

# Numeričko određivanje putanje naboja u elektromagnetskom polju

---

**Svilan, Leonard**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:479817>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-25**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet

**Numeričko određivanje putanje naboja u  
elektromagnetskom polju**

Završni rad

Leonard Svilan

## Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet  
Odjel za fiziku  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

### Numeričko određivanje putanje naboja u elektromagnetskom polju

Leonard Svilan

Fizika i informatika

**Sažetak:**

Na naboj koji se kreće u elektromagnetskom polju djeluje Lorentzova sila. Takvo gibanje je u većini slučajeva nemoguće analitički riješiti te ga moramo izračunati numerički. Za rješavanje problema koristiti ćemo dvije najpopularnije numeričke metode, Euler-ovu i Runge-Kutta metodu te ćemo ih usporediti da vidimo koja je efikasnija te u kojem slučaju je bolje koristiti jednu ili drugu metodu. Određivanje optimalne metode za specifične uvjete nam olakšava izradu simulacije te štedi vrijeme i resurse koji su nam često ograničeni. Svi podaci dobiveni su iz simulacija napisanih u programskom jeziku Python. Za usporedbu preciznosti metoda koristili smo slučajeve kada poznajemo analitičko rješenje kako bi lakše i preciznije mogli usporediti naše metode. U konačnici ćemo uočiti da je Runge-Kutta bolja metoda neovisno o uvjetima i resursima koje imamo na raspolaganju.

**Ključne riječi:** Numerika, elektrodinamika, naboj, greška, putanja

**Rad sadrži:** 29 stranica, 25 slika, 4 tablice, 8 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom / engleskom jeziku

**Mentor:** doc. dr. sc. Toni Šćulac

**Ocjenjivači:** prof. dr. sc. Mile Dželalija  
doc. dr. sc. Petar Stipanović  
doc. dr. sc. Toni Šćulac

**Rad prihvaćen:** 24. 9. 2021.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

## Basic documentation card

University of Split  
Faculty of Science  
Department of Physics  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Bachelor thesis

### Numerical determination of the trajectory of a charged particle inside an electromagnetic field

Leonard Svilan

Physics and Informatics

**Abstract:**

Lorentz force acts on a charged particle moving inside an electromagnetic field. Such a motion is in most cases impossible to solve analytically and we must calculate it numerically. To solve the problem we will use the two most popular numerical methods, Euler's and Runge-Kutta's method, and we will compare them to see which is more efficient and in which case it is better to use one or the other method. Determining the optimal method for specific conditions makes it easier for us to create a simulation and saves time and resources that are often limited. All data was obtained from simulations written in the Python programming language. To compare the accuracy of the methods, we used cases where we know the analytical solution so that we could more easily and accurately compare out methods. Ultimately we will notice that Runge-Kutta is the better method.

**Keywords:** Numerical, electrodynamics, charge, error, trajectory

**Thesis consists of:** 29 pages, 25 figures, 4 tables, 8 references. Original language: Croatian / English

**Supervisor:** doc. dr. sc. Toni Šćulac

**Reviewers:** prof. dr. sc. Mile Dželalija  
doc. dr. sc. Petar Štipanović  
doc. dr. sc. Toni Šćulac

**Thesis accepted:** 9. 24. 2021.

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

## Contents

<b>1. Uvod.....</b>	<b>1</b>
<b>2. Teorijski uvod.....</b>	<b>3</b>
2.1. Lorentzova sila .....	3
2.2 Numeričke metode.....	4
2.2.1. Numeričko određivanje derivacije .....	4
2.2.2. Eulerova metoda.....	5
2.2.3. Runge-Kutta metoda .....	7
<b>3. Modeliranje putanje naboja.....</b>	<b>9</b>
3.1. Analitičko rješenje .....	9
3.2. Kružna putanja.....	10
3.2.1. Kružna putanja – vrlo kratki vremenski interval.....	13
3.2.2. Kružna putanja-veoma duge simulacije .....	15
3.2.3. Kružna putanja – vrlo dugi vremenski interval.....	17
<b>4. Usklađivanje vremena izvršavanja.....</b>	<b>18</b>
4.1. 'Trial and error' pristup .....	18
4.2. Razlog nastajanja greške .....	20
4.2.1. Kružno gibanje .....	20
4.2.2. Brzina promjene radijusa .....	21
<b>5. Primjeri putanja.....</b>	<b>22</b>
<b>6. Zaključak .....</b>	<b>24</b>
<b>7. Literatura.....</b>	<b>25</b>

## 1. Uvod

Stavljanjem naboja u elektromagnetsko polje, na njega će djelovati Lorentzova sila [1]. Za neke jednostavnije slučajeve poznajemo analitičko rješenje, no problem se javlja kod kompliciranijih slučajeva kod kojih nije moguće odrediti analitičko rješenje. U takvim slučajevima putanju ćemo morati odrediti numerički.

U narednih nekoliko odlomaka ćemo promatrati dvije najpopularnije numeričke metode, [2] Euler i Runge-Kutta [3] metode.

Interes nam je pronaći optimalnu metodu kako bi trošili što manje resursi na simulacije. Da bi znali koja metoda je bolja i zašto je bolja, moramo im usporediti preciznost, vremena izvršavanja te uzeti u obzir za što nam simulacija tog gibanja služi. Također treba uzeti u obzir preciznost mjernih uređaja na kojima ćemo eksperimentalno provjeravati navedenu simulaciju tako da bi znali da li je uopće potrebno koristiti precizniju metodu. Poanta eksperimenta je da provjerimo da li naša teorija fizikalno ispravna. Ukoliko imamo mjerne uređaje koji su neprecizni, onda nema smisla koristiti sporiji algoritam ili pak precizniji jer nam se tada teorija i eksperiment neće slagati. Preciznosti algoritma i naših mjernih postava trebale bi biti istog reda veličina da bi naš eksperiment imao smisla.

Da bi odredili preciznost moramo prvo znati realno fizikalno rješenje ovog problema. Srećom postoje neki jednostavni primjeri koji su analitički rješivi te ćemo ih koristiti kao referentne putanje za računanje preciznosti naših algoritmi. Algoritme moramo usporediti za različite vremenske intervale te za različita trajanja simulacija. Također treba odrediti koja je metoda bolja za određeni slučaj. Bitno je znati da li radimo jako dugu simulaciju koju ćemo eksperimentalno provjeravati ili samo brzi 'proof of concept' kao provjeru da je naša simulacija ispravno isprogramirana.

Veoma je korisno znati kako se algoritam ponaša za jako duge simulacije, tj. kako reagira na 'gomilanje pogreške'. Moguće je da je jedan algoritam naizgled precizniji za kratke simulacije, ali ima jako velika odstupanja za vrlo duge simulacije. Također je moguća i obratna situacija.

