

# Bijeli patuljak

---

**Mihovilović, Marko**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2021**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:970890>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-17**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet

# **Bijeli patuljak**

Završni rad

Marko Mihovilović

Split, rujan 2021.

## Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet  
Odjel za fiziku  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

### Bijeli patuljak

Marko Mihovilović

Sveučilišni preddiplomski studij Fizika

#### Sažetak:

Bijeli patuljak jest završna faza evolucije zvijezde srednje veličine. Na početku je riječ o vrućem objektu, koji se potom postepeno hladi zbog prestanka fuzije. Bijeli patuljak sadržava degeneriranu materiju te tlak degeneriranog plina ima glavnu ulogu u sprječavanju gravitacijskog sažimanja. Kroz rješavanje niza jednačini, došlo se do dvije temeljne diferencijalne jednačine uz pomoć kojih je opisana struktura bijelih patuljaka te je ujedno i grafički prikazana.

**Ključne riječi:** zvijezde, evolucija, bijeli patuljak, struktura bijelog patuljka

**Rad sadrži:** 15 stranica, 5 slika, 1 tablicu, 7 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku.

**Mentor:** doc. dr. sc. Marko Kovač

**Neposredni voditelj:** /

**Ocjenjivači:** doc. dr. sc. Marko Kovač,  
doc. dr. sc. Koraljka Mužić,  
doc. dr. sc. Toni Šćulac

**Rad prihvaćen:** 28. 9. 2021.

Rad je pohranjen u Knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

<b>Basic documentation card</b>
---------------------------------

University of Split  
Faculty of Science  
Department of Physics  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Bachelor thesis

**White dwarf**

Marko Mihovilović

University undergraduate study programme Physics

**Abstract:**

White dwarf is the final phase of the medium sized star evolution. At the beginning, it is a very hot object that gradually loses its temperature because of the stoppage of fusion. White dwarf contains degenerate matter and degenerate pressure plays the major role in stopping gravitational collapse. Through a series of equations, we managed to define two main differential equations which helped us in describing the structure of the white dwarfs, and the results are graphically shown.

**Keywords:** stars, evolution, white dwarfs, structure of white dwarfs

**Thesis consists of:** 15 pages, 5 figures, 1 tables, 7 references. Original language: Croatian.

**Supervisor:** Assist. Prof. Dr. Marko Kovač

**Leader:** /

**Reviewers:** Assist. Prof. Dr. Marko Kovač,  
Assist. Prof. Dr. Koraljka Mužić,  
Assist. Prof. Dr. Toni Šćulac

**Thesis accepted:** September 28, 2021

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Zvijezde</b> . . . . .	<b>1</b>
2.1	Svojstva zvijezda . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Bijeli patuljci</b> . . . . .	<b>4</b>
<b>4</b>	<b>Struktura bijelih patuljaka</b> . . . . .	<b>6</b>
<b>5</b>	<b>Numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi</b> . . . . .	<b>10</b>
5.1	Rezultati . . . . .	12
<b>6</b>	<b>Zaključak</b> . . . . .	<b>13</b>
<b>8</b>	<b>Dodatak</b> . . . . .	<b>15</b>

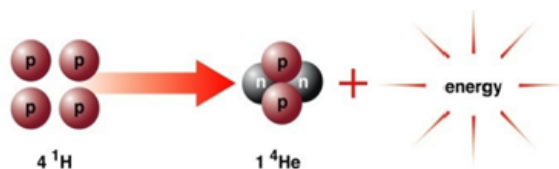
## 1 Uvod

Još od davnina ljude je zanimalo što se događa u nebeskim prostranstvima i koje tajne skrivaju. Potaknuti znatiželjom započeli su proučavanje svemira i nebeskih tijela, među kojima su se posebno istaknule zvijezde. Pitanja kako zvijezde nastaju te općenito njihov proces evolucije bili su jedne od glavnih niti vodilja u istraživanjima. Jedna od završnih faza razvoja zvijezda srednje mase jest bijeli patuljak, što je ujedno i tema ovoga rada.

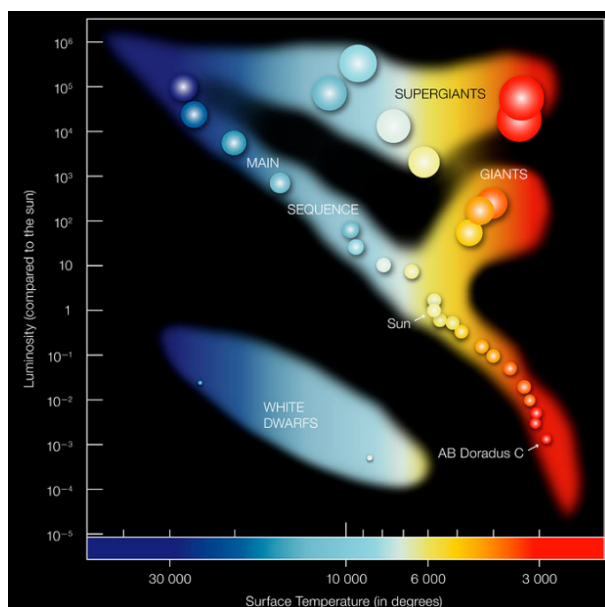
Tek otkriveni, bijeli patuljci predstavljali su svojevrsni paradoks znanstvenicima. Kako mogu ostajati na životu, a istovremeno ne proizvoditi energiju kroz nuklearne procese? Zahvaljujući razvoju kvantne teorije navedeni paradoks je razriješen. Rezultati, saznanja i opća svojstva zvijezda i bijelih patuljaka navedeni su u prvom dijelu ovog rada. Unutar drugog dijela rada donesen je niz jednadžbi iz kojih su na kraju izvedene dvije diferencijalne jednadžbe pomoću kojih opisujemo strukture bijelih patuljaka.

