Teorija igara i nepristrane igre

Carić, Barbara

Master's thesis / Diplomski rad

2020

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:937203

Rights / Prava: In copyright / Zaštićeno autorskim pravom.

Download date / Datum preuzimanja: **2025-01-06**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Science

zir.nsk.hr

UNIVERSITY OF SPLIT

dabar
DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

BARBARA CARIĆ

TEORIJA IGARA I NEPRISTRANE IGRE

DIPLOMSKI RAD

Split, srpanj 2020.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

TEORIJA IGARA I NEPRISTRANE IGRE

DIPLOMSKI RAD

Student(ica):
Barbara Carić

Mentor:
prof.dr.sc. Damir Vukičević

Split, srpanj 2020.

Uvod

Teorija igara je matematička disciplina koja se bavi situacijama konflikta između dvaju ili više sudionika. Sudionike ćemo nadalje nazivati igračima. Cilj je odrediti ponašanje igrača koje je za njih najpovoljnije uz neke određene pretpostavke. Igre koje ćemo proučavati su igre čiste strategije s dva igrača. To su igre u kojima igrači izmjenjuju poteze, ne koristeći se slučajnim uređajima poput kockica ili karata. Također pretpostavljamo da su svi igrači potpuno racionalni i da svi igrači imaju podatke o trenutnom stanju igre i o mogućim potezima svih igrača. Primjer takvih igara su šah, par-nepar i dama, dok jamb i remi nisu takve igre. Igre koje proučavamo nazivaju se kombinatorne igre. Dakle, igra ne mora biti društvena igra, niti sudionici moraju biti osobe.

U ovom radu, svaku tezu pokušati ću objasniti primjerima stvarnih igara. Potpuno riješavanje igre je teško pa najčešće dajemo primjere nekih određenih pozicija u igri.

Također, detaljnije ćemo obraditi jedan zanimljiv podrazred igara, koje se nazivaju nepristrane igre. Navesti ću neka zanimljiva svojstva tih igara, te ih potkrijepiti primjerima.

Sadržaj

Poglavlje 1

Kombinatorne igre

1.1 Nim

Ana je predložila Mati da odigraju jednu igru. Karte su posložene na stol u četiri retka tako da se u prvom retku nalazi sedam karata, u drugom pet, u trećem tri i u zadnjem samo jedna karta. Igrači naizmjenice uzimaju koliko žele karata iz retka po izboru, te se igra ponavlja sve dok jedan od igrača ne uzme posljednju kartu. Igrač koji uzme posljednju kartu je izgubio igru. Ana velikodušno prepušta Mati da igra prvi potez. No, nažalost Mate gubi, kako god da igra.

Ova igra poznata je pod nazivom *nim*. Može se igrati sa raznim predmetima poput šibica, kamenčića ili novčića. Također, postoje razne varijante za određivanje pobjednika. U spomenutoj verziji, gubitnik je onaj igrač koji uzme posljednju kartu sa stola, a u standardnoj verziji pobjeđuje igrač koji odigra posljednji potez.

Postavlja se pitanje, zašto u opisanoj situaciji uvijek prvi igrač gubi?

Naime, nim je primjer igre koja ima svojstvo da sa svake njezine pozicije uvijek točno jedan igrač ima pobjedničku strategiju.

Za početak,uvedimo pojam korektne pozicije u igri na sljedeći način: Izrazimo broj predmeta na svakoj hrpi u binarnom sustavu te dobivene brojeve potpišimo jedan ispod drugoga (kao kad zbrajamo brojeve na papiru).
Reći ćemo da je dana pozicija nima korektna ako je zbroj brojeva u svakom od stupaca paran. U protivnom govorimo o inkorektnoj poziciji.
Indukcijom nije teško pokazati da tada vrijedi:

Teorem 1.1 (Teorem 1.1.) *S dane pozicije u nimu igru dobiva drugi igrač ako i samo ako je pozicija korektna.*

Dokaz. Uočimo kako svaki potez s korektne pozicije rezultira inkorektnom pozicijom, a sa svake inkorektne pozicije moguće je odigrati potez na korektnu poziciju. Odatle slijedi tvrdnja teorema. ■

Opisana karakterizacija u potpunosti rješava pitanje pobjednika u igri nim. Sada nam je jasno zašto je u početnom primjeru Ana prepustila Mati da igra prvi.
Pitanja o nalaženju pobjednika i pobjedničkih strategija prirodno se nameću kod svih tipova igara.
Primjetimo neka od svojstava igre nim:

- Igru igraju dva igrača naizmjenice.
- Pobjednik uvijek postoji, i to je onaj igrač koji odigra zadnji potez.
- Igra završava u konačno mnogo koraka.
- Igrači imaju potpunu informaciju o igri. To znači da je obojici igrača, u svakom trenutku igre, vidljivo trenutno stanje na ploči.
- Nim je strateška igra u kojoj nema elemenata slučajnosti (poput bacanja kocke).

Igre sa navedenim svojstvima spadaju u klasu igara koje se nazivaju kombinatorne igre.
Formalna definicija kombinatornih igara dana je u nastavku.

Definicija 1.2 ***Kombinatorne igre*** *su igre sa sljedećim svojstvima:*

- *igru igraju dva igrača koji igraju naizmjenice*
- *nema elementa slučajnosti*
- *oba igrača imaju savršenu informaciju o igri*
- *igra mora završiti (nije beskonačna)*
- *igra završava kada igrač više nema poteza za odigrati*

Dalje u ovom radu, spominjajući igre, mislimo uvijek na kombinatorne igre. Takve igre su prvenstveno od matematičkog interesa a kako tipično imaju dodirnih točaka s kombinatorikom i teorijom grafova, teorija koja se oko njih razvila naziva se **kombinatornom teorijom igara**.

1.2 Osnovne tehnike

Postoje igrači za koje se čini da mogu dobro igrati bilo koju igru odmah nakon što nauče pravila. Takvi igrači imaju niz "trikova u rukavu" koji dobro funkcioniraju u mnogim igrama bez puno razmišljanja. U ovom poglavlju ćemo navesti neke od tih trikova. Naravno, najzanimljivije su igre u kojima se nijedan trik ne primjenjuje izravno, ali njihovo poznavanje je važan dio započinjanja s analizom složenijih igara. Često ćete imati priliku razmotriti poteze koji vode u jednostavne položaje u kojima se primjenjuje neki od trikova. Te poteze je lako za razumijeti, te se prema tome oni mogu poduzeti ili odbaciti.

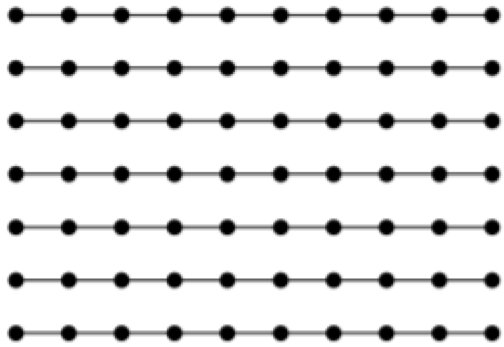
1.2.1 Pohlepna strategija

Najjednostavnije heurističko pravilo ili strategija naziva se pohlepnom strategijom. Kažemo da igrač igra pohlepnu strategiju ako hvata što je više moguće kad god je to moguće. Igre koje se mogu osvojiti igrajući pohlepnu strategiju nisu nimalo zanimljive, ali većina igara ima neke aspekte pohlepne igre. Na primjer, u šahu je gotovo uvijek ispravno uhvatiti protivničku kraljicu smatrajući je najvećom vrijednosti, ali ne ako to omogućuje protivniku da uhvati vašu kraljicu ili ako to omogućuje protivniku da postavi šah-mat. Također, osnovna strategiija koja se igra u trešeti je pohlepna strategija. Naime, u igri trešeta, as se broji kao 1 punat (bod), dok 2, 3, K, Q i J vrijede 1 belu, s tim da tri bele donose 1 punat. Dakle, u trešeti, cilj je uhvatiti što više 'asova', jer oni donose najviše bodova.

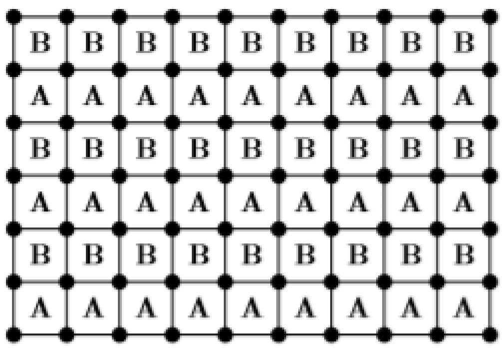
Definicija 1.3 *Kažemo da igrač igra* ***pohlepnu strategiju*** *ako uvijek bira potez koji maksimizira ili minimizira određenu vrijednost vezanu za položaj igre nakon što je potez napravljen.*

Naravno, vrijednost na kojoj se zasniva pohlepni algoritam bi trebala biti dovoljno jednostavna za izračunavanje da ne treba predugo da se napravi korak.
Postavlja se pitanje, da li pohlepna strategija uvijek funkcionira?

Primjer 1.4 *Pretpostavimo da 2 igrača igraju igru pod nazivom 'Točkice i kutije'. Igra započinje praznom mrežom točkica. Igrači igraju naizmjenice i to tako da igrač koji je na potezu dodaje jednu horizontalnu ili okomitu liniju između dviju nepovezanih susjednih točaka. Igrač koji ispuni četvrtu stranu* *okvira, to jest zatvori kvadrat, dobiva jedan bod i igra još jedan potez. Nakon nekoliko poteza, igra izgleda kao na slici:*

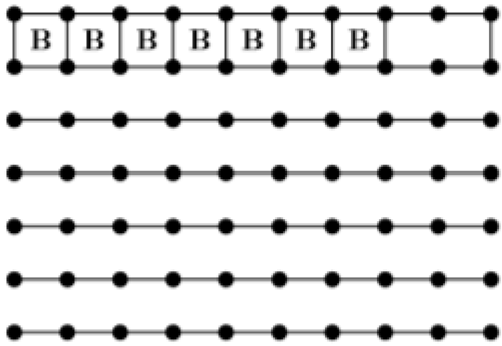


Pretpostavimo da igru igraju igrači A i B, te neka je igrač A sljedeći na potezu. Bez obzira što igrač A odigra, igrač B može uzeti sve kvadrate u tom retku. Ako igrači igraju pohlepnu strategiju, onda B zatvara sve kvadrate u tom retku, te zadnji potez igra u drugom retku. Zatim A uzima sve kvadrate u tom retku, te igra zadnji potez u sljedećem retku. Na taj način, igrajući pohlepnu strategiju, igra završava kao na slici:

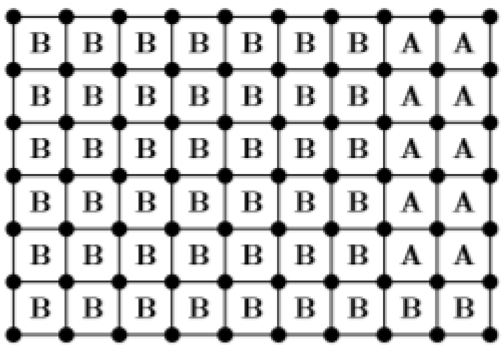


Dakle, igrači A i B, oba imaju po 27 bodova, te igra završava bez pobjednika. Da li je jedan od igrača mogao osigurati pobjedu da nije igrao pohlepnu strategiju?

Umjesto da je igrač B nakon što je igrač A otvorio redak, uzeo sve kvadrate, *mogao je uzeti sve osim dva kvadrata u tom retku, te zadnja dva kvadrata ostaviti igraču A. Tada bi igra izgledala ovako:*



Igrač A sada ima problem, jer svaki put kad uzme zadnja dva kvadrata koja mu je igrač B ostavio, treba otvoriti novi redak. Na taj način igra se nastavlja do kraja, te na kraju igre, igrač B ima 42 *boda, a igrač A ima* 12 *bodova.*



Dakle, u prethodnom primjeru, igranje pohlepne strategije nije bio najbolji izbor.

1.2.2 Simetrija

Za početak navedimo neka pravila igre *go*: Igra se na ploči 19x19 sa bijelim i crnim figurama. Figure su sve jednake i ponašaju se prema istim pravilima. Partija goa počinje s praznom pločom, te crni igrač igra prvi. Svaki potez se sastoji u tome da se figura stavi na određeno mjesto i nakon toga ona ostaje na tom mjestu do kraja partije ili biva zarobljena ("pojedena") tijekom partije od suigrača. Za svaku zarobljenu figuru dobiva se po 1 bod. Pobjednik je onaj igrač koji na kraju igre ima više bodova.

Navedena pravila su nam dovoljna da bi mogli razumijeti sljedeći primjer.

Nepoznata go igračica igra dvije igre istovremeno. Jednu sa bijelim figurama, a jednu sa crnim. Kladila se na milijun kuna da će dobiti barem jednu od tih igara, iako nikada nije igrala go. Zanimljivo je da svakako osvaja okladu iako ne zna puno o igri go. Zašto je to tako?

Ona jednostavno čeka da igrač koji igra s crnim figurama, prvi napravi potez (crni igraju prvi u igri go) i štogod on napravio, ona ponovi u drugoj igri u kojoj je ona crni igrač. Zatim, kada joj bijeli igrač odgovori u drugoj igri, ona to isto odigra sa svojim bijelim u prvoj igri. Analogno igra dalje, pa dvije igre na ploči zapravo izgledaju isto.

Dakle, ako ona izgubi u prvoj igri, dobit će u drugoj (jer igra iste poteze kao pobijednik u prvoj), a ako izgubi u drugoj igri, dobit će u prvoj.

Strategiju koju je ova igračica koristila, zovemo 'simetričnom strategijom' i primjenjuje se na sljedeći način: Kad god vaš protivnik napravi potez na jednom dijelu ploče, trebali biste ga oponašati na drugom dijelu ploče. Da biste igrali uspješno, ne smijete protivniku ostavljati otvorene poteze koji mu omogućuju eliminiranje ove strategije.

1.2.3 Promjena igre

Primjer 1.5 (3-do-15) *Dva igrača igraju naizmjenice. Igrač koji je na potezu, bira broj između 1 i 9, te ga postavlja na jedan od slobodnih kvadrata (3x3 ploča). Svaki od brojeva može se odabrati samo jednom. Pobjednik je onaj igrač kojemu je suma od tri odabrana broja jednaka 15.*

Iznenađujuće, ova igra je "zamaskirani" križić-kružić. Da bi to pojasnili, nacrtat ćemo magični kvadrat kojemu je suma u svakom retku, stupcu i dijagonali 15:

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Možemo primjetiti da je zbroj tri broja jednak 15 ako i samo ako su oni u istoj križić-kružić liniji.

