Razna poopćenja kompaktnosti

Mikelić, Andrea

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ANDREA MIKELIĆ

RAZNA POOPĆENJA KOMPAKTNOSTI

DIPLOMSKI RAD

Split, prosinac 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

Razna poopćenja kompaktnosti

DIPLOMSKI RAD

Neposredni voditelj:
dr. sc. Dino Peran

Studentica:
Andrea Mikelić

Mentor:
doc. dr. sc. Goran Erceg

Split, prosinac 2023.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

RAZNA POOPĆENJA KOMPAKTNOSTI

Andrea Mikelić

Sažetak:

Cilj ovog rada je predstaviti različita poopćenja kompaktnosti, proučiti njihova svojstva i vidjeti koliko ih to razlikuje od kompaktnosti. Kompaktni prostori obiluju svojstvima koja su snažni alat u rješavanju različitih problema, pa je zanimljivo izolirati ta svojstva i vidjeti kolika je snaga u svakom svojstvu pojedinačno. Prostore koje smo promatrali su parakompaktni, metakompaktni, Lindelöfovi, prebrojivo kompaktni, gomilišno kompaktni, nizovno kompaktni i pseudokompaktni prostori. Kao rezultat promatranja ovih prostora i njihovih međusobnih veza, dobivamo činjenicu da kompaktnost postaje ekvivaletno svojstvo s većinom svojih poopćenja na klasi metakompaktnih normalnih 1-prebrojivih prostora, a time i na klasi metrizabilnih prostora. Nadalje, da bismo dobili karakterizaciju metrizabilnosti, također smo se bavili metrizacijskim problemom i pitanjem kako oslabiti dovoljne uvjete za metrizabilnosti koji su iskazani u Urysonovom metrizacijskom teoremu. Tražene karakterizacije koje su predstavljene na kraju ovog rada su Nagata-Smirnovljev teorem, te Smirnovljev teorem koji karakterizira metrizabilne prostore uz pomoć parakompaktnosti.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Ključne riječi:

kompaktnost, parakompaktnost, metakompaktnost, gomilišna kompaktnost, prebrojiva kompaktnost, nizovna kompaktnost, pseudokompaktnost, Lindelöfovi prostori, metrizabilnost, metrizacijski teoremi, Smirnovljev teorem, Nagata-Smirnovljev teorem, normalni prostori, regularni prostori

Podatci o radu:

79 stranica, 10 slika, broj literaturnih navoda 16, pisano na hrvatskom jeziku

Mentor: *doc. dr. sc. Goran Erceg*

Neposredni voditelj: *dr. sc. Dino Peran*

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Goran Erceg

dr. sc. Dino Peran

doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *3. prosinca 2023.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

VARIOUS GENERALIZATIONS OF COMPACTNESS

Andrea Mikelić

Abstract:

The aim of this paper is to present various generalizations of compactness, to study their characteristics and to see how much they differ from compactness. Compact spaces are enriched by characteristics that are a powerful tool in solving various problems, so it is interesting to isolate those characteristics and see how strong each characteristic individually is. The spaces we have observed are paracompact, metacompact, Lindelöf, countable compact, BW-compact, sequential compact and pseudocompact spaces. As a result of observing these spaces and their mutual connections, we get the fact that compactness becomes an equivalent characteristic with most of its generalizations on the class of metacompact normal 1-countable spaces, and therefore on the class of metrizable spaces. Furthermore, in order to obtain a characterization of metrizability, we have also dealt with the metrization problem and with the question of how to weaken the sufficient conditions for metrizability expressed in Uryson's metrizability theorem. The required characterizations presented at the end of this paper, are the Nagata-Smirnov theorem as well as the Smirnov theorem that characterizes metrizable spaces with the help of paracompactness.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Key words:

compactness, paracompactness, metacompactness, BW-compactness, countable compactness, sequential compactness, pseudocompactness, Lindelöf spaces, metrizability, metrization theorems, Smirnov theorem, Nagata-Smirnov theorem, normal spaces, regular spaces.

Specifications:

79 pages, 10 figures, 16 references, written in Croatian

Mentor: *assisstant professor Goran Erceg*

Immediate mentor: *Dino Peran, phd*

Committee:

assisstant professor Goran Erceg

Dino Peran, phd

assisstant professor Vesna Gotovac Đogaš

This thesis was approved by a Thesis commettee on *the 3th of December, 2023.*

Uvod

U ovom radu prezentirat ćemo različita poopćenja kompaktnosti, promotriti njihove međusobne veze i njihovu primjenu kod problema metrizacije. U matematici, posebno u općoj topologiji, kompaktnost je svojstvo koje nastoji poopćiti pojam zatvorenog i ograničenog podskupa euklidskog prostora. Ideja je da kompaktni prostor nema *probušenosti* ili *nedostajućih krajnjih točaka*. No, pokazalo se da takvi prostori imaju mnoštvo *lijepih* svojstava, pa bi bilo zanimljivo izolirati takva svojstva, u smislu da promatramo topološki prostor samo s tim odabranim svojstvom. Ovaj postupak ne mora nužno rezultirati poopćenjem kompaktnosti. Primjer jedne takve klase prostora su nizovno kompaktni prostori. No, svi ostali prostori koje dobivamo na ovakav način su poopćenja kompaktnih prostora. Nadalje, ako želimo poopćiti neko svojstvo, najprirodniji način za to napraviti je *oslabiti* definicijski uvjet i promotriti što je ostalo *sačuvano*, a što smo *izgubili*.
Rad je podijeljen u sedam poglavlja. Prvo poglavlje daje kratki podsjetnik na kompaktne prostore i neka njihova svojstva. Također su navedeni načini na koje ćemo poopćavati kompaktnost. U drugom poglavlju, nakon uvodnih definicija, uvode se prva poopćenja kompaktnosti, a to su parakompaktnost i metkompaktnost. Što se tiče parakompatnih prostora, navodimo njihova svojstva, primjere i teoreme, kako bismo pripremili *alat* za metrizacijske teoreme koje ćemo navesti u zadnjem poglavlju. Treće poglav-