## 2 Zvijezde

Zvijezda jest objekt sfernog oblika, primarno izgrađena od vodika i helija, koja posjeduje vlastiti izvor energije [3]. Nužni uvjeti za nastanak zvijezda jest postojanje gustih oblaka međuzvjezdanih plinova i prašine [5]. Na mjestima gdje je gustoća prašine najveća, hlađenje plina jest najbrže što uzrokuje opadanje tlaka unutar hladnijeg područja. Okolna područja s višim tlakom tiskaju područje s nižim što potiče formiranje gustog oblaka iz kojeg daljnjim procesima mogu nastati zvijezde [5]. Posljedica navedenog kolapsiranja jest zagrijavanje središta međuzvjezdanog oblaka koje može dovesti do početka termonuklearnih procesa fuzije te nastanka protozvijezde koja prethodi zvijezdi [3]. Daljnjim kolapsiranjem međuzvjezdanog oblaka formira se gusta zagrijana jezgra koja započinje sakupljati okolnu prašinu i plinove. Novonastala mlada zvijezda ne mora na sebe vezati sav okolni materijal, već navedeni ostatak materijala može formirati nove planete, asteroide, komete ili ostala nebeska tijela [4]. Nakon što temperatura u središtu jezgre dosegne  $4 \cdot 10^6$  K kreću termonuklearne reakcije fuzije vodika u helij [3]. Gravitacijska sila i dalje teži kolapsiranju zvijezde, no oslobođena energija iz termonuklearnih reakcija joj se suprotstavlja te zvijezda tako postaje stabilna te zauzima svoje mjesto na glavnom nizu H-R dijagrama [3]. Početkom 20. stoljeća Ejnar Hertzsprung i Henry Norris Russell sastavili su grafički prikaz zvijezda podijeljene u nizove i skupine prema zvjezdanom luminozitetu i efektivnom površinskom temperaturom ili spektralnim razredom zvijezde. Pozivajući se na korelaciju luminoziteta i efektivne površinske temperature, unutar H-R dijagrama vidljiv jest i polumjer, odnosno veličina zvijezde [3].



**Slika 1:** Fuzija vodika u helij uz oslobađanje energije.  
(slika preuzeta s <http://www.prometej.ba/clanak/drustvo-i-znanost/zvezdana-evolucija-peti-dio-nuklearni-procesi-u-zvezdama-399>)



**Slika 2:** Hertzsprung–Russellov dijagram.  
(slika preuzeta s <http://cdn.eso.org/images/screen/eso0728c.jpg>)

## 2.1 Svojstva zvijezda

Već iz samog promatranja zvijezda mogu se izvući neka od osnovnih svojstava zvijezda. Prividna zvjezdana magnituda ili prividna zvjezdana veličina ( $m$ ) mjera je za opaženi sjaj zvijezde te je određena svjetlosnim tokom sa zvijezde ( $F$ ) [3]. Uzevši  $m_1$  i  $m_2$  kao prividne zvjezdane veličine dviju zvijezda te  $F_1$  i  $F_2$  kao pripadajuće svjetlosne tokove dobivamo iskaz:

$$m_1 - m_2 = -2.512 \log \left( \frac{F_1}{F_2} \right) \quad (2.1)$$

Iz navedenog iskaza vidljivo jest da je zvijezda prve veličine,  $m = +1$ , sjajnija 2.512 puta od zvijezde druge veličine. Prostim okom čovjek je sposoban vidjeti zvijezde do prividne veličine  $\approx +6$  [3]. Grčki astronom i matematičar Hiparh iz Nikeje već je u drugom stoljeću prije nove ere stvorio katalog ondašnje poznatih zvijezda koje je klasificirao prema sistemu od 6 magnituda. Golim okom najsajnije zvijezde su bile prividne zvjezdane veličine +1, a najslabije +6 [3]. Vodeći se Hiparhovom idejom klasifikacije, današnja klasifikacija jest općenitija, a raspon prividne zvjezdane veličine može biti i negativan. Jedna, još iznimno bitna stavka

pri određivanju prividnih zvjezdanih veličina jest udaljenost zvijezde i Zemlje te je zbog toga uvedena apsolutna zvjezdana veličina ( $M$ ) koja se najjednostavnije definira kao prividni sjaj koji bi zvijezda imala da se nalazi udaljena 10 parseka [3].