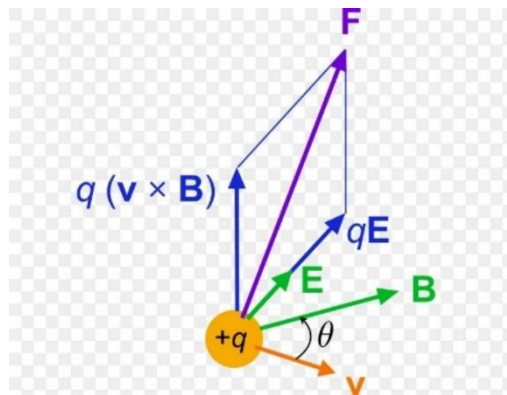
Sve vrijednosti su u SI sustavu jedinica.

## 2. Teorijski uvod

### 2.1. Lorentzova sila

Kada naboj stavimo u elektromagnetsko polje, na njega će djelovati Lorentzova sila [1]. Lorentzova sila dana je izrazom:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$



*Slika 1 Grafički prikaz djelovanja Lorentzove sile [1] na naboj koji se kreće u elektromagnetskom polju. Rezultantna sila  $F$  dana je kao vektorski zbroj komponentne Lorentzove sile uzrokovane električnim poljem i komponentne uzrokovane magnetskim poljem.*

Lorentzov zakon je fizikalna teorija koju ćemo u sljedećim poglavljima eksperimentalno provjeravati. Da bi teoriju mogli eksperimentalno provjeriti moramo imati konkretna teorijska predviđanja za što nam služe jednostavni slučajevi za koje poznajemo analitičko rješenje. Jednostavnost tih rješenja dolazi od oblika električnog i magnetskog polja. Ukoliko imamo konstantno električno i magnetskog polje, ova diferencijalna jednačba je analitički rješiva te rješenje možemo koristiti za provjeru.



## 2.2 Numeričke metode

### 2.2.1. Numeričko određivanje derivacije

Glavni cilj numeričke analize [4] je pronalazak tehnika koji daju približne rezultate za probleme koji su nerješivi ili teško rješivi analitički.

Jedan takav problem je određivanje nagiba krivulje u nekoj točki. Prvo promotrimo definiciju za analitičku derivaciju [5]:

$$L = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ukoliko limes postoji, derivacija [5] (nagib krivulje u točki  $a$ ) dana je kao:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Kada numerički određujemo derivaciju [6] ne možemo promatrati limes. U takvom slučaju potrebno je nagib odrediti kao:

$$f'(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Iako je ovaj izraz moguće koristiti za numeričko određivanje rješenja, ovakav pristup stvara problem. Ako je  $h$  veoma mal, dobijemo "rounding error" zbog "floating point" preciznosti tokom obrade tih podataka na računalu. Ukoliko je  $h$  prevelik dobijemo neprecizne rezultate koji znatno odstupaju od analitičkog rješenja. Preciznost našeg rezultata direktno ovisi o intervalu  $h$ . Taj problem je moguće riješiti te nam je to motivacija za razvoj raznih numeričkih metoda. U sljedećim poglavljima ćemo promatrati dvije numeričke metode s kojima ćemo pokušati minimalizirati taj problem.

### 2.2.2. Eulerova metoda

Eulerova [2] metoda je najjednostavnija numerička metoda. Također bi je mogli zvati stepenastom metodom. Generalni izraz za Eulerovu metodu dan je kao:

$$y_{n+1} = y_n + \Delta x f(x_n, y_n) \quad \text{Položaj na } y \text{ osi nakon intervala } \Delta x$$

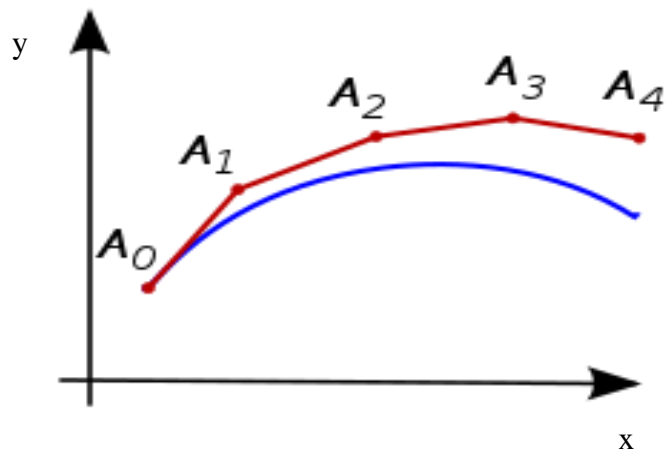
$$x_{n+1} = x_n + \Delta x \quad \text{Položaj na } x \text{ osi nakon intervala } \Delta x$$

Funkcija :

$$f(x_n, y_n)$$

je nagib krivulje u točki  $(x_n, y_n)$  opisan u poglavlju 2.2.1.

Nakon svakog diskretnog vremenskog intervala odredimo nagib krivulje u trenutnoj točki (derivaciju) te se pomaknemo za iznos tog nagiba pomnoženo s našim vremenskim intervalom (Slika 2).



*Slika 2 Grafički prikaz Eulerove metode. Crvenom bojom prikazano je numeričko rješenje, plavom bojom prikazano je analitičko rješenje koje pokušavamo približno odrediti.*

Ako promatramo problem iz poglavlja 2.1., ova metoda se svodi na računanje brzine i pomaka nakon svakog diskretnog vremenskog intervala te zbrajanja tog pomaka na trenutni položaj.

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot v$$

$$v_{n+1} = v_n + \Delta t \cdot \frac{F}{m}$$

### 2.2.3. Runge-Kutta metoda

Runge-Kutta [3] metoda je slična Eulerovoj metodi samo što isti proces sada ponavljamo više puta te na kraju tražimo srednju vrijednost svih nagiba. Koristit ćemo Runge-Kutta metodu drugog stupnja. Prvi korak je izračunati istu derivaciju kao u slučaju Eulera. Nakon računanja nagiba krivulje pomaknemo se u tom smjeru za pola vremenskog intervala i ponovimo proces računanja nagiba. Pomaknemo se od početnog položaja za novi nagib i ponovimo proces. Zadnji pomak vršimo za cijeli vremenski interval (Slika 3). Nakon što smo dobili sva četiri nagiba krivulje računamo srednju vrijednost te koristimo srednju vrijednost za računanje položaja (isto kao kod Eulerove metode).

