_1 \mid ... \mid A_{n-1})^C \,\&\, A_n) \end{aligned}$$

Primijetimo još da vrijedi (vidi Sliku 2.7):

$$(F \cap V = \emptyset) \,\&\, (F \cap V_i = \emptyset) \Rightarrow F \cap (V \cup V_i) = \emptyset. \tag{2.25}$$



Slika 2.7: $(F \cap V = \emptyset)$ & $(F \cap V_i = \emptyset) \Rightarrow F \cap (V \cup V_i) = \emptyset$.

Pokažimo sada da je $\mathfrak{D}$ algebra.

1. Za $\emptyset \in \mathcal{V}$ vrijedi $\mathcal{F}_\emptyset \stackrel{(2.19)}{=} \{F \in \mathcal{F} : F \cap \emptyset \neq \emptyset\} = \emptyset \in \mathfrak{D}$.

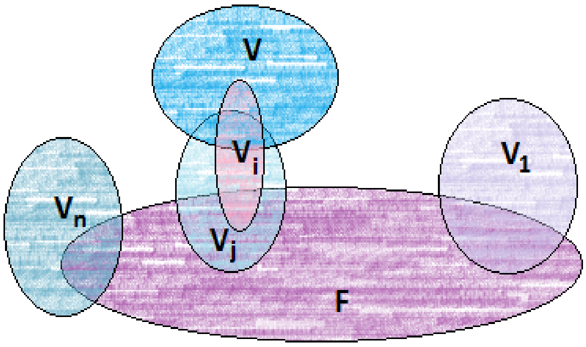
2. Ako je $\mathcal{Y} \in \mathfrak{D}$, onda se $\mathcal{Y}$ može prikazati kao $\mathcal{Y} = \mathcal{F}^V_{V_1,\dots,V_n} \stackrel{(2.21)}{=} \{F \in \mathcal{F} : F \cap V = \emptyset \;\&\; F \cap V_1 \neq \emptyset \;\&\; \dots \;\&\; F \cap V_n \neq \emptyset\}$ pa vrijedi

$$\begin{aligned}
\mathcal{Y}^C &= \mathcal{F} \backslash \mathcal{Y} \\
&= \{F \in \mathcal{F} : F \cap V \neq \emptyset \mid F \cap V_1 = \emptyset \mid \dots \mid F \cap V_n = \emptyset\} \\
&\stackrel{(2.24)}{=} \{F \in \mathcal{F} : F \cap V \neq \emptyset \mid ((F \cap V \neq \emptyset)^C \;\&\; F \cap V_1 = \emptyset) \mid \\
&((F \cap V \neq \emptyset \mid F \cap V_1 = \emptyset)^C \;\&\; F \cap V_2 = \emptyset) \mid \dots \mid \\
&((F \cap V \neq \emptyset \mid F \cap V_1 = \emptyset \mid \dots \mid F \cap V_{n-1} = \emptyset)^C \;\&\; F \cap V_n = \emptyset)\} \\
&= \{F \in \mathcal{F} : F \cap V \neq \emptyset \mid (F \cap V = \emptyset \;\&\; F \cap V_1 = \emptyset) \mid (F \cap V = \emptyset \;\&\; (F \cap V_1 = \emptyset)^C \\
&\;\&\; F \cap V_2 = \emptyset) \mid \dots \mid (F \cap V = \emptyset \;\&\; (F \cap V_1 = \emptyset \mid \dots \mid F \cap V_{n-1} = \emptyset)^C \;\&\; F \cap V_n = \emptyset)\} \\
&\stackrel{(2.25)}{=} \{F \in \mathcal{F} : F \cap V \neq \emptyset \mid F \cap (V \cup V_1) = \emptyset \mid (F \cap (V \cup V_2) = \emptyset \;\&\; F \cap V_1 \neq \emptyset) \\
&\mid \dots \mid (F \cap (V \cup V_n) = \emptyset \;\&\; F \cap V_1 \neq \emptyset \;\&\; \dots \;\&\; F \cap V_{n-1} \neq \emptyset)\} \\
&= \mathcal{F}_V \cup \mathcal{F}^{V \cup V_1} \cup \mathcal{F}^{V \cup V_2}_{V_1} \cup \dots \cup \mathcal{F}^{V \cup V_n}_{V_1,\dots,V_{n-1}}
\end{aligned}$$

$\mathcal{Y}^C$ je konačna unija skupova iz $\mathfrak{D}$ pa pripada skupu $\mathfrak{D}$.

3. $\mathfrak{D}$ je po pretpostavci zatvorena na konačne presjeke.

Pretpostavimo da vrijedi $\mathcal{Y} = \mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n}$ te da je za neke $i \neq j$ $V_i \subseteq V \cup V_j$. Tada skup V_j možemo izbaciti bez da promijenimo $\mathcal{Y}$, vidi Sliku 2.8.



Slika 2.8: Primjer reducirane reprezentacije od $\mathcal{Y}$ preko skupa V_i odnosno V_j.

Dakle, možemo zaključiti da postoji reducirana reprezentacija za $\mathcal{Y}$ (2.23). Pretpostavimo da imamo dvije reducirane reprezentacije $\mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n}$ i $\mathcal{F}^{V'}_{V'_1,...,V'_k}$ za neprazan skup $\mathcal{Y}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da postoji točka $x \in V' \backslash V$. Kako je $\mathcal{Y} \neq \emptyset$, postoji k točaka (od kojih neke mogu biti iste) $x_1, ..., x_k$ takvih da je $x_j \in V'_j \backslash V'$ za $1 \leq j \leq k$ i

$$\{x_1, ..., x_k\} \in \mathcal{F}^{V'}_{V'_1,...,V'_k} = \mathcal{Y} = \mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n}$$

Kako $x \notin V$, vrijedi $\{x, x_1, ..., x_k\} \in \mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n}$, no $x \in V'$ pa $\{x, x_1, ..., x_k\} \notin \mathcal{F}^{V'}_{V'_1,...,V'_k}$ pa smo došli do kontradikcije. Dakle, mora vrijediti $V = V'$.

Izaberimo sada $y \in V_n \backslash V$ i $y_i \in V_i \backslash (V \cup V_n)$, $i = 1, ..., n-1$. Kako je $\{y_1, ..., y_{n-1}\} \cap V_n = \emptyset$, to je $\{y_1, ..., y_{n-1}\} \notin \mathcal{Y}$ i $\{y, y_1, ..., y_{n-1}\} \in \mathcal{Y}$ pa postoji $j_n \in \{1, ..., k\}$ takav da je $y \in V'_{j_n}$ i $y_i \notin V'_{j_n}$ za $i = 1, ..., n-1$. Za proizvoljnu točku $y' \in V_n \backslash V$ možemo slično zaključiti da je $y' \in V'_{j_n}$ pa je $V_n \backslash V \subseteq V'_{j_n}$ i $V_n \subseteq V \cup V'_{j_n}$. Koristeći iste argumente u suprotnom smjeru, dobivamo $V'_{j_n} \backslash V \subseteq V_{i_n}$. Ako je $i_n \neq n$, dobivamo $V_n \subseteq V \cup V'_{j_n} = V \cup (V'_{j_n} \backslash V) \subseteq V \cup V_{i_n}$

što je kontradikcija s pretpostavkom da $\mathcal{Y}$ ima reduciranu reprezentaciju. Dakle, mora vrijediti $i_n = n$ pa je $V_n \cup V \subseteq V \cup V'_{j_n} \subseteq V \cup V_n$, tj. $V \cup V'_{j_n} = V \cup V_n$. Da bismo proveli dokaz do kraja, koristili bismo iste argumente za svaki skup V_i, $i = 1, ..., n-1$. ■

Lema 2.33 *Uz oznake iz Leme 2.32 neka je T potpuno alternirajući funkcional na $\mathcal{V}$ takav je $T(\emptyset) = 0$, $0 \leq T \leq 1$. Tada postoji jedinstveno aditivno preslikavanje $\mathbb{P} : \mathfrak{D} \to [0,1]$ takvo da je $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ i $\mathbb{P}(\mathcal{F}_V) = T(V)$ za svaki $V \in \mathcal{V}$. Ovo preslikavanje dano je s*

$$\mathbb{P}(\mathcal{Y}) = -\Delta_{V_n} ... \Delta_{V_1} T(V) \tag{2.26}$$

gdje je $\mathcal{Y} = \mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n}$ bilo koja reprezentacija za $\mathcal{Y} \in \mathfrak{D}$.