lje je posvećeno Lindelöfovim prostorima. Osim što smo ih promatrali kao poopćenja kompaktnosti, povezali smo ih s nekim topološkim fenomenima kao što su separabilnost i 2-prebrojivost. Ključni teorem tog poglavlja je karakterizacija 2-prebrojivosti u klasi regularnih Lindelöfovih prostora, koja će nam opet pomoći u zadnjem poglavlju, gdje ćemo pokušati *oslabiti* uvjet 2-prebrojivosti iz Urysonovog metrizacijskog teorema da bismo dobili karakterizaciju metrizabilnosti. U četvrtom poglavlju ćemo promatrati prebrojivu kompaktnost. Također ćemo navesti zanimljivu karaterizaciju kompaktnosti pomoću metakompaktnosti i prebrojive kompaktnosti koja daje na važnosti metakompaktnosti koju smo uveli u drugom poglavlju. U petom i šestom poglavlju uvodimo gomilišno kompaktne, nizovno kompaktne i pseudokompaktne prostore, te iskazujemo njihove međusobne odnose i odnose sa prebrojivom kompaktnošću i metakompaktnošću. U sedmom poglavlju iskazujemo teorem u kojem sva ova poopćenja postaju ekvivalentna s kompaktnošću ako je prostor metrizabilan. Naposljetku, navodimo metrizacijske teoreme koji nam omogučavaju da karakteriziramo metrizabilnost pomoću parakompaktnosti.

Naposljetku, želim se zahvaliti svome mentoru dr. sc. Dinu Peranu koji je korigirao ovaj rad, te profesoru Jurici Ćudini koji mi je prvi pokazao ljepotu teorije matematike. Također, želim se zahvaliti svojoj majci Vesni, koja je prva sa mnom radila matematiku i možemo se obe složiti da je ipak sve počelo s *Pribrojnici su brojevi koji se zbrajaju.*

Sadržaj

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Poglavlje 1

Kompaktni prostori

Iako pojam kompaktnosti nije intuitivan, i iz same definicije se ne *osjeti snaga* tog pojma, zbog svojih *lijepih* svojstava, kompaktni topološki prostori čine jednu od najvažnijih klasa topoloških prostora. Za početak, prisjetit ćemo se definicije pokrivača, profinjenja i kompaktnosti, te ćemo bez dokaza navesti neka najvažnija svojstva kompaktnosti (za dokaze pogledati [1] i [7]).

Definicija 1.1 *Neka je X skup i neka je $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ množina podskupova od X. Kažemo da je $\mathcal{U}$ pokrivač od X ako vrijedi $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U$. Za podmnožinu $\mathcal{U}' \subseteq \mathcal{U}$ kažemo da je potpokrivač od $\mathcal{U}$, ako vrijedi $X = \bigcup_{U \in \mathcal{U}'} U$.*

Definicija 1.2 *Neka je X skup i neka su $\mathcal{U}$ i $\mathcal{V}$ pokrivači od X. Kažemo da je $\mathcal{U}$ profinjenje od $\mathcal{V}$ ili da $\mathcal{U}$ profinjuje $\mathcal{V}$ ako vrijedi*

$$(\forall U \in \mathcal{U})(\exists V \in \mathcal{V}) \quad U \subseteq V .$$

Primjer 1.3 *Očito je svaki potpokrivač $\mathcal{U}'$ pokrivača $\mathcal{U}$ (proizvoljnog skupa X) profinjenje od $\mathcal{U}$.*

Primjer 1.4 *Neka je $X = \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = \{[a,b] \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$ i $\mathcal{V} = \{\langle a,b \rangle \mid a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Tada $\mathcal{U}$ profinjuje $\mathcal{V}$ i obratno.*

Primjer 1.5 *Neka je X beskonačan skup, $\mathcal{A}$ množina svih konačnih podskupova od X i $\mathcal{B}$ množina svih beskonačnih podskupova od X. Svaka podmnožina od $\mathcal{A}$, koja pokriva X, profinjuje $\mathcal{B}$. Međutim, $\mathcal{B}$ ne profinjuje $\mathcal{A}$.*

Definicija 1.6 *Neka je X topološki prostor i $\mathcal{U}$ pokrivač od X. Kažemo da je $\mathcal{U}$ otvoren (zatvoren) pokrivač prostora X, ako je svaki element od $\mathcal{U}$ otvoren (zatvoren) u prostoru X.*

Definicija 1.7 *Za topološki prostor X kažemo da je kompaktan ako za svaki otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X, postoji otvoreno konačno profinjenje $\mathcal{V}$. Za podskup $Y \subseteq X$ topološkog prostora X kažemo da je kompaktan, ako je Y kompaktan kao potprostor od X.*

Sljedeći teorem tvrdi da se profinjenje može zamjeniti potpokrivačem.

Teorem 1.8 *Topološki prostor je kompaktan ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač ima konačan potpokrivač.*

Prisjetimo se još jedne karakterizacije kompaktnih prostora za koju nam treba pojam centrirane množine.

Definicija 1.9 *Kažemo da je množina $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ podskupova $F_\lambda \subseteq X$ centrirana (ili da ima svojstvo konačnog presjeka), ako svaka njezina konačna podmnožina $\{F_{\lambda_1}, \ldots, F_{\lambda_n}\}$ ima neprazan presjek, to jest $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.*

Teorem 1.10 *Prostor X je kompaktan ako i samo ako svaka centrirana množina $\{F_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ zatvorenih podskupova $F_\lambda \subseteq X$ ima neprazan presjek, to jest $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} F_\lambda \neq \emptyset$.*

Korolar 1.11 *Neka je X kompaktan prostor. Tada svaki silazan niz (F_n), $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$, nepraznih zatvorenih podskupova $F_n \subseteq X$, ima neprazan presjek, to jest $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.*

Teorem 1.12 *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(i) Svaki zatvoren podskup kompaktnog prostora je kompaktan.

(ii) Svaki kompaktan potprostor Hausdorffovog prostora je zatvoren.

(iii) Kompaktnost je invarijantno svojstvo s obzirom na neprekidnu surjekciju.

(iv) Neka je X kompaktan prostor, Y Hausdorffov prostor i $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Tada je f homeomorfizam.

Sada ćemo reći nešto o kompaktnosti u produktu.