Primjer 1.6 *Igru križić-kružić odigranu na sljedeći način:*

možemo poistovjetiti s igrom 3-do-15 koja nakon odigranog posljednjeg poteza izgleda ovako:

2		*4*
	5	*3*
6	*1*	*8*

Dakle, igru 3-do-15 možemo tretirati kao igru križić-kružić, iako su pravila skroz drugačija.

Strategija 'promjena igre' mijenja način pogleda na tu igru te može utjecati na naša razmišljanja. Koristi se kada je jedna igra intuitivnija od druge.

1.2.4 Parnost

Primjer 1.7 *Neka je dana hrpa od 27 karata. Sljedeću igru igraju dva igrača naizmjenice. Igra se sastoji od toga da igrač koji je na potezu odabere hrpu (na početku je samo jedna) i podijeli je na dva neprazna dijela.*

Tko će pobijediti?

Zamislite da su karte poredane u liniju. Igra se može opisati kao postavljanje "ograde" (šibice, šipke i slično) između dviju karata. To odgovara dijeljenju hrpe na dva dijela: karte s lijeve strane i karte s desne strane do sljedeće ograde ili do kraja niza. U navedenom primjeru, ima točno 26 poteza.

Primjetimo da općenito u igri odigranoj s n karata, ima točno *n-1* poteza. Dakle, pobjednik je prvi igrač ako je n paran, a drugi igrač ako je n neparan broj.

U nekim igrama, kao u navedenom primjeru, parnost neke vrijednosti, na samom početku određuje pobjednika. Cilj je utvrditi koja je to vrijednost (u primjeru broj karata). Ako se igra na način da posljednji igrač koji odigra potez pobjeđuje, onda je uvijek cilj prvog igrača osigurati da igra traje neparan broj poteza, dok drugi igrač pokušava osigurati da igra traje paran broj poteza.

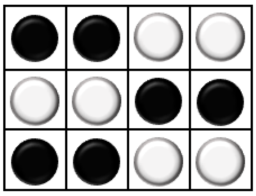
Najjednostavnija takva igra je "voli me-ne voli me", koja se igra sa tratinčicom. Možemo igru shvatiti kao igru s dva igrača, gdje je prvi igrač "voli me", a drugi "ne voli me". Naizmjenice se uklanjaju latice tratinčice, jedna po jedna, a igrač koji ukloni posljednju laticu pobjeđuje. Očito, jedino što je važno u ovoj igri jest parnost broja latica na tratinčici. Ako je broj latica neparan, tada će pobijediti "voli me", a ako je broj latica paran, pobijedit će "ne voli me".

1.2.5 Zbunjivanje protivnika

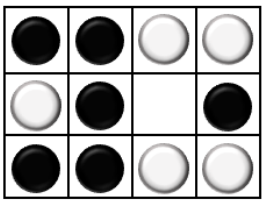
Sve do sada promatrane strategije su eksplicitne, što znači da ako one funkcioniraju u određenoj igri, onda prateći tu strategiju možete pobijediti. Strategija koju ćemo objasniti u ovom odjeljku je nešto drugačija. Ovaj način igre nam ne osigurava izravno pobjedu, već zbunjivanje protivnika, kako bi dobili više vremena za analizu igre.

Ako ste u gubitničkom položaju, isplati se sljedećim potezom napraviti igru što kompliciranijom, nadajući se da će se protivnik zbuniti dok pokušava analizirati situaciju.

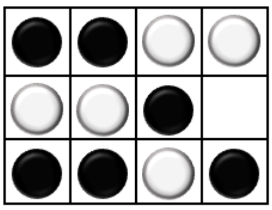
Primjer 1.8 *Clobber. Igra se na ploči s crnim i bijelim poljima. Igru igraju dva igrača naizmjenice. Igrač koji je na potezu pomiće jednu svoju figuru na neku od susjednih pozicija (horizontalno ili vertikalno) gdje se nalazi protivnička figura. Igrač na potezu pomakne svoju figuru, a protivničku izbaci iz igre. Pobjednik je onaj igrač koji odigra posljednji potez.*
Pretpostavimo da je u igri clobber sljedeće stanje na ploči i da ste vi crni igrač koji je na potezu.



Iz dane pozicije, ako je crni igrač na potezu, ne postoji pobjednička strategija za crnog igrača. Međutim, još se ne bi trebali predati niti napraviti nikakve poteze za koje vaš protivnik ima jednostavnu strategiju za pobjedu. Neki od poteza, s kojim bi zbunili protivnika i mogli doći do pobjede su:



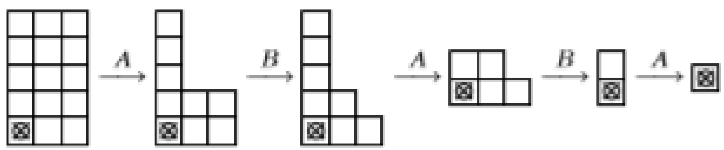
i



Ova strategija ima i druge implikacije. Ako niste sigurni kako bi trebali odigrati sljedeći potez, onda nemojte dovoditi igru u poziciju gdje će vaš protivnik jednostavno znati što treba odigrati. Također, ako ste u boljoj poziciji, nemojte dopustiti protivniku da vam zakomplicira situaciju.

1.2.6 Ukrasti strategiju

Primjer 1.9 *Dva igrača igraju sljedeću igru: Igrači naizmjenice biraju kockicu čokolade te pojedu izabranu kockicu i sve kockice koje se nalaze iznad ili desno od odabrane. Kockica u donjem lijevom kutu čokolade je otrovna-igrač koji je pojede je izgubio.*



Slika prikazuje primjer igre između igrača A i igrača B. Igrač B je izgubio jer u zadnjem koraku jedini preostali potez mu je pojesti zadnju (otrovnu) kockicu.

Vidimo da je u navedenoj igri zadnji potez gubitnički. Kada bismo igrali tako da pobjeđuje igrač koji pojede donji lijevi kvadratić čokolade, igra bi bila sasvim nezanimljiva jer se to može napraviti odmah u prvom potezu. Igra iz primjera poznata je pod nazivom *chomp*. Može se igrati na proizvoljnom pravokutniku s barem dva kvadratića.

Teorem 1.10 *U igri chomp, prvi igrač ima pobjedničku strategiju.*

Dokaz. Navedimo egzistencijalni dokaz teorema.
Pretpostavimo da prvi igrač pojede kvadratić čokolade u gornjem desnom kutu ploče. Ako tako dolazi u pobjedničku poziciju, onda do kraja igre može zadavati pobjedničku poziciju i pobijediti drugog igrača. Ako je pak ploča bez gornjeg desnog kuta gubitnička pozicija, drugi igrač je u jednom potezu može dovesti do pobjedničke pozicije. No onda je prvi igrač mogao odmah odigrati taj isti potez, jer bilo koji potez na samom početku igre sigurno

eliminira gornji desni kut ploče. ■

Iz dokaza teorema ne možemo zaključiti što je pobjednička strategija prvog igrača, nego samo da ona sigurno postoji. Dakle, dokaz koji smo naveli, nije konstruktivni, već samo egzistencijalni dokaz teorema.

Primjer 1.11 *Križić-kružić*

Pretpostavimo da drugi igrač igra pobjedničku strategiju S.

Prvi igrač postavlja X na proizvoljnu poziciju, a drugi igrač postavlja O prema strategiji S. Ali, ako zanemarimo prvi X koji je postavio na ploču, prvi igrač se nalazi u istoj poziciji kao i drugi prije nego što je odigrao svoj prvi potez. Stoga, prvi igrač može napraviti svoj sljedeći potez prema strategiji S, te na taj način nastaviti svoju igru.

Pobjednička strategija za drugog igrača, u tom slučaju više ne postoji, pa igra završava prisilnom pobjedom prvog igrača ili nerješeno.

Poglavlje 2

Ishod igre

U teoriji igara, ishod je situacija koja je rezultat para igračevih strategija. Dakle, svaka kombinacija strategija je **ishod igre**.
Postavlja se pitanje: Tko će pobijediti ako oba igrača igraju savršeno?
Promotrimo igre koje imaju samo dva ishoda, pobjeda prvog i pobjeda drugog igrača.
Kažemo da igrač igra savršeno ako vrijedi tvrdnja:
Ako igrač može osigurati pobjedu, onda on mora odigrati potez koji mu dopušta da osigura pobjedu. Ako igrač ne može osigurati pobjedu, onda bi savršena igra značila "napravi potez".

Teorem 2.1 (Fundamentalni teorem kombinatornih igara) *Pretpostavimo da se igra G igra između dva igrača gdje jedan igra prvi. Ili prvi igrač može osigurati pobjedu, ili drugi, ali ne oboje.*

Dokaz. Nazovimo prvog igrača s A a drugog s B. Svaki potez igrača A dovodi igru u poziciju koja je indukcijom, ili pobjeda za igrača B koji igra prvi, ili pobjeda za igrača A koji igra drugi. Ako bilo koji njegov potez pripada drugoj kategoriji, tada je biranjem jednog od njih igrač A mogao ostvariti pobjedu. S druge strane, ako svi njegovi potezi pripadaju prvoj kategoriji, tada igrač B može ostvariti pobjedu koristeći svoju pobjedničku strategiju u poziciji koja je rezultat bilo kojeg poteza igrača A. ■

Prethodni teorem koristit ćemo implicitno mnogo puta kroz ovaj rad.

Pretpostavimo sada da smo fiksirali poziciju G i pogledajmo koji su sve mogući ishodi u igri ako je prvi igrač lijevi i ako je prvi igrač desni.

U donjoj tablici se spominju sljedeći i prethodni igrač. S obzirom da u prvom potezu ne postoji prethodni igrač, treba naglasiti da sljedećim igračem smatramo onog igrača koji je na potezu, a prethodnim onog koji nije na potezu. Fundamentalni teorem dopušta četiri mogućnosti, koje koristimo za kategoriziranje pozicije u četiri ishoda klase:

Klasa	Definicija
$\mathcal{N}$	Sljedeći igrač, bilo da je lijevi ili desni, može osigurati pobjedu.
$\mathcal{P}$	Prethodni igrač može osigurati pobjedu.
$\mathcal{L}$	Lijevi igrač može osigurati pobjedu, bez obzira tko igra prvi.
$\mathcal{R}$	Desni igrač može osigurati pobjedu, bez obzira tko igra prvi.

Igre u $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$ klasama nazivaju se $\mathcal{P}$-pozicije i $\mathcal{N}$-pozicije. Na prvi pogled se čini da ne postoje sve četiri klase ishoda u stvarnim igrama, no nije teško pronaći primjere za svaku vrstu ishoda.

Primjer 2.2 *U igri nim, ako postavimo kamenčiće u tri retka sa po jednim, tri i pet kamenčića redom, pobjednik je prvi igrač, tj sljedeći na redu. Dakle igra se nalazi u $\mathcal{N}$-poziciji.*

Naprotiv, ako poredamo kamenčiće u tri retka sa po jednim, dva i tri kamenčića redom, pobjednik je drugi igrač (prethodni). Dakle, igra se nalazi u $\mathcal{P}$-poziciji.

Naravno, u obe igre se pretpostavlja da igrači igraju savršeno.

Primjer 2.3 *Stop-vrata igra se na nxm ploči. Dva igrača imaju domino kocke koje postavljaju na ploču jedan za drugim. Lijevi igrač postavlja svoje domino kocke vertikalno, a desni igrač horizontalno.*
Igrač koji ostane bez poteza je izgubio.

U igri stop-vrata lijevi igrač pobjeđuje ako se igra na ploči nx1, $n > 1$ *bez obzira tko igra prvi, pa je igra u klasi* $\mathcal{L}$. *Ako se pak igra na ploči* 1xn, $n > 1$, *onda pobjeđuje desni igrač bez obzira tko igra prvi, pa je u tom slučaju igra u klasi* $\mathcal{R}$.

Drugi način za provjeru ishoda klase dan je u sljedećoj tablici:

		D igra prvi	
Ako u igri G		D pobjeđuje	L pobjeđuje
L igra prvi	L pobjeđuje	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$
	D pobjeđuje	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P}$

2.1 Pozicije i opcije u igri

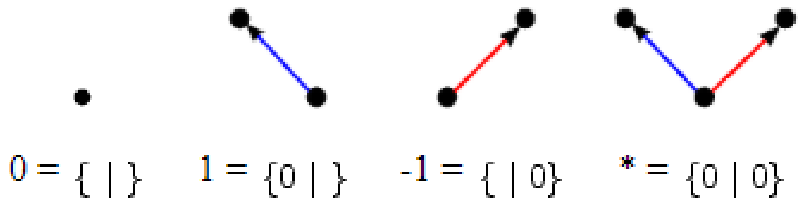
Definicija 2.4 *Igra (pozicija) G definira se kao* $G = \big\{\{\mathcal{G}^{L_1}, \mathcal{G}^{L_2}, ...\}|\{\mathcal{G}^{D_1}, \mathcal{G}^{D_2}, ...\}\big\}$ *pri čemu su* $\{\mathcal{G}^{L_1}, \mathcal{G}^{L_2}, ...\}$ *i* $\{\mathcal{G}^{D_1}, \mathcal{G}^{D_2}, ...\}$ *skupovi opcija lijevog, odnosno desnog igrača.*

Igru G obično ćemo zapisivati kao $G = \{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^D\}$ pri čemu $\mathcal{G}^L$ i $\mathcal{G}^D$ predstavljaju skupove opcija lijevog i desnog igrača redom.
Igru u kojoj nijedan od igrača nema što odigrati, tj. igru oblika $\{\emptyset|\emptyset\} = \{\ |\ \}$ ćemo označavati s 0 (nula).
Napomenimo još da ćemo od ovog trenutka nadalje pojedine igre označavati simbolima za brojeve jer ćemo takvim igrama moći manipulirati na način sličan onom kojim manipuliramo brojevima u standardnoj aritmetici.
Da bismo tu ideju razjasnili i preciznije opisali, promotrimo najprije nekoliko

jednostavnih primjera.

Svakoj igri korisno je dodijeliti stupanj koji opisuje njezinu jednostavnost. Nakon svakog odigranog poteza igra postaje jednostavnija u smislu da stižemo u poziciju igre manjeg stupnja.