Dokaz. Lako se pokaže da vrijedi $\mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n} \cup \mathcal{F}^{V \cup V_n}_{V_1,...,V_{n-1}} = \mathcal{F}^V_{V_1,...,V_{n-1}}$ pa iz svojstva aditivnosti preslikavanja $\mathbb{P}$ dobivamo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n}) + \mathbb{P}(\mathcal{F}^{V \cup V_n}_{V_1,...,V_{n-1}}) &= \mathbb{P}(\mathcal{F}^V_{V_1,...,V_{n-1}}) \\ \mathbb{P}(\mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n}) &= \mathbb{P}(\mathcal{F}^V_{V_1,...,V_{n-1}}) - \mathbb{P}(\mathcal{F}^{V \cup V_n}_{V_1,...,V_{n-1}}) \end{aligned} \tag{2.27}$$

iz čega direktno vidimo da je jedino aditivno proširenje za $\mathbb{P}(\mathcal{F}_V) = T(V)$ dano s (2.26). Lako se pokaže da se desna strana jednakosti (2.26) neće promijeniti ako bilo koju reprezentaciju od $\mathcal{Y}$ zamijenimo s reduciranom reprezentacijom. Matematičkom indukcijom pokažimo da vrijedi:

$$\Delta_{V_n} ... \Delta_{V_1} T(V) = \Delta_{V_n \cup V} ... \Delta_{V_1 \cup V} T(V) \tag{2.28}$$

(BI) Za $n = 1$ vrijedi:

$$\begin{aligned} \Delta_{V_1 \cup V} T(V) &\overset{(2.6)}{=} T(V) - T(V \cup (V_1 \cup V)) \\ &= T(V) - T(V_1 \cup V) \\ &\overset{(2.6)}{=} \Delta_{V_1} T(V) \end{aligned}$$

(PI) Pretpostavimo da za neki $n-1 \in \mathbb{N}\backslash 1$ vrijedi

$$\Delta_{V_n}...\Delta_{V_1}T(V) = \Delta_{V_n\cup V}...\Delta_{V_1\cup V}T(V)$$

(KI) Dokažimo tvrdnju za n

$$\begin{aligned}
\Delta_{V_n\cup V}...\Delta_{V_1\cup V}T(V) &\overset{(2.7)}{=} \Delta_{V_{n-1}\cup V}...\Delta_{V_1\cup V}T(V) - \Delta_{V_{n-1}\cup V}...\Delta_{V_1\cup V}T(V\cup(V_n\cup V)) \\
&= \Delta_{V_{n-1}\cup V}...\Delta_{V_1\cup V}T(V) - \Delta_{V_{n-1}\cup V}...\Delta_{V_1\cup V}T(V_n\cup V) \\
&\overset{(PI)}{=} \Delta_{V_{n-1}}...\Delta_{V_1}T(V) - \Delta_{V_{n-1}}...\Delta_{V_1}T(V_n\cup V) \\
&\overset{(2.7)}{=} \Delta_{V_n}...\Delta_{V_1}T(V)
\end{aligned}$$

S obzirom da vrijedi (2.28) po Lemi 2.32 slijedi da je $\mathbb{P}(\mathcal{Y})$ jednako za svaku reduciranu reprezentaciju od $\mathcal{Y}$. Kako je T potpuno alternirajući, to je $\mathbb{P}$ nenegativna funkcija i vrijedi $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\mathcal{F}_\emptyset) = T(\emptyset) = 0$. Iz (2.27) slijedi:

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n}) \leq \mathbb{P}(\mathcal{F}^V_{V_1,...,V_{n-1}}) \leq ... \leq \mathbb{P}(\mathcal{F}^V) = 1-\mathbb{P}((\mathcal{F}^V)^C) \overset{(2.22)}{=} 1-\mathbb{P}(\mathcal{F}_V) = 1-T(V) \leq 1$$

Ostaje pokazati da je $\mathbb{P}$ aditivna. Neka su $\mathcal{Y}$ i $\mathcal{Y}'$ dva disjunktna neprazna elementa iz $\mathfrak{D}$ s pripadnim reduciranim reprezentacijama

$$\mathcal{Y} = \mathcal{F}^V_{V_1,...,V_n},\ \mathcal{Y}' = \mathcal{F}^{V'}_{V_1',...,V_k'},$$

takvi da je $\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}' \in \mathfrak{D}$. Kako je

$$\mathcal{Y}\cap\mathcal{Y}' = \mathcal{F}^{V\cup V'}_{V_1,...,V_n,V_1',...,V_k'} = \emptyset,$$

ne postoji skup $F \in \mathcal{F}$ takav da, bez smanjenja općenitosti, vrijedi $F\cap V = \emptyset$, $F\cap V' = \emptyset$ i $F\cap V_n \neq \emptyset$ pa možemo pretpostaviti da je $V_n \subseteq V\cup V'$. Kako je $\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}' \in \mathfrak{D}$, ovu unija ima svoju reduciranu reprezentaciju

$$\mathcal{Y}\cup\mathcal{Y}' = \mathcal{F}^{V''}_{V_1'',...,V_m''}.$$

Ako je $V = \mathbb{R}^d$, onda je $\mathcal{Y} = \{\emptyset\}$ ako su svi $V_i = \emptyset$ za $i = 1,...,n$, a $\mathcal{Y} = \emptyset$ inače pa aditivnost trivijalno vrijedi. Pretpostvaimo da postoji $x \notin V$ i

$x_i \in V_i \backslash V$, $i = 1, ..., n$. Tada je $F = \{x, x_1, ..., x_n\} \in \mathcal{Y}$. Kako je $F \in \mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}'$, slijedi $F \cap V'' = \emptyset$ pa $x \notin V''$. Sada slijedi $V'' \subseteq V$. Slično se pokaže $V'' \subseteq V'$ pa je $V'' \subseteq V \cap V'$. Pokažimo da je $V'' = V$. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji točka $x \in V \backslash V''$ i $x' \in V' \backslash V''$. Izaberimo točke $x_i'' \in V_i'' \backslash V''$ za $i = 1, ..., m$. Tada je $\{x, x', x_1'', ..., x_m''\} \in \mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}'$ pa je $\{x, x'\} \cap V = \emptyset$ ili $\{x, x'\} \cap V' = \emptyset$ što u oba slučaje daje kontradikciju pa možemo zaključiti da je $V = V''$ ili $V' = V''$. Kada bi vrijedilo $V' = V''$, imali bismo $V_n \subseteq V \cup V' = V$ iz čega slijedi $\mathcal{Y} = \emptyset$ što nije istina pa zaključujemo da vrijedi $V = V''$. Sada iz toga i $V'' \subseteq V \cap V'$ slijedi $V \subseteq V \cap V'$ što je jedino moguće ako je $V \subseteq V'$. Nadalje, $V_n \subseteq V \cup V' \subseteq V' \cup V' = V'$ pa je $V_n \subseteq V'$. Za svaki $F \in \mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}'$ uvjet $F \cap V_n \neq \emptyset$ povlači $F \notin \mathcal{Y}'$ pa je, zbog $F \in \mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}'$, $F \in \mathcal{Y}$, dok $F \cap V_n = \emptyset$ povlači $F \notin \mathcal{Y}$ pa je $F \in \mathcal{Y}'$. Kako je $\mathcal{Y} \subseteq (\mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}') \cap \mathcal{F}_{V_n} \subseteq \mathcal{Y}$ i $\mathcal{Y}' \overset{V_n \subseteq V'}{\subseteq} (\mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}') \cap \mathcal{F}^{V_n} \subseteq \mathcal{Y}'$, vrijedi

$$\mathcal{Y} = (\mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}') \cap \mathcal{F}_{V_n} = \mathcal{F}^{V''}_{V_1'', ..., V_m''} \cap \mathcal{F}_{V_n} \overset{V = V''}{=} \mathcal{F}^{V}_{V_1'', ..., V_m'', V_n}$$
$$\mathcal{Y}' = (\mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}') \cap \mathcal{F}^{V_n} = \mathcal{F}^{V''}_{V_1'', ..., V_m''} \cap \mathcal{F}^{V_n} \overset{V = V''}{=} \mathcal{F}^{V \cup V_n}_{V_1'', ..., V_m''}$$

pa je

$$\begin{aligned}
-\mathbb{P}(\mathcal{Y}) &= \Delta_{V_n} \Delta_{V_m''} ... \Delta_{V_1''} T(V) \\
&= \Delta_{V_m''} ... \Delta_{V_1''} T(V) - \Delta_{V_m''} ... \Delta_{V_1''} T(V \cup V_n) \\
&\overset{V = V''}{=} \Delta_{V_m''} ... \Delta_{V_1''} T(V'') - \Delta_{V_m''} ... \Delta_{V_1''} T(V \cup V_n) \\
&= -\mathbb{P}(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}') - (-\mathbb{P}(\mathcal{Y}')) \\
&= -\mathbb{P}(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}') + \mathbb{P}(\mathcal{Y}'),
\end{aligned}$$

tj.

$$\mathbb{P}(\mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}') = \mathbb{P}(\mathcal{Y}) + \mathbb{P}(\mathcal{Y}')$$

pa zaključujemo da je $\mathbb{P}$ aditivna na $\mathfrak{D}$. ■

Lema 2.34 *Neka je T potpuno alternirajući odozgo poluneprekidni funkcional na $\mathcal{K}$. Istim slovom označimo njegovo proširenje definirano s (2.14) i*

(2.15). *Neka su G i G_0 bilo koja dva otvorena skupa, $K \in \mathcal{K}$ proizvoljan, niz $\{K_n, n \geq 1\} \subseteq \mathcal{K}$ takav da $K_n \uparrow G$ i niz $\{G_n, n \geq 1\} \subseteq \mathcal{G}$ takav da $G_n \downarrow K$ te $G_n \supseteq cl(G_{n+1}) \in \mathcal{K}$ za svaki $n \geq 1$. Tada je*

$$T(G_0 \cup K \cup G) = \lim_{n \to \infty} T(G_0 \cup G_n \cup G)$$

Dokaz. Kako je T monotono rastući, to je

$$T(G_0 \cup K \cup K_n) \leq T(G_0 \cup G_n \cup K_n) \leq T(G_0 \cup G_n \cup G).$$

Za svaki otvoreni $G' \supseteq G_0 \cup G \cup K$ imamo $G' \supseteq G_n$ za dovoljno veliki n. Iz (2.15) slijedi $T(G_0 \cup G_n \cup G) \downarrow T(G_0 \cup K \cup G)$. Slično $T(G_0 \cup K \cup K_n)$ konvergira prema $T(G_0 \cup K \cup G)$ jer je T odozgo poluneprekidna. ∎

Dokažimo sada dovoljnost u Choquetovu teoremu:

Funkcional $T : \mathcal{K} \to [0, 1]$ takav da vrijedi $T(\emptyset) = 0$ funkcional je kapaciteta jedinstvenog slučajnog zatvorenog skupa u $\mathbb{R}^d$ ako i samo ako je T odozgo poluneprekidni potpuno alternirajući funkcional.