Temperatura fotosfere zvijezde određuje se Wienovim zakonom prema kojem je valna duljina  $\lambda_{max}$  obrnuto proporcionalna temperaturi:

$$\lambda_{max} = \frac{C}{T} \quad (2.2)$$

gdje je  $C$  konstanta jednaka  $2.9 \cdot 10^{-3}$  mK [3]. Nadalje, efektivna temperatura, temperatura s pretpostavkom da zvijezda zrači jednako kao crno tijelo, dobiva se iz izraza:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T_{eff}^4 \quad (2.3)$$

gdje je  $L$  luminozitet,  $4\pi R^2$  jest površina tijela koja zrači, dok je  $\sigma$  Stefan-Boltzmannova konstanta koja iznosi  $5.670 \cdot 10^{-8} \text{Js}^{-1}\text{m}^{-2}\text{K}^{-4}$  [3].

Godine 1901. Annie Jump Cannon predlaže novu klasifikaciju zvijezda unutar koje postoje sedam spektralnih razreda: O, B, A, F, G, K, M (O ima najveću efektivnu temperaturu fotosfere, a M najmanju) koji su potom podijeljeni u deset podgrupa: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (0 predstavlja zvijezde s najvišom fotosferskom temperaturom). Slovu i broju dodaje se još i rimski broj (I, II, III, IV, V, VI, VII) koji označava dimenziju zvijezde (I su ekstremno velike zvijezde, dok su VII patuljaste zvijezde).[3]

spektralni razred	efektivna fotosferska temperatura [K]	boja
O	$\geq 30000$	modra
B	10000-30000	modro-bijela
A	7500-10000	bijela
F	6000-7500	žuto-bijela
G	5200-6000	žuta
K	3700-5200	žuto-crvena
M	2400-3700	crvena

**Tablica 1:** Tablica spektralne klasifikacije.



### 3 Bijeli patuljci

U donjem lijevom kutu H-R dijagrama smjestile su se zvijezde velike površinske temperature s malim luminozitetom, a samim time i malom površinom. Riječ je o bijelim patuljcima. Zvijezde reda veličine 0,26 – 3 mase Sunca vrše procese fuzije vodika u helij sve dok se ne potroši sav vodik u jezgri. Tada jezgra više nije u mogućnosti suprotstavljanju gravitacijskom sažimanju te slijedi njeno sažimanje te rast temperature [3]. Kao posljedica ostaje samo inertna jezgra od helija te ljuska od vodika koja se nastavlja smanjivati te s vremenom postaja sve vruća i gušća. Energija oslobođena sažimanjem jezgre i fuzijom unutar ljuske uzrokuje širenje vanjskih slojeva, povećanje sjaja te „izlazak“ iz glavnog niza i pretvorbu zvijezde u crvenog diva [3].

Nakupljanjem helija unutar jezgre, nastaje sve više degenerirane materije<sup>1</sup> te se tlak degeneracije protivi daljnjem gravitacijskom sažimanju. Unutrašnjost crvenog diva sada je elektronski degenerirana materija te u jezgri pri temperaturi približnoj od 100 MK dolazi do fuzije helija u ugljik i oslobađanja energije. Iako se jezgra i dalje zagrijava, ne dolazi do potrebnog širenja kako bi se ohladila što u konačnici dovodi do eksplozije, takozvani helijev bljesak, čija se oslobođena energija troši na širenje jezgre [3]. Kao posljedica eksplozije dolazi do smanjenja temperature ljuske i brzine fuzije te ostaje jezgra sagrađena od inertnog ugljika. Zbog nemogućnosti dostizanja viših temperatura daljnja fuzija ugljika nije moguća. Slijedi niz mini helijevih bljeskova te se odbacuju vanjski slojevi zvijezde sve dok ne ostane samo izložena vruća jezgra koju nazivamo bijeli patuljak [3].

Bijeli patuljak na početku je vrući objekt koji se postepeno hladi zbog prestanka fuzije. Riječ je o ekstremnim objektima približne veličine Zemlji, no visoke gustoće. Tipična gustoća jest  $10^9 \text{ kg/m}^3$  što ih čini  $10^6$  puta gušćim nego što je Zemlja [2]. Unatoč tome što se tlak degeneriranog plina suprotstavlja gravitacijskoj sili sažimanja bijelog patuljka ipak postoji granica pri kojoj se događa kolaps bijelih patuljaka. Riječ je o Chandrasekharovoj granici koja predstavlja maksimalnu masu stabilnog bijelog patuljka te približno iznosi 1.4 mase Sunca. U slučaju da masa prijeđe navedenu granicu, slijedi gravitacijski kolaps te bijeli patuljak evoluiru u ostale tipove zvjezdanih ostataka poput neuronske zvijezde ili crnih rupa [4].