Najjednostavnija igra (i jedina stupnja 0) jest igra $\{\ |\ \}$ s praznim skupom opcija za lijevog i desnog igrača. U idućem koraku kao opcije imamo na raspolaganju $\emptyset$ i $0 = \{\ |\ \}$ pa tako igara stupnja 1 ima ukupno 3 i to su: $1 = \{0|\ \}$, $-1 = \{\ |0\}$, te $* = \{0|0\}$. Pripadajuća stabla ovih igara prikazana su na sljedećoj slici (pri tome opcije lijevog igrača označavamo plavom bojom, a opcije desnog igrača crvenom):



Primjetimo sljedeće:

- U igri 0 gubi igrač koji je prvi na potezu (jer nema što odabrati), odnosno drugi igrač pobjeđuje. Za takve igre kažemo da imaju vrijednost 0.

- U igri 1 uvijek pobjeđuje lijevi igrač, bez obzira na to koji igrač igra prvi. Sve igre takvog tipa imaju pozitivnu vrijednost.

- U igri -1 uvijek pobjeđuje desni igrač, bez obzira na to koji igrač igra prvi. Sve igre takvog tipa imaju negativnu vrijednost.

- U igri $* = \{0|0\}$ pobjeđuje onaj igrač koji je prvi na potezu, i ona predstavlja najjednostavniju igru koja nije broj. Za igre takvog tipa kažemo da su neizrazite (eng. fuzzy) jer njihova vrijednost nije ni 0, ni pozitivna, ni negativna.

Prikazane igre predstavljaju prototipove igara s obzirom na koje ćemo klasificirati sve složenije igre. Dakle, svaku igru možemo prema ishodu svrstati u jednu od navedenih četiri klasa kako je prikazano u sljedećoj tablici:

		počinje D	
Ako u igri G		L ima pobjedničku strategiju	D ima pobjedničku strategiju
počinje L	D ima pobjedničku strategiju	G=0 (drugi pobjeđuje)	$G < 0$ (D pobjeđuje)
	L ima pobjedničku strategiju	$G > 0$ (L pobjeđuje)	$G\|\|0$ (prvi pobjeđuje)

Uočimo i to kako relacija $G = 0$ u ovoj tablici ne govori da je sama igra G jednaka igri 0 (nula), već da je riječ o igri kojoj je vrijednost jednaka 0, tj. da igra G pripada klasi igara u kojoj drugi igrač ima pobjedničku strategiju. Isto tako, relacija $G||0$ označuje da je igra G neusporediva s igrom 0, tj. da je riječ o igri u kojoj pobjedničku strategiju ima prvi igrač.

Tvrdnja 1 *Ishod igre G može se utvrditi iz klase ishoda njenih opcija kao što je prikazano u sljedećoj tablici:*

	postoji $\mathcal{G}^D \in \mathcal{R} \cup \mathcal{P}$	*za svaki* $\mathcal{G}^D \in \mathcal{L} \cup \mathcal{N}$
postoji $\mathcal{G}^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$	$\mathcal{N}$	$\mathcal{L}$
za svaki $\mathcal{G}^L \in \mathcal{R} \cup \mathcal{N}$	$\mathcal{R}$	$\mathcal{P}$

Dokaz. Dokažimo prvo gornju desnu tvrdnju iz tablice.

Neka je $\mathcal{G} \in \mathcal{L}$. Tada lijevi igrač može osigurati pobjedu ako igra prvi, tj $\mathcal{G}^L \in \mathcal{L}$. Također, mora postojati opcija u $\mathcal{G}^L$ s kojom lijevi igrač pobjeđuje ako igra drugi, tj $\mathcal{G}^L \in \mathcal{P}$. Dakle, $\mathcal{G}^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$.

Desni igrač u tom slučaju nema dobrih poteza pa su sve njegove opcije u $\mathcal{L} \cup \mathcal{N}$.

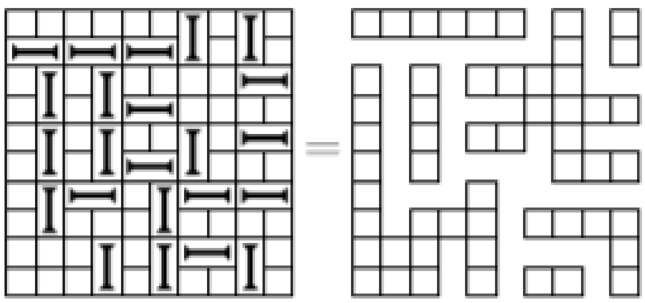
Obrnuto, ako je $\mathcal{G}^L \in \mathcal{L} \cup \mathcal{P}$, onda lijevi igrač pobjeđuje. Ako desni igrač ima samo opcije u $\mathcal{L} \cup \mathcal{N}$, onda desni igrač nema pobjednički potez. Dakle $\mathcal{G} \in \mathcal{L}$.
Ostale tvrdnje iz tablice se dokazuju na sličan način.

■

2.2 Suma igara

2.2.1 Motivacija

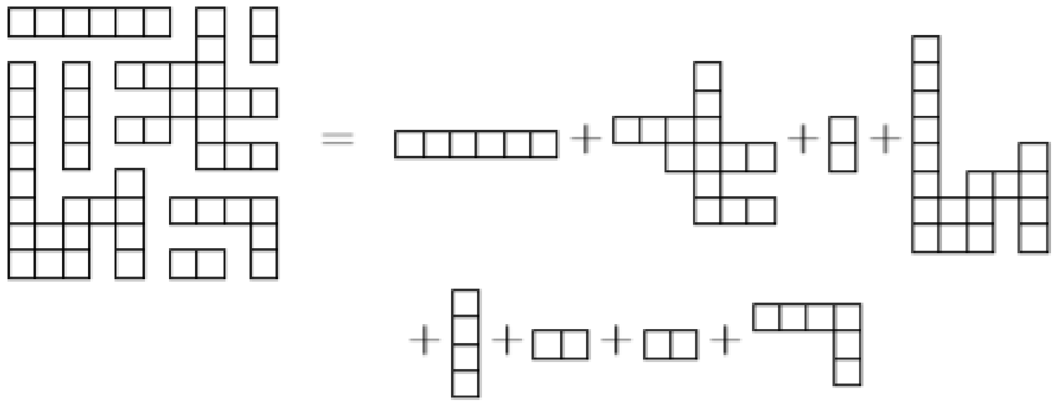
U primjeru 2.3 dana su pravila igre *stop-vrata*. Pretpostavimo da se igra igra na ploči dimenzija 10x10.
Igra *stop-vrata*, kao i mnoge druge igre, ima pozicije koje se sastoje od nezavisnih komponenti. Ponekad su, kao u igri *nim*, komponente jednostavno dio igre, dok se neke igre prirodno dijele na komponente kako igra traje.
Na primjer, u igri *stop-vrata*, igraće polje često je razdvojeno na različite regije kao u sljedećoj igri:



S obzirom na činjenicu da se mnoge igre dijele u nezavisne regije, postavlja se pitanje: "Kako možemo iskoristiti dekompoziciju?"
To prirodno dovodi do određivanja zbroja igre:
Zbroj dviju ili više pozicija u igri je pozicija koja je dobivena postavljanjem

pozicija jedne pored druge. Igrač koji je na potezu, može napraviti potez u regiji po izboru.

Primjer 2.5



2.2.2 Definicija sume

Definicija 2.6 $G + H = \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L | \mathcal{G}^D + H, G + \mathcal{H}^D\}$,
gdje su G *i* H *igre, a* $\mathcal{G}^L, \mathcal{G}^D, \mathcal{H}^L, \mathcal{H}^D$ *skupovi igara.*

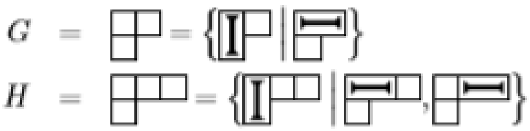
Ova definiciji sastoji se od nekih notacija koje zahtjevaju detaljnije objašnjenje. Što znači $\mathcal{G}^L + H$?
Dodavanje jedne igre, G, skupu igara S, definiramo kao skup igara dobivenih dodavanjem G u svaki element skupa S:

$$G + S = \{G + X\}_{X \in S}$$

Druga zloupotreba notacije je korištenje zareza između dva niza igara. Ovaj zarez namijenjen je značenju unije skupa. Skupove tretiramo kao liste, a zarez je prirodni način spajanja dvije liste. Koristi se zato što je ta notacija ipak intuitivnija i jednostavnija nego:
$G + H = \{(\mathcal{G}^L + H) \cup (G + \mathcal{H}^L) | (\mathcal{G}^D + H) \cup (G + \mathcal{H}^D)\}$

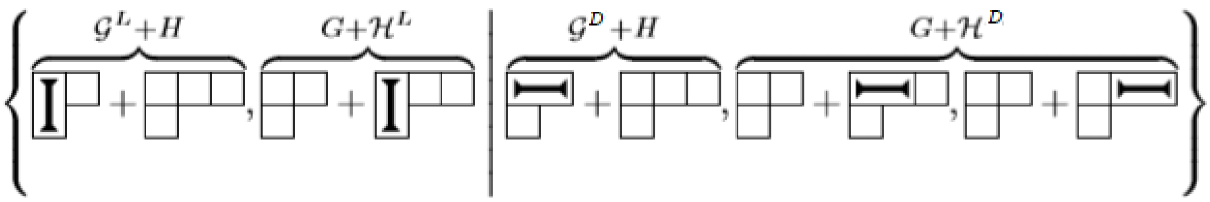
Primjenimo ovu definiciju na igru 'Stop-vrata'. Rekli smo da u zbroju dviju igara, G i H, igrač može napraviti potez u bilo kojoj od tih igara (komponenata). Lijevi igrač, na primjer, može napraviti potez unutar komponente G, mijenjajući G u $G^L \in \mathcal{G}^L$. Ta opcija lijevog igrača iz $G + H$ je $\mathcal{G}^L + H$. Ako pak lijevi igrač napravi potez unutar komponente H, mijenjajući H u $H^L \in \mathcal{H}^L$. Ta opcija lijevog igrača je iz $G + H$ u $G + \mathcal{H}^L$. Dakle, opcija lijevog igrača je $(\mathcal{G}^L + H) \cup (G + \mathcal{H}^L)$ kao u definiciji sume igara.
Analogno, opcija desnog igrača je $(\mathcal{G}^D + H) \cup (G + \mathcal{H}^D)$.

Primjer 2.7 *Neka su dane dvije pozicije, G i H, definirane navođenjem njihovih lijevih i desnih opcija:*



Suma igara G i H, po definiciji je:

$G + H =$



Teorem 2.8 $G + 0 = G$.

Dokaz. $G + 0 = \{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^D\} + \{\ \ |\ \ \} = \{\mathcal{G}^L + 0, G + \emptyset \ \ | \ \ \mathcal{G}^D + 0, G + \emptyset\}$. Za svaki skup $\mathcal{S}$ je $\mathcal{S} + \emptyset = \emptyset$, pa indukcijom slijedi da je $\mathcal{G}^L + 0 = \mathcal{G}^L$ i $\mathcal{G}^D + 0 = \mathcal{G}^D$. Dakle, $\{\mathcal{G}^L + 0, G + \emptyset \ \ | \ \ \mathcal{G}^D + 0, G + \emptyset\} = \{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^D\} = G$. ∎

Teorem 2.9 *Za igre G i H vrijedi:*

1) $G + H = H + G$,

2) $(G+H)+J = G+(H+J)$.

Svojstvo 1) naziva se komutativnost, a 2) asocijativnost.

Dokaz. Indukcijom se pokaže da je:

1)

$$\begin{aligned} G+H &= \{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L | \mathcal{G}^D + H, G + \mathcal{H}^D\} = \\ &= \{H + \mathcal{G}^L, \mathcal{H}^L + G | H + \mathcal{G}^D, \mathcal{H}^D + G\} = \\ &= H + G \end{aligned}$$

2) Promotrimo lijevu opciju:

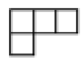
$$\begin{aligned} [(G+H)+J]^L &= \{(G+H)^L + J, (G+H) + J^L\} = \\ &= \{(\mathcal{G}^L + H) + J, (G + \mathcal{H}^L) + J, (G+H) + J^L\} = \\ &= \{\mathcal{G}^L + (H+J), G + (\mathcal{H}^L + J), G + (H + J^L)\} = \\ &= [G + (H+J)]^L \end{aligned}$$

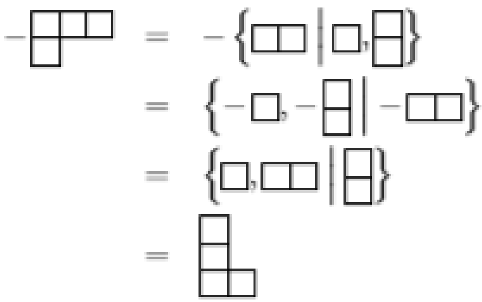
Slično za desnu opciju, pa vrijedi da je: $(G+H)+J = G+(H+J)$. ■

2.2.3 Negativna igra

Definicija 2.10 *Neka je $G = \{\mathcal{G}^L | \mathcal{G}^D\}$. Negativna igra igre G je $-G = \{-\mathcal{G}^D | -\mathcal{G}^L\}$.*

Negativna igra odgovara zamjeni uloga dva igrača. Primjetimo da kod nepristranih igara ova opcija nema efekta, jer igrači imaju jednake opcije u igri. Dakle, svaka nepristrana igra jednaka je svojoj negativnoj igri $G = -G$.

Zadatak 2.11 *Negirajte sljedeću poziciju u igri 'Stop-vrata' :* 



Koristeći definiciju sume igara i definiciju negativne igre, možemo definirati oduzimanje igara:

$G - H = G + (-H)$.

Zadatak 2.12 *Dokažite:* $-(-G) = G$.

$$\begin{aligned} -(-G) &= -\{-\mathcal{G}^D| - \mathcal{G}^L\} = \\ &= \{-(-\mathcal{G}^L)| - (-\mathcal{G}^D)\} = \\ &= \{\mathcal{G}^L|\mathcal{G}^D\} \end{aligned}$$

Zadatak 2.13 *Dokažite:* $-(G+H) = (-G) + (-H)$

$$\begin{aligned} -(G+H) &= -\{\mathcal{G}^L + H, G + \mathcal{H}^L|\mathcal{G}^D + H, G + \mathcal{H}^D\} = \\ &= \{-\mathcal{G}^D - H, -G - \mathcal{H}^D| - \mathcal{G}^L - H, -G - \mathcal{H}^L\} = \\ &= \{(-\mathcal{G})^L + (-H), (-G) + (-\mathcal{H})^L|(-\mathcal{G})^D + (-H), (-G) + (-\mathcal{H})^D\} = \\ &= (-G) + (-H). \end{aligned}$$

2.2.4 Ekvivalentne igre

Definicija 2.14 $G = H$ *ako* $(\forall X) G + X$ *ima jednake opcije kao* $H + X$.