Dokaz. Neka je $\mathcal{V}$ familija skupova $V = G \cup K$ gdje je $G \in \mathcal{G}$ i $K \in \mathcal{K}$. T je moguće proširiti do potpuno alternirajućeg kapaciteta na $\mathcal{V}$. Po Lemi 2.33 formula (2.26) određuje aditivno preslikavanje iz $\mathfrak{D}$ u $[0, 1]$. Primijetimo da $\mathfrak{D}$ generira σ-algebru $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. Uz poznavanje rezultata o proširenju mjere definirane na algebri na pripadnu σ-algebru (vidi [19], Prop. I.6.2) dovoljno je pronaći familiju $\mathfrak{D}' \subseteq \mathfrak{D}$ koja sadrži kompaktne skupove (u Fellovoj topologiji na $\mathcal{F}$) takve da za svaki $\mathcal{Y} \in \mathfrak{D}$ vrijedi

$$\mathbb{P}(\mathcal{Y}) = \sup\{\mathbb{P}(\mathcal{Y}') : \mathcal{Y}' \in \mathfrak{D}'\}. \tag{2.29}$$

Neka $\mathfrak{D}'$ sadrži skupove $\mathcal{F}^G_{K_1,\dots,K_n}$, gdje je $n \geq 0$, $G \in \mathcal{G}$ i $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{K}$. Tada su elementi iz $\mathfrak{D}'$ kompaktni u Fellovoj topologiji i $\mathfrak{D}' \subseteq \mathfrak{D}$. Ostaje pokazati (2.29).

Neka je $\mathcal{Y} = \mathcal{F}^{V}_{V_1,...,V_n} \in \mathfrak{D}$, $V = G_0 \cup K_0$, $G_0 \in \mathcal{G}$, $K_0 \in \mathcal{K}$. Postoji niz $\{G_k, k \geq 1\}$ otvorenih skupova takvih da $G_k \downarrow K_0$ i $G_k \supseteq cl(G_{k+1}) \in \mathcal{K}$ za svaki $k \geq 1$. Dakle, V je limes padajućeg niza otvorenih skupova $G_0 \cup G_k$. Slično, za svaki $i \in \{1, ..., n\}$ V_i možemo dobiti kao limes rastućeg niza $\{K_i, k \geq 1\}$ kompaktnih skupova. Definiramo $\mathcal{Y}_k = \mathcal{F}^{G_0 \cup G_k}_{K_{1k},...,K_{nk}}$. Tada je $\mathcal{Y}_k \in \mathfrak{D}'$ i $\mathcal{Y}_k \uparrow \mathcal{Y}$ kad $k \to \infty$. Kako bismo pokazali da vrijedi $\mathbb{P}(\mathcal{Y}_k) \uparrow \mathbb{P}(\mathcal{Y})$, primijetimo sljedeće:

$$\mathbb{P}(\mathcal{Y}) = -T(V) + \sum_i T(V \cup V_i) - \sum_{i_1 < i_2} T(V \cup V_{i_1} \cup V_{i_2}) + ...,$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{Y}_k) = -T(G_0 \cup G_k) + \sum_i T(G_0 \cup G_k \cup K_{ik}) - \sum_{i_1 < i_2} T(G_0 \cup G_k \cup K_{i_1 k} \cup K_{i_2 k}) + ...$$

Kako su obje gornje sume konačne i, po Lemi 2.34, svaki sumand u drugoj sumi konvergira prema odgovarajućem sumandu u prvoj sumi, vrijedi $\mathbb{P}(\mathcal{Y}_k) \uparrow \mathbb{P}(\mathcal{Y})$. ■

Sada ćemo se baviti dokazom koji se bazira na harmonijskoj analizi. Familija $\mathcal{K}$ kompaktnih skupova je Abelova polugrupa s obzirom na operaciju unije. Unija je idempotentna operacija, tj. vrijedi $K \cup K = K$. Ključna ideja dokaza je identificirati sve (neprekidne u nekom smislu) polukaraktere na $(\mathcal{K}, \cup)$ kao elemente iz $\mathcal{F}$. Neka je $\mathcal{I}$ skup svih podpolugrupa I od $(\mathcal{K}, \cup)$ koje zadovoljavaju

$$K, L \in I \Rightarrow K \cup L \in I \qquad i \qquad K \subseteq L, L \in I \Rightarrow K \in I \tag{2.30}$$

Definiramo $\tilde{K} = \{I \in \mathcal{I} : K \in I\}$ i snabdijemo $\mathcal{I}$ najgrubljom topologijom u kojoj su skupovi $\tilde{K}$ i $\mathcal{I} \backslash \tilde{K}$ otvoreni za svaki $K \in \mathcal{K}$. Označimo s $\mathbb{1}_I$ preslikavanje $\mathbb{1}_I(K) = \mathbb{1}_{K \in I}$ iz $\mathcal{K}$ u $[0, 1]$. Nadalje, $\mathcal{I}_r$ označava skup svih $I \in \mathcal{I}$ takvih da je $\mathbb{1}_I$ odozgo poluneprekidna funcija.

Lema 2.35 *Za $F \in \mathcal{F}$ neka je $I_F = \mathcal{K}^F = \{K \in \mathcal{K} : K \cap F = \emptyset\}$. Tada* *je funkcija* $F \mapsto I_F$ *bijekcija između* $\mathcal{F}$ *i* $\mathcal{I}_r$ *i inverzno preslikavanje je* $I \mapsto \mathbb{R}^d \backslash \bigcup_{K \in I} int(K)$.

Dokaz. Primijetimo da je $I_F \in \mathcal{I}$. Naime, vrijedi

- ako su $K, L \in I_F$, tj. $K \cap F = \emptyset$ i $L \cap F = \emptyset$, onda je $(K \cup L) \cap F = \emptyset$, tj. $K \cup L \in I_F$
- ako je $K \subseteq L$ i $L \in I$, tj. $L \cap F = \emptyset$, onda je $K \cap F = \emptyset$, tj. $K \in I$.

Pokažimo da je $\{I_F : F \in \mathcal{F}\} = \mathcal{I}_r$, tj. da je traženo preslikavanje surjektivno. Ako je $K \cap F = \emptyset$, onda postoji otvorena okolina od K koja ne siječe F pa je funcija $\mathbb{1}_{I_F}$ odozgo poluneprekidna. Neka je $I \in \mathcal{I}_r$. Za svaki $K \in I$ familija I sadrži okolinu od K s njezinim kompaktnim zatvorenjem, dakle

$$\bigcup_{K \in I} K = \bigcup_{K \in I} int(K).$$

Dakle, $F = \mathbb{R}^d \backslash \bigcup_{K \in I} int(K)$ je zatvoren i $I \subseteq I_F$. Ako je $L \in I_F$, onda se L može pokriti s $\{int(K) : K \in I\}$. Kako je L kompaktan, otvoreni pokrivač od L može se reducirati na konačan potpokrivač pa L možemo prekriti i s konačno mnogo kompaktnih skupova iz I, tj.

$$L \subseteq int(K_1) \cup ... \cup int(K_n) \subseteq K_1 \cup ... \cup K_n.$$

Zbog (2.30) vrijedi $L \in I$ pa je $I = I_F$. Konačno, ako su F_1 i F_2 različiti zatvoreni skupovi i $x \in F_1 \backslash F_2$, onda je $\{x\} \in I_{F_2} \backslash I_{F_2}$ pa je $I_{F_1} \neq I_{F_2}$, tj. traženo preslikavanje je injektivno pa, uz prethodno pokazanu surjektivnost, zaključujemo da vrijedi bijektivnost. ■

Dokažimo sada jaču tvrdnju.

Propozicija 2.36 *Preslikavanje* $c : \mathcal{I} \to \mathcal{F}$ *definirano s*

$$c(I) = \mathbb{R}^d \backslash \bigcup_{K \in I} int(K)$$

neprekidno je na $\mathcal{I}$ s obzirom na Fellovu topologiju na $\mathcal{F}$ te bijektivno preslikava $\mathcal{I}_r$ u $\mathcal{F}$.

Dokaz. Po karakterizaciji neprekidnosti, dovoljno je pokazati da su $c^{-1}(\mathcal{F}^K)$ i $c^{-1}(\mathcal{F}_G)$ otvoreni u $\mathcal{I}$ za $K \in \mathcal{K}$ i $G \in \mathcal{G}$. Primijetimo da je $c(I) \cap K = \emptyset$ ekvivalentno postojanju skupa $L \in I$ za kojeg vrijedi $K \subseteq int(L)$. Dakle, vrijedi

$$c^{-1}(\mathcal{F}^K) = \bigcup_{L \in \mathcal{K}, K \subseteq int(L)} \tilde{L} \tag{2.31}$$

pa možemo zaključiti da je $c^{-1}(\mathcal{F}^K)$ otvoren u $\mathcal{I}$ jer je $\tilde{L}$ otvoren. Slično, $c(I) \cap G \neq \emptyset$ ekvivalentno postojanju skupa $K \in \mathcal{K} \backslash I$ za kojeg vrijedi $K \subseteq G$. Dakle, skup

$$c^{-1}(\mathcal{F}_G) = \bigcup_{K \in \mathcal{K}, K \subseteq G} (\mathcal{I} \backslash \tilde{K})$$

je otvoren u $\mathcal{I}$. ■

Pogledajmo sada jedan drugačiji dokaz Choquetova teorema.