Lema 1.13 (Lema o cjevastoj okolini) *Neka su X i Y topološki prostori, Y kompaktan i $x_0 \in X$. Ako je $W \subseteq X \times Y$ okolina skupa $\{x_0\} \times Y$ u produktu $X \times Y$, onda postoji otvorena okolina U od x_0 u X tako da je $\{x_0\} \times Y \subseteq U \times Y \subseteq W$. Skup $U \times Y$ se naziva cjevasta okolina skupa $\{x_0\} \times Y$.*

Teorem 1.14 (Tihonovljev teorem) *Produkt topoloških prostora $\Pi_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda$ s produktnom topologijom je kompaktan ako i samo ako je za svaki $\lambda \in \Lambda$, X_λ kompaktan.*

Nadalje, navedimo važna svojstva kompaktnih prostora po kojima ćemo poopćiti kompaktnost.

Teorem 1.15 *Neka je X kompaktan topološki prostor. Tada svaki beskonačan skup $A \subseteq X$ ima gomilište u X.*

Teorem 1.16 *Neka je X kompaktan topološki prostor. Tada svaki niz (x_n) u X ima gomilište $x_0 \in X$.*

Korolar 1.17 *Neka je X kompaktan 1-prebrojiv prostor. Tada svaki niz (x_n) u X ima podniz (x_{n_k}) koji konvergira u X.*

Teorem 1.18 *Neka je X kompaktan prostor i $f : X \to \mathbb{R}$ neprekidno realno preslikavanje. Tada vrijedi*

$$(\exists x_1, x_2 \in X)(\forall x \in X)\ f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Posebno, f je omeđena funkcija.

U ovom radu kompaktnost smo poopćili na dva načina. Prvi način poopćavanja je da umjesto konačnog otvorenog profinjenja danog otvorenog pokrivača, zahtijevamo profinjenje sa *slabijim* uvjetom. Time smo dobili parakompaktne, metakompaktne, Lindelöfove i prebrojivo kompaktne prostore. A ako poopćavamo kompaktnost u smislu da promatramo prostore koji imaju svojstva iz Teorema 1.15, Korolara 1.17 i Teorema 1.18, onda dobivamo redom gomilišno kompaktne, nizovno kompaktne i pseudokompaktne prostore. Zanimljivo je da je prebrojiva kompaktnost ujedno poopćenje preko otvorenih pokrivača, ali i poopćenje u smislu Teorema 1.16.

Poglavlje 2

Parakompaktni i metakompaktni prostori

Jedno od prirodnih poopćenja pojma kompaktnosti je parakompaktnost. Budući da ćemo dokazati da je svaki metrizabilan prostor parakompaktan smatramo da su parakompaktni prostori simultano generalizacija kompaktnih prostora i metrizabilnih prostora. Ako dodatno pretpostavimo da se radi o Hausdorffovim prostorima, onda su parakompaktni Hausdorffovi prostori simultano generalizacija kompaktnih Hausdorffovih prostora i metrizabilnih prostora, koji predstavljaju dvije jako važne klase topoloških prostora. Zbog svoje primjene u rješavanju metrizacijskog problema, parakompaktni prostori su brzo postali jako važna klasa topoloških prostora, iako su definirani mnogo kasnije od drugih dviju spomenutih klasa. Također, uvođenjem parakompaktnih prostora, mnogi teoremi u topologiji i analizi su poopćeni, a dokazi pojednostavljeni. Nadalje, jedno od prirodnih poopćenja parakompaktnosti je metakompaktnost. Ako dodatno pretpostavimo da se radi o Hausdorffovim prostorima, onda su metakompaktni Hausdorffovi prostori poopćenje parakompaktnih Hausdorffovih prostora. Iako naizgled nemaju posebnu važnost i nisu *popularni* kao parakompaktni prostori, metakompaktni prostori nam daju zanimljivu karakterizaciju kompaktnih prostora koja koristi čuvenu Zornovu lemu. Za definiranje ovih dviju klasa prostora, potrebni su nam pojmovi *lokalne* i *točkovne konačnosti*, pa ćemo ih prve definirati.

2.1 Lokalna konačnost i točkovna konačnost

U definiciji kompaktnih prostora zahtijeva se postojanje konačnog profinjenja otvorenog pokrivača. Taj uvjet ćemo zamijeniti s uvjetom postojanja lokalno konačnog profinjenja, odnosno točkovno konačnog profinjenja. Iako se ta svojstva ne odnose na kardinalnost profinjenja, iz njihove definicije ćemo vidjeti da je to oslabljenje uvjeta *biti konačan*.

Definicija 2.1 *Neka je X skup i $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Kažemo da je $\mathcal{U}$ točkovno konačna množina ako svaka točka $x \in X$ pripada najviše konačno mnogo elemenata množine $\mathcal{U}$.*

Definicija 2.2 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. Kažemo da je $\mathcal{U}$ lokalno konačna množina ako za svaki $x \in X$ postoji njezina okolina $V \in \mathcal{O}(x_0)$ koja siječe najviše konačno mnogo elemenata množine $\mathcal{U}$.*

Primjetimo da bi zahtjevanje otvorene okoline V s istim svojstvom bio ekvivalentan uvjet. Nadalje, ako su gornje množine ujedno i pokrivači, onda ih nazivamo točkovno konačnim pokrivačima, odnosno lokalno konačnim pokrivačima.

Primjer 2.3 *Neka je $X := \mathbb{R}$, $\mathcal{U} := \{[p, p+1] \mid p \in \mathbb{Z}\}$. Tada je $\mathcal{U}$ točkovno konačan. Ako X promatramo kao topološki prostor sa standardnom topologijom, onda je $\mathcal{U}$ i lokalno konačan.*

Primjetimo da je za definiciju lokalne konačnosti potrebna topologija, dok za točkovnu konačnost nije. Nadalje, svaka lokalno konačna množina je i točkovno konačna, ali obrat ne vrijedi, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 2.4 *Promatrajmo* $\mathbb{R}^2$ *s euklidskom topologijom i njegovu množinu podskupova* $\mathcal{U} := \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *pri čemu je* U_n *otvoreni kvadrat s vrhovima* $(0,0)$, $(1/n,0)$, $(1/n,1/n)$, $(0,1/n)$, *za svaki* $n \in \mathbb{N}$. *Tada je* $\mathcal{U}$ *točkovno konačan, jer svaka točka pripada najviše konačno mnogo elemenata iz* $\mathcal{U}$, *a nije lokalno konačan, jer svaka okolina ishodišta siječe beskonačno mnogo elemenata množine* $\mathcal{U}$.