U principu, $G = H$ ako se G ponaša kao H u bilo kojoj sumi igara.

Kod ove definicije moramo biti oprezni jer '=' ne znači da je G isto što i

H, već ’=’ označava relaciju ekvivalencije. Kasnije u ovom odjelku ćemo pokazati da kad je $G = H$, možemo zamijeniti G s H, opravdavajući simbol ’=’.

Korolar 2.15 $=$ *je relacija ekvivalencije.*

Dokaz. refleksivnost
Neka je igra G proizvoljna. Kako $G+X$ ima jednake opcije kao $G+X$, $\forall X$, to je G=G.
simetričnost
Neka je $G = H$. Po definiciji, $G + X$ ima jednake opcije kao $H + X$, $\forall X$. No, tada i $H + X$ ima jednake opcije kao $G + X$ pa je $H = G$.
tranzitivnost
Neka je $G = H$ i $H = J$. Tada $\forall X$, $G + X$ ima jednake opcije kao $H + X$, i $H + X$ ima jednake opcije kao $J + X$. No, tada i $G + X$ ima jednake opcije kao $J + X$, pa slijedi da je $G = J$. ∎

Ova definicija se čini prirodna, no ne baš korisna. Da bi pokazali da je $G = H$, po definiciji treba provjeriti $G + X$ i $H + X$ za svaki mogući X. U nastavku dajemo nekoliko tvrdnja, koje nam pokazuju kako jednostavnije dokazati da su dvije igre ekvivalentne.

Teorem 2.16 $G = 0$ *ako i samo ako je* G *u* $\mathcal{P}-$*poziciji, to jest, u* G *drugi igrač može osigurati pobijedu.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je $G = 0$. Tada $G + X$ ima jednake opcije kao $0 + X = X$ za svaki X. Posebno, ako je $X = 0$, to znači da G ima jednake opcije kao 0, što je $\mathcal{P}$-pozicija.
$\Leftarrow$ Neka je G u $\mathcal{P}$-poziciji. Fiksirajmo bilo koju poziciju od X. Treba pokazati da $G + X$ ima jednake opcije kao X.
Ako lijevi igrač može pobijediti igrajući drugi na X, onda on može također

pobijediti igrajući drugi na $G + X$ koristeći sljedeću strategiju:
Na koju god komponentu odigra desni igrač, lijevi igrač odgovara na istu komponentu, pretvarajući se da igra samo na G, odnosno, samo na X.
Ako lijevi igrač može pobijediti pomicanjem prvi na X, onda može pobijediti igrajući prvi na $G+X$ igrajući iste poteze na drugu komponentu od $G+X$, i nastavlja kao u prethodnom paragrafu.
Možemo simetrično tvrditi da ako desni igrač pobjeđuje na X, desni pobjeđuje i na $G+X$.
Dakle, X i $G+X$ imaju jednake ishode.

■

Korolar 2.17 $G - G = 0$

Dokaz. Po prethodnom teoremu, treba pokazati da u $G - G$ drugi igrač može osigurati pobijedu.
Pretpostavimo da prvi igrač igra na drugu komponentu, to jest, iz $G - G$ u $G - H$. Tada drugi igrač može igrati simetričnu strategiju, te iz $G - H$ napraviti potez na prvu komponentu, u $H - H$. Nastavljajući igru induktivno na taj način, drugi igrač pobjeđuje. ■

Teorem 2.18 *Fiksirajmo igre G, H i J. Tada je $G = H$ ako i samo ako je $G + J = H + J$.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je $G = H$. Želimo pokazati da za svaki X vrijedi da je $(G + J) + X$ ima jednake opcije kao $(H + J) + X$.
Neka je $X' = J + X$. Kako je $G = H$, to je po definiciji $G + X' = H + X'$, to jest $G + (J + X) = H + (J + X)$. Kako vrijedi asocijativnost, to je $(G + J) + X = (H + J) + X$.
$\Leftarrow$ Neka je $G + J = H + J$. Tada je $(G + J) + (-J) = (H + J) + (-J)$.

Koristeći asocijativnost i prethodni teorem, slijedi:

$$\begin{aligned} G &= G + 0 = \\ &= G + (J - J) = \\ &= (G + J) - J = \\ &= (H + J) - J = \\ &= H + (J - J) = \\ &= H + 0 = \\ &= H \end{aligned}$$

■

Zadatak 2.19 ***Tvrdnja***: *Ako je* $G = G'$ *i* $H = H'$, *onda je* $G+H = G'+H'$.
Dokaz: *Kako je* $G = G'$ *i* $H = H'$, *to je* $G+H = G'+H$ *i* $H+G' = H'+G'$. *Slijedi, koristeći komutativnost, da je:*
$G + H = G' + H = H + G' = H' + G' = G' + H'$.

Korolar 2.20 $G = H$ *ako i samo ako je* $G - H = 0$.

Dokaz. $G = H \Leftrightarrow G+(-H) = H+(-H) \Leftrightarrow G-H = H-H \Leftrightarrow G-H = 0$.

■

Ako želimo pokazati da su dvije igre G i H jednake, po prethodnom korolaru, dovoljno je pokazati da u igri $G - H$ uvijek pobjeđuje drugi igrač.
U praksi, ovo je najlakši i uobičajeni način testiranja kada su dvije igre jednake.
To nam omogućava da zamijenimo G s H u bilo kojem kontekstu - što je od velike koristi kada je H mnogo jednostavniji od G.

2.2.5 Uspoređivanje igara

Definicija 2.21 *$G \geq H$ ako $(\forall X)$ lijevi igrač pobjeđuje na $G + X$ kad god lijevi igrač pobjeđuje na $H + X$.*
$G \leq H$ ako $(\forall X)$ desni igrač pobjeđuje na $G+X$ kad god desni igrač pobjeđuje na $H + X$.

Iz definicije slijedi da je $G \geq H$ ako zamjena H s G neće naštetiti lijevom igraču.

Lema 2.22 *Vrijedi:*

1. *$G \geq H$ ako i samo ako je $H \leq G$.*
2. *$G = H$ ako i samo ako je $G \geq H$ i $H \leq G$.*

Dokaz.

1. Ako je $G \geq H$, onda lijevi igrač pobjeđuje na $G + X$ kad god lijevi pobjeđuje na $H + X$. To znači da kad god desni igrač pobjeđuje na $G + X$, tada desni pobjeđuje na $H + X$, pa je $H \leq G$.
2. $G = H$ ako i samo ako lijevi igrač pobjeđuje na $G + X$ kad god lijevi igrač pobjeđuje na $H + X$ i desni igrač pobjeđuje na $G + X$ kad god desni igrač pobjeđuje na $H + X$. Slijedi da je $G \geq H$ i $H \leq G$.

■

Teorem 2.23 *Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

1. *$G \geq 0$.*
2. *$G \in \mathcal{P}$ ili $G \in \mathcal{L}$ (Lijevi igrač pobjeđuje igrajući drugi na G).*

3. *Za svaku igru X, ako lijevi igrač pobjeđuje igrajući drugi na X, onda lijevi igrač pobjeđuje igrajući drugi na $G + X$.*

4. *Za svaku igru X, ako lijevi igrač pobjeđuje igrajući prvi na X, onda lijevi igrač pobjeđuje igrajući prvi na $G + X$.*

Dokaz.
$1 \iff 3, 4$: Ishod igre određuje se prema toma da li lijevi igrač pobjeđuje igrajući prvi ili drugi.
$2 \implies 3$: Pretpostavimo da lijevi igrač može osigurati pobjedu igrajući drugi na G ina X. Za pobjediti na $G{+}X$ igrajući drugi, koristi se 'Principom jedne ruke': Ako desni igrač igra u G, onda lijevi igra potez određen njegovom pobjedničkom strategijom u G. Ako desni igrač igra u X, onda lijevi igra potez određen njegovom pobjedničkom strategijom u X.
$2 \implies 4$: Analogno kao $2 \to 3$.
$3 \implies 2$: Stavimo da je $X = 0$.
$4 \implies 2$: Razmotrimo ekvivalentnu suprotnost sa zadnjim uvjetom: "Ako lijevi igrač ne pobjeđuje igrajući prvi na $G{+}X$, tada lijevi igrač ne pobjeđuje igrajući prvi na X". Neka je $X = -G$. Kako je $G{-}G = 0$, lijevi ne pobjeđuje igrajući prvi na $G - G$. Stoga, lijevi igrač ne pobjeđuje igrajući prvi na $-G$. Analogno, desni igrač ne pobjeđuje igrajući prvi na G. To jest, lijevi igrač pobjeđuje igrajući drugi na G. ■

Teorem 2.24 *$G \geq H$ ako i samo ako je $G + J \geq H + J$ za sve igre G, H i J.*

Dokaz. $\Rightarrow$ Neka je $G \geq H$. Tada po definiciji, lijevi igrač pobjeđuje na $G + X$ kad god lijevi igrač pobjeđuje na $H + X$, za svaki X.
Neka je $X' = J + X$. Kako je $G + X' = G + (J + X) = (G + J) + X$ i $H + X' = H + (J + X) = (H + J) + X$, slijedi da za svaki X, lijevi igrač

pobjeđuje na $(G+J)+X$ kad god lijevi igrač pobjeđuje na $(H+J)+X$. Dakle, $G+J \geq H+J$.
$\Leftarrow$ Neka je $G+J \geq H+J$. Tada za svaki X, lijevi igrač pobjeđuje na $(G+J)+X$ kad god lijevi igrač pobjeđuje na $(H+J)+X$.
Kako je $(G+J)+(-J) = G+(J-J) = G+0 = G$ i $(H+J)+(-J) = H+(J-J) = H+0 = H$, tada posebno za $X=-J$ iz definicije slijedi da je $G \geq H$. ■

Teorem 2.25 $G \geq H$ *ako i samo ako lijevi igrač može osigurati pobjedu igrajući drugi na* $G-H$.

Dokaz. $G \geq H$ ako i samo ako je $G-H \geq H-H = 0$. Dakle, $G-H \geq 0$.
■

Iz prethodnog slijedi tablica:

$G > 0$ kada lijevi pobjeđuje u G	$G > H$ kada lijevi pobjeđuje u $G-H$
$G = 0$ kada drugi igrač pobjeđuje u G	$G = H$ kada drugi igrač pobjeđuje u $G-H$
$G < 0$ kada desni igrač pobjeđuje u G	$G < H$ kada desni igrač pobjeđuje u $G-H$
$G\|\|0$ kada prvi igrač pobjeđuje u G	$G\|\|H$ kada prvi igrač pobjeđuje u $G-H$

2.3 Pojednostavljivanje igara

Ako u igri $G = \big\{\{\mathcal{G}^{L_1}, \mathcal{G}^{L_2}, ...\}|\{\mathcal{G}^{D_1}, \mathcal{G}^{D_2}, ...\}\big\}$ vrijedi $\mathcal{G}^{L_2} \geq \mathcal{G}^{L_1}$ kažemo da opcija $\mathcal{G}^{L_2}$ **dominira** $\mathcal{G}^{L_1}$. U tom slučaju smijemo izbaciti opciju $\mathcal{G}^{L_1}$ pod uvjetom da $\mathcal{G}^{L_2}$ bude zadržana.
Kod desnog igrača, kažemo da $\mathcal{G}^{D_2}$ **dominira** $\mathcal{G}^{D_1}$ ako vrijedi $\mathcal{G}^{D_2} \leq \mathcal{G}^{D_1}$. U tom slučaju smijemo izbaciti opciju $\mathcal{G}^{D_1}$ pod uvjetom da opcija $\mathcal{G}^{D_2}$ bude zadržana.
Brisanje dominiranih opcija jedan je način za pojednostavljivanje igara.

Drugi način sastoji se od zamjene tzv. reverzibilnih opcija.

Opciju desnog igrača X nazivamo **reverzibilnom** ako lijevi igrač ima odgovor X^L koji je za njega barem jednako toliko dobar koliko i dana igra G, tj ako vrijedi $X^L \geq G$. U tom slučaju X možemo zamijeniti nizom svih desnih opcija $X^{LD} = \{X^{LD_1, LD_2, \dots}\}$ od X^L.

Slično, opcija lijevog igrača Y je **reverzibilna** ako desni igrač ima odgovor Y^D, koji je za njega barem jednako toliko dobar koliko i sama igra G, tj. ako je $Y^D \leq G$, te tada Y smije biti zamijenjen nizom svih lijevih opcija Y^{DL} od Y^D.

Primjer 2.26 *U igri $G = \{0, *|*\}$ nijedna opcija lijevog igrača ne dominira nad drugom budući da je $0||*$, ali je zato njegova opcija $*$ reverzibilna, budući da je pripadni odgovor desnog igrača $*^R = 0$, a za igru G vrijedi $G \geq 0$. To znači da opciju lijvog igrača $*$ možemo zamijeniti svim opcijama lijevog igrača od $*^R = 0 = \{\ |\ \}$, tj možemo je zamijeniti svim opcijama praznog skupa. Dakle, možemo je obrisati.*

Na taj se način polazna igra G pojednostavljuje u igru $\{0|*\}$.

Poglavlje 3

Nepristrane igre

Definicija 3.1 *Kažemo da je igra **nepristrana** (imparcijalna) ako je skup opcija lijevog igrača jednak skupu opcija desnog igrača.*

Dakle, kod nepristranih igara, oba igrača imaju jednake opcije poteza iz svake pozicije. Mogući potezi ovise samo o trenutnoj poziciji igre a ne o tome koji je od igrača na potezu. Drugim riječima, jedina razlika između igrača 1 i igrača 2 je u tome koji igra prvi.

3.1 $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$ pozicije

S $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$ pozicijama susreli smo se u 2.-om poglavlju.
Kažemo da se igra nalazi u $\mathcal{P}$-poziciji ako osigurava pobjedu prethodnom igraču (koji je upravo odigrao potez).
Kažemo da se igra nalazi u $\mathcal{N}$-poziciji ako osigurava pobjedu sljedećem igraču.
Jedno od svojstava zbog kojeg je podrazred nepristranih igara zanimljiv jest da pripadaju samo dvjema klasama ishoda, i to $\mathcal{P}$ i $\mathcal{N}$ klasama, o čemu nam govori sljedeći teorem.