Dokaz. Neka je T odozgo poluneprekidni potpuno alternirajući kapacitet takav da je $T(\emptyset) = 0$ i $0 \leq T \leq 1$. Iz uvjeta odozgo poluneprekidnosti slijedi

$$Q(K) = \sup\{Q(L) : L \in \mathcal{K}, K \subseteq int(L)\},$$

gdje je $Q(K) = 1 - T(K)$. Primijetimo da je $\mathcal{I}$ izomorfan skupu polukaraktera na $(\mathcal{K}, \cup)$, tj. skupu svih preslikavanja iz $\mathcal{K}$ u $\mathbb{R}$ koji zadovoljavaju $\chi(\emptyset) = 1$, $\chi(K \cup L) = \chi(K)\chi(L)$. Po Teoremu 1.39 slijedi da je funkcional $Q = 1 - T$ pozitivno definitan na $\mathcal{K}$, tj.

$$\sum_{i,j=1}^{n} c_i \overline{c_j} Q(K_i \cup K_j) \geq 0$$

za kompleksne $c_1, ..., c_n$, $n \geq 1$, gdje $\overline{c_i}$ označava kompleksno konjugirani par broja C_i. Po Teoremu 1.40, postoji mjera ν na $\mathcal{I}$ za koju vrijedi

$$Q(K) = \nu(\{I \in \mathcal{I} : K \in I\}) = \nu(\tilde{K}).$$

Sada po (2.31) i svojstvu neprekidnosti Radonove mjere ($\sup_\alpha \nu(G_\alpha) = \nu(\bigcup_\alpha G_\alpha)$ za rastuću familiju otvorenih skupova G_α) slijedi

$$\nu(\bigcup_{L \in \mathcal{K}, K \subseteq int(L)} \tilde{L}) = \sup\{\nu(\tilde{L}) : L \in \mathcal{K}, K \subseteq int(L)\} = \nu(c^{-1}(\mathcal{F}^K)).$$

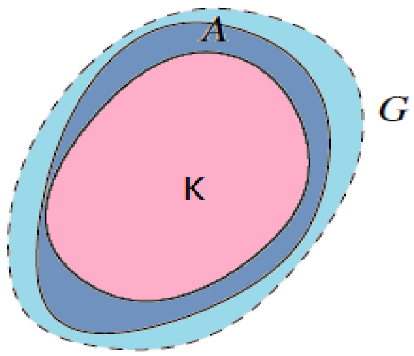
Dakle, $Q(K) = \mu(\mathcal{F}^K)$, gdje je μ slika mjere ν po neprekidnom preslikavanju $c : \mathcal{I} \to \mathcal{F}$. Jedinstvenost direktno slijedi jer skupovi $\mathcal{F}^K_{K_1,\ldots,K_n}$ generiraju $\mathcal{B}(\mathcal{F})$. ■

2.5 Razdvajajuće klase

Choquetov nam teorem kazuje kako vjerojatnosna mjera na $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ može biti određena svojim vrijednostima na $\mathcal{F}_K$ za $K \in \mathcal{K}$, tj. funkcionalom kapaciteta na $\mathcal{K}$. Međutim, funkcional kapaciteta definiran na cijeloj familiji kompaktnih skupova $\mathcal{K}$ prilično je teško konstruirati jer je familija $\mathcal{K}$ dosta bogata, a općenito je komplicirano i provjeriti uvjete potpunog alterniranja. U nekim slučajevima moguće je smanjiti familiju kompaktnih skupova tako da se odozgo poluneprekidni potpuno alternirajući funkcional na ovoj familiji proširuje na jedinstvenu vjerojatnosnu mjeru na $\mathcal{B}(\mathcal{F})$, tj. definira distribuciju jedinstvenog slučajnog zatvorenog skupa. U nastavku ćemo se baviti mogućnostima ograničavanja funkcionala kapaciteta na način da ograničenje određuje distribuciju općeg slučajnog zatvorenog skupa. Označimo s $\mathcal{B}_k = \{B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) : cl(B) \in \mathcal{K}\}$ familiju svih relativno kompaktnih Borelovih skupova u $\mathbb{R}^d$.

Definicija 2.37 *Kažemo da je klasa $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_k$ **razdvajajuća** ako je $\emptyset \in \mathcal{A}$ i za svaki $K \in \mathcal{K}$ i $G \in \mathcal{G}$ takve da je $K \subseteq G$ postoji $A \in \mathcal{A}$ takav da je $K \subseteq A \subseteq G$. Za familiju skupova $\mathcal{A}_0$ kažemo da je **predrazdvajajuća** klasa ako familija konačnih unija skupova iz $\mathcal{A}_0$ čini razdvajajuću klasu.*

Primjer skupa iz razdvajajuće klase prikazan je na Slici 2.9.



Slika 2.9: Skup A iz razdvajajuće klase.

Kako je $\mathbb{R}^d$ lokalno kompaktni Hausdorffov prostor koji zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, za svaki par $K \subseteq G$ iz Definicije 2.37 postoji otvoreni skup G_1 s kompaktnim zatvaračem $cl(G_1)$ takav da je $K \subseteq G_1 \subseteq cl(G_1) \subseteq G$. Iz Definicije 2.37 slijedi i postojanje skupa $A \in \mathcal{A}$ takvog da je $K \subseteq int(A) \subseteq cl(A) \subseteq G$. Budući da $\mathbb{R}^d$ zadovoljava drugi aksiom prebrojivosti, svaka razdvajajuća klasa sadrži prebrojivu razdvajajuću podklasu.

Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ rastuća funkcija na razdvajajućoj klasi $\mathcal{A}$. Definiramo njezino vanjsko proširenje φ^- i unutarnje proširenje φ^0 na sljedeći način:

$$\varphi^-(K) = \inf\{\varphi(A) : A \in \mathcal{A}, K \subseteq int(A)\}, K \in \mathcal{K},$$

$$\varphi^0(G) = \sup\{\varphi(A) : A \in \mathcal{A}, cl(A) \subseteq G\}, G \in \mathcal{G}.$$

Ako je φ_1 restrikcija funkcije φ na razdvajajuću podklasu $\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}$, onda je $\varphi_1^- = \varphi^-$ i $\varphi_1^0 = \varphi^0$. Primijetimo da je $\varphi^{--} = \varphi^{0-} = \varphi^-$ i $\varphi^{00} = \varphi^{-0} = \varphi^0$.

Definicija 2.38 *Kažemo da je skup $B \in \mathcal{B}_k$* ***skup kontinuiteta*** *funkcije φ ako je*

$$\varphi^0(int(B)) = \varphi^-(cl(B))$$

gdje dopuštamo $\infty = \infty$.

Označimo s $\mathfrak{G}_\varphi$ familiju skupova kontinuiteta za φ. Familija $\mathfrak{G}_\varphi \cap \mathcal{K}$ (i $\mathfrak{G}_\varphi$) je i sama razdvajajuća klasa. Za svaki par $K \subseteq G$ takav da je $cl(G) \in \mathcal{K}$ neka je K_t, $0 \leq t \leq 1$ rastuća familija kompaktnih skupova takva da je $K_0 = K$ i $K_t \uparrow G$ kad $t \uparrow 1$. Tada postoji najviše prebrojivo t takvih da je $K_t \notin \mathfrak{G}_\varphi$, dakle možemo odabrati bilo koji drugi $K_s \in \mathfrak{G}_\varphi$ kao razdvajajući skup za K i G.

Ako je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$ i φ odozgo poluneprekidna na $\mathcal{A}$, onda je $\varphi^- = \varphi$.

Teorem 2.39 *Neka je $\mathcal{A}$ razdvajajuća klasa zatvorena na konačne unije. Neka je $\varphi : \mathcal{A} \to [0,1]$ potpuno alternirajuća funkcija na $\mathcal{A}$ za koju vrijedi $\varphi(\emptyset) = 0$. Tada postoji jedinstveni slučajni skup $\boldsymbol{X}$ s funkcionalom kapaciteta $T(K) = \varphi^-(K)$ za svaki $K \in \mathcal{K}$. Posebno, ako je $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{K}$ i φ odozgo poluneprekidni potpuno alternirajući funkcional na $\mathcal{A}$, onda postoji jedistveni slučajni skup s funkcionalom kapaciteta $T = \varphi$ na $\mathcal{A}$.*

Dokaz. Ako je φ potpuno alternirajući funkcional, onda je i φ^- potpuno alternirajući funkcional. Primijetimo još da je φ^- odozgo poluneprekidan pa traženu tvrdnju možemo dobiti primjenom Choquetova teorema na φ^-. ■

Važne razdvajajuće klase su familija $\mathcal{K}_{ub}$ svih konačnih unija kugli pozitivnog radijusa i klasa $\mathcal{K}_{up}$ svih konačnih unija paralelepipeda. Obje ove klase mogu se zamijeniti svojim prebrojivim podfamilijama kugli s racionalnim središtima i polumjerima te paralelepipeda s racionalnih vrhovima. Na ove posebne slučajeve odnosit će se sljedeća propozicija.