Prethodni primjer pokazuje da proizvoljna prebrojiva množina $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ topološkog prostora X ne mora općenito biti lokalno konačna. No, ako zapišemo na sljedeći način:

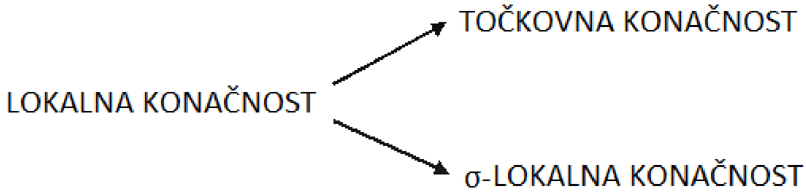
$$\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{U_n\},$$

onda smo ga prikazali kao prebrojivu uniju lokalno konačnih množina. Ovo nas motivira da uvedemo pojam σ-lokalno konačne množine.

Definicija 2.5 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor i* $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$. *Kažemo da je* $\mathcal{U}$ σ*-lokalno konačna množina ako je* $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ *gdje je svaka množina* $\mathcal{U}_n$ *lokalno konačna.*

Svaka lokalno konačna množina $\mathcal{U}$ je i σ-lokalno konačna, jer je možemo prikazati u obliku $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}$. Obratno ne vrijedi, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 2.6 *Neka je* $\mathcal{T}$ *standardna topologija na* $\mathbb{R}$. *Za svaki* $n \in \mathbb{N}$ *stavimo* $\mathcal{U}_n := \{[p, p+1/n] \mid p \in \mathbb{Z}\}$. *Tada je* $\mathcal{U} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}_n$ σ*-lokalno konačan pokrivač od* $\mathbb{R}$, *ali nije točkovno konačan, pa nije ni lokalno konačan.*



Slika 2.1: Prikaz odnosa σ-lokalne i točkovne konačnosti s lokalnom konačnošću.

Teorem 2.7 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor i $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$ lokalno konačna množina. Tada vrijedi sljedeće.*
(i) $\{\mathrm{Cl}\, U \mid U \in \mathcal{U}\}$ je lokalno konačna množina.
(ii) $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Cl}\, U = \mathrm{Cl}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U)$.

Dokaz. (i) Neka je $x \in X$ proizvoljna točka. Tada postoji otvorena okolina V točke x koja siječe najviše konačno mnogo elemenata $U_1, \ldots, U_n$ od $\mathcal{U}$. Ako je $\mathcal{U}$ konačna množina dokaz je gotov. Pretpostavimo da je $\mathcal{U}$ beskonačna množina. Neka je $U \in \mathcal{U} \setminus \{U_1, \ldots, U_n\}$ proizvoljan. Tada je $V \cap U = \emptyset$, pa je $U \subseteq X \setminus V$. Kako je V otvoren, to je $X \setminus V$ zatvoren, što povlači $\mathrm{Cl}\, U \subseteq X \setminus V$. Dakle V siječe samo skupove $\mathrm{Cl}\, U_1, \ldots, \mathrm{Cl}\, U_n$ iz množine $\{\mathrm{Cl}\, U \mid U \in \mathcal{U}\}$.
(ii) Tvrdimo da je $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Cl}\, U \subseteq \mathrm{Cl}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U)$. Primijetimo da vrijedi sljedeće:

$$(\forall U' \in \mathcal{U})\ U' \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}} U,$$

$$(\forall U' \in \mathcal{U})\ \ \mathrm{Cl}\, U' \subseteq \mathrm{Cl}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U),$$

$$\bigcup_{U'\in\mathcal{U}} \mathrm{Cl}\, U' \subseteq \mathrm{Cl}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U),$$

$$\bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Cl}\, U \subseteq \mathrm{Cl}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U).$$

Tvrdimo da je $\mathrm{Cl}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U) \subseteq \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Cl}\, U$.
Pretpostavimo suprotno, to jest postoji $x \in \mathrm{Cl}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U) \setminus \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Cl}\, U$. Kako je $\mathcal{U}$ lokalno konačan, to postoji okolina V točke x koja siječe najviše konačno mnogo elemenata $U_1, \ldots, U_n$ množine $\mathcal{U}$. Kako je $x \notin \bigcup_{U\in\mathcal{U}} \mathrm{Cl}\, U$, to je $x \notin \bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}\, U_i$, pa je $V \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{Cl}\, U_i)$ otvorena okolina točke x koja ne siječe niti jedan član množine $\mathcal{U}$, to jest ne siječe $\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U$, a to je kontradikcija s $x \in \mathrm{Cl}(\bigcup_{U\in\mathcal{U}} U)$. ■
Zatvorenje se općenito *dobro ponaša* prema konačnim unijama, ali, ako množini podskupova koju promatramo dodamo svojstvo lokalne konačnosti, onda dobivamo *dobro ponašanje* zatvorenja za proizvoljno uniranje.

2.2 Parakompaktni prostori

Prisjetimo se definicije kompaktnosti. Topološki prostor je kompaktan ako svaki otvoreni pokrivač ima otvoreno konačno profinjenje.

Definicija 2.8 *Za topološki prostor kažemo da je parakompaktan ako svaki njegov otvoreni pokrivač ima otvoreno lokalno konačno profinjenje.*

Parakompaktni prostori su poopćenje kompaktnih prostora, jer iz činjenice da je svaki konačan pokrivač lokalno konačan, slijedi da je svaki kompaktan prostor i parakompaktan, ali obrat ne vrijedi općenito, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 2.9 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ diskretni topološki prostor i neka je X beskonačan skup. Prostor X nije kompaktan, jer za otvoreni pokrivač $\mathcal{U} := \{\{x\} \mid x \in X\}$ ne postoji konačan potpokrivač. Primjetimo da je $\mathcal{U}$ lokalno konačan pokrivač od X, pa je ujedno lokalno konačno profinjenje za svaki otvoreni pokrivač od X, što povlači da je $(X, \mathcal{T})$ parakompaktan.*

Kako su parakompaktni prostori generalizacija kompaktnih prostora, prirodno je za očekivati da se neka svojstva kompaktnih prostora neće moći generalizirati, kao npr. da je neprekidna slika kompaktnog prostora kompaktan prostor i da je produkt kompaktnih prostora kompaktan.

Primjer 2.10 *Neka je X diskretan topološki prostor i neka je Y topološki prostor koji nije parakompaktan. Sada je svaka funkcija iz X u Y neprekidna (jer je na domeni diskretna topologija). Sada je dovoljno uzeti neku surjekciju kako bismo dokazali da parakompaktnost nije invarijantna na neprekidna preslikavanja. Dodatno, ako je $\mathrm{card}(X) = \mathrm{card}(Y)$ onda nijedna neprekidna bijekcija ne čuva parakompaktnost.*

Međutim, parakompaktnost je topološko svojstvo, što dokazuje sljedeća propozicija.