Generalni izraz za Runge-Kutta Metodu dan je kao [3] :

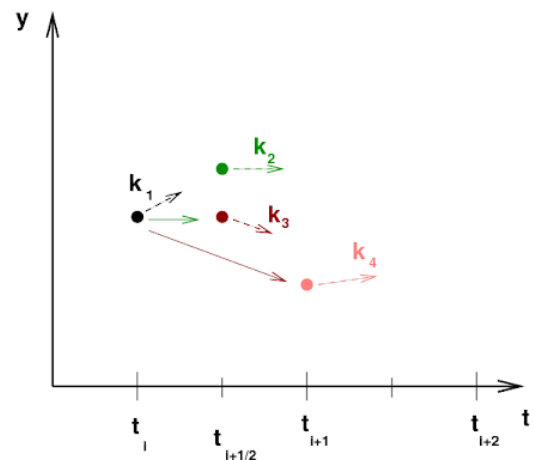
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6} \Delta t (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t k_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(t_n + \frac{\Delta t}{2}, y_n + \frac{\Delta t k_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(t_n + \Delta t, y_n + \Delta t k_3)$$



*Slika 3 Grafički prikaz svih nagiba krivulje potrebnih za određivanje putanje koristeći Runge-Kutta metodu [8].*

Gdje je funkcija :

$$f(t, y)$$

nagib krivulje iz poglavlja 2.2.1.

Ako promatramo naš problem, ova metoda svodi se na :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta t \cdot v$$
$$v_{n+1} = v_n + \frac{1}{6} \Delta t (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Gdje su :

$$k_1 = f(v_n, E, B, q)$$
$$k_2 = f\left(v_n + \frac{\Delta t k_1}{2}, E, B, q\right)$$
$$k_3 = f\left(v_n + \frac{\Delta t k_2}{2}, E, B, q\right)$$
$$k_4 = f(v_n + \Delta t k_3, E, B, q)$$

Zbog usrednjavanja nagiba Runge-Kutta daje preciznije rješenje, ali je potrebno vršiti veći broj numeričkih operacija.

### 3. Modeliranje putanje naboja

#### 3.1. Analitičko rješenje

Jedna analitički rješiva situacija je kada nam je iznos električnog polja E jednak nuli. Rješenje tada možemo dobiti iz izraza za Lorentzovu silu [2]:

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

Zbog vektorskog produkta vidimo da će sila uvijek biti okomita na brzinu, tj. djelovati će kao centripetalna sila. Jedina komponenta brzine koja će sudjelovati u ovoj sili je ona koja je okomita na mag. polje. Izjednačavanjem dobivenog izraza s izrazom za centripetalnu silu dobijemo:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_{cp} \\ |q|v_{\perp}B &= \frac{mv_{\perp}^2}{R_g} \\ R_g &= \frac{mv_{\perp}}{|q|B}\end{aligned}$$

Dobiveni radijus naziva se ciklotronski radijus (Gyroradius) [7].

### 3.2. Kružna putanja

Radi jednostavnosti daljnjih usporedbi nećemo simulirati gibanje naboja u smjeru z osi nego ćemo samo promatrati gibanje po kružnici koja se nalazi u x-y ravnini.

Da bi naša usporedba imala smisla, početni uvjeti obje simulacije, vrijeme simulacije i vremenski interval moraju biti isti te da bi rješenja bila što jednostavnija i preglednija u svim narednim primjerima koristit ćemo iste parametre simulacije (Tablica 1).

*Tablica 1 Parametri simulacije za uspoređivanje Runge-Kutta i Euler metoda.*

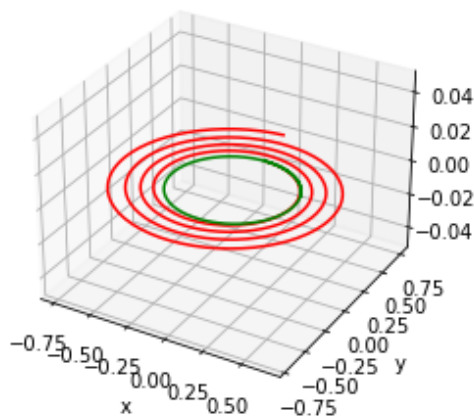
Parametri simulacije	
m	1 kg
q	1 C
$\vec{v}$	$2\hat{i}$ m/s
$\vec{E}$	0 V/m <sup>2</sup>
$\vec{B}$	$5\hat{k}$ T

Iako znamo da su masa i naboj preveliki za realnu česticu, odabrali smo te vrijednosti zbog preglednosti rezultata te zbog činjenice što nam to ne utječe na provjeru koju vršimo (rezultati su samo skalirani).

Mijenjati ćemo samo vremenski interval te duljinu simulacije te će u svakom primjeru analitičko rješenje biti prikazano zelenom bojom na grafu.

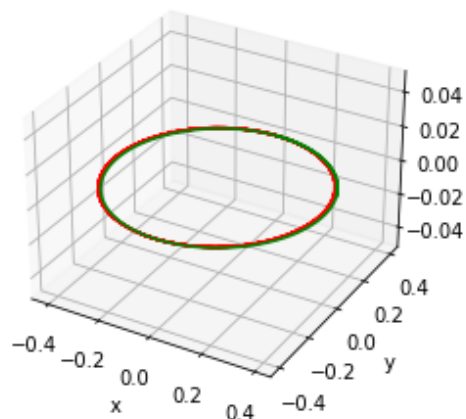
Kod prve simulacije (Slika 4 i Slika 5) odmah vidimo da Runge-Kutta metoda daje krivulju koja je bliža analitičkom rješenju nego Eulerova metoda kao što smo i očekivali, ali još uvijek ne znamo dovoljno da bi mogli reći koja je metoda bolja za koju situaciju. Potrebno je provesti niz različitih simulacija te je potrebno usporediti vremena izvršavanja ova dva algoritma.

Trajektorija naboja u EM polju - Euler  
 $dt=0.01$   
 $T=5$



*Slika 5 3D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Euler). Crvenom bojom prikazana je numerički određena putanja. Zelenom bojom prikazano je analitičko rješenje.*

Trajektorija naboja u EM polju - Runge Kutta  
 $dt=0.01$   
 $T=5$

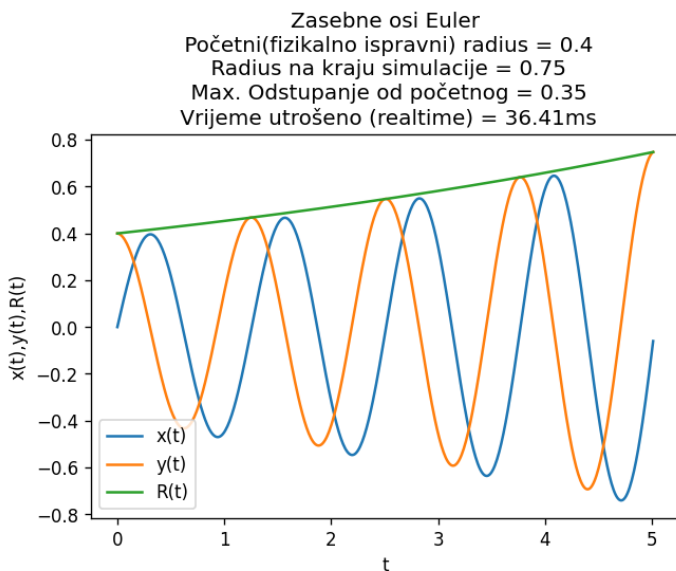


*Slika 4 3D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Runge-Kutta). Crvenom bojom prikazana je numerički određena putanja. Zelenom bojom prikazano je analitičko rješenje.*