Tradicionalno, bijele patuljke možemo podijeliti u dvije skupine: DA bijele patuljke i non-DA bijele patuljke. DA bijeli patuljci čine 85% svih, do sada poznatih, bijelih patuljaka te na njihovoj površini, odnosno atmosferi primarno dominira vodik. Non-DA bijele patuljke nadalje možemo podijeliti ovisno o elementu koji dominira (DB, DO, DC, DQ, DZ), s time da je DB u kojem dominira helij najčešći oblik non-DA bijelih patuljaka [2]. Još jedno od bitnih svojstva

---

<sup>1</sup>Degenerirana materija jest veoma gusto stanje fermionske materije u kojemu čestice moraju zauzeti visoka stanja kinetičke energije kako bi zadovoljile Paulijev princip isključenja. Paulijev princip isključenja – u svakom kvantnom stanju može biti samo jedan fermion.

bijelih patuljaka je mogućnost posjedovanje vlastitog magnetskog polja, te ovisno o njemu bijeli patuljci se mogu podijeliti u tri skupine: visokomagnetizirajući sporotirajući bijeli patuljci ( $T \approx 50 - 100$  godina), visokomagnetizirajući brzorotirajući bijeli patuljci ( $T \approx 700$  s) te rotirajući bijeli patuljci koji nemaju magnetsko polje ( $T \approx$  sati – dani) [1].



**Slika 3:** *Evolucija od oblaka međuzvjezdanih plinova i prašine do bijelog patuljka.*  
(slika preuzeta s [https://www.lcsd.gov.hk/CE/Museum/Space/archive/EducationResource/Universe/framed\\_e/lecture/ch15/imgs/starlife.jpg](https://www.lcsd.gov.hk/CE/Museum/Space/archive/EducationResource/Universe/framed_e/lecture/ch15/imgs/starlife.jpg))

## 4 Struktura bijelih patuljaka

Cilj nam je odrediti jednadžbe stanja bijelih patuljaka kako bi dobili njihove strukture, točnije ovisnosti mase i gustoće o radijusu bijelog patuljaka. Za početak promatramo komadić volumena bijelog patuljaka te kako na njega djeluje gravitacijska sila.

$$\vec{F}_g = \frac{-Gm(r)}{r^2} \rho(r) d^3 r \hat{r} \quad (4.1)$$

Gdje  $G$  predstavlja gravitacijsku konstantu,  $\rho(r)$  gustoću na udaljenosti  $r$  od središta, a  $m(r)$  masu sadržanu na udaljenosti  $r$  od središta. Sila koja se suprotstavlja gravitacijskoj sili te održava ravnotežu sustava, jest sila koja je nastala kao posljedica tlaka degeneriranog Fermionskog plina.

$$\vec{F}_p = -[P(r + dr) - P(r)] dA \hat{r} = -dP dA \hat{r} \quad (4.2)$$

Za sustav u ravnoteži vrijedi relacija:

$$\vec{F}_g + \vec{F}_p = 0 \quad (4.3)$$

$$-dP dA \hat{r} - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) d^3 r \hat{r} = 0 \quad (4.4)$$

$$-dP r^2 d\Omega \hat{r} - \frac{Gm(r)}{r^2} \rho(r) r^2 dr d\Omega \hat{r} = 0 \quad (4.5)$$

Iz prethodne jednadžbe slijedi ovisnost tlaka o radijusu:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{-Gm(r)}{r^2} \rho(r) \quad (4.6)$$

Nas zanima određivanje ovisnosti gustoće o radijusu stoga izraz (4.6) možemo rastaviti u oblik:

$$\frac{dP}{dr} = \frac{d\rho}{dr} \frac{dP}{d\rho} \quad (4.7)$$

te kombinirajući izraze (4.6) i (4.7) dobivamo ovisnost gustoće o radijusu:

$$\frac{d\rho}{dr} = \left( \frac{dP}{d\rho} \right)^{-1} \frac{-Gm(r)}{r^2} \rho(r) \quad (4.8)$$

Masu također možemo napisati kao funkciju ovisnu o radijusu:

$$\frac{dm}{dr} = \frac{\rho(r) dV}{dr} = \rho(r) dA = \rho(r) 4\pi r^2 \quad (4.9)$$

gdje  $4\pi r^2$  predstavlja površinu sfere.

Jednadžbe (4.8) i (4.9) predstavljaju tražene diferencijalne jednadžbe, za koje vrijede da su  $m = 0$  i  $\rho = \rho_c$ , u rubnom uvjetu  $r = 0$ .