Propozicija 2.40 *Neka je $\mathcal{K}_0$ familija zatvorenja svih relativno kompaktnih skupova iz baze topologije na $\mathbb{R}^d$. Tada je $\mathcal{K}_0$ razdvajajuća klasa i za svaki funkcional kapaciteta T na $\mathcal{K}_0$ postoji jedinstveni slučajni zatvoreni skup $\boldsymbol{X}$*

takav da je za svaki $K \in \mathcal{K}_0$

$$T(K) = \mathbb{P}\{\boldsymbol{X} \cap K = \emptyset\}.$$

Primjer 2.41 *Neka je* $d = 1$*, tj. promatrajmo realni pravac* $\mathbb{R}$*. Razmotrimo familiju* $\mathcal{K}_0$ *koja se sastoji konačnih unija zatvorenih ograničenih segmenata. Po Propoziciji 2.40 slijedi da vrijednosti funkcionala kapaciteta* T *na* $\mathcal{K}_0$ *jednoznačno određuju distribuciju slučajnog zatvorenog podskupa od* $\mathbb{R}$*. Lako se pokaže da je* T *odozgo poluneprekidan na* $\mathcal{K}_0$ *ako i samo ako je* $T([a, b])$ *zdesna neprekidno s obzirom na* b *i slijeva neprekidno s obzirom na* a*.*

2.6 Slučajni kompaktni skupovi

Kako je $\mathbb{R}^d$ lokalno kompaktan, to je familija $\mathcal{K}$ svih kompaktnih skupova izmjeriva podklasa od $\mathcal{F}$, tj. $\mathcal{K} \in \mathcal{B}(\mathcal{F})$. Štoviše, vrijedi

$$\mathcal{K} = \bigcup_{n \geq 1} \{F \in \mathcal{F} : F \subseteq K_n\}$$

gdje je $\{K_n, n \geq 1\}$ niz kompaktnih skupova takvih da $K_n \uparrow \mathbb{R}^d$ kada $n \to \infty$.

Napomena 2.42 *Primijetimo da gornji izraz ima smisla jer vrijedi tvrdnja.*

Svaki zatvoreni podskup $F \subseteq X$ *kompaktnog prostora* X *je kompaktan.*

Definicija 2.43 *Slučajni zatvoreni skup* $\boldsymbol{X}$ *naziva se* ***slučajni kompaktni skup*** *ako su mu vrijednosti gotovo sigurno kompaktne (tj.* $\boldsymbol{X} \in \mathcal{K}$ *(g.s.)).*

Upoznajmo se sada ukratko s kratkovidnom topologijom na $\mathcal{K}$.

Kratkovidna topologija na $\mathcal{K}$ ima podbazu koja se sastoji od

$$\mathcal{K}^F = \{K \in \mathcal{K} : K \cap F = \emptyset\}, F \in \mathcal{F}$$

$$\mathcal{K}_G = \{K \in \mathcal{K} : K \cap G \neq \emptyset\}, G \in \mathcal{G}$$

Uspoređujući navedene familije s podbazom Fellove topologije na $\mathcal{F}$ lako se vidi da je kratkovidna topologija jača od topologije inducirane na $\mathcal{K}$ iz Fellove topologije. Npr. skup $K_n = \{0, n\}$ konvergira u Fellovoj topologiji prema $\{0\}$, ali ne konvergira u $\mathcal{K}$, što objašnjava činjenicu da $\mathcal{K}$ s kratkovidnom topologijom nije kompaktan prostor, već samo lokalno kompaktan.

Sada je moguće konstruirati slučajni kompaktni skup na alternativni način, tj. direktno kao slučajni element čija je vrijednost iz $\mathcal{K}$. Kratkovidna topologija na $\mathcal{K}$ generira Borelovu σ-algebru $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ na $\mathcal{K}$ koja se može koristiti za definiranje slučajnog kompaktnog skupa kao izmjerivog preslikavanja s vrijednostima u $\mathcal{K}$, tj. $\mathbf{X} : \Omega \to \mathcal{K}$. Može se pokazati da je σ-algebra $\mathcal{B}(\mathcal{K})$ generirana skupovima $\{K \in \mathcal{K} : K \cap G \neq \emptyset\}$ za $G \in \mathcal{G}$. Kako je $\mathbb{R}^d$ lokalno kompaktan, svaki se otvoreni skup može aproksimirati kompaktnim skupovima, odakle je $\mathcal{B}(\mathcal{K}) = \mathcal{B}(\mathcal{F}) \cap \mathcal{K}$, tj. Borelova σ-algebra na K podudara se s tragom σ-algebre $\mathcal{B}(\mathcal{F})$ na $\mathcal{K}$. Dakle, primjenom ova dva prirodna pristupa za definiranje slučajnog kompaktnog skupa dobit ćemo isti objekt.

Sljedeći rezultat je svojevrsni teorem o "**zaštićenosti**" distribucija slučajnih kompaktnih skupova.

Teorem 2.44 *Neka je $\boldsymbol{X}$ slučajni kompaktni skup u $\mathbb{R}^d$. Za svaki $\epsilon > 0$ postoji $K \in \mathcal{K}$ takav da je $\mathbb{P}\{\boldsymbol{X} \subseteq K\} \geq 1 - \epsilon$.*

Dokaz. Neka je $Q = \{x_k, k \geq 1\}$ prebrojiv gust skup u $\mathbb{R}^d$ i $m \in \mathbb{N}$. Primijetimo da vrijedi (uz oznaku $B_r(x)$ za zatvorenu kuglu radijusa r sa središtem u x)

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\mathbf{X} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{1/m}(x_k)\right\} = 1.$$

Odaberimo $n = n_m$ takav da je

$$\mathbb{P}\left\{\mathbf{X} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{1/m}(x_k)\right\} \geq 1 - \frac{\epsilon}{2^m},$$

tj.

$$\mathbb{P}\Big\{\mathbf{X} \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{1/m}(x_k)\Big\} = 1 - \mathbb{P}\Big\{\mathbf{X} \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} B_{1/m}(x_k)\Big\} \leq 1 - (1 - \frac{\epsilon}{2^m}) = \frac{\epsilon}{2^m},$$

Definiramo kompaktni skup K kao

$$K = \bigcap_{m\geq 1} \bigcup_{k=1}^{n_m} B_{1/m}(x_k).$$

Tada je

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\{\mathbf{X} \not\subseteq K\} &= \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K^C \neq \emptyset\} \\
&= \mathbb{P}\Big\{\mathbf{X} \cap \bigcup_{m\geq 1} \Big(\bigcup_{k=1}^{n_m} B_{1/m}(x_k)\Big)^C \neq \emptyset\Big\} \\
&= \mathbb{P}\Big\{\bigcup_{m\geq 1} \Big[\mathbf{X} \cap \Big(\bigcup_{k=1}^{n_m} B_{1/m}(x_k)\Big)^C \neq \emptyset\Big]\Big\} \\
&\leq \sum_{m\geq 1} \mathbb{P}\Big\{\mathbf{X} \not\subseteq \bigcup_{k=1}^{n_m} B_{1/m}(x_k)\Big\} \\
&\leq \sum_{m\geq 1} \frac{\epsilon}{2^m} = \epsilon \sum_{m\geq 1} 2^{-m} = \epsilon.
\end{aligned}$$

pa je $\mathbb{P}\{\mathbf{X} \subseteq K\} = 1 - \mathbb{P}\{\mathbf{X} \not\subseteq K\} \geq 1 - \epsilon$. ■

2.7 Ostali funkcionali vezani uz slučajne skupove

Funkcional kapaciteta $T_{\mathbf{X}}(K)$ definira se kao vjerojatnost da $\mathbf{X}$ pogodi kompaktan skup K i stoga se često naziva funkcional "pogađanja" od $\mathbf{X}$. Moguće je definirati druge funkcionale povezane sa slučajnim zatvorenim skupom $\mathbf{X}$. U ovom ćemo se dijelu rada upoznati s funkcionalima izbjegavanja, sadržavanja i uključivanja.

Definicija 2.45 *Za slučajni zatvoreni skup $\boldsymbol{X}$ kažemo da je*

$$Q_{\boldsymbol{X}}(K) = \mathbb{P}\{\boldsymbol{X} \cap K = \emptyset\}, \ K \in \mathcal{K}$$

funkcional izbjegavanja*,*

$$C_{\boldsymbol{X}}(F) = \mathbb{P}\{\boldsymbol{X} \subseteq F\}, \ F \in \mathcal{F},$$

je ***funkcional sadržavanja*** *i*

$$I_{\boldsymbol{X}}(K) = \mathbb{P}\{K \subseteq \boldsymbol{X}\}, \ K \in \mathcal{K}$$

je ***funkcional uključivanja****.*

Svaki od navedenih funkcionala može se proširiti na familiju otvorenih skupova i svih skupova na sličan način kao kod funkcionala kapaciteta. Uočimo sada neka svojstva gore navedenih funkcionala i njihove međusobne povezanosti. Očito vrijedi:

1.

$$\begin{aligned} Q_{\mathbf{X}}(K) &= \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K = \emptyset\} \\ &= 1 - \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap K \neq \emptyset\} \\ &= 1 - T_{\mathbf{X}}(K), \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} C_{\mathbf{X}}(F) &= \mathbb{P}\{\mathbf{X} \subseteq F\} \\ &= \mathbb{P}\{\mathbf{X} \cap F^C = \emptyset\} \\ &= Q_{\mathbf{X}}(F^C) \\ &\overset{1.}{=} 1 - T_{\mathbf{X}}(F^C), \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{X}}(K) &= \mathbb{P}\{K \subseteq \mathbf{X}\} \\ &= \mathbb{P}\{K \cap \mathbf{X}^C = \emptyset\} \\ &= Q_{\mathbf{X}^C}(K) \\ &\overset{1.}{=} 1 - T_{\mathbf{X}^C}(K). \end{aligned}$$

Principom matematičke indukcije uz gornje relacije lako se pokaže da vrijedi $\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}Q_{\mathbf{X}}(K) = -\Delta_{K_n}...\Delta_{K_1}T_{\mathbf{X}}(K)$ pa kako je funkcional kapaciteta potpuno alternirajući, funkcional izbjegavanja potpuno je $\cup$-monoton na $\mathcal{K}$ (vidi Definiciju 2.15). Slično se pokaže da je funkcional sadržavanja potpuno $\cap$-monoton na $\mathcal{F}$ jer vrijedi relacija $\nabla_{F_n}...{}_{F_1}C_{\mathbf{X}}(F) = -\Delta_{(F_n)^C}...\Delta_{(F_1)^C}T_{\mathbf{X}}(F)$. Funkcional sadržavanja definiran na otvorenim skupovima dualni je funkcional za funkcional kapaciteta po (2.11).