Teorem 3.2 *Ako je G nepristrana igra, onda je $G \in \mathcal{N} \cup \mathcal{P}$.*

Dokaz. Neka je $G \in \mathcal{L}$. To znači da lijevi igrač može osigurati pobjedu. No onda desni igrač može upotrijebiti strategiju lijevog i pobjediti (ukrasti strategiju). Analogno za $G \in \mathcal{R}$. ∎

Tvrdnja 2 *Svaka nepristrana igra jednaka je svojoj negativnoj igri, tj* $G + G = 0$.

Tvrdnja slijedi iz definicije nepristrane igre, te definicije negativne igre.

Po definiciji, nepristrane igre su podskup svih malih igara, pa je njihova vrjednost neizmjerna. Međutim, skup vrijednosti koje se mogu pojaviti za nepristrane igre je vrlo ograničen podskup.

3.2 Nimberi

Postoji klasa beskrajno malih vrijednosti koje se ne ponašaju kao nijedna vrijednost s kojima smo se do sada susreli. Javljaju se prirodno kao vrijednosti nepristrane igre *nim* i, kao što ćemo vidjeti, to su jedine vrijednosti koje nepristrane igre poprimaju.

Nim se igra sa nekoliko hrpa (redaka). p-hrpa (redaka) se može shvatiti kao p disjunktnih suma igara od 1-hrpe. Ako uspijemo odrediti kanonski oblik igre s jednom hrpom, zbrajanjem ćemo dobiti rezultat svake nim igre. Dakle, prvo trebamo definirati zbroj nim igara s jednom hrpom.

Ponovimo kako smo definirali dominantne i reverzibilne opcije.

Definicija 3.3 *Neka je G igra. Lijeva opcija $\mathcal{G}^L$ je dominantna nad drugom lijevom opcijom $\mathcal{G}^{L'}$ ako je $\mathcal{G}^L \leq \mathcal{G}^{L'}$. Slično, desna opcija $\mathcal{G}^R$ je dominantna nad desnom opcijom $\mathcal{G}^{R'}$ ako je $\mathcal{G}^R \geq \mathcal{G}^{R'}$.*

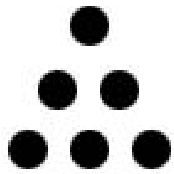
Definicija 3.4 *Neka je G igra. Lijeva opcija $\mathcal{G}^L$ je reverzibilna ako $\mathcal{G}^L$ ima desnu opciju $\mathcal{G}^{LR} \leq G$. Slično, desna opcija $\mathcal{G}^R$ je reverzibilna ako $\mathcal{G}^R$ ima lijevu opciju $\mathcal{G}^{RL} \geq G$.*

Vrijednost hrpe veličine 0 je $\{\ |\ \} = 0$ a hrpe veličine 1 je $\{0|0\} = *$.
Koja je vrijednost hrpe veličine 2?
Ona je oblika $\{0, *|0, *\}$. Ni lijeva ni desna opcija nije dominantna ni reverzibilna, pa je to nova vrijednost koju označavamo s $*2$.
Hrpa veličine 3 je oblika $\{0, *, *2|0, *, *2\}$ te opet nema dominantne ni reverzibilne opcije, pa ju označavamo s $*3$.
Općenito, ove vrijednosti se nazivaju **nimberi** (ili, neslužbeno, zvijezde). Ime potječe od igre Nim - svaki nimber $*n$ odgovara igri Nim koja se sastoji od jedne hrpe s n objekata.
Iako potječu od riječi "nim", nimberi se koriste za opisivanje pozicija bilo koje konačne nepristrane igre. S obzirom da su u nepristranim igrama opcije lijevog i desnog igrača jednake, dovoljno je pisati samo jedan skup opcija.

Definicija 3.5 *Vrijednost nim-hrpe veličine n, $n \geq 0$ je nimber $*n$.*

Primjetimo da je $*0 = 0$ i $*1 = 1$. Obično ćemo koristiti kraće zapise ove dvije igre.
Kao što smo već spomenuli, pozicije u nepristranim igrama mogu se svrstati u dvije klase ishoda, $\mathcal{N}-pozicija$ i $\mathcal{P}-pozicija$. Nimber $*0$ je $\mathcal{P}-pozicija$, a $*1$ je $\mathcal{N}-pozicija$.

Primjer 3.6 *Ana i Barbara igraju igru nim. Početna pozicija sastoji se od tri retka, tako da se u prvom retku nalazi jedan kamenčić, u drugom dva kamenčića a u trećem tri kamenčića, kao što je prikazano na sljedećoj slici:*



Označimo retke s A, B i C tako da je u početnoj konfiguraciji igre $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$. Neka je tijek igre dan sljedećom tablicom:

A	*B*	*C*	
1	*2*	*3*	*Ana uzima 1 kamenčić iz retka A*
0	*2*	*3*	*Barbara uzima 1 kamenčić iz retka C*
0	*2*	*2*	*Ana uzima 1 kamenčić iz retka C*
0	*2*	*1*	*Barbara uzima 1 kamenčić iz retka B*
0	*1*	*1*	*Ana uzima 1 kamenčić iz retka B*
0	*0*	*1*	*Barbara uzima 1 kamenčić iz retka B*
0	*0*	*0*	*Ana nema više poteza za odigrati*

- *U zadnjem koraku igre, kada su sve hrpe prazne, pozicija je $\{\}$.*
- *U 6-om koraku, Barbara ima točno jednu opciju za odigrati. Dok ona stavlja Anu u poziciju $*0$, njena pozicija je $\{*0\} = *1$.*
- *U 5-om koraku, Ana ima dvije opcije: uzeti jedan kamenčić iz retka B ili uzesti jedan kamenčić iz retka A. Kakogod, primjetimo da je svejedno koji će od ta dva poteza odigrati Ana: U svakom slučaju, Barbari ostaje točno jedan kamenčić u točno jednom retku.*
- *U 4-om koraku, Barbara ima tri opcije: uzeti 2 kamenčića iz retka B, uzeti 1 kamenčić iz retka B, ili uzeti jedan kamenčić iz retka C.*
  Ako uzme 2 kamenčića iz retka B, stavlja Barbaru u poziciju $*1$. Ako uzme 1 kamenčić iz retka B, stavlja Barbaru u poziciju s dva retka,

svaku veličine 1, tj u poziciju $\{*1\}$ opisanu u 5-om koraku. Ako uzme 1 kamenčić iz retka C, stavlja Barbaru u poziciju s jednim retkom od 2 kamenčića. Njeni potezi će tada biti $*0$ i $*1$ pa Anini potezi rezultiraju pozicijom $\{*0, *1\}$. Takvu poziciju označavamo s $*2$. Barbarina pozicija sastoji se od skupa svih njenih poteza, $\{*1, \{*1\}, *2\}$.

- *Rekurzivno, dobijemo da su Anine pozicije u 3-em koraku $\{\{*1, \{*1\}, *2\}, *2\}$*

Teorem 3.7 *Za $k > 0$, kanonska forma od $*k$ je*
$*k = \{0, *, *2, ..., *(k-1)|0, *, *2, ..., *(k-1)\}$.

Dokaz. Pokazat ćemo da ne postoje dominantne ni reverzibilne opcije.
$*i || *j$ jer je jedna i lijeva i desna opcija od druge. To jest, ako je $i > j$, onda prvi igrač igra iz $*i - *j$ u $*j - *j = 0$ i pobjeđuje. To direktno implicira da ne postoje dominante ni reverzibilne opcije. ■
Pokazati ćemo da ako su lijeva i desna opcija igre G jednake, i ako se sastoje samo od nimbera, onda postoji jednostavan način pronalaženja kanonskog oblika i vrijednosti od G.

Definicija 3.8 ***Minimalna isključena vrijednost*** *ili mex skupa ne-negativnih cjelih brojeva je najmanji ne-negativan cijeli broj koji ne pripada skupu. Označava se s $mex\{a, b, c, .., k\}$.*

Primjer 3.9

$$mex\{\emptyset\} = 0$$
$$mex\{1, 2, 3\} = 0$$
$$mex\{0, 1, 3, 4, 6, 8\} = 2$$
$$mex\{0, 1, 2, 3, 5, 6\} = 4$$

Teorem 3.10 *Neka je* $G = \{*l_1, *l_2, .., *l_k | *r_1, *r_2, .., *r_j\}$ *i neka je* $mex\{*l_1, *l_2, .., *l_k\} = mex\{*r_1, *r_2, .., *r_j\} = n$. *Tada je* $G = *n$ *i kanonska forma od* G *je* $\{0, *, *2, .., *(n-1) | 0, *, *2, .., *(n-1)\}$.

Dokaz. Pokazati ćemo da je $G - *n = 0$.
Ako bilo koji igrač pomakne bilo koju komponentu na $*k$ za $k < n$, u drugoj komponenti postoji potez koji se podudara. Konkretno, budući da su i $mex\{l_i\}$ i $mex\{r_i\}$ jednaki n, slijedi da je $*k$ i lijeva i desna opcija od G (također je i opcija iz $*n$). Dakle, drugi igrač može odgovoriti $*k - *k = 0$.
Jedini preostali potezi su iz $G - *n$ u $*k - *n$ za $k > n$. U tom slučaju, $*n$ je opcija iz $*k$, pa sljedeći igrač reagira lokalno na $*n - *n = 0$. ■

Korolar 3.11 (Sprague-grundy) *Za svaku nepristranu igru* G *postoji nenegativan cijeli broj* n *takav da je* $G = *n$.

Dokaz. Neka je G nepristrana igra. Indukcijom, opcije od G ekvivalentne su nim-hrpama. Teorem 3.10 tada daje recept za pronalaženje ekvivalentne nim-hrpe za G. ■

Sprague-grundy korolar zapravo kaže da je svaka nepristrana igra jednaka nim hrpi.

Zadatak 3.12 *Izračunaj* k *tako da je* $G = \{0, *3, *4, *8, *2 | 0, *6, *4\} = *k$ *koristeći teorem 3.10.*
Kako je $mex\{0, *3, *4, *8, *2\} = mex\{0, *6, *4\} = 1$, *po teoremu 3.10 je* $G = *1$, *pa je* $k = 1$.

Zbrajanje nimbera biti će neprirodno. Znamo da je $* + * = 0$, i iz tvrdnje 2 da je $*k + *k = 0$ za svaki $k \geq 0$. Za naći točan način za zbrajanje nimbera, treba nam analiza igre nim.
Analizu ćemo napraviti bez spominjanja vrijednosti igre ili njenih pribrojnika.

3.3 Analiza Nim-a

Igru Nim s hrpama veličine $a, b, .., k$ ćemo označavati s $NIM(a, b, .., k)$. Nim-zbroj brojeva $a, b, ..k$, zapisan kao $a \oplus b \oplus .. \oplus k$, dobiva se dodavanjem brojeva u binarnom sustavu bez prenošenja. Operacija nim-sume je zapravo isključivi-ili, ili *xor*.

Primjer 3.13 $10 \oplus 11 \oplus 6$:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 1\ 0\ 1\ 0 \\ 11 & 1\ 0\ 1\ 1 \\ 6 & 0\ 1\ 1\ 0 \\ \hline & 0\ 1\ 1\ 1 \end{array}$$

a 0111 *je binarni zapis broja 7.*

Dakle, za svaki stupac bitova, ako stupac ima paran broj jedinica, onda je suma stupca 0, a ako ima neparan broj jedinica, onda je suma stupca 1.

Teorem 3.14 *Neka su a,b i c ne-negativni cijeli brojevi. Nim-suma $\oplus$ zadovoljava sljedeća svojstva:*

- $a \oplus b = b \oplus a$*;*
- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$*;*
- $a \oplus a = 0$*;*
- $a \oplus b \oplus c = 0$ *ako i samo ako* $a \oplus b = c$*.*

Dokaz. Po definiciji, zbrajanje pojedine binarne pozicije (stupca), neovisno je o zbrajanju drugih binarnih pozicija. Tvrdnje slijede iz parnosti i neparnosti jedinica u svakom stupcu. ■

Nadalje, iskazat ćemo i dokazati teorem o pobjedi u nim-u.

Teorem 3.15 *Neka je $G = NIM(a, b, .., k)$. Tada je igra G u $\mathcal{P}$-poziciji ako i samo ako je $a \oplus b \oplus ... \oplus k = 0$.*

Dokaz. Neka su $x_1, x_2, ..., x_n$ veličina nim-hrpa prije poteza, a $y_1, y_2, ..., y_n$ pripadajuće veličine nakon odigranog poteza. Neka je $s = x_1 \oplus ... \oplus x_n$ i $t = y_1 \oplus ... \oplus y_n$. Ako je potez napravljen u hrpi k, onda je $x_i = y_i$ za sve $i \neq k$, i $x_k > y_k$. Iz svojstava nim-sume $\oplus$ slijedi:

$$\begin{aligned}
t &= 0 \oplus t \\
&= s \oplus s \oplus t \\
&= s \oplus (x_1 \oplus ... \oplus x_n) \oplus (y_1 \oplus ... \oplus y_n) \\
&= s \oplus (x_1 \oplus y_1) \oplus ... \oplus (x_n \oplus y_n) \\
&= s \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \oplus (x_k \oplus y_k) \oplus 0 \oplus ... \oplus 0 \\
&= s \oplus x_k \oplus y_k \\
(*) t &= s \oplus x_k \oplus y_k.
\end{aligned}$$

Teorem slijedi indukcijom po duljini igre iz sljedeće dvije leme:

Lema 3.16 *Ako je $s = 0$, onda je $t \neq 0$ bez obzira koji potez se odigra.*

Dokaz. Ako nema mogućih poteza za odigrati, onda je lema trivijalno istinita. Inače, bilo koji potez unutar hrpe k napravit će $t = x_k \oplus y_k$ iz (*). Taj broj je različit od 0 ako je $x_k \neq y_k$. ■

Lema 3.17 *Ako je $s \neq 0$, tada se može napraviti potez da bude $t = 0$.*

Dokaz. Neka je d pozicija prvog (s lijeva) ne-nul bita u binarnoj reprezentaciji od s, i neka je k takav da je d-ti bit od x_k ne-nul (takav k postoji jer bi u suprotnom d-ti bit od s bio 0.) Neka je $y_k = s \oplus x_k$, pretpostavljamo da je $y_k < x_k$: svi bitovi lijevo od d su jednaki u x_k i y_k, bit d smanjuje se s 1 na 0, a svaka promjena preostalih bitova iznosit će najviše $2^d - 1$. Tada prvi igrač može napraviti potez uzimajući $x_k - y_k$ objekta iz hrpe k, pa je:

$$\begin{aligned} t &= s \oplus x_k \oplus y_k (iz(*)) \\ &= s \oplus x_k \oplus (s \oplus x_k) \\ &= 0. \end{aligned}$$

■

Time je teorem dokazan. ■

Iz prethodnog dokaza slijede zapažanja:

- Ako je preostala samo jedna hrpa, strategija teorema i logika se slažu - pobjednički potez je uzeti sve.
- Ako su preostale dvije hrpe, tada je pobjednički potez, ako postoji, napraviti dvije hrpe jednakih veličina, a zatim igrati strategiju simetrije.