Za rješavanje dobivenih diferencijalnih jednačini trebamo još odrediti tlak kao funkciju gustoće. Kao što smo već spomenuli u prethodnom poglavlju tlak koji se suprotstavlja gravitacijskoj sili jest tlak degeneriranog plina. Stoga, kao posljedica što većina ukupnog tlaka dolazi zbog gibanja elektrona, možemo koristiti model idealnog Fermionskog plina od relativističkih elektrona za određivanje strukture bijelog patuljka. Također masu nukleona ćemo zamijeniti masom protona, zbog relativno sličnih masa.[6]

Množinu elektrona možemo raspisati preko broja elektrona po nukleonu u obliku:

$$n = \frac{N}{V} = Y_e \frac{\rho}{m_n} \quad (4.10)$$

Također, uzimajući u obzir da se radi o idealnom Fermionskom plinu, množinu možemo zapisati u obliku:

$$n = \frac{2}{h^3} \int_0^{p_f} d^3p = \frac{2 \cdot 4\pi}{h^3} \int_0^{p_f} p^2 dp \quad (4.11)$$

$$n = \frac{8\pi}{3h^3} p_f^3 \quad (4.12)$$

Kombinirajući izraze (4.10) i (4.12) dobivamo izraz za Fermijevu količinu gibanja:

$$p_f = h \left( \frac{3Y_e \rho}{8\pi m_p} \right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.13)$$

Elektroni se u bijelom patuljku gibaju puno brže nego nukleoni te možemo odrediti njihovu relativističku kinetičku energiju:

$$E_k = \sqrt{p^2 c^2 + m_e^2 c^4} - m_e c^2 = m_e c^2 \left( \left(1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}} - 1 \right) \quad (4.14)$$

Derivacijom kinetičke energije po količini gibanja dobivamo brzinu elektrona:

$$\frac{dE_k}{dp} = \frac{(p/m_e)}{\sqrt{1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}}} = u \quad (4.15)$$

Sada kada znamo kako izgleda brzina elektrona, možemo odrediti tlak koji nastaje kao posljedica njihovog gibanja:

$$U = \frac{3}{2} PV = N \langle E_k \rangle \Rightarrow P = \frac{1}{3} \frac{N}{V} \langle pu \rangle \quad (4.16)$$

$$P = \frac{8\pi}{3h^3} \int_0^{p_f} \frac{p^2/m_e}{\left(1 + \frac{p^2}{m_e^2 c^2}\right)^{\frac{1}{2}}} p^2 dp \quad (4.17)$$

Za rješavanje dobivenog integrala uvodimo supstituciju  $p = m_e c \cdot x$ , uz pomoć koje uvrštavanjem u jednadžbu (4.17) za tlak dobivamo pojednostavljeni oblik integrala:

$$P = \frac{8\pi}{3h^3 m_e} \int \frac{m_e^2 c^2 x^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{m_e c x}{m_e c}\right)^2}} \cdot m_e^2 c^2 x^2 \cdot m_e c dx \quad (4.18)$$

$$P = \frac{8\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} A(x) \quad (4.19)$$

gdje je  $A(x) = x\sqrt{x^2 + 1}(2x^2 - 3) + 3\sinh^{-1}(x)$ .

U našem slučaju proučavamo idealni Fermionski plin, stoga uvrštavanjem supstitucije u jednadžbu (4.12) slijedi:

$$x = \frac{p_f}{m_e c} = \left(\frac{3n}{8\pi}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{h}{m_e c}\right) \quad (4.20)$$

Također iz jednadžbe (4.12) možemo iščitati ovisnost Fermijeve količine gibanja o množini iz čega nam slijedi:

$$p_f = C \cdot n^{\frac{1}{3}} \Rightarrow p_f = C \cdot \rho^{\frac{1}{3}} \quad (4.21)$$

Masa elektrona i brzina svjetlosti su uvijek konstantne stoga njihov umnožak možemo zapisati u obliku  $p_0 = m_e c$  te iz toga dobijemo traženi  $x$  za naš slučaj:

$$x = \frac{p_f}{m_e c} = \left(\frac{n}{n_0}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{\frac{1}{3}} \quad (4.22)$$

gdje su

$$n_0 = \frac{8\pi}{3h^3} m_e^3 c^3 \quad i \quad \rho_0 = \frac{m_p n_0}{Y_e} \quad (4.23)$$

Naš cilj drugog dijela izvoda je bio odrediti tlak kao funkciju gustoće te sad tu ovisnost možemo raspisati u obliku:

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{dP}{dx} \frac{dx}{d\rho} \quad (4.24)$$

Koristeći se relacijom (4.22), određujemo derivaciju varijable  $x$  po gustoći:

$$\frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{\left(\rho_0\right)^{\frac{1}{3}}} \frac{1}{3} \rho^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\rho_0} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^{-\frac{2}{3}} \quad (4.25)$$

$$\frac{dx}{d\rho} = \frac{1}{3\rho_0} x^{-2} \quad (4.26)$$

Iz jednadžbe (4.19) uočavamo ovisnost tlaka o varijabli  $x$  samo u dijelu  $A(x)$  te derivacija funkcije  $A(x)$  iznosi:

$$\frac{dA(x)}{dx} = \left(\frac{3}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{8x^4 - 3}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) = \left(\frac{8x^4}{\sqrt{x^2 + 1}}\right) \quad (4.27)$$

Sada uvrštavajući (4.26) i (4.27) u (4.24) dobivamo ovisnost tlaka o gustoći:

$$\frac{dP}{dx} \frac{dx}{d\rho} = \frac{\pi m_e^4 c^5}{3h^3} \left( \frac{8x^4}{\sqrt{x^2+1}} \right) \left( \frac{1}{3\rho_0} x^{-2} \right) \quad (4.28)$$

Iz čega nam slijedi uz dodatne pokrate (4.23):

$$\frac{dP}{d\rho} = \frac{Y_e m_e c^2}{m_p} \frac{x^2}{3\sqrt{x^2+1}} \quad (4.29)$$

Radi jednostavnosti izraz  $\frac{x^2}{3\sqrt{x^2+1}}$  smo zamijenili s  $\gamma(x)$  te se s dobivenim izrazom vraćamo u početnu jednadžbu (4.8).