Propozicija 2.11 *Neka su X i Y homeomorfni topološki prostori. Ako je X parakompaktan, onda je i Y parakompaktan.*

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam topoloških prostora X i Y. Neka je $\mathcal{U} := \{U_\lambda \mid \lambda \in \lambda\}$ po volji odabran otvoreni pokrivač od Y. Kako je f neprekidna bijekcija, to je $\mathcal{V} := \{f^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \lambda\}$ otvoreni pokrivač od X. Budući da je X parakompaktan, to postoji lokalno konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{V}'$ pokrivača $\mathcal{V}$. Tvrdimo da je $\mathcal{U}' := \{f(V') : V' \in \mathcal{V}'\}$ traženo otvoreno lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$. Kako je f otvoreno preslikavanje, to je $\mathcal{U}'$ množina otvorenih podskupova od Y. S obzirom da je $\mathcal{V}'$ pokrivač od X i f je bijekcija, to je $\mathcal{U}'$ pokrivač od Y. Nadalje, dokažimo da je $\mathcal{U}'$ lokalno konačan. Neka je $y \in Y$ po volji odabrana točka i neka je $U_y \in \mathcal{O}(y)$ proizvoljno odabrana otvorena okolina točke y. Tada postoji (jedinstvena) točka $x \in X$ tako da je $f(x) = y$. Očigledno je $V_x := f^{-1}(U_y)$ otvorena okolina točke x. Kako je $\mathcal{V}'$ lokalno konačan, to postoji najviše konačno mnogo elemenata $V_1', \ldots, V_n'$ pokrivača $\mathcal{V}'$ koje V_x siječe. To povlači da U_y siječe elemente $f(V_1'), \ldots, f(V_n')$ pokrivača $\mathcal{U}'$. Dokazat ćemo da su to jedini elementi pokrivača $\mathcal{U}'$ koje U_y siječe, pa će odmah slijediti da je $\mathcal{U}'$ je lokalno konačan. Neka je $f(V') \in \mathcal{U}' \setminus \{f(V_1'), \ldots, f(V_n')\}$ tako da je $U_y \cap f(V') \neq \emptyset$. Neka je $y_1 = f(x_1) \in U_y \cap f(V') = f(V_x) \cap f(V')$ proizvoljan. Sada je $x_1 \in V_x \cap V'$, pa je $V' \in \{V_1', \ldots, V_n'\}$. No, onda je $f(V') \in \{f(V_1'), \ldots, f(V_n')\}$, a to je kontradikcija s $f(V') \in \mathcal{U}' \setminus \{f(V_1'), \ldots, f(V_n')\}$. Dakle, $\mathcal{U}'$ je lokalno konačan. Preostaje još dokazati da je $\mathcal{U}'$ profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Neka je $f(V') \in \mathcal{U}'$ proizvoljan. Sada je $V' \in \mathcal{V}'$. Kako je $\mathcal{V}'$ profinjenje pokrivača $\mathcal{V}$, to postoji $V \in \mathcal{V}$ tako da je $V' \subseteq V$. No, onda je $f(V') \subseteq f(V) \in \mathcal{U}$. ∎

Protuprimjer da produkt dva parakompaktna prostora nije parakompaktan navest ćemo kasnije. Iako parakompaktnost nije multiplikativno svojstvo, vrijedi nam sljedeći teorem.

Teorem 2.12 *Produkt parakompaktnog i kompaktnog prostora je parakompaktan.*

Dokaz. Neka je X parakompaktan prostor, Y kompaktan i neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač produkta $X \times Y$. Za svaki $x \in X$, produkt $\{x\} \times Y$ je kompaktan, pa postoji konačno mnogo elemenata $U_1^x, \ldots, U_{n(x)}^x$ od $\mathcal{U}$ koji pokrivaju $\{x\} \times Y$. Po Lemi o cjevastoj okolini, postoji otvorena okolina V_x točke x tako da je $V_x \times Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n(x)} U_i^x$. Sada je $\mathcal{V} := \{V_x \mid x \in X\}$ otvoreni pokrivač od X. Neka je $\mathcal{W}$ njegovo otvoreno lokalno konačno profinjenje. Za svaki $W \in \mathcal{W}$ odaberimo točku $x_W \in X$ tako da je $W \subseteq V_{x_W}$. Definirajmo $\mathcal{Z}_W := \{(W \times Y) \cap U_i^{x_W} \mid i = 1, \ldots, n(x_W)\}$. Primijetimo da je $\mathcal{Z}_W$ konačan, za svaki $W \in \mathcal{W}$. Sada je $\mathcal{Z} := \bigcup_{W \in \mathcal{W}} \mathcal{Z}_W$ otvoreno profinjenje za $\mathcal{U}$. Kako za svaki $x \in X$ postoji njezina okolina U koja siječe samo konačno mnogo elemenata od $\mathcal{W}$ to onda okolina $U \times Y$ točke (x, y) siječe samo konačno mnogo elemenata pokrivača $\mathcal{Z}$, pa je $\mathcal{Z}$ lokalno konačno otvoreno profinjenje od $\mathcal{U}$. Dakle, $X \times Y$ je parakompaktan. ■

Kompaktni prostori su imali svojstvo da im je svaki zatvoreni podskup kompaktan. Analogno svojstvo će slijediti za parakompatne prostore, a dokaz će imati istu ideju.

Teorem 2.13 *Svaki zatvoren podskup parakompaktnog prostora je parakompaktan.*

Dokaz. Neka je X parakompaktan prostor i neka je $F \subseteq X$ zatvoreni podskup od X. Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljno odabran otvoren (obzirom na relativnu topologiju na F) pokrivač od F. Sada za svaki $U \in \mathcal{U}$ postoji otvoren (obzirom na topologiju na X) podskup V_U od X tako da je $U = V_U \cap F$. Definirajmo $\mathcal{V} := \{V_U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Sada je $\mathcal{V} \cup \{X \setminus F\}$ otvoreni pokrivač prostora X, pa ima otvoreno lokalno konačno profinjenje $\mathcal{Z}$, što povlači da je $\mathcal{Z}_F := \{Z \cap F \mid Z \in \mathcal{Z}\}$ traženo otvoreno lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$. ■

2.3 Metakompaktni prostori

Sljedeće poopćenje kompaktnih prostora dobit ćemo poopćenjem parakompaktnih prostora. Naime, ako zahtjev postojanja lokalno konačnog otvorenog profinjenja za proizvoljni otvoreni pokrivač zamijenimo zahtjevom postojanja točkovno konačnog otvorenog profinjenja, dobit ćemo takozvane metakompaktne prostore. Iako naizgled nemaju neku važnost, kasnije ćemo pomoću njih karakterizirati kompaktne prostore.