Choquetov teorem može se preformulirati tako da pokazuje da funkcional izbjegavanja $Q_{\mathbf{X}}(K), K \in \mathcal{K}$ jednoznačno određuje distribuciju od $\mathbf{X}$. Isto vrijedi i za funkcional sadržavanja $C_{\mathbf{X}}(F), F \in \mathcal{F}$ definiran na familiji zatvorenih skupova. Funkcional sadržavanja $C_{\mathbf{X}}(K)$ restringiran na $K \in \mathcal{K}$ može biti degeneriran za nekompaktni $\mathbf{X}$ pa tako neće određivati distribuciju od $\mathbf{X}$. Međutim, ako je $\mathbf{X}$ slučajni kompaktni skup, onda vrijedi

$$C_{\mathbf{X}}(F) = \lim_{n\to\infty} C_{\mathbf{X}}(F \cap K_n)$$

gdje je $\{K_n, n \geq 1\}$ rastući niz kompaktnih skupova takav da $K_n \uparrow \mathbb{R}^d$.

Propozicija 2.46 *Distribucija slučajnog kompaktnog skupa $\boldsymbol{X}$ jedinstveno je određena njegovim funkcionalom sadržavanja $C_{\mathbf{X}}(K), K \in \mathcal{K}$.*

Često je korisno razmotriti funkcional uključivanja $I_{\mathbf{X}}(L)$ definiran na skupovima L iz familije $\mathfrak{I}$ konačnih podskupova $\mathbb{R}^d$. Iz neprekidnosti vjerojatnosnih mjera navedenih gore odmah slijedi

$$I_{\mathbf{X}}(K) = \inf\{I_{\mathbf{X}}(L) : L \in \mathfrak{I}, L \subseteq K\} \tag{2.32}$$

najprije za prebrojive K, a zatim za svaki $K \in \mathcal{K}$ po separbilnosti prostora $\mathbb{R}^d$. Funkcional uključivanja $I_{\mathbf{X}}(L), L \in \mathfrak{I}$ može se jednoznačno proširiti na cijelu klasu $\mathcal{K}$ kao u (2.32). Međutim, funkcional uključivanja općenito ne određuje jedinstveno distribuciju od $\mathbf{X}$. Na primjer, ako je $\mathbf{X} = \{\xi\}$ slučajni jednočlani skup, pri čemu ξ ima apsolutno neprekidnu distribuciju, onda $I_{\mathbf{X}}(K) = \mathbb{P}\{K \subseteq \mathbf{X}\} = \mathbb{P}\{K \subseteq \{\xi\}\}$ iščezava na svakom nepraznom K.

Napomena 2.47 *Uočimo da vrijedi*

$$T_{\boldsymbol{X}}(\{x\}) = \mathbb{P}\{\boldsymbol{X} \cap \{x\} \neq \emptyset\} = \mathbb{P}\{\{x\} \subseteq \boldsymbol{X}\} = I_{\boldsymbol{X}}(\{x\}).$$

Vrlo se lako može uspostaviti odnos između funkcionala kapaciteta i funkcionala uključivanja na konačnim skupovima. Ako je $K = \{x\}$ jednočlan skup, onda se

$$p_{\mathbf{X}}(x) = T_{\mathbf{X}}(\{x\}) = I_{\mathbf{X}}(\{x\})$$

naziva **funkcija pokrivenosti** za $\mathbf{X}$. Sljedeća propozicija slijedi iz odozgo poluneprekidnosti funkcionala kapaciteta.

Propozicija 2.48 *Funkcija pokrivenosti $p_{\boldsymbol{X}}(x), x \in \mathbb{R}^d$ odozgo je poluneprekidna.*

Za skupove s dvije točke odgovarajući funkcional uključivanja

$$\Sigma_{\mathbf{X}}(x_1, x_2) = I_{\mathbf{X}}(\{x_1, x_2\}) = \mathbb{P}\{\{x_1, x_2\} \subseteq \mathbf{X}\}$$

naziva se **funkcija kovarijance** od $\mathbf{X}$. Lako je vidjeti da je funkcija kovarijance pozitivno definitna. Kovarijanca se može izraziti korištenjem funkcionala kapaciteta i funkcije pokrivenosti na sljedeći način

$$\begin{aligned}\Sigma_{\mathbf{X}}(x_1,x_2) = I_{\mathbf{X}}(\{x_1,x_2\}) &= \mathbb{P}\{\{x_1,x_2\}\subseteq \mathbf{X}\}\\ &= \mathbb{P}\{\{x_1\}\subseteq \mathbf{X}, \{x_2\}\subseteq \mathbf{X}\}\\ &= \mathbb{P}\{\{x_1\}\subseteq \mathbf{X}\} + \mathbb{P}\{\{x_2\}\subseteq \mathbf{X}\} - \mathbb{P}\{\{\{x_1\}\subseteq \mathbf{X}\}\cup\{\{x_2\}\subseteq \mathbf{X}\}\}\\ &= \mathbb{P}\{\{x_1\}\subseteq \mathbf{X}\} + \mathbb{P}\{\{x_2\}\subseteq \mathbf{X}\} - \mathbb{P}\{\{x_1,x_2\}\cap \mathbf{X}\neq\emptyset\}\\ &= p_{\mathbf{X}}(x_1)+p_{\mathbf{X}}(x_2)-T_{\mathbf{X}}(\{x_1,x_2\}).\end{aligned}$$

n-točkovne vjerojatnosti pokrivenosti mogu se izračunati iz funkcionala kapaciteta koristeći formulu uključivanja-isključivanja

$$I_{\mathbf{X}}(\{x_1,...,x_n\}) = \mathbb{P}\{\{x_1,...,x_n\}\subseteq \mathbf{X}\} = -\Delta_{\{x_n\}}...\Delta_{\{x_1\}}T_{\mathbf{X}}(\emptyset).$$

Dakle, funkcional uključivanja $I_{\mathbf{X}}(L), L\in\mathfrak{I}$ i funkcional kapaciteta $T_{\mathbf{X}}(L), L\in\mathfrak{I}$ restringirani na familiju $\mathfrak{I}$ konačnih skupova mogu se izraziti jedan preko drugoga rješavanjem sustava linearnih jednadžbi.

Integriranjem funkcije kovarijance od $\mathbf{X}$ dobivamo

$$\begin{aligned}K(z) &= \int \Sigma_{\mathbf{X}}(x,x+z)dx\\ &= \int \mathbb{P}\{\{x,x+z\}\subseteq \mathbf{X}\}dx\\ &= \mathbb{E}[\lambda(\mathbf{X}\cap(\mathbf{X}-z))]\end{aligned}$$

što nazivamo **geometrijski kovariogram** od $\mathbf{X}$.

Napomena 2.49 *Kažemo da je slučajni zatvoreni skup $\boldsymbol{X}$ u $\mathbb{R}^d$* ***stacionaran*** *ako je*

$$\boldsymbol{X} \overset{d}{\sim} (\boldsymbol{X}+a)$$

za sve $a\in\mathbb{R}^d$, tj. distribucija od $\boldsymbol{X}$ invarijantna je na sve ne-slučajne translacije.

Kažemo da je slučajni zatvoreni skup $\boldsymbol{X}$ u $\mathbb{R}^d$ ***izotropan*** *ako je $\boldsymbol{X} \overset{d}{\sim} (g\boldsymbol{X})$ za svaku determinističku rotaciju g.*

Ako je $\mathbf{X}$ stacionaran, onda je funkcija kovarijance neprekidna i ovisi o razlici argumenata pa možemo pisati $\Sigma_{\mathbf{X}}(x_1 - x_2)$ umjesto $\Sigma_{\mathbf{X}}(x_1, x_2)$. Ako je X stacionarni izotropni slučajni skup, onda $\Sigma_{\mathbf{X}}(x_1 - x_2)$ ovisi samo o $r = ||x_1 - x_2||$.

U mnogim je primjenama korisno aproksimirati $\Sigma(r)$ **eksponencijalnom funkcijom kovarijance** danom s

$$\Sigma(r) = p(1-p)e^{-ar} + p^2$$

gdje je p zajednička vrijednost za $p_{\mathbf{X}}(x)$.

Funkcija $\gamma(x) = \Sigma(0) - \Sigma(x)$ naziva se **variogram** i vrijedi

$$\gamma(x-y) = \frac{1}{2}[\mathbb{P}\{x \in \mathbf{X}, y \notin \mathbf{X}\} + \mathbb{P}\{x \notin \mathbf{X}, y \in \mathbf{X}\}].$$

Funkcija kovarijance $\Sigma(\cdot)$ može se koristiti za razvoj spektralne teorije za stacionarne slučajne zatvorene skupove. Za Borelov skup A u $\mathbb{R}^d$ definiramo njegovu slučajnu mjeru $\mu(A) = \lambda_d(A \cap \mathbf{X})$. Ako je

$$Cov(A) = \inf_A \Sigma(x)dx,$$

onda je

$$\int_{\mathbb{R}^d} \lambda_d(A \cap (B+f))Cov(dh)$$

kovarijanca između $\mu(A)$ i $\mu(B)$. Može se pokazati da postoji konačna mjera ν na $\mathbb{R}^d$, koja se naziva **Barlettov spektar**, takva da je

$$\int_{\mathbb{R}^d} \hat{\psi}(x)\Sigma(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(x)\nu(du)$$

gdje je $\hat{\psi}$ Fourierova transformacija funkcije ψ koja propada dovoljno brzo.