Na kraju smo dobili izraze za dvije tražene diferencijalne jednadžbe :

$$\frac{dm}{dr} = \rho(r) 4\pi r^2 \quad (4.30)$$

$$\frac{d\rho}{dr} = \frac{-Gm(r)\rho(r)m_p}{r^2 Y_e m_e c^2 \gamma(x)} \quad (4.31)$$

## 5 Numeričko rješavanje diferencijalnih jednadžbi

Nakon što smo odredili diferencijalne jednadžbe ovisnosti mase i gustoće bijelih patuljaka o radijusu, numerički smo ih riješili uz pomoć programskog jezika C. Za rješavanje diferencijalnih jednadžbi koristili smo se metodom Runge-Kutta 4 te smo rezultate prikazali grafički koristeći se programom gnuplot.

Na početku koda smo definirali naše diferencijalne jednadžbe u obliku funkcija te odredili rubne uvijete i prirast argumenta (korak)  $h1$ :

```

15 double gamma(double rho, double rho0){
16     double x;
17     x=pow((rho/rho0),(1/3));
18     return pow(x,2)/(3*sqrt(1+pow(x,2)));
19 }
20 double dmdr(double r, double rho){
21     return 4*Pi*pow(r,2)*rho;
22 }
23 double drhodr(double r, double m, double rho, double rho0){
24     return -(G*m*rho*mp)/(pow(r,2)*me*Ye*pow(c,2)*gamma(rho, rho0));
25 }

35 n0=(8*Pi*pow(me,3)*pow(c,3))/(3*pow(h,3));
36 rho0=mp*n0/Ye;
37 rho=temp=8e10;
38 mmax=1.44*1.989e30;
39 h1=100;
40 r=0.0001;
41 m0=m=0.0;

```

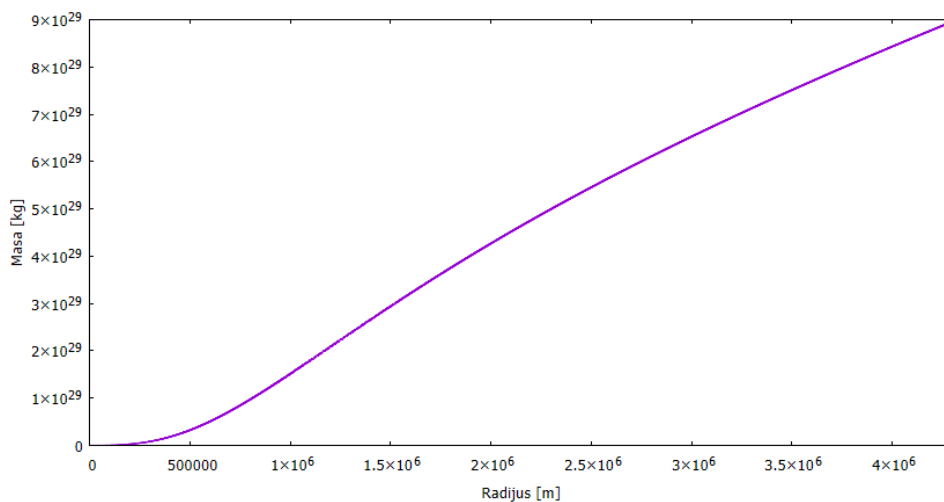
Zatim smo proveli RK4 metodu uz pomoć do-while petlje s ograničenjem na  $m_{max} = 1.44 M_s$ . RK4 metoda je jedan od načina rješavanja diferencijalnih jednadžbi, gdje se koristi Eulerova metoda za procjenu rješenja na osnovi prethodno određenog koeficijenta nagiba. Metoda se sastoji od pet glavnih koraka. U prvom koraku, kao što je prikazano u 53. i 54. liniji koda, određujemo nagib u početnom trenutku, točnije u početnim uvjetima. Dobiveni nagib zatim koristimo za aproksimaciju rješenja na polovini zadanog koraka, kao što je i prikazano u 61. i 62. liniji koda. Zatim ponavljamo postupak, koristeći prethodno dobiveno rješenje za određivanje novog rješenja, također na polovini koraka. U 4. koraku navedene metode određujemo nagib za vrijednost koraka  $h1$ . Kao što je prikazano u 77. i 78. liniji koda, koristili smo ponovo prethodno dobiveni nagib za određivanje četvrtog nagiba. Zbog urednosti koda i manjeg broja varijabli uveli smo pomoćne varijable  $s1$  i  $s2$ , u koje smo spremali vrijednosti dobivenih nagiba. U RK4 metodi, kao što se može vidjeti u linijama 66,67,74 i 74, nagibe promatrane u polovini koraka smo pomnožili s faktorom 2. Konačna rješenja smo