Definicija 2.14 *Kažemo da je topološki prostor metakompaktan ako svaki njegov otvoreni pokrivač ima otvoreno točkovno konačno profinjenje.*

Sljedeći primjer je primjer metakompaktnog prostora.

Primjer 2.15 *Neka je $X := \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{Z}^+$ i neka je $\mathcal{T}$ topologija na X generirana skupovima $S_n := \langle 0, 1/n \rangle \cup \langle n, n+1 \rangle$, $n \in \mathbb{N}$. Tvrdimo da je X metakompaktan. Kako je $\mathcal{B} := \{S_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{\langle 0, 1/n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ baza za topologiju $\mathcal{T}$, to za svaki otvoreni pokrivač postoji podmnožina od $\mathcal{B}$ koja je profinjenje tog pokrivača. Stoga je dovoljno dokazati da je $\mathcal{B}$ točkovno konačan. Naime, svaka točka $x > 1$ pripada samo jednom elementu množine $\mathcal{B}$, a svaka točka $x < 1$, pripada samo konačno mnogo elemenata množine $\mathcal{B}$. Dakle, $\mathcal{B}$ je točkovno konačan, pa je X metakompaktan.*

Svaki parakompaktan prostor je i metakompaktan. To slijedi iz činjenice da je svaka lokalno konačna množina i točkovno konačna. Obrat ne vrijedi, no to ćemo pokazati kasnije.

Propozicija 2.16 *Svaki zatvoren podskup metakompaktnog prostora je metakompaktan.*

Dokaz. Analogno kao i u Teoremu 2.13. ■

Teorem 2.17 *Neka su X i Y homeomorfni topološki prostori. Ako je X metakompaktan, onda je i Y metakompaktan.*

Dokaz. Neka je $f : X \to Y$ homeomorfizam topoloških prostora X i Y, gdje je X metakompaktan. Neka je $\mathcal{U} := \{U_\lambda \mid \lambda \in \lambda\}$ po volji odabran otvoreni pokrivač od Y. Kako je f neprekidna bijekcija, to je $\mathcal{V} := \{f^{-1}(U_\lambda) \mid \lambda \in \lambda\}$ otvoreni pokrivač od X. Budući da je X metakompaktan, to postoji otvoreno točkovno konačno profinjenje $\mathcal{V}'$ pokrivača $\mathcal{V}$. Tvrdimo da je $\mathcal{U}' := \{f(V') : V' \in \mathcal{V}'\}$ traženo otvoreno točkovno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$. Kako je f otvoreno preslikavanje, to je $\mathcal{U}'$ množina otvorenih podskupova od Y. S obzirom da je $\mathcal{V}'$ pokrivač od X i f je bijekcija, to je $\mathcal{U}'$ pokrivač od Y. Nadalje, dokažimo da je $\mathcal{U}'$ točkovno konačan. Neka je $y \in Y$ po volji odabrana točka. Tada postoji (jedinstvena) točka $x \in X$ tako da je $f(x) = y$.

Kako je pokrivač $\mathcal{V}'$ točkovno konačan, to postoji najviše konačno mnogo elemenata $V_1', \ldots, V_n'$ kojima x pripada. To povlači da je y element skupova $f(V_1'), \ldots, f(V_n')$ pokrivača $\mathcal{U}'$. Dokazat ćemo da su to jedini elementi pokrivača $\mathcal{U}'$ kojima y pripada, pa će odmah slijedit da je $\mathcal{U}'$ je točkovno konačan. Neka je $f(V') \in \mathcal{U}' \setminus \{f(V_1'), \ldots, f(V_n')\}$ tako da je $y \in f(V')$. Sada je $x = f^{-1}(y) \in V'$, što povlači $f(V') \in \{f(V_1'), \ldots, f(V_n')\}$, a to je kontradikcija s $f(V') \in \mathcal{U}' \setminus \{f(V_1'), \ldots, f(V_n')\}$. Dakle, $\mathcal{U}'$ je točkovno konačan. Preostaje još dokazati da je $\mathcal{U}'$ profinjenje pokrivača $\mathcal{U}$. Neka je $f(V') \in \mathcal{U}'$ proizvoljan. Sada je $V' \in \mathcal{V}'$. Kako je $\mathcal{V}'$ profinjenje pokrivača $\mathcal{V}$, to postoji $V \in \mathcal{V}$ tako da je $V' \subseteq V$. No, onda je $f(V') \subseteq f(V) \in \mathcal{U}$. ■

2.4 Parakompaktni Hausdorffovi prostori

Već smo istaknuli da su parakompaktni Hausdorffovi prostori poopćenje kompaktnih Hausdorffovih prostora. Kompaktni Hausdorffovi prostori pripadaju klasi normalnih prostora, pa je prirodno pitanje vrijedi li analogna tvrdnja i za parakompaktne Hausdorffove prostore. O tome govori sljedeći teorem. Prije toga, dokažimo sljedeću lemu.

Lema 2.18 *Svaki parakompaktan Hausdorffov prostor je regularan.*

Dokaz. Neka je X parakompaktan Hausdorffov prostor, $a \in X$ i $B \subseteq X$ zatvoren podskup od X koji ne sadrži a. Kako je X Hausdorffov prostor, to za svaku točku $b \in B$ postoji otvorena okolina U_b tako da $\operatorname{Cl} U_b$ ne sadrži a. Sada je $\{U_b \cap B \mid b \in B\}$ otvoreni pokrivač od B. Podskup B je zatvoren, pa je i parakompaktan, što povlači postojanje otvorenog lokalno konačnog profinjenja $\mathcal{V}$ pokrivača $\{U_b \cap B \mid b \in B\}$ podskupa B. Množina $\mathcal{V}$ je profinjenje množine $\{U_b \cap B \mid b \in B\}$, pa je i profinjenje množine $\{U_b \mid b \in B\}$.