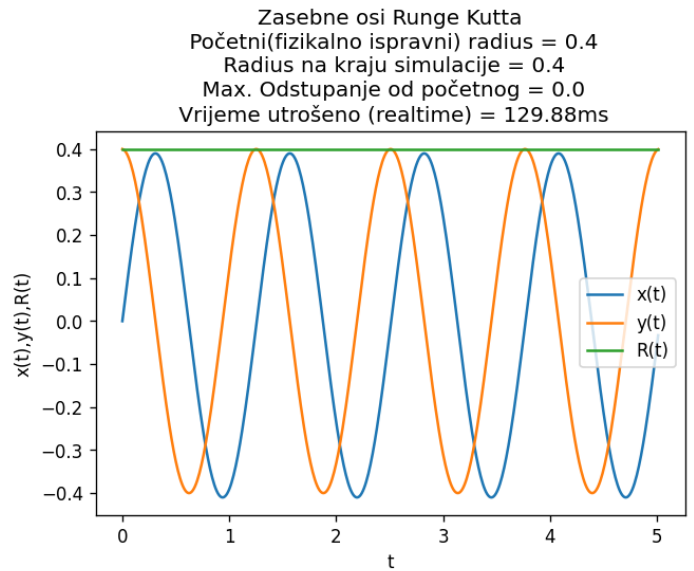
Da bi bolje uočili razlike između ove dvije metode možemo pogledati kako se ponaša radijus zakrivljenosti naše putanje u ovisnosti o vremenu. Promatrajući radijus možemo odrediti odstupanje od radijusa analitičkog rješenja.



Vidimo da je odstupanje Runge-Kutta(Slika 7) metode manje nego kod Euler-ove metode (Slika 6), ali je potrebno puno više vremena da se putanja odredi numerički.



*Slika 6* 2D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Euler). Na y osi prikazani su položaji u x i y smjeru te trenutni Gyroradius [3]. Na x osi prikazano je proteklo vrijeme od početka simulacije.



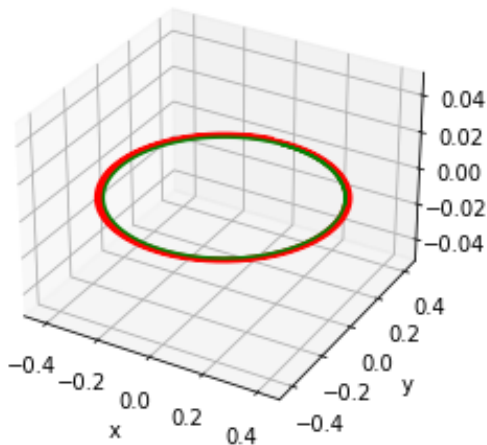
*Slika 7* 2D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Runge-Kutta). Na y osi prikazani su položaji u x i y smjeru te trenutni Gyroradius [3]. Na x osi prikazano je proteklo vrijeme od početka simulacije.

Također vidimo da kod Euler-ove metode imamo veće odstupanje što je simulacija duža.

### 3.2.1. Kružna putanja – vrlo kratki vremenski interval

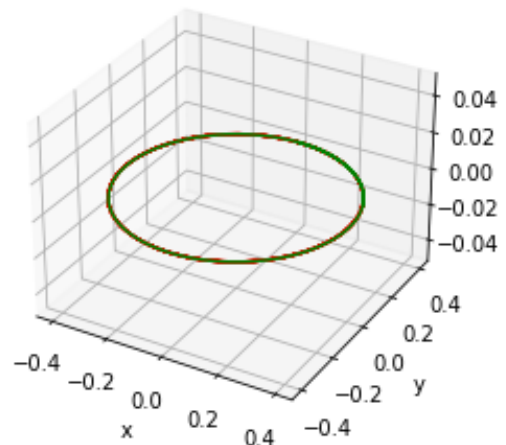
Što ako bi uzeli jako kratki vremenski interval, a da nam simulacija i dalje traje jednako kao u prethodnom primjeru (Slika 8 i Slika 9).

Trajektorija naboja u EM polju - Euler  
 $dt=0.001$   
 $T=5$



*Slika 9 3D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Euler). Crvenom bojom prikazana je numerički određena putanja. Zelenom bojom prikazano je analitičko rješenje.*

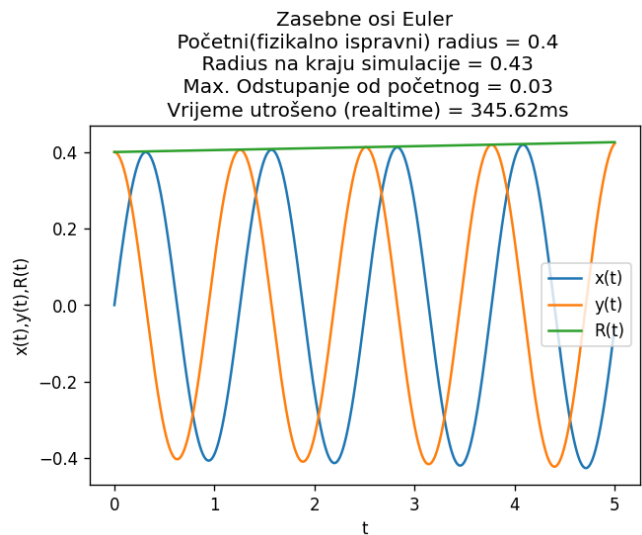
Trajektorija naboja u EM polju - Runge Kutta  
 $dt=0.001$   
 $T=5$



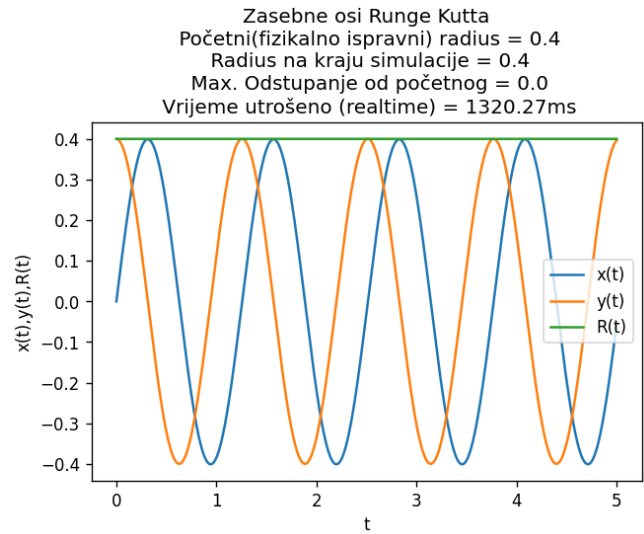
*Slika 8 3D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Runge-Kutta). Crvenom bojom prikazana je numerički određena putanja. Zelenom bojom prikazano je analitičko rješenje.*

U ovom slučaju je Runge-Kutta toliko blizu analitičkom rješenju da uopće ne vidimo razliku između numeričkog i analitičkog rješenja dok kod Eulerove metode još vidimo odstupanje, ali što je s potrebnim vremenom? Očito je da je Runge-Kutta precizniji od Eulerove metode, ali da li je ta povećana preciznost dovoljno veća da se isplati koristiti Runge-Kutta metodu.