dobili u 83. i 84. liniji koda, gdje smo za dobivanje rješenja koristili metodu srednjeg iznosa nagiba.

```
47 do{
48     m=m0;
49     rho=temp;
50     s1=0.0;
51     s2=0.0;
52
53     km=dmdr(r, rho);
54     krho=drhodr(r, m, rho, rho0);
55     m=m0+km*h1/2;
56     rho=temp+krho*h1/2;
57
58     s1+=km;
59     s2+=krho;
60
61     km=dmdr(r, rho);
62     krho=drhodr(r, m, rho, rho0);
63     m=m0+km*h1/2;
64     rho=temp+krho*h1/2;
65
66     s1+=2*km;
67     s2+=2*krho;
68
69     km=dmdr(r, rho);
70     krho=drhodr(r, m, rho, rho0);
71     m=m0+km*h1;
72     rho=temp+krho*h1;
73
74     s1+=2*km;
75     s2+=2*krho;
76
77     km=dmdr(r, rho);
78     krho=drhodr(r, m, rho, rho0);
79
80     s1+=km;
81     s2+=krho;
82
83     m0+=s1*h1/6;
84     temp+=s2*h1/6;
85
86     r+=h1;
87
88     fprintf(dat, "%lf %lf\n", r, m0);
89     fprintf(datt, "%lf %lf\n", r, temp);
90
91
92 }while(m<=mmax);
```

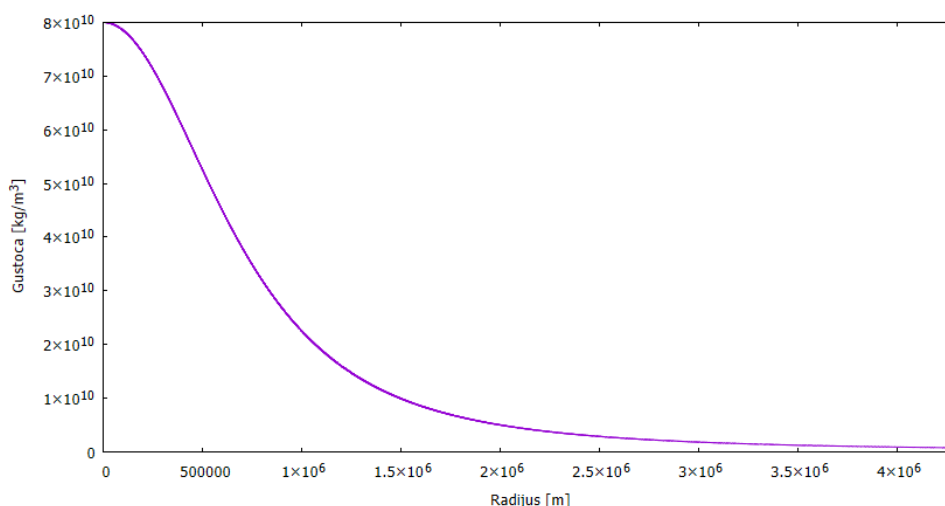


## 5.1 Rezultati



**Slika 4:** Grafički prikaz ovisnosti mase bijelog patuljka o radijusu.

Iz dobivenog grafa, prikazanog na slici 4, ovisnosti mase o radijusu uočavamo postupni rast mase s radijusom. Pri numeričkom rješavanju problema, zadali smo rubne uvjete koji se mogu i iščitati s grafa. Za vrijednost radijus  $r = 0$  m, zadali smo masu bijelog patuljka  $m = 0$  kg te primjećujemo rast funkcije ovisnosti sve do maksimalne vrijednosti mase koja iznosi  $m_{max} = 1.44 M_{\odot}$ . Maksimalnu vrijednost mase smo dobili za vrijednost radijusa od približno  $4.5 \cdot 10^6$  m, koliko otprilike iznosi i 70% radijusa Zemlje.



**Slika 5:** Grafički prikaz ovisnosti gustoće bijelog patuljka o radijusu.

Za razliku od grafa ovisnosti mase o radijusu, u drugom grafu gdje proučavamo gustoću uočavamo opadanje gustoće s radijusom. Maksimalna vrijednost gustoće iznosi  $8 \cdot 10^{10}$  kg/m<sup>3</sup>, što je granična vrijednost koju smo zadali za  $r = 0$  m, te daljnjim porastom radijusa vrijednost gustoće teži prema nuli.

## 6 Zaključak

Bijeli patuljak jest završni stadij evolucije zvijezda srednje mase. Riječ je o objektima približne veličine Zemlje, ali visoke gustoće i temperature. Karakteristika bijelih patuljaka jest nemogućnost odvijanja daljnjih termonuklearnih procesa fuzije, a glavnu ulogu u suprotstavljanju gravitacijskoj sili sažimanja ima tlak degeneriranog plina. No i tu postoje ograničenja. U slučaju da masa bijelog patuljka pređe veličinu 1.4 mase Sunca, gravitacijska sila nadvladava te slijedi kolaps.