Kada ne bismo promatrali slučajne skupove u $\mathbb{R}^d$, već u nekom lokalno kompaktnom Hausdorffovu topološkom prostoru $\mathbb{E}$ koji je konačan, tada bi distribucija slučajnog zatvorenog skupa prirodno bila određena konačnim skupom vjerojatnosti $\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(F) = \mathbb{P}\{\mathbf{X} = F\}$ za svaki $F \subseteq \mathbb{E}$. Ove se vjerojatnosti mogu dobiti iz funkcionala uključivanja formulom Möbiusove inverzije

$$\mathbb{P}_{\mathbf{X}}(F) = \sum_{K \subseteq F} (-1)^{card(F \setminus K)} C_{\mathbf{X}}(K), F \subseteq \mathbb{E},$$

gdje $card(\cdot)$ označava kardinalnost pripadajućeg skupa. Primijetimo da su svi zatvoreni skupovi u konačnom prostoru kompaktni. Gornju formulu u suprotnom smjeru možemo zapisati na sljedeći način

$$C_{\mathbf{X}}(F) = \sum_{K \subseteq F} \mathbb{P}_{\mathbf{X}}(K).$$

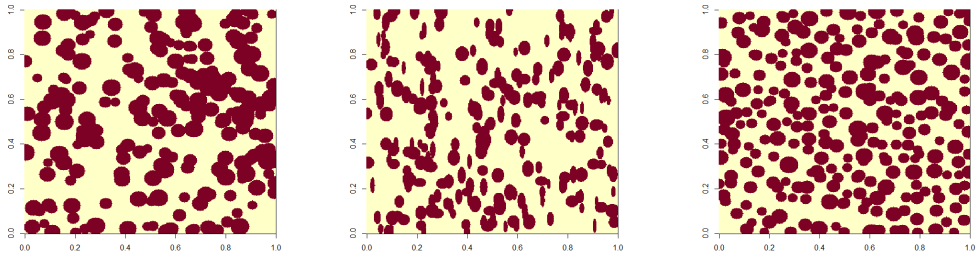
Poglavlje 3

Simulacijska studija

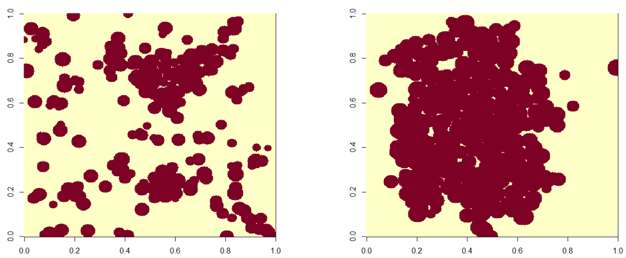
Ovo poglavlje predstavlja primjenu teoretskih rezultata koji su prezentirani u prethodnom poglavlju. Koristeći simulirane uzorke slučajnih zatvorenih skupova napravit ćemo procjenu funkcionala kapaciteta i funkcionala uključivanja te klasifikaciju realizacija slučajnih skupova temeljenu na tim procjenama.

3.1 Procjena funkcionala za simulirane podatke

Za procjenu funkcionala korišteni su simulirani uzorci pet modela slučajnih skupova (Boolean model (Slika 3.1 (lijevo)) te Boolean model s elipsama (Slika 3.1 (sredina)), repulsive (Slika 3.1 (desno)) i dva cluster modela (Slika 3.2) koji su realizacije Quermass interaction modela s reguliranim parametrima [3, 4]. Svaka je realizacija pikselizirana u rezoluciji od 400×400 piksela.



Slika 3.1: Boolean model (lijevo), Boolean model s elipsama (sredina) i Repulsive model (desno)



Slika 3.2: Cluster modeli

Pretpostavljamo da su procesi koji su izgenerirali dobivene realizacije stacionarni. Pretpostavka stacionarnosti procesa omogućuje nam da za svaku realizaciju možemo dobiti odgovarajući empirijski funkcional te možemo definirati mjeru udaljenosti među dvjema realizacijama kao maksimalnu apsolutnu razliku vrijednosti empirijskih funkcionala. U ovom radu napravljene su procjene funkcionala kapaciteta korištenjem formule

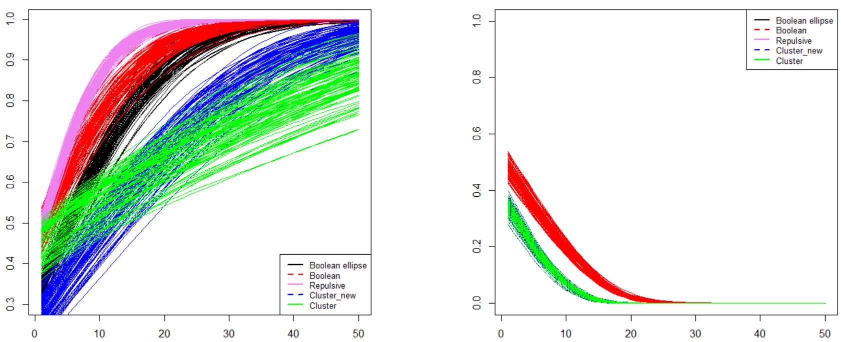
$$\widehat{T_X}(K_n) = \frac{1}{|\mathcal{K}_n|} \sum_{K \in \mathcal{K}_n} \mathbf{1}_{\{X \cap K \neq \emptyset\}},$$

te funkcionala uključivanja

$$\widehat{I_X}(K_n) = \frac{1}{|\mathcal{K}_n|} \sum_{K \in \mathcal{K}_n} \mathbf{1}_{\{K \subseteq \mathbf{X}\}},$$

gdje je K_n kvadrat dimenzija $n \times n$ piksela za $n = 1, \ldots, 50$, $\mathcal{K}_n$ familija svih kvadrata dimenzija $n \times n$ piksela koji su podskupovi kvadrata 400×400 piksela i X pikselizirana realizacija slučajnog skupa. Detaljnije o metodama procjene tih funkcionala može se pronaći kod [14].

Sljedeći grafikoni (Slika 3.3) prikazuju vrijednosti empirijskih funkcionala kapaciteta i empirijskih funkcionala uključivanja različitih modela za različite dimenzije kvadrata. Pri tom crna linija označava Boolean elipse model, crvena Boolean model, ljubičasta Repulsive, plava Clusternew i zelena Cluster model.

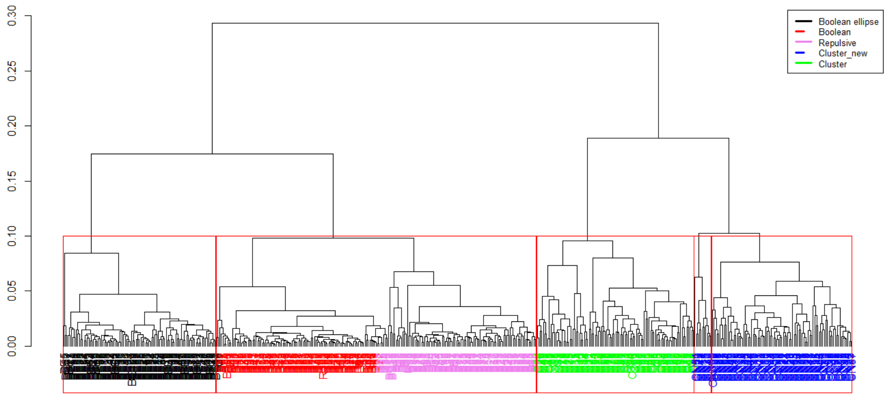


Slika 3.3: Grafički prikaz vrijednosti funkcionala kapaciteta (lijevo) i funkcionala uključivanja (desno) različitih modela za različite dimenzije argumenata. Crna linija označava Boolean elipse model, crvena Boolean model, ljubičasta Repulsive, plava Clusternew i zelena Cluster model.

3.2 Klasifikacija realizacija slučajnih skupova

Koristeći mjeru udaljenosti definiranu u Odjeljku 3.1 možemo provesti postupak hijerarhijskog klasteriranja realizacija slučajnih skupova. Cilj je klasteriranja ispitati u kolikoj se mjeri klasteri dobiveni hijerarhijskim hlasteriranjem na temelju procijenjenih funkcionala podudaraju sa stvarnim klasterima realizacija dobivenih iz različitih modela.

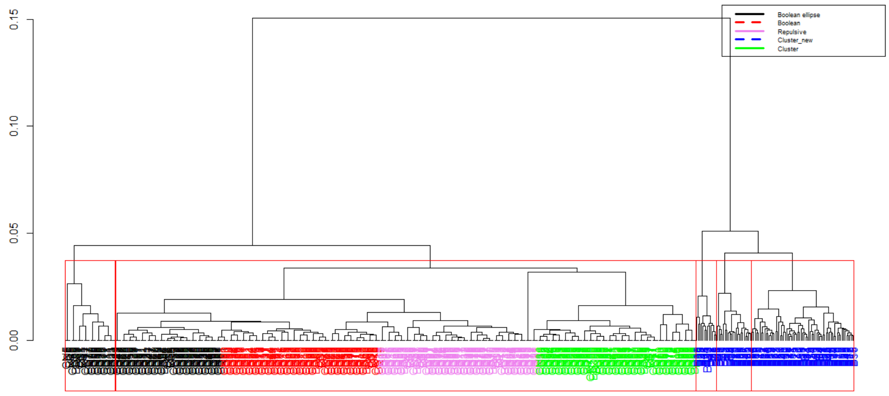
Promotrimo najprije rezultate hijerarhijskog klasteriranja temeljenog na funkcionalu kapaciteta, Slika 3.4.



Slika 3.4: Hijerarhijsko klasteriranje temeljeno na funkcionalu kapaciteta. Crna linija označava Boolean elipse model, crvena Boolean model, ljubičasta Repulsive, plava Clusternew i zelena Cluster model.