Dakle, za svaki $V \in \mathcal{V}$ postoji $b_V \in B$ tako da je $V \subseteq U_{b_V}$, što povlači $\operatorname{Cl} V \subseteq \operatorname{Cl} U_{b_V} \subseteq \bigcup_{b\in B} \operatorname{Cl} U_b$. Dakle, vrijedi

$$\bigcup_{V\in\mathcal{V}} \operatorname{Cl} V \subseteq \bigcup_{b\in B} \operatorname{Cl} U_b.$$

No, $\mathcal{V}$ je lokalno konačan, pa, po Teoremu 2.7, vrijedi $\operatorname{Cl}(\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V) = \bigcup_{V\in\mathcal{V}} \operatorname{Cl} V$. Stoga je

$$\operatorname{Cl}(\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V) \subseteq \bigcup_{b\in B} \operatorname{Cl} U_b.$$

Kako $\bigcup_{b\in B} \operatorname{Cl} U_b$ ne sadrži a, to onda ni $\operatorname{Cl}(\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V)$ ne sadrži a, pa je $X \setminus \operatorname{Cl}(\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V)$ (otvorena) okolina točke a koja ne siječe $\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$. ■

Međutim vrijedi i više, kako to pokazuje sljedeći teorem.

Teorem 2.19 *Svaki parakompaktan Hausdorffov prostor je normalan.*

Dokaz. Neka je X parakompaktan Hausdorffov prostor i neka su $A, B \subseteq X$ po volji odabrani zatvoreni disjunktni podskupovi od X. Iz prethodne leme slijedi da je X regularan prostor pa za svaki $b \in B$ postoji otvorena okolina U_b točke b u X, tako da $\operatorname{Cl} U_b$ ne siječe A. Na isti način kao i u prethodnoj lemi dobijemo disjunktne okoline $\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V$ i $X \setminus \operatorname{Cl}(\bigcup_{V\in\mathcal{V}} V)$ skupova B i A redom. ■

Parakompaktni Hausdorffovi prostori su prava podklasa normalnih prostora. Sljedeći primjer je primjer normalnog prostora koji nije parakompaktan. S obzirom da ćemo ga koristiti često u ovom radu, uvest ćemo oznake i navesti neka svojstva.

Neka je $\Omega := [0, \omega_1]$ skup svih rednih brojeva manjih ili jednakih od ω_1, gdje je ω_1 prvi neprebrojivi redni broj i neka je $\Omega_0 := [0, \omega_1\rangle = \Omega \setminus \{\omega_1\}$. To su dobro uređeni skupovi s obzirom na standardni uređaj među rednim brojevima, to jest svaki njihov neprazan podskup ima minimum. Neprebrojivi su, to jest vrijedi $\mathrm{card}(\Omega) = \omega_1 = \mathrm{card}(\Omega_0)$. Neka su $\mathcal{T}$ i $\mathcal{T}_0$ pripadne uređajne topologije na Ω i Ω_0 redom, to jest topologije čije su baze množine svih otvorenih intervala i otvorenih zraka. Primjetimo da vrijedi

$$(\forall x \in \Omega_0)\ [0, x] \text{ je prebrojiv ili konačan.}$$

Primjer 2.20 *Tvrdimo da je $(\Omega_0, \mathcal{T}_0)$ normalan prostor.*
Prvo dokažimo da je $(\Omega_0, \mathcal{T}_0)$ T_1-prostor. Neka su $x_1, x_2 \in \Omega_0$ po volji odabrane točke i neka je $x_1 < x_2$. Tada $\langle x_1, \cdot\rangle$ ima minimum, kojeg ćemo označiti s m. Sada je $\langle 0, m\rangle$ okolina točke x_1 koja ne sadrži x_2, a $\langle x_1, \cdot\rangle$ je okolina točke x_2 koja ne sadrži x_1. Dakle, $(\Omega_0, \mathcal{T}_0)$ je T_1-prostor.
Neka su C i D po volji odabrani zatvoreni, neprazni i disjuktni podskupovi od Ω_0. Promatrajamo skupove oblika $\langle a, b]$. Oni su otvoreni jer ih možemo napisati u obliku $\langle a, b] = \langle a, m_1\rangle$ gdje je m_1 minimum skupa $\langle b, \cdot\rangle$ (on postoji, jer je Ω_0 dobro uređen skup). Množina svih takvih skupova, zajedno sa skupom $\{0\}$ čini bazu prostora $(\Omega_0, \mathcal{T}_0)$, jer za svaku točku x proizvoljnog intervala $\langle a, b\rangle$ vrijedi

$$x \in \langle a, x] \subseteq \langle a, b\rangle.$$

Neka je $c \in C$ proizvoljna točka. Kako je D zatvoren i disjunktan sa C, to je c element otvorenog skupa $\Omega_0 \setminus D$. Ako je $c = 0$, onda vrijedi $c \in \{0\} \subseteq \Omega_0 \setminus D$, pa stavimo $C_c := \{0\}$. Ako je $c \neq 0$, onda postoji točka $x_c \in \Omega_0$ tako da je

$$c \in \langle x_c, b] \subseteq \Omega_0 \setminus D,$$

pa vrijedi

$$c \in \langle x_c, c] \subseteq \langle x_c, b] \subseteq \Omega_0 \setminus D.$$

Stoga, stavimo $C_c := \langle x_c, c]$.

Analogno, za svaki $d \in D$ *dobijemo skup* $D_d \subseteq \Omega_0 \setminus C$. *Sada su* $V := \bigcup_{c\in C} C_c$ *i* $U := \bigcup_{d\in D} D_d$ *očigledno (otvorene) okoline podskupova* C *i* D *redom. Treba još dokazati da su one disjunktne. Pretpostavimo da postoji* $z \in U \cap V$. *Ako je* $z = 0$, *onda je* $z \in C$ *i* $z \in D$,*što je kontradikcija jer su* C *i* D *disjunktni skupovi. Stoga pretpostavimo da je* $z \neq 0$. *Tada postoje* $c \in C$ *i* $d \in D$, *tako da je* $z \in \langle x_c, c] \cap \langle y_d, d]$. *Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo* $c < d$. *Sada je* $z \in \langle y_d, c]$, *no, to povlači* $c \in \langle y_d, d]$, *što je kontradikcija s* $\langle y_d, d] \subseteq \Omega_0 \setminus C$.