Za ovu simulaciju je Runge-Kutta (Slika 11) metodi trebalo četiri puta više vremena da se izvrši nego Eulerovoj (Slika 10).



*Slika 10* 2D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Euler). Na y osi prikazani su položaji u x i y smjeru te trenutni Gyroradius [3]. Na x osi prikazano je proteklo vrijeme od početka simulacije.



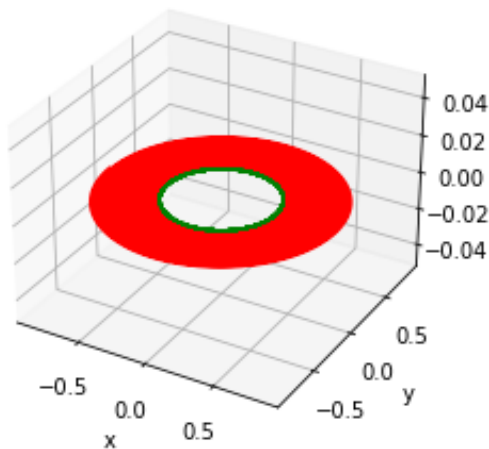
*Slika 11* 2D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Runge-Kutta). Na y osi prikazani su položaji u x i y smjeru te trenutni Gyroradius [3]. Na x osi prikazano je proteklo vrijeme od početka simulacije.

Ukoliko nam je potrebna jako precizna simulacija i nije nam problem trošiti resurse na računanje Runge-Kutta zasad izgleda kao bolji kandidat za tu ulogu.

### 3.2.2. Kružna putanja - duge simulacije

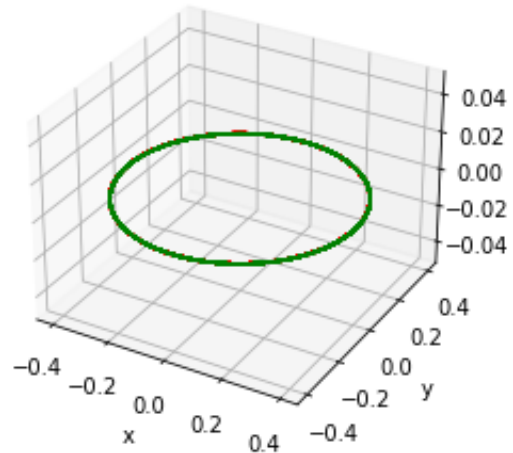
Što ako nam je potrebna duga i precizna simulacija. Neka svi uvjeti budu isti kao u prethodnom primjeru, ali da ovaj put promatramo dvanaest puta dužu simulaciju (Slika 13 i Slika 14).

Trajektorija naboja u EM polju - Euler  
 $dt=0.001$   
 $T=60$



*Slika 12* 3D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Euler). Crvenom bojom prikazana je numerički određena putanja. Zelenom bojom prikazano je analitičko rješenje.

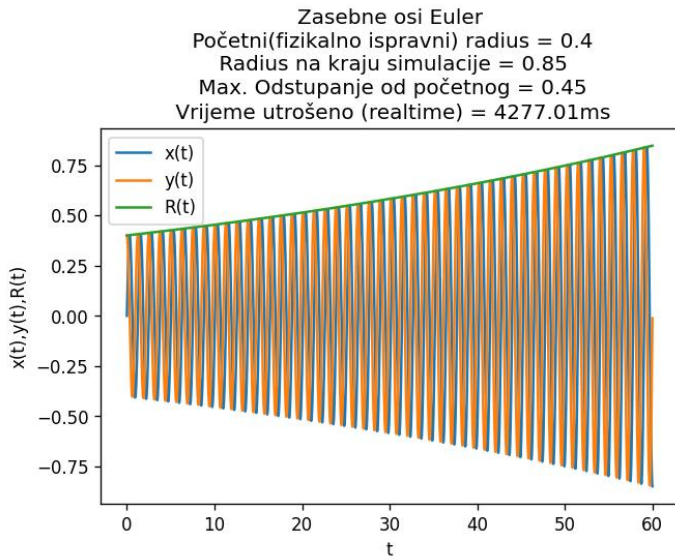
Trajektorija naboja u EM polju - Runge Kutta  
 $dt=0.001$   
 $T=60$



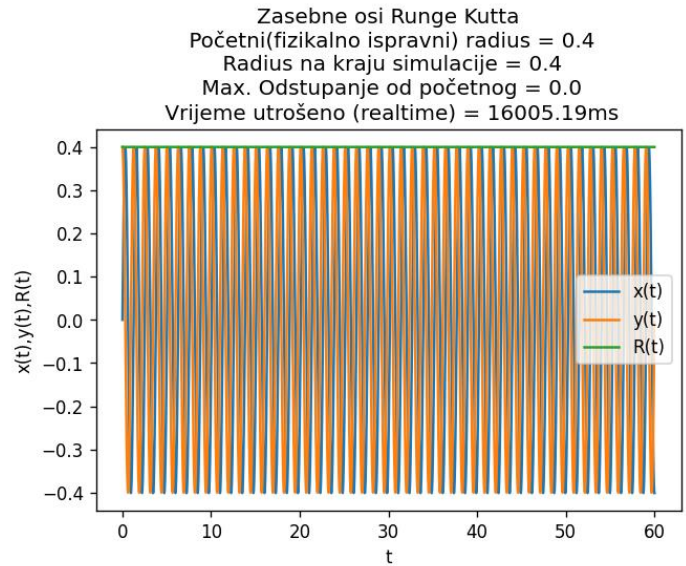
*Slika 13* 3D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Runge-Kutta). Crvenom bojom prikazana je numerički određena putanja. Zelenom bojom prikazano je analitičko rješenje.