Upravo, raspisivanje gravitacijske sile bilo je jedan od prvih koraka pri određivanju diferencijalnih jednačja koje opisuju strukturu bijelih patuljaka. Uz pretpostavku da većina ukupnog tlaka koji se suprotstavlja gravitacijskoj sili dolazi od gibanja elektrona, koristio se model idealnog Fermionskog plina koji se sastoji od relativističkih elektrona. Daljnjim raspisivanjem došlo se do dvije tražene diferencijalne jednačbe koje smo numerički riješili Runge-Kutta metodom te su rješenja grafički prikazana. Iz dva dobivena grafa zaključuje se da je gustoća najveća u samom središtu bijelog patuljka te da ona postepeno otpada s povećanjem radijusa, dok za masu imamo obrnuti slučaj.

## 7 Literatura

- [1] Ferrario, L., Wickramasinghe, D. T. Magnetic fields and rotation in white dwarfs and neutron stars. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, Vol. 356, No. 2 (2005): 615- 620.
- [2] Althaus, L. G., Córscico, A. H., Isern, J., Garcia-Berro, E. Evolutionary and pulsational properties of white dwarf stars. *The Astronomy and Astrophysics Review*, Vol. 18 (2010): 471-566.
- [3] Roša, D., Valečić, A., Drvar, Z., Hržina, D., Romštajn, I., Maričić, D., Bašić M. *Astronomija 1*. Zagreb: Zvezdarnica Zagreb – Zagrebački astronomski savez. 2016.
- [4] NASA. *White dwarfs & planetary nebula*. URL: [https://chandra.harvard.edu/xray\\_sources/white\\_dwarfs.html](https://chandra.harvard.edu/xray_sources/white_dwarfs.html) (1. 9. 2021.).
- [5] Hoyle, F. *Astronomija*. Split: MARJAN TISAK, 2005.
- [6] Chynoweth, K. *The Structure of White Dwarf Stars. Statistical Mechanics*, 2006.

## 8 Dodatak

```
1 #include <stdio.h>
2 #include <stdlib.h>
3 #include <math.h>
4
5 #define G 6.67e-11
6 #define Pi 3.14159
7 #define mp 1.67e-27
8 #define me 9.11e-31
9 #define Ye 0.5
10 #define c 3e8
11 #define h 6.626e-34
12 FILE* dat;
13 FILE* datt;
14 // funkcije
15 double gamma(double rho, double rho0){
16     double x;
17     x=pow((rho/rho0),(1/3));
18     return pow(x,2)/(3*sqrt(1+pow(x,2)));
19 }
20 double dmdr(double r, double rho){
21     return 4*Pi*pow(r,2)*rho;
22 }
23 double drhodr(double r, double m, double rho, double rho0){
24     return -(G*m*rho*mp)/(pow(r,2)*me*Ye*pow(c,2)*gamma(rho, rho0));
25 }
26
27 int main(void)
28 {
29     dat=fopen("masa.txt","w");
30     datt=fopen("gustoca.txt","w");
31     double m0,n0,rho0,mmax,rmax,h1,r,N;
32     double m,rho,km,krho,s1,s2,temp;
33
34     // poc. uvjeti
35     n0=(8*Pi*pow(me,3)*pow(c,3))/(3*pow(h,3));
36     rho0=mp*n0/Ye;
37     rho=temp=8e10;
38     mmax=1.44*1.989e30;
39     h1=100;
40     r=0.0001;
41     m0=m=0.0;
42     rmax=0.71*6371e3;
43     // rk
44     fprintf(dat,"%lf %lf\n",r,m0);
45     fprintf(datt,"%lf %lf\n",r,temp);
46
47     do{
48         m=m0;
49         rho=temp;
50         s1=0.0;
51         s2=0.0;
```

```
52
53     km=dmdr(r,rho);
54     krho=drhodr(r,m,rho,rho0);
55     m=m0+km*h1/2;
56     rho=temp+krho*h1/2;
57
58     s1+=km;
59     s2+=krho;
60
61     km=dmdr(r,rho);
62     krho=drhodr(r,m,rho,rho0);
63     m=m0+km*h1/2;
64     rho=temp+krho*h1/2;
65
66     s1+=2*km;
67     s2+=2*krho;
68
69     km=dmdr(r,rho);
70     krho=drhodr(r,m,rho,rho0);
71     m=m0+km*h1;
72     rho=temp+krho*h1;
73
74     s1+=2*km;
75     s2+=2*krho;
76
77     km=dmdr(r,rho);
78     krho=drhodr(r,m,rho,rho0);
79
80     s1+=km;
81     s2+=krho;
82
83     m0+=s1*h1/6;
84     temp+=s2*h1/6;
85
86     r+=h1;
87
88     fprintf(dat,"%lf %lf\n",r,m0);
89     fprintf(datt,"%lf %lf\n",r,temp);
90
91
92 }while(m<=mmax);
93
94     return 0;
95 }
```