Primjer 3.18 *Pretpostavimo da igramo* $NIM(11, 12, 13)$*:*

11	*1 0 1 1*
12	*1 1 0 0*
13	*1 1 0 1*
10	*1 0 1 0*

Kako nim-suma nije jednaka 0, to je $\mathcal{N}$*-pozicija, pa osoba koja je na potezu može pobijediti. Zapravo, ispod prve lijeve 1-ice u zbroju, nalazi se 1 u svakoj hrpi. Dakle, postoji pobjednički potez iz svake hrpe. Igrač koji je na potezu može reducirati:*

- *hrpu veličine 11 na veličinu* $11 \oplus 10 = 1$*, ili*
- *hrpu veličine 12 na veličinu* $12 \oplus 10 = 5$*, ili*
- *hrpu veličine 13 na veličinu* $13 \oplus 10 = 7$.

3.4 Zbrajanje nimbera

Teorem 3.19 *Za ne-negativne cijele brojeve k i j, $*k + *j = *(k \oplus j)$*

Dokaz. Iz Teorema 3.14, slijedi da je NIM s hrpama veličina k,j i $k \oplus j$ u $\mathcal{P}$-poziciji. Vrijednost pojedinačnih nim dijelova su $*k$, $*j$ i $*(k \oplus j)$. To što su oni u $\mathcal{P}$-pozicijama znači: $*k + *j + *(k \oplus j) = 0$ ili $*k + *j = *(k \oplus j)$. ■

Korolar 3.20 $*a + *b + ... + *n = *(a \oplus b \oplus ... \oplus n)$.

Dokaz. Slijedi iz prethodnog teorema. ■

3.5 Dodatna sažeta notacija

Definicija 3.21 *Neka je G nepristrana igra. Tada je nim-vrijednost (Grundy-vrijednost), označena s $\mathcal{G}(G)$ jednaka k ako i samo ako je $G = *k$.*

Tvrdnja 3 *Neka je G nepristrana igra i neka ima točno n opcija. Tada je $\mathcal{G}(G) \leq n$.*

Dokaz. Nim vrijednost igre G je *mex* od skupa nim-vrijednosti njenih opcija. Kako G ima točno n opcija, barem jedna od $\{0, 1, 2, ..., n\}$ se ne pojavljuje u skupu nim-vrijednosti opcija igre G. Slijedi da je $\mathcal{G}(G) \leq n$. ■

Izraz "Grundy-vrijednost" bio je izvorni izraz za $\mathcal{G}(G)$. U novije vrijeme nazvana je nim-vrijednost, jer ako je $G = *k$, tada je $\mathcal{G}(G) = k$ veličina nim-hrpe kojoj je G ekvivalent.

Ponovno postavljamo rezultate za nepristrane igre dane u prethodnim odjeljcima koristeći ovu novu oznaku:

Teorem 3.22

- $\mathcal{G}(G) = mex\{\mathcal{G}(H) | H \textit{ je opcija od } G\}$

- *Ako su G, H i J nepristrane igre, onda je $G = H + J$ ako i samo ako je $\mathcal{G}(G) = \mathcal{G}(H) \oplus \mathcal{G}(J)$.*

Primjer 3.23 *Igra oduzimanje(1,2,4) igra se sa hrpom brojača. Potez se sastoji od odabira hrpe, i uklanjanja jednog, dva ili četiri brojača iz te hrpe.*

Sljedeća tablica pokazuje kako se izračunava prvih nekoliko nim-vrijednosti ove igre:

n	**opcije**	**nim-vrijednosti**	**mex**	$\mathcal{G}(n)$
0	$\{\}$	$mex\{\}$		0
1	$\{0\}$	$mex\{\mathcal{G}(0)\}$	$mex\{0\}$	1
2	$\{1,0\}$	$mex\{\mathcal{G}(1),\mathcal{G}(0)\}$	$mex\{0,1\}$	2
3	$\{2,1\}$	$mex\{\mathcal{G}(2),\mathcal{G}(1)\}$	$mex\{1,2\}$	0
4	$\{3,2,0\}$	$mex\{\mathcal{G}(3),\mathcal{G}(2),\mathcal{G}(0)\}$	$mex\{0,2,0\}$	1
5	$\{4,3,1\}$	$mex\{\mathcal{G}(4),\mathcal{G}(3),\mathcal{G}(1)\}$	$mex\{1,0,1\}$	2
6	$\{5,4,2\}$	$mex\{\mathcal{G}(5),\mathcal{G}(4),\mathcal{G}(2)\}$	$mex\{2,1,2\}$	0

Tvrdnja 4 *U oduzimanju(1,2,4), nim-vrijednost hrpe veličine n dana je s $\mathcal{G}(n) = (n \ mod\ 3)$.*

Dokaz.

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(n) &= mex\{\mathcal{G}(n-1), \mathcal{G}(n-2), \mathcal{G}(n-4)\} \\
&= mex\begin{cases} n-1 \bmod 3 \\ n-2 \bmod 3 \\ n-4 \bmod 3 \end{cases} \\
&= mex\begin{cases} n-1 \bmod 3 \\ n-2 \bmod 3 & \text{(jer je } n-1 \equiv n-4 \pmod 3\text{)} \end{cases} \\
&= n \bmod 3.
\end{aligned}$$

Za zadnji korak, tri mogućnosti su $mex\{0, 1\} = 2$, $mex\{1, 2\} = 0$ i $mex\{2, 0\} = 1$. Osnovni slučajevi za $n < 3$ dani su u prethodnoj tablici. ■

Neka je G igra s hrpama veličina 3, 4, 15 i 122. $\mathcal{G}(3) = 0$, $\mathcal{G}(4) = 1$, $\mathcal{G}(15) = 0$ i $\mathcal{G}(122) = 2$. Stoga je $\mathcal{G}(G) = 0 \oplus 1 \oplus 0 \oplus 2 = 3$ pa je $\mathcal{G}$ u $\mathcal{N}$. Pobjednički potez je onaj koji reducira nim-vrijednost igre na 0, a takav potez sigurno postoji iz 122, mijenjajući njegov nimber sa 2 na 1. Izvadite 1 kamenčić iz hrpe veličine 122 na 121.

Općenito, mogu postojati i drugi pobjednički potezi, kao uklanjanje 2 iz hrpe veličine 4.

Primjer 3.24 *Nađite nim-vrijednost za oduzimanje(1,3).*

Rješenje: $\mathcal{G}(0) = 0$, $\mathcal{G}(1) = mex\{\mathcal{G}(0)\} = mex\{0\} = 1$, $\mathcal{G}(2) = mex\{\mathcal{G}(1)\} = mex\{1\} = 0$, $\mathcal{G}(3) = mex\{\mathcal{G}(2), \mathcal{G}(0)\} = mex\{0, 0\} = 1$,...

Općenito,

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(n) &= mex\{\mathcal{G}(n-1), \mathcal{G}(n-4)\} \\
&= mex\begin{cases} n-1 \bmod 2 \\ n-3 \bmod 2 \end{cases} \\
&= mex\begin{cases} n-1 \bmod 2 \end{cases} \qquad \text{(jer je } n-1 \equiv n-3 \pmod 2\text{)} \\
&= n \bmod 2.
\end{aligned}$$

3.6 Uzmi-ili-slomi

Postoje mnoge varijacije na igru nim dobivenih izmjenom dopuštenih poteza. U ovom odjeljku opisati ćemo i analizirati igru pod nazivom *uzmi-ili-slomi*. Uzmi-ili-slomi je igra u kojoj pravila dopuštaju uzimanje i/ili dijeljenje (slamanje) hrpe na dva ili više djelova pod određenim uvjetima, povećavajući broj hrpa.

Nakon Nim-a, uzmi-ili-slomi spada u najranije i najviše proučavane nepristrane igre.

U inačicama ove igre, dopušteni potezi mogu se razlikovati ovisno o veličini hrpe. Na primjer, dopušteni potezi mogu biti "igrač mora uzeti najmanje jednu četvrtinu hrpe i ne više od polovine hrpe".

Definicija 3.25 *Za danu "uzmi-ili-slomi" igru G, neka je $\mathcal{G}(n)$ nim vrijednost igre hrpe veličine n. $Nim - niz$ igre je $\mathcal{G}(0)$, $\mathcal{G}(1)$, $\mathcal{G}(2)$...*

Kako bismo automatizirali postupak pronalaženja (i dokazivanja) nim-nizova u igri "uzmi-ili-slomi", moramo se pozabaviti s dva pitanja:

- Koje se pravilnosti javljaju u nim-nizovima?
- Kada znamo da će se neka pravilnost primjećena u nim-nizovima ponavljati zauvijek?

Postoje tri vrste pravilnosti primjećene u nim-nizovima koje ćemo navesti u sljedećoj definiciji.

Definicija 3.26 *Nim-niz je:*

- ***periodičan*** *ako postoje $l \geq 0$ i $p > 0$ takvi da je $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n)$ za sve $n \geq l$;*
- ***aritmetički periodičan*** *ako postoje $l \geq 0$, $p > 0$ i $s > 0$ takvi da je $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n) + s$ za sve $n \geq l$;*
- ***sapp regularan*** *(ili split arithmetic periodic/periodic) ako postoje cijeli brojevi $l \geq 0$, $s > 0$, $p > 0$ i podskup $S \subseteq \{0, 1, 2, .., p-1\}$ takvi da za sve $n \geq l$ vrijedi:*
  $$\mathcal{G}(n+p) = \begin{cases} \mathcal{G}(n), & \text{za } (n \bmod p) \in S, \\ \mathcal{G}(n) + s, & \text{za } (n \bmod p) \notin S \end{cases}$$

Podnizovi $\mathcal{G}(0)$, $\mathcal{G}(1)$, ... , $\mathcal{G}(l-1)$ nazivaju se *pre-period* a njihovi elementi su *iznimne vrijednosti*. Ako su l i p odabrani tako da su najmanji mogući, tada u skladu s uvjetima definicije, kažemo da je l duljina pre-perioda, a p duljina perioda, dok je s salus. Ako nema pre-perioda, nim-niz se naziva čisto periodični, čisto aritmetički periodični, i čisto sapp regularan.

Primjer 3.27

- *Niz 1231451671... je čisto sapp regularan jer je*

  $\mathcal{G}(0) = 1,\ \mathcal{G}(1) = 2,\ \mathcal{G}(2) = 3,$

  $\mathcal{G}(3) = \mathcal{G}(0+3) = \mathcal{G}(0)$

  $\mathcal{G}(4) = \mathcal{G}(1+3) = \mathcal{G}(1) + 2$

  $\ldots$

  tj. za $l = 0$, $p = 3$, $s = 2$ *i* $S = \{0\}$ *vrijedi da je*

  $$\mathcal{G}(n+p) = \begin{cases} \mathcal{G}(n), & \text{za } (n \bmod p) \in S, \\ \mathcal{G}(n) + s, & \text{za } (n \bmod p) \notin S \end{cases}$$

- *Niz 1123123123... je periodičan jer je*

  $\mathcal{G}(0) = 1,\ \mathcal{G}(1) = 1,\ \mathcal{G}(2) = 2,\ \mathcal{G}(3) = 3,$

  $\mathcal{G}(4) = \mathcal{G}(1+3) = \mathcal{G}(1)$

  $\mathcal{G}(5) = \mathcal{G}(2+3) = \mathcal{G}(2)$

  $\ldots$

  tj. za $l = 1$ *i* $p = 3$ *vrijedi da je* $\mathcal{G}(n+3) = \mathcal{G}(n)$ *za svaki* $n \geq 1$.

- *Niz 1122334455... je čisto aritmetički periodičan jer je*

  $\mathcal{G}(0) = 1,\ \mathcal{G}(1) = 1,$

  $\mathcal{G}(2) = \mathcal{G}(0+2) = \mathcal{G}(0) + 1 = 1 + 1 = 2$

  $\mathcal{G}(3) = \mathcal{G}(1+2) = \mathcal{G}(1) + 1 = 1 + 1 = 2$

  $\ldots$

  tj. za $l = 0$, $p = 2$ *i* $s = 1$ *vrijedi da je* $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n) + 1$ *za svaki* $n \geq 1$.

- *Niz* 0123252729... *je sapp regularan jer je*

  $\mathcal{G}(0) = 0$, $\mathcal{G}(1) = 1$, $\mathcal{G}(2) = 2$, $\mathcal{G}(3) = 3$,

  $\mathcal{G}(4) = \mathcal{G}(2+2) = \mathcal{G}(2) = 2$

  $\mathcal{G}(5) = \mathcal{G}(3+2) = \mathcal{G}(3) + 1 = 3 + 1 = 4$

  ...

  tj. za $l = 2$, $p = 2$, $s = 2$ *i skup* $S = \{0\}$ *vrijedi da je* $\mathcal{G}(n+p) = \begin{cases} \mathcal{G}(n), & \text{za } (n \text{ mod } p) \in S, \\ \mathcal{G}(n) + s, & \text{za } (n \text{ mod } p) \notin S \end{cases}$ *za svaki* $n \geq l$.

- *Niz* 0120120120... *je čisto periodičan jer je*

  $\mathcal{G}(0) = 0$, $\mathcal{G}(1) = 1$, $\mathcal{G}(2) = 2$,

  $\mathcal{G}(3) = \mathcal{G}(0+3) = \mathcal{G}(0) = 0$

  $\mathcal{G}(4) = \mathcal{G}(1+3) = \mathcal{G}(1) = 1$

  ...

  tj. za $l = 0$ *i* $p = 3$ *vrijedi da je* $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n)$ *za svaki* $n \geq 1$.