Runge-Kutta je i dalje jako blizu analitičkom rješenju. Smanjenjem vremenskog intervala bi mogli postići ekstremno precizna rješenja čak i za jako duge simulacije. Kod Eulerove metode se greške gomilaju te očito nije dobar odabir za duge simulacije nebitno koliko nam velika preciznost treba. Čak i ako imamo neprecizne uređaje na kojima ćemo vršiti eksperiment, ukoliko nam simulacija treba trajati dugo Euler će proizvesti neprecizna rješenja.

Kada promatramo graf zasebnih osi i radijusa vidimo da Runge-Kutta metoda zanemarivo malo odstupa od radijusa analitičkog rješenja čak i nakon jako duge simulacije (Slika 14 i Slika 15).



*Slika 14* 2D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Euler). Na Y osi prikazani su položaji u x i y smjeru te trenutni Gyroradius [3]. Na x osi prikazano je proteklo vrijeme od početka simulacije.

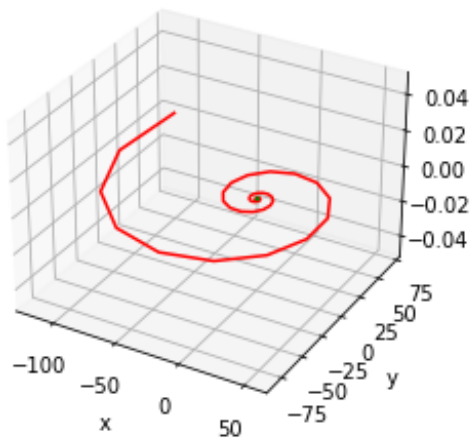


*Slika 15* 2D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Runge-Kutta). Na Y osi prikazani su položaji u x i y smjeru te trenutni Gyroradius [3]. Na x osi prikazano je proteklo vrijeme od početka simulacije.

### 3.2.3. Kružna putanja – dugi vremenski interval

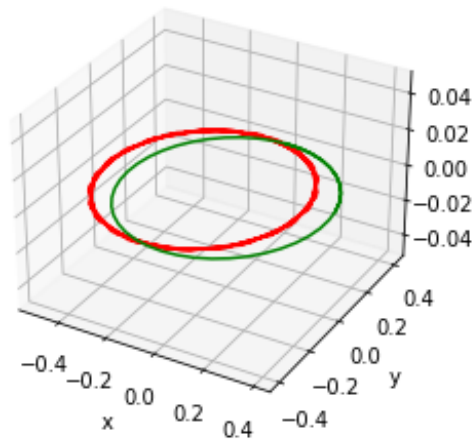
Dosad smo promatrali situacije kada želimo koristiti ove metode kao način simuliranja naše putanje prije nego što idemo raditi eksperiment. Što ako samo želimo napraviti brzu provjeru, tj. brzi 'proof of concept' samo da provjerimo da li je sve ispravno. Runge-Kutta je sporiji pa nema smisla trošiti resurse na jednostavno provjeru (Slika 16 i Slika 17).

Trajektorija naboja u EM polju - Euler  
 $dt=0.1$   
 $T=5$



*Slika 16 3D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Euler). Crvenom bojom prikazana je numerički određena putanja. Zelenom bojom prikazano je analitičko rješenje.*

Trajektorija naboja u EM polju - Runge Kutta  
 $dt=0.1$   
 $T=5$



*Slika 17 3D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Runge-Kutta). Crvenom bojom prikazana je numerički određena putanja. Zelenom bojom prikazano je analitičko rješenje.*

Unatoč jednostavnosti ove simulacije Runge-Kutta i dalje relativno dobro opisuje naše analitičko rješenje dok se Eulerova metoda praktički 'urušila' i daje rješenje koje toliko odstupa od analitičkog da uopće ne možemo znati da li je sve ispravno ili ne.

## 4. Usklađivanje vremena izvršavanja

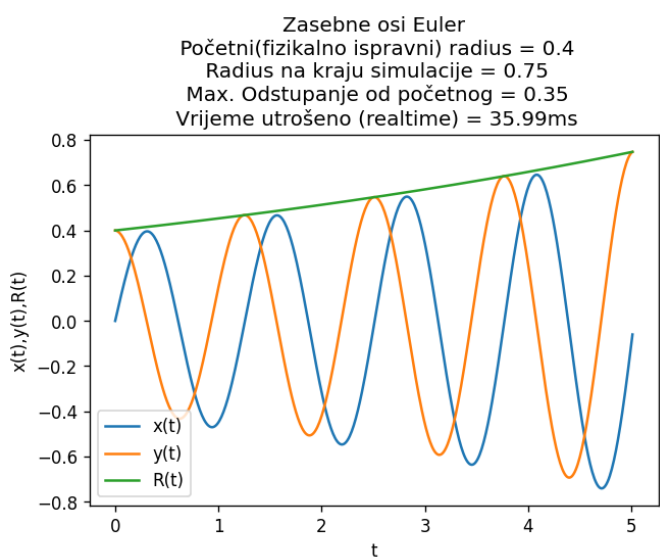
### 4.1. 'Trial and error' pristup

Dosad smo uspoređivali ove dvije metode u potpuno identičnim uvjetima. Runge-Kutta metoda je preciznija metoda koja ima sporije vrijeme izvršavanja, ali da li je to zaista tako?

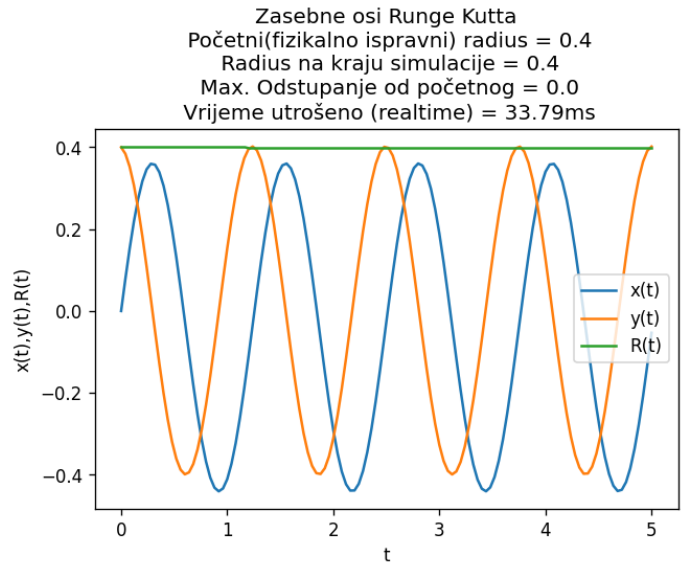
Da bi provjerili tu izjavu moramo uskladiti vremena izvršavanja ove dvije metode što u praksi nije moguće. Ne postoji način da analitički dobijemo vremenski interval s kojim će obje metode imati jednako dugo vrijeme izvršavanja. Recimo da ugasimo sve ostale programe, opet nemamo kontrolu nad našim vremenom jer ono ovisi o temperaturi procesora našeg računala i 'background' procesima koje nas operativni sustav trenutno izvršava.