Iz gornjeg grafikona možemo zaključiti kako se 5 najvećih klastera dobivenih hijerarhijskim klasteriranjem ne poklapa u potpunosti s odgovarajućim klasterima stvarnih 5 modela. Međutim, jasno se vidi kako bi se finijom podjelom na klastere uspjelo potpuno razlučiti realizacije dobivene iz različitih modela, no neki bi modeli imali više pripadajućih podklastera.

Sada promotrimo rezultate hijerarhijskog klasteriranja temeljenog na funkcionalu uključivanja, Slika 3.5.



Slika 3.5: Hijerarhijsko klasteriranje temeljeno na funkcionalu uključivanja. Crna linija označava Boolean elipse model, crvena Boolean model, ljubičasta Repulsive, plava Clusternew i zelena Cluster model.

Slično kao kod prethodnog grafikona, vidljivo je da 5 najvećih klastera ne odgovara pripadnim stvarnim klasterima modela, no ponovno je vidljiva tendencija razdvajanja. U usporedbi s gornjim klasifikatorom, možemo uočiti nešto jaču moć razlučivanja različitih modela kod klasteriranja na temelju funkcionala kapaciteta. Generalno, mogli bismo naslutiti kako su hijerarhijski modeli temeljeni na funkcionalima kapaciteta i uključivanja vrlo dobri klasifikatori realizacija stvarnih modela.

Zaključak

Teorijski dio rada koji sadrži definiciju slučajnog zatvorenog skupa u $\mathbb{R}^d$, definiciju funkcionala kapaciteta i njegovih svojstava te dokaz Choquetova teorema navodi nas na važnost funkcionala kapaciteta za opisivanje distribucije slučajnog zatvorenog skupa kao jednog od baznih koncepata koji su nam važni kada proučavamo slučajne elemente općenito. Naime, dokazano je kako funkcional kapaciteta na jedinstven način određuje distribuciju pripadajućeg slučajnog zatvorenog skupa što opravdava slutnju da bi funkcional kapaciteta mogao poslužiti za konstrukciju mjere sličnosti dviju realizacija slučajnog zatvorenog skupa. Nakon provedene simulacijske studije, dobiveni rezultati upućuju na istinitost te slutnje jer se iz dobivenih histograma vrlo dobro mogu razlučiti realizacije različitih modela. S obzirom na vrlo dobre rezultate klasteriranja pomoću funkcionala kapaciteta, napravljeno je i klasteriranje pomoću funkcionalu uključivanja koje je dalo slične zadovoljavajuće rezultate. S obzirom da su procjene odgovarajućih funkcionala napravljene samo na familiji kvadrata različitih dimenzija, simulacijska studija može se unaprijediti poboljšanjem procjena funkcionala dodavajući na primjer procjene za familiju svih pravokutnika u prostoru $\mathbb{R}^2$.

Literatura

[1] Berg C., Christensen J.P.R. i Ressel P. (1984) *Harmonic Analysis on Semigroups: Theory of Positive Definite and Related Functions*. New York: Springer.

[2] Diggle P.J. (1981) Binary mosaics and the spatial pattern of heather. *Biometrics* 37(3),531–539.

[3] Gotovac V., Helisová K. i Ugrina I. (2016) Assessing Dissimilarity of Random Sets Through Convex Compact Approximations and Support Functions. *Image Analysis and Stereology* 35(3), 181–193.

[4] Gotovac, V. (2017) Ispitivanje sličnosti slučajnih skupova aproksimacijama konveksnim tijelima i njihovim potpornim funkcijama. Doktorski rad. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu, Prirodoslovno-matematički fakultet.

[5] Guljaš, B. (2010) *Metrički prostori*. Prirodoslovno-matematički fakultet, Zagreb. Dostupno na: `https://web.math.pmf.unizg.hr/~guljas/skripte/metprost.pdf`

[6] Helisová K. (2014) Modeling, statistical analyses and simulations of random items and behavior on material surfaces. Supplemental UE:

TMS 2014 Conference Proceedings, February 16-20, 2014, San Diego, California, USA. 461–468.

[7] Hermann P., Mrkvička T., Mattfeldt T., Minárová M., Helisová K., Nicolis O., Wartner F. i Stehlík M. (2015) Fractal and stochastic geometry inference for breast cancer: a case study with random fractal models and Quermass-interaction process. *Statistics in Medicine* 34(18):2636—2661.

[8] Jukić D. (2012) *Mjera i integral*. Osijek: Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku.

[9] Matheron, G. (1975) *Random Sets and Integral Geometry*. New York: Wiley.

[10] Lafferriere B., Lafferriere G. i Nguyen N. M. (2020) *Introduction to Mathematical Analysis I*, Portland: Portland State University Library. Dostupno na: `https://math.libretexts.org/Bookshelves/Analysis/(Lafferriere_Lafferriere_and_Nguyen)` [01.06.2022.]

[11] Mardešić, S. (1979) *Matematička analiza u n-dimenzionalnom realnom prostoru*. Zagreb: Školska knjiga.

[12] Matijević V., *Uvod u opću topologiju*. Split: Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet.

[13] Molchanov, I. (2005) *Theory of Random Sets*. Bern: Springer.

[14] Molchanov I. i Molinari F. (2018) *Random sets in Econometrics*. Cambridge: Cambridge University Press.

[15] Møller J. i Helisová K. (2010) Likelihood inference for unions of interacting discs. *Scandinavian Journal of Statistics* 37,365-381.

[16] Mrkvička T. i Mattfeldt T. (2011) Testing histological images of mammary tissues on compatibility with the Boolean model of random sets. *Image Analysis and Stereology* 30(1),11—18.

[17] Munkres, J. (2014) *Topology*. Second Edition. Harlow: Pearson.

[18] Neumann M, Staněk J., Pecho O.M., Holzer L., Beneš V. i Schmidt V. (2016) Stochastic 3D modeling of complex three-phase microstructures in SOFCelectrodes with completely connected phases. *Computational Materials Science* 118: 353–64.

[19] Neveu, J. (1965) *Mathematical Foundations of the Calculus of Probability*. San Francisco, Calif: Holden- Day Inc.

[20] Sarapa N. (2002). *Teorija vjerojatnosti*. Zagreb: Školska knjiga.

[21] Wheeler M.(2017) *Advanced Real Analysis*. East Setauket, New York: Published by the Author. Dostupno na: `https://people.bath.ac.uk/mw2319/ma30252/sec-rel.html`[01.07.2022.]

[22] Zalinescu C. (2002) *Convex Analysis in General Vector Spaces*. World Scientific. Dostupno na: `https://books.google.hr/books?id=a91q1q1djMwC&redir_esc=y`[01.07.2022.]

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

SLUČAJNI ZATVORENI SKUPOVI I FUNKCIONALI KAPACITETA

Margarita Grašo

Sažetak:

Slučajni skupovi igraju ključnu ulogu u modeliranju brojnih procesa u biologiji, medicini i znanosti o materijalima. U prvom dijelu rada koji se odnosi na teroijske rezultate definiran slučajni zatvoreni skup u $\mathbb{R}^d$ kao funkcija nad vjerojatnosnim prostorom te su navedeni ilustrativni primjeri. Potom je definiran pojam funkcionala kapaciteta te su istražena njegova svojstva. U središnjem poglavlju rada dokazan je Choquetov teorem koji nam govori o nužnim i dovoljnim uvjetima da bi funkcional bio funkcional kapaciteta jedinstvenog slučajnog zatvorenog skupa, a time i da na jedinstven način određuje distribuciju pripadajućeg slučajnog zatvorenog skupa. U završnom dijelu rada napravljena je simulacijska studija čiji cilj je bio istražiti koliko dobro funkcional kapaciteta opisuje realizaciju slučajnog skupa te može li se mjera sličnosti bazirana na funkcionalu kapaciteta iskoristiti za klasteriranje realizacija različitih modela. Rezultati istraživanja pokazali su da funkcional kapaciteta vrlo dobro razlikuje odgovarajuće realizacije pa se može koristiti kao mjera sličnosti za klasteriranje.

Ključne riječi:

Choquetov teorem, funkcional kapaciteta, mjera sličnosti

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Podatci o radu:

broj stranica 62, broj slika 16, broj literaturnih navoda 22, jezik izvornika: hrvatski

Mentor(ica): *doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš*

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Tanja Vojković

dr. sc. Ivan Jelić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad 23. kolovoza 2022.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

Random closed sets and capacity functionals

Margarita Grašo

Abstract:

Random sets play an essential role in modelling several phenomena in biology, medicine and material science. The first part of the paper, which refers to the theoretical results, a random closed set in $\mathbb{R}^d$ is defined as a function over the probability space and illustrative examples are given. Then the concept of capacity functional was defined and its properties were investigated. In the central chapter of the paper Choquet's theorem is proved. It tells us what are the necessary and sufficient conditions for a functional to be a capacity functional of a unique random closed set, and thus to uniquely determine the distribution of the corresponding random closed set. In the final part of the paper a simulation study was made the goal of which was to investigate how well the capacity functional describes the realization of a random set and whether the similarity measure based on the capacity functional can be used for clustering the realizations of different models. The results of the research showed that the capacity functional distinguishes the corresponding realizations very well, so it can be used as a measure of similarity for clustering.

Key words:

capacity functional, Choquet's theorem, similarity measure

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Specifications:

62 pages, 16 figures, 22 references, original in: Croatian

Mentor: *assisstant professor Vesna Gotovac Đogaš*

Committee:

assisstant professor Tanja Vojković

Ivan Jelić, phd

This thesis was approved by a Thesis commettee on August 23, 2022