- *Niz* 1112233445... *je aritmetički periodičan jer je*

  $\mathcal{G}(0) = 1$, $\mathcal{G}(1) = 1$, $\mathcal{G}(2) = 1$,

  $\mathcal{G}(3) = \mathcal{G}(1+2) = \mathcal{G}(1) + 1 = 1 + 1 = 2$

  $\mathcal{G}(4) = \mathcal{G}(2+2) = \mathcal{G}(2) + 1 = 1 + 1 = 2$

  ...

  tj. za $l = 1$, $p = 2$ *i* $s = 1$ *vrijedi da je* $\mathcal{G}(n+p) = \mathcal{G}(n) + 1$ *za svaki* $n \geq 1$.

3.7 Igra oduzimanja

Definicija 3.28 *Igra oduzimanja igra se s hrpama brojača i skupa* S *pozitivnih cijelih brojeva. Potez se sastoji od odabira hrpe, te uklanjanja bilo kojeg broja brojača pod uvjetom da je taj broj u* S.

- Ako je $S = \{a_1, ..., a_k\}$ konačan, kažemo da je igra konačna, što označavamo s $oduzimanje(a_1, ..., a_k)$.
- Ako se $S = \{1, 2, 3, ...\} \ / \ \{a_1, ..., a_k\}$ sastoji od svih pozitivnih cijelih brojeva osim konačnog skupa, kažemo da je igra "sve-osim", što označavamo sa $sveosim(a_1, ..., a_k)$.

3.7.1 Konačna igra oduzimanja

Sljedeća tablica prikazuje prvih 15 vrijednosti nim-niza za nekoliko igara oduzimanja, $oduzimanje(S)$.

S	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
{1,2,3}	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
{2,3,4}	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2	0	0	1
{3,4,5}	0	0	0	1	1	1	2	2	0	0	0	1	1	1	2
{3,4,6,10}	0	0	0	1	1	1	2	2	2	0	3	3	1	4	0

tablica 3

Objasnit ćemo samo prvih par vrijednosti za skup $\{1, 2, 3\}$:

$G(0) = 0$

$G(1) = mex\{G(0)\} = mex\{0\} = 1$

$G(2) = mex\{G(0), G(1)\} = mex\{0, 1\} = 2$

$G(3) = mex\{G(0), G(1), G(2)\} = mex\{0, 1, 2\} = 3$

$G(4) = mex\{G(1), G(2), G(3)\} = mex\{1, 2, 3\} = 0$

$G(5) = mex\{G(2), G(3), G(4)\} = mex\{2, 3, 0\} = 1$

...

$G(14) = mex\{G(11), G(12), G(13)\} = mex\{3, 0, 1\} = 2$

Iz tablice možemo uočiti da je nim-niz za oduzimanje(1,2,3) čisto periodički s vrijednostima $\dot{0}12\dot{3}$. Nim-niz za oduzimanje(2,3,4) je $\dot{0}0112\dot{2}$, a $\dot{0}001112\dot{2}$ za oduzimanje(3,4,5). Kod skupa $\{3,4,6,10\}$ pravilo još nije uočeno, no kada bi raspisali još članova dobili bi nim-niz $00011122203314\dot{0}0201312\dot{2}$.

3.7.2 Računanje nim-nizova pomoću Grundy-jeve ljestvice

Nim-nizovi za igru oduzimanja mogu se izračunati jednostavnom tehnikom pomoću olovke i papira. Potrebna su nam dva papira kako bi konstruirali tzv. Grundy-jevu ljestvicu. U ovom primjeru, radit ćemo s oduzimanje(2,4,5). Prvo, na svakom od papira crtamo tablice tako da su brojevi u tablicama poredani obrnutim redom, tj.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11

11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Na drugoj tablici, označimo brojeve 2,4 i 5 oznakom $\triangle$ a 0 s $\blacktriangle$ tj.

						$\triangle$	$\triangle$		$\triangle$		$\blacktriangle$
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

Izračunati ćemo $G(10)$. Pomaknimo donju tablicu u lijevo tako da $\blacktriangle$ pokazuje na gornju tablicu na broj 10 kao što je prikazano na slici:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
						$\triangle$	$\triangle$		$\triangle$		$\blacktriangle$	
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	

Zatim promatramo brojeve na koje pokazuje $\triangle$.

$G(8) = mex\{G(3), G(4), G(6)\} = mex\{1, 2, 3\} = 0$

$G(6) = mex\{G(1), G(2), G(4)\} = mex\{0, 1, 2\} = 3$

$G(5) = mex\{G(0), G(1), G(3)\} = mex\{0, 0, 1\} = 2$

Konačno, $G(10) = mex\{G(8), G(6), G(5)\} = mex\{0, 3, 2\} = 1$.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0	1	1	2	2	3	3	0	0	**1**	

						△	△		△		▲
11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0

3.7.3 Period konačne igre oduzimanja

Nakon što smo odigrali nekoliko konačnih igara oduzimanja, nije iznenađenje da su njihovi nim-nizovi uvijek periodični.

Teorem 3.29 *Nim-niz konačne igre oduzimanja je periodičan.*

Dokaz. Neka je igra *oduzimanje*$(a_1, a_2, ..., a_k)$ konačna. Iz svake pozicije postoje najviše k dopuštenih poteza. Iz *tvrdnje 3* slijedi da je $\mathcal{G}(n) \leq k$ za svaki n.

Neka je $a = max\{a_i\}$. Kako je $\mathcal{G}(n) \leq k$ za svaki n, postoji samo konačno mnogo mogućih blokova uzastopnih vrijednosti koje mogu nastati u nim-nizu. Dakle, postoje pozitivni cijeli brojevi q i r takvi da je $a \leq q < r$ tako da su vrijednosti u nim-nizu koje prethode q jednake vrijednostima koje su neposredno predhodile r.

$\mathcal{G}(q) = mex\{\mathcal{G}(q - a_i) | 1 \leq i \leq k\} = mex\{\mathcal{G}(r - a_i) | 1 \leq i \leq k\} = \mathcal{G}(r)$.

Za takve q i r i za sve $t \geq 0$, $\mathcal{G}(q + t) = \mathcal{G}(r + t)$. To se lako pokazuje indukcijom - upravo smo vidjeli bazni slučaj, a induktivni korak je zapravo samo instanca osnovnog slučaja prevedenog t koraka naprijed. Neka je $l = q$ i $p = r - q$, primjetimo da gore navedeno kaže da za sve $n \geq l$, $\mathcal{G}(n + p) = \mathcal{G}(n)$, tj. nim-niz je periodičan. ■

Iz dokaza teorema možemo zaključiti da su duljina pre-perioda i perioda najviše $(k+1)^a$. Međutim, to nije precizna procjena, a pomoću sljedećeg korolara vrijednosti perioda i duljine pred perioda obično se mogu odrediti pomoću računala:

Korolar 3.30 *Neka je* $G = oduzimanje(a_1, a_2, ..., a_k)$ *i neka je* $a = max\{a_i\}$. *Ako su* l *i* p *pozitivni cijeli brojevi takvi da je* $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}(n+p)$ *za sve* $l \leq n < l + a$, *onda je nim-niz od* G *periodičan s periodom duljine* p *i pre-periodom duljine* l.

Dakle, s obzirom na pretpostavke vrijednosti l i p, potrebno je provjeriti vrijednosti od $\mathcal{G}(n)$ za $n \in \{l, l+1, ..., l+p+a-1\}$ za potvrditi periodičnost. Iz korolara, za vrijednosti iz *tablice 3* vrijedi:

- Za $oduzimanje(1, 2, 3)$ je $l = 0$, $p = 4$ i $a = 3$ a ove vrijednosti mogu se potvrditi računanjem vrijednosti $\mathcal{G}(n)$ za $n \in \{0, ..., 6\}$.
- Za $oduzimanje(2, 3, 4)$ je $l = 0$, $p = 6$ i $a = 4$ a ove vrijednosti mogu se potvrditi računanjem vrijednosti $\mathcal{G}(n)$ za $n \in \{0, ..., 9\}$.
- Za $oduzimanje(3, 4, 5)$ je $l = 0$, $p = 8$ i $a = 5$ a ove vrijednosti mogu se potvrditi računanjem vrijednosti $\mathcal{G}(n)$ za $n \in \{0, ..., 12\}$.
- Za $oduzimanje(3, 4, 6, 10)$ je $l = 14$, $p = 7$ i $a = 10$ a ove vrijednosti mogu se potvrditi računanjem vrijednosti $\mathcal{G}(n)$ za $n \in \{14, ..., 30\}$.

Dva glavna pitanja koja još uvijek privlače istraživače su:

- Kao funkcija od a_i koliko dug može biti period od $oduzimanje(a_1, ...a_k)$?
- Naći općenitu formu nim-niza za $oduzimanje(a_1, ...a_k)$.

Mnoge igre s različitim skupom S su zapravo jednake u smislu da imaju jednake nim-nizove. Na primjer, nim-niz igre sa skupom $S = \{1\}$ je $\dot{0}\dot{1}$, što

je također nim-niz igre sa skupom $S = \{1, 3\}$. Nadalje, navedeni niz je nim-niz igre $oduzimanje(1, k)$ gdje je k bilo koji neparan broj.
Sljedeći teorem daje nam općenitiju verziju ove analize:

Teorem 3.31 *Neka je* $G = oduzimanje(a_1, ...a_k)$ *čisto periodično s periodom* p*. Neka je* $H = oduzimanje(a_1, ...a_k, a_1 + mp)$ *za* $m \geq 0$*, tada* G *i* H *imaju jednake nim-nizove.*

3.7.4 Sve-osim igra

Sljedeća tablica prikazuje prvih 15 vrijednosti nim-niza igre $sveosim(S)$ za određene skupove S:

S	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**
{1,2,3}	0	0	0	0	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3
{2,3,4}	0	1	0	1	0	1	2	3	2	3	2	3	4	5	4
{3,4,5}	0	1	2	0	1	2	3	4	5	3	4	5	6	7	8
{3,4,6,10}	0	1	2	0	1	2	0	1	2	3	4	5	3	4	5

Grundy-jeva skala može se koristiti i za *sveosim* igre, tako da se s trokutima označe brojevi koji nisu opcije.
Vrijednosti u prethodnoj tablici ne izgledaju periodično jer se čini kao da se $\mathcal{G}(n)$ povećava s n, što potvrđuje sljedeća lema:

Lema 3.32 *Neka je* $G = sveosim(a_1, a_2, ..., a_k)$ *i* $a = max\{a_i\}$*. Tada je* $\mathcal{G}(n + t) > \mathcal{G}(n)$ *za sve* $t > a$*.*

Dokaz. Kako je svaka opcija iz n također opcija iz $n+t$ to je $\mathcal{G}(n+t) \geq \mathcal{G}(n)$. Nadalje, n je opcija iz $n + t$, pa $\mathcal{G}(n)$ nestaje kao nim-vrijednost opcije iz $n + t$, te zbog toga nemamo jednakost. ∎

Kakogod, sve *sveosim* igre oduzimanja su aritmetički periodične. Iz gornje tablice možemo zaključiti sljedeće (salus vrijednost označili smo sa +):

S	nim-niz
{1,2,3}	$\dot{0}00\dot{0}(+1)$
{2,3,4}	$\dot{0}1010\dot{1}(+2)$
{3,4,5}	$\dot{0}1201\dot{2}(+3)$
{3,4,6,10}	$\dot{0}1201201\dot{2}(+3)$

Dokazivanje da je nim-niz aritmetički periodičan obično je puno teže nego dokazati periodičnost. Unatoč tome, možemo usporediti rad na konačnim igrama oduzimanja, dokazujući da su *sveosim* igre oduzimanja aritmetički periodične, a zatim identificirati kako netko (osoba ili računalo) može automatski potvrditi aritmetičku periodičnost.

Teorem 3.33 *Neka je* $G = sveosim(a_1, a_2, ..., a_k)$. *Tada je nim-niz od G aritmetički periodičan.*

Dokaz. Teorem slijedi iz Leme 3.36 i 3.37 koje su iskazane i dokazane u nastavku. ∎

Uz aritmetičku periodičnost, ponavljanje koje tražimo je u obliku niza, a ne njegove vrijednosti. Dok prolazite kroz dokaze, imajte na umu da su nim vrijednosti $(\mathcal{G}(n_0), ..., \mathcal{G}(n_0 + c))$ i $(\mathcal{G}(n_0'), ..., \mathcal{G}(n_0' + c))$ jednakog oblika ako je:

1. $\mathcal{G}(n_0') - \mathcal{G}(n_0) = \mathcal{G}(n_0' + 1) - \mathcal{G}(n_0 + 1) = ... = \mathcal{G}(n_0' + c) - \mathcal{G}(n_0 + c)$,
2. $\mathcal{G}(n_0 + i + 1) - \mathcal{G}(n_0 + i) = \mathcal{G}(n_0' + i + 1) - \mathcal{G}(n_0' + i)$, Za $0 \le i < c$

Pokazat će se da će osnovni slučaj induktivnog dokaza zahtijevati ponavljanje duljine oko $2a$, gdje je $a = max\{a_i\}$. Pokazat ćemo da takvo ponavljanje postoji u sljedeće dvije leme.

Lema 3.34 *Neka je* $G = sveosim(a_1, a_2, ..., a_k)$, *i neka je* $a = max\{a_i\}$. *Tada je* $k - a \le \mathcal{G}(n+1) - \mathcal{G}(n) \le a - k + 1$, *za sve* $n \ge a$.