Najbolji pristup bi bio da prvo izvršimo npr. Eulerovu metodu i vidimo koliko je vrijeme izvršavanja te nakon toga nasumično biramo vremenski interval za Runge-Kutta metodu sve dok vrijeme izvršavanja ne bude dovoljno slično onome koje smo dobili za Eulerovu metodu. Ako su vremena dovoljno slična možemo napokon potvrditi da li je Euler metoda stvarno brža od Runge-Kutta metode.

Nakon jako velikog broja unošenja raznih vremenskih intervala za Runge-Kutta metodu napokon dobijemo jako slično vrijeme izvršavanja za obje metode (Slika 18 i Slika 19).



*Slika 13 2D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Euler). Na Y osi prikazani su položaji u x i y smjeru te trenutni Gyroradius [3]. Na x osi prikazano je proteklo vrijeme od početka simulacije. ( $dt=0.01$ )*



*Slika 12 2D prikaz putanje naboja u elektromagnetskom polju (Runge-Kutta). Na Y osi prikazani su položaji u x i y smjeru te trenutni Gyroradius [3]. Na x osi prikazano je proteklo vrijeme od početka simulacije. ( $dt=0.034$ )*

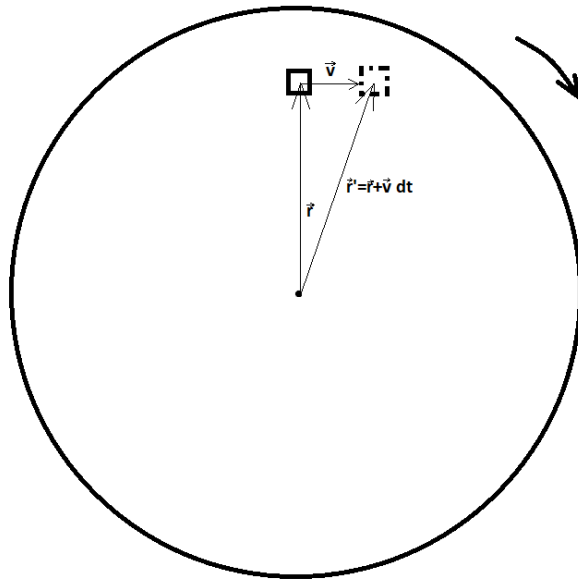
Iz dobivenih rezultata vidimo da je Runge-Kutta metoda preciznija čak i kada uskladimo vremena izvršavanja ove dvije metode te je ona optimalni odabir za svaku situaciju neovisno o mjernom postavu i vremenu koje planiramo utrošiti na našu simulaciju.



## 4.2. Razlog nastajanja greške

### 4.2.1. Kružno gibanje

Da bi bolje razumjeli razlog zašto nastaje numerička greška možemo pogledati jedan jednostavni primjer. Recimo da promatramo predmet (kao mirujući promatrač) na rotirajućoj podlozi koji se nalazi na radijusu  $r$  od osi rotacije (Slika 20). Realno rješenje bi bilo gibanje tog predmeta po kružnici. Sada pogledajmo što bi se dogodilo kada bi koristili Eulerovu metodu da prikažemo to numerički.



*Slika 14 Prikaz predmeta koji se nalazi na rotirajućoj podlozi na radijusu  $r$  od osi rotacije. Položaj nakon vremenskog intervala  $dt$  određen je Eulerovom metodom.*

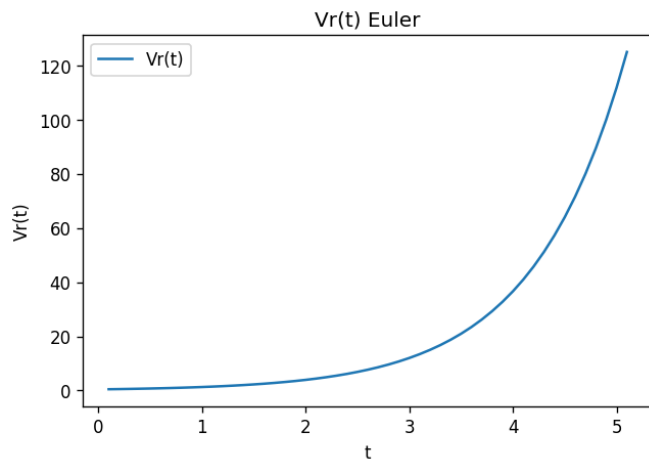
Nakon vremenskog intervala  $dt$  naš predmet se više ne bi nalazio na udaljenosti  $r$  od osi rotacije nego na udaljenosti  $r'$  za koju vrijedi:

$$r < r'$$

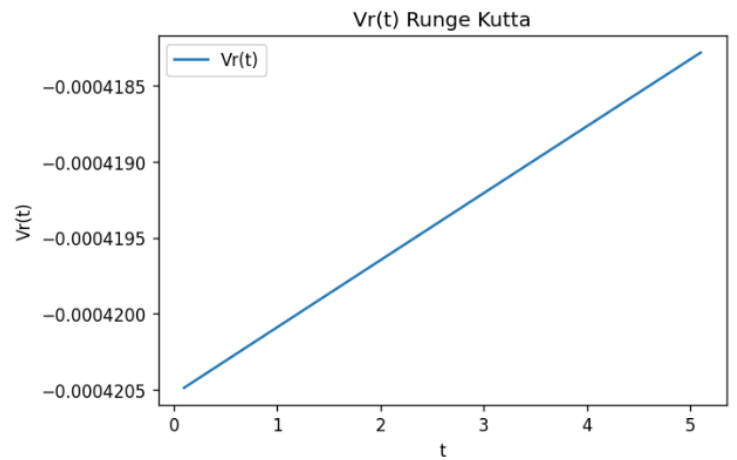
Što je duža simulacija, taj radijus će postajati sve veći kao u našem primjeru gibanja naboja u EM polju. Runge-Kutta metoda minimalizira tu grešku prilikom usrednjavanja.

#### 4.2.2. Brzina promjene radijusa

Da bi još bolje razumjeli razliku između ove dvije metode, tj. razlog zašto je Runge-Kutta optimalna metoda možemo promotriti i brzinu promjene radijusa. Koristimo rješenja iz primjera 3.2.3. jer su promjene veoma ekstremne i vidljive zbog velikog vremenskog intervala.



*Slika 16* Grafički prikaz brzine promjene radijusa u ovisnosti o proteklom vremenu od početka simulacije (Euler).



*Slika 15* Grafički prikaz brzine promjene radijusa u ovisnosti o proteklom vremenu od početka simulacije (Runge-Kutta).