Dokaz. Neka je $n > a$ prioizvoljan i neka je $X \subseteq \{\mathcal{G}(0), \mathcal{G}(1), \mathcal{G}(2), ..., \mathcal{G}(n-1)\}$ skup nim vrijednosti opcija od n, tj. $X = \{\mathcal{G}(n-\alpha) | \alpha \notin \{a_1, ..., a_k\}$. Kako je $\mathcal{G}(n)$ *mex* od X, to je $\{0, 1, 2, ..., \mathcal{G}(n) - 1\} \subseteq X$.
Nadalje, igra $G = sveosim(a_1, ..., a_k)$ ne dopušta pomicanje k veličine sa hrpe. Stoga, jedan od $\{\mathcal{G}(0), ..., \mathcal{G}(n-a-1)\}$, nazovimo ga $\mathcal{G}(m)$, mora biti barem $\mathcal{G}(n) - 1 - (a-k)$, jer se $a-k$ vrijednosti iz X može pojaviti u $\{\mathcal{G}(n-a), ..., \mathcal{G}(n) - 1\}$. Nadalje, m i sve opcije iz m su također opcije iz $n+1$. Dakle, imamo,
$\mathcal{G}(n+1) > \mathcal{G}(m)$, pa je
$\mathcal{G}(n+1) \geq \mathcal{G}(n) - (a-k)$, to jest
$k - a \leq \mathcal{G}(n+1) - \mathcal{G}(n)$.
Slično, za drugu nejednakost, jedan od $\{\mathcal{G}(0), ..., \mathcal{G}(n-a-1)\}$ je barem $\mathcal{G}(n+1) - 2 - (a-k)$, nazovimo ga $\mathcal{G}(s)$. s i sve opcije iz s su opcije od n, pa je
$\mathcal{G}(n) \geq \mathcal{G}(n+1) - (a-k) - 1$, to jest
$\mathcal{G}(n+1) - \mathcal{G}(n) \leq a - k + 1$. ■

Lema 3.35 *Neka je $G = sveosim(a_1, a_2, ..., a_k)$ i $a = max\{a_i\}$. Tada postoje n_0, n'_0, s, i $p = n'_0 - n_0 > 0$ takvi da je $\mathcal{G}(n+p) - \mathcal{G}(n) = s$ za $n_0 \leq n \leq n_0 + 2a$.*

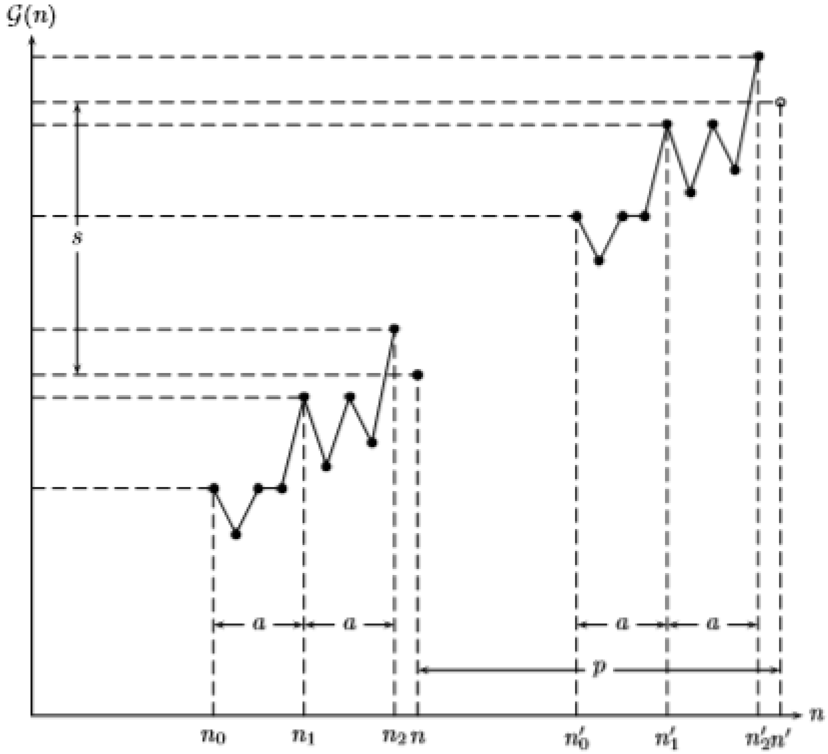
Dokaz. Iz prethodne leme, za sve n, $\mathcal{G}(n+1) - \mathcal{G}(n)$ mora biti između $k-a$ i $a-k+1$. No, samo je $2(a-k)+2$ vrijednosti u tom rasponu.
Stoga, za $c = 2(a-k)+2$, postoji najviše c^{2a} mogućih nizova oblika
$(\mathcal{G}(n+1) - \mathcal{G}(n), \mathcal{G}(n+2) - \mathcal{G}(n+1), ..., \mathcal{G}(n+2a) - \mathcal{G}(n+2a-1))$.
Konačno, za dvije vrijednosti $n = n_0$ i $n = n'_0$, dva odgovarajuća niza su identična iz čega slijedi Lema. ■
Sljedeća lema dovršava induktivni korak dokaza teorema.

Lema 3.36 *Neka je $G = sveosim(a_1, a_2, ...a_k)$ i $a = max\{a_i\}$ i neka je*

$\mathcal{G}(n+p) - \mathcal{G}(n) = s$ za $n_0 \leq n \leq n_0 + 2a$. Tada je $\mathcal{G}(n+p) - \mathcal{G}(n) = s$, za sve $n \geq n_0$.

Posebno, $\mathcal{G}(n)$ ima pre-period duljine $l = n_0$, period p i saltus s, a period i saltus može se prepoznati i potvrditi samo provjeravanjem prvih $l+2a+p+1$ vrijednosti, tj. $\mathcal{G}(n)$ za $0 \leq n \leq l+2a+p$.

Dokaz. Indukcijom, dovoljno je dokazati da je $\mathcal{G}(n+p) - \mathcal{G}(n) = s$ za $n = n_0 + 2a + 1$. Definirajmo sljedeće veličine kao što je prikazano na slici 3: $n'_0 = n_0 + p$, $n_1 = n_0 + a$, $n_2 = n_0 + 2a$, $n'_1 = n'_0 + a$, i $n'_2 = n'_0 + 2a$.



Dok računamo $\mathcal{G}(n') = \mathcal{G}(n+p)$ kao *mex* od nim-vrijednosti njegovih opcija, po lemi 3.33, $\mathcal{G}(n')$ prelazi sve $\mathcal{G}(m)$ za $m < n' - a - 1 = n'_1$.

Znamo da je $\mathcal{G}(n') > \mathcal{G}(n'_1)$, pa možemo sigurno ignorirati $\mathcal{G}(m)$ za $m < n'_0$. Drugim riječima, $\mathcal{G}(n')$ je minimalna isključna vrijednost od $\{\mathcal{G}(n'_0), ..., \mathcal{G}(n'_2)\}$ koja prelazi $\mathcal{G}(n'_1)$. Kako dodjeljivanje $\mathcal{G}(n')$ ne izvodi linearnu translaciju tih nim-vrijednosti, $\mathcal{G}(n') - \mathcal{G}(n) = s$. ∎

Posljednja lema daje metodu za testiranje kada *sveosim* igra oduzimanja postaje aritmetički periodična.

Primjer 3.37 *Koristeći prethodu lemu, odredi period p i saltus s igre $G = sveosim(2,3,4)$.*
Prvi par vrijednosti nim-niza igre $sveosim(2,3,4)$ je 010101232323454545....
Neka je $a = max\{2,3,4\} = 4$.
$\mathcal{G}(0+6) - \mathcal{G}(0) = 2 - 0 = 2$
$\mathcal{G}(1+6) - \mathcal{G}(1) = 3 - 1 = 2$
...
$\mathcal{G}(8+6) - \mathcal{G}(8) = 4 - 2 = 2$
Dakle, $\mathcal{G}(n+6) - \mathcal{G}(n) = 2$ za sve $0 \leq n \leq 8 = 2a$, pa je po Lemi3.37
$\mathcal{G}(n+6) - \mathcal{G}(n) = 2$, *za sve $n \geq n_0$.*
Slijedi da je $l = n_0 = 0$, $p = 6$, i $s = 2$.

Često se *sveosim* igre oduzimanja mogu reducirati. Iako je većina takvih rdukcija specifična za pojedine igre, postoji teorem o redukciji.

Teorem 3.38 *Neka su $a_1 < a_2 < ... < a_k$ pozitivni cijeli brojevi i neka je $b > 2a_k$. Tada su nim-nizovi igre $sveosim(a_1,...,a_k)$ i $sveosim(a_1,...,a_k,b)$ ekvivalentni.*

Dokaz. Označimo s $\mathcal{G}(n)$ nim-niz igre $sveosim(a_1,...,a_k)$, a s $\mathcal{G}'(n)$ nim-niz igre $sveosim(a_1,...,a_k,b)$. Dakako, $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}'(n)$ za sve $n < b$, jer su opcije u tim dvjema igrama do te točke jednake.
Pretpostavimo induktivno, da su dvije igre jednake do $n-1$, i pokažimo da je $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}'(n)$.
Budući da su opcije iz $sveosim(a_1,...,a_k,b)$ podskup opcija iz $sveosim(a_1,...,a_k)$, jedini mogući način da je $\mathcal{G}(n) = \mathcal{G}'(n)$ je ako je $\mathcal{G}'(n) = \mathcal{G}(n-b)$ jer je to

jedina vrijednost koja se ne pojavljuje među $sveosim(a_1, ..., a_k, b)$ a ne pojavljuje se među opcijama od $sveosim(a_1, ..., a_k)$. Da bi ovo bilo istinito, također bi trebao biti slučaj da nijedna opcija od n u $sveosim(a_1, ..., a_k, b)$ nije imala vrijednost $\mathcal{G}(n - b)$.
Međutim, promotrimo $m = n - b + a_k$. Po induktivnoj hipotezi je $\mathcal{G}(m) = \mathcal{G}'(m)$. Štoviše, sve vrijednosti manje od $n - b$ su opcije iz hrpe veličine m u $sveosim(a_1, ..., a_k)$, pa je $\mathcal{G}(m) \geq \mathcal{G}(n - b)$. Kako je m opcija od n u $sveosim(a_1, ..., a_k, b)$, da bi se izbjegla kontradikcija, zahtijevamo da je $\mathcal{G}(m) > \mathcal{G}(n-b)$. No u tom slučaju, m mora imati opciju m' u $sveosim(a_1, ..., a_k)$ takvu da je $\mathcal{G}(m') = \mathcal{G}(n - b)$. Kako je $m' \neq n - b$ i $m' < n - a_k$, m' je također opcija od n u $sveosim(a_1, ..., a_k, b)$, što je kontradikcija. Time je teorem dokazana. ■

Poglavlje 4

Zaključak

Tema ovog diplomskog rada je bila teorija igara s naglaskom na nepristrane igre. U prvom djelu ovog rada upoznali smo se s kombinatornim igrama i osnovnim tehnikama u igrama. Navedene su najbitnije strategije koje se javljaju u gotovo svim kombinatornim igrama. Svaka od tih strategija potkrepljena je primjerima iz stvarnih igara.

Drugi dio ovog rada odnosi se na ishod igre. U tom dijelu definirali smo pozicije i opcije u igri, te sumu igara što smo kasnije koristili u analizi nepristranih igara.

Nepristrane igre opisali smo u zadnjem, najdužem dijelu ovog rada. Iskazali smo i dokazali mnoga svojstva nepristranih igara. Uveli smo pojam nimbera, kako bi pokazali da su sve nepristrane igre ekvivalentne igri nim. Ta tvrdnja poznata je pod nazivom Sprague-grundy teorem.

Ovaj rad sadrži primjere stvarnih igara. Osim u igrama, teorija igara može se koristiti i u svakodnevnom životu, prilikom donošenja odluka. Među tim, u stvarnom životu pravila nisu tako jednostavna i strogo definirana kao u igrama, pa se teorija igara u praksi slabije koristi.

Cilj ovog rada je bio pokazati primjenu teorije igara u matematici, te pokazati koliku ulogu imaju odluke pri određenim uvjetima. Naše odluke mogu utjecati na ishod svake situacije.

Literatura

[1] Michael H.Albert, Richard J. Nowakowski, David Wolfe, Lessons In Play: An Introduction to Combinatorial Game Theory, 2007.

[2] Vjekoslav Kovač i Iva Madjerčić, Matematičke igre na šahovskoj ploči

[3] http://e.math.hr/old/igre/index.html

[4] http://web.mit.edu/sp.268/www/nim.pdf

[5] https://sh.wikipedia.org/wiki/Dilema_zatvorenika

[6] http://e.math.hr/old/dvijeigre/index.html

[7] http://e.math.hr/old/igre/index.html#4

[8] https://en.wikipedia.org/wiki/Impartial_game

[9] https://en.wikipedia.org/wiki/Nim

[10] Dierk Schleicher i Michael Stoll, An Introduction To Conway's Games And Numbers

[11] https://www.rigb.org/docs/domineering_activity__john_dore_0.pdf

[11] Alexandre Sierra Ballarin, Combinatorial Game Theory: The Dots-and-Boxes Game

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

TEORIJA IGARA I NEPRISTRANE IGRE

Barbara Carić

Sažetak:
Glavni cilj ovog rada je analiza nepristranih igara. U tu svrhu objašnjene su neke strategije koje se javljaju u kombinatornim igrama. Kako bi pokazali posebna svojstva koje imaju nepristrane igre, definirane su pozicije i opcije u igri, te suma igara. Poseban naglasak stavljen je na igru nim pomoću koje je definirana vrijednost pod nazivom nimberi. To je klasa beskrajno malih vrijednosti koje se ne ponašaju kao nijedna vrijednost s kojima smo se do sada susreli, a poprimaju je nepristrane igre. Jedan od najbitnijih rezultata ovog rada je Sprague-grundy teorem po kojem je svaka nepristrana igra ekvivalenta nim-hrpi. Zbog toga igra nim ima veliku ulogu u analizi nepristranih igara.

Ključne riječi:
kombinatorne igre; ishod igre; pozicije i opcije u igri; suma igara; negativna igra; ekvivalentne igre; dominante opcije; reverzibilne opcije; nimberi; minimalna isključena vrijednost;

Podatci o radu:
56 stranica, 18 slika, 10 tablica, 11 literaturnih navoda, pisano na hrvatskom jeziku

Mentor(ica): *prof.dr.sc. Damir Vukičević*

Članovi povjerenstva:

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

prof.dr.sc. Snježana Braić

doc.dr.sc. Tanja Vojković

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *15.07.2020.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

GAME THEORY AND IMPARTIAL GAMES

Barbara Carić

Abstract:

The main objective of this master's thesis is the analysis of impartial games. For this purpose, some strategies that occur in combinatorial games are explained. In order to show the special properties that impartial games have, positions and options in the game are defined, as well as the sum of games. Special emphasis is placed on the game nim by which is defined the value nimbers. It is a class of infinitesimals that do not behave like any values that we have yet encountered. They occur naturally as the values of the impartial game. One of the most important results of this master's is Sprague-grundy theorem according to which any impartial game is equivalent to a nim-heap. Therefore, nim plays a mayor role in the analysis of impartial games.

Key words:

combinatorial game; outcome class; position; option; sum; negative game; game equality; dominated option; reversible option; nimber; minimum excluded valu;

Specifications:

56 pages, 18 figures, 10 tables, 11 references, written in Croatian

Mentor: *associate professor Damir Vukičević*

Committee:

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

associate professor Snježana Braić

assisstant professor Tanja Vojković

This thesis was approved by a Thesis commettee on *15.07.2020.*