Vidimo da Runge-Kutta metoda ima linearni i zanemarivi rast brzine promjene radijusa (Slika 22) dok kod Eulerove metode raste eksponencijalno (Slika 21) što objašnjava kolaps Eulerove metode kod dužih simulacija.

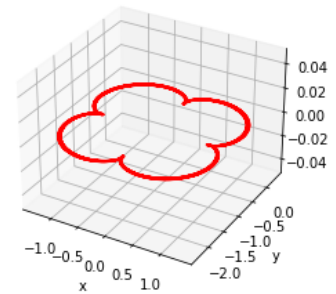
## 5. Primjeri putanja

Sada kada smo potvrdili da je Runge-Kutta brža i preciznija metoda za numeričko određivanje putanje možemo napraviti nekoliko zanimljivih simulacija s drugim parametrima. Svi parametri dobiveni su s 'Trial and error' pristupom.

*Tablica 2 Parametri simulacije za primjer djeteline.*

Parametri simulacije	
m	1 kg
q	1 C
$\vec{v}$	0 m/s
$\vec{E}$	$(5 \sin(t)\hat{i} + 5\cos(t)\hat{j}) \text{ V/m}^2$
$\vec{B}$	$5\hat{k} \text{ T}$

Trajektorija naboja u EM polju - Runge Kutta  
 $E=[5 \sin(t), 5 \cos(t), 0]$   
 $B=[0,0,5]$   
 $v=[0,0,0]$   
 $dt=0.001$   
 $T=90$

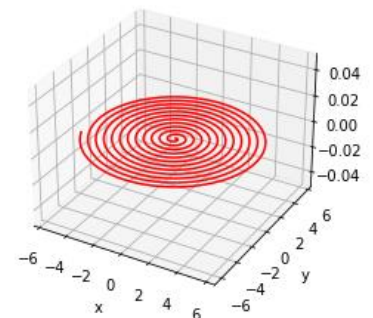


*Slika 17 3D prikaz putanje naboja za primjer djeteline.*

*Tablica 3 Parametri simulacije za primjer akceleratora.*

Parametri simulacije	
m	1 kg
q	1 C
$\vec{v}$	0 m/s
$\vec{E}$	$(2 \sin(5t)\hat{i} + 2\cos(5t)\hat{j}) \text{ V/m}^2$
$\vec{B}$	$5\hat{k} \text{ T}$

Trajektorija naboja u EM polju - Runge Kutta  
 $E=[2 \sin(5t), 2 \cos(5t), 0]$   
 $B=[0,0,5]$   
 $v=[0,0,0]$   
 $dt=0.0001$   
 $T=15$

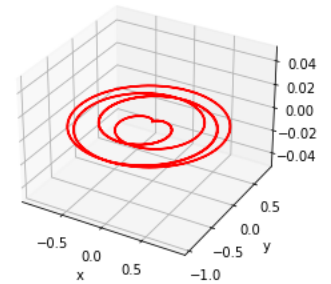


*Slika 18 3D prikaz putanje naboja za primjer akceleratora.*

**Tablica 4** Parametri simulacije za primjer srca.

Parametri simulacije	
m	1 kg
q	1 C
$\vec{v}$	0 m/s
$\vec{E}$	$(2 \sin(4t)\hat{i} + 2\cos(4t)\hat{j}) \text{ V/m}^2$
$\vec{B}$	$5\hat{k} \text{ T}$

Trajektorija naboja u EM polju - Runge Kutta  
 $E=[2 \sin(4t), 2 \cos(4t), 0]$   
 $B=[0,0,5]$   
 $v=[0,0,0]$   
 $dt=0.001$   
 $T=15$



**Slika 19** 3D prikaz putanje naboja za primjer srca.

## 6. Zaključak

Koristili smo jednostavni slučaj kada znamo analitičko rješenje, tj. kada se naboj giba po kružnoj putanji pod djelovanjem konstantnog magnetskog polja. Analitičko rješenje tog slučaja dano je kao [3]:

$$R_g = \frac{mv_{\perp}}{|q|B}$$

Znajući analitičko rješenje mogli smo usporediti preciznost i vremena izvršavanja svake od metoda.

Uspoređivanjem preciznosti te dvije metode vidimo da je Runge-Kutta preciznija metoda neovisno o vremenskom intervalu kojeg koristimo pri računanju numeričke derivacije, tj. nagiba krivulje. To nam pokazuje da je Runge-Kutta bolja metoda ako nam je potrebna precizna simulacija.

Također usklađivanjem vremena izvršavanja metoda uočavamo da za jednaka vremena izvršavanja Runge-Kutta i dalje daje preciznije rezultate. Ukoliko nam treba jednostavna simulacija koja nam služi kao 'proof of concept' ili kao provjera da je algoritam ispravan prije nego što krenemo trošiti vrijeme na duge precizne simulacije, Runge-Kutta je i dalje bolja metoda.

Stoga vidimo da je Runge-Kutta bolja metoda neovisno o tome kakva simulacija nam je potrebna te neovisno o resursima koje imamo na raspolaganju.

U svim primjerima smo koristili Runge-Kutta metodu drugog stupnja [1]. Korištenjem metode trećeg stupnja mogli bi postići preciznije rezultate, ali bi vrijeme izvršavanja bilo duže te bi ponovno morali provesti iste provjere i usporedbe da bi u konačnici znali da li nam je ta metoda bolja za naš specifični slučaj.

## 7. Literatura

1. Lorentz force, Wikipedia,  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz\\_force](https://en.wikipedia.org/wiki/Lorentz_force) (15.8.2021.)
2. Euler method, Wikipedia,  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Euler\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Euler_method) (14.8.2021.)
3. Runge-Kutta methods, Wikipedia,  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta\\_methods](https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods)  
(14.8.2021.)
4. Numerical analysis, Wikipedia  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_analysis](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_analysis) (29.8.2021.)
5. Derivative, Wikipedia  
URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Derivative> (29.8.2021.)
6. Numerical differentiation, Wikipedia,  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical\\_differentiation](https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_differentiation) (29.8.2021.)
7. Gyroradius, Wikipedia,  
URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Gyroradius> (24.8.2021.)
8. Grafički prikaz Runge-Kutta metode,  
URL : [https://lh3.googleusercontent.com/proxy/JZexZbTqI8T-h\\_F\\_8Ssg\\_hsINYjcd7AVchctQFQkzAcXG7sE0SXIqy\\_YdNoCgRefRcvr4ZuJEDO1eWqlvKY7FDiJIoo4wjDnVjghYrC1M8wD44CJ4zE](https://lh3.googleusercontent.com/proxy/JZexZbTqI8T-h_F_8Ssg_hsINYjcd7AVchctQFQkzAcXG7sE0SXIqy_YdNoCgRefRcvr4ZuJEDO1eWqlvKY7FDiJIoo4wjDnVjghYrC1M8wD44CJ4zE)  
(15.8.2021.)