Tvrdimo da $(\Omega_0, \mathcal{T}_0)$ *nije metakompaktan.*

Promatrajmo otvoreni pokrivač $\mathcal{U} := \{[0, a\rangle \mid a \in \Omega_0 \setminus \{0\}\}$. *Neka je* $\mathcal{V}$ *neko otvoreno profinjenje od* $\mathcal{U}$. *Za svaki* $a \in \Omega_0$ *postoji* $V_a \in \mathcal{V}$ *tako da je* $a \in V_a \subseteq [0, v_a\rangle$, *gdje je* $v_a \in \Omega_0$ *najmanji takav da je* $V_a \subseteq [0, v_a\rangle$. *Kako je* V_a *otvoren, to postoji* $x_a \in \Omega_0$ *tako da je* $a \in \langle x_a, a] \subseteq V_a$. *Definirajmo funkciju* $f : \Omega_0 \to \Omega_0$, $f(0) := 0, f(a) := x_a$, *za svaki* $a \in \Omega_0 \setminus \{0\}$.

Tvrdimo da vrijedi

$$(\exists a_0 \in \Omega_0)(\forall b \in \Omega_0)(\exists c \in [b, \cdot\rangle)\ f(c) < a_0.$$

Dokažimo ovu tvrdnju kontradikcijom. Pretpostavimo da vrijedi

$$(\forall a \in \Omega_0)(\exists b(a) \in \Omega_0)(\forall c \in [b(a), \cdot\rangle)\ a \leq f(c).$$

Definiramo niz (a_n) *na način* $a_1 := 0,\ a_{n+1} := b(a_n), n \in \mathbb{N}$.

Sada je skup svih gornjih međa skupa $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *u* Ω_0 *neprazan (jer je* Ω_0 *neprebrojiv) i ima minimum (jer je* Ω_0 *dobro uređen), pa postoji*

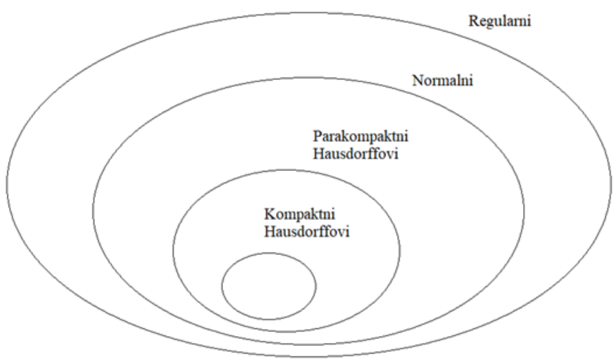
$$a^* := \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}.$$

Nadalje, vrijedi:

$$(\forall n \in \mathbb{N})\ b(a_n) = a_{n+1} \leq a^*,$$
$$(\forall n \in \mathbb{N})\ a_n \leq f(a^*).$$

To povlači da je $a^* \leq f(a^*)$*. Budući da je* $f(a) < a$*, za svaki* $a \in \Omega_0 \setminus \{0\}$*, to je posebno i* $f(a^*) < a^*$*. Dakle, vrijedi* $a^* \leq f(a^*) < a^*$*, što je očito kontradikcija.*

Neka je (c_n) *niz sa svojstvima* $c_1 > v_{a_0}$ *i* $c_{n+1} > v_{c_n}$*,* $f(c_{n+1}) < a_0$*. Za* $n \in \mathbb{N}$ *skupovi* V_{c_n} *su međusobo različiti, jer za* $k, m \in \mathbb{N}$*,* $k < m$*, vrijedi* $V_{c_m} \nsubseteq [0, v_k\rangle$ *i* $V_{c_k} \subseteq [0, v_k\rangle$*. Sada vrijedi* $a_0 < c_n$*,* $f(c_n) < a_0$*,* $n \in \mathbb{N}$*, pa je* $a_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_{c_n}$*, što povlači da* $\mathcal{V}$ *nije točkovno konačan. Dakle, nijedno otvoreno profinjenje od* $\mathcal{U}$ *nije točkovno konačno, pa* $(\Omega_0, \mathcal{T}_0)$ *nije metakompaktan, a time ni parakompaktan.*



Slika 2.2: Prikaz međusobnih odnosa klasa regularnih, normalnih, parakompaktnih Hausdorffovih i kompaktnih Hausdorffovih prostora.

2.5 Podklase parakompaktnih prostora

S obzirom da želimo dokazati da metrizabilni prostori čine podklasu parakompaktnih prostora, iskoristit ćemo činjenicu da su to regularni prostori. Iako općenito nemamo karakterizaciju parakompaktnosti, u klasi regularnih prostora to svojstvo postaje ekvivalentno nekim naizgled *slabijim* svojstvima, o čemu govori sljedeći teorem.

Teorem 2.21 *Neka je X regularan. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je parakompaktan.
(ii) Svaki otvoreni pokrivač od X ima otvoreno σ-lokalno konačno profinjenje.
(ii) Svaki otvoreni pokrivač od X ima lokalno konačno profinjenje.
(iii) Svaki otvoreni pokrivač od X ima zatvoreno lokalno konačno profinjenje.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Svaka lokalno konačna množina $\mathcal{U}$ se može napisati u obliku $\mathcal{U} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{U}$, pa je i σ-lokalno konačna.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X. Tada postoji otvoreno σ-lokalno konačno profinjenje $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$. Neka je $\mathcal{V} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{V}_n$, gdje je svaka množina $\mathcal{V}_n$ lokalno konačna. Definiramo $W_n := \bigcup \mathcal{V}_n$. Sada je $\{W_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ otvoreni pokrivač od X. Promatrat ćemo njegovo profinjenje $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, gdje je $A_n := W_n \setminus (\bigcup_{i=1}^{n-1} W_i)$. Neka je $x \in X$ i neka je n_x minimalni element skupa $\{n \in \mathbb{N} \mid x \in W_n\}$. Kako je $x \in A_{n_x}$, to je $\{A_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pokrivač od X. Također, W_{n_x} je okolina točke x koja ne siječe A_n za sve $n > n_x$, pa je $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ lokalno konačan pokrivač za X.
Dokažimo da je $\mathcal{A} := \{A_n \cap V \mid n \in \mathbb{N},\ V \in \mathcal{V}_n\}$ lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$. Kako $\mathcal{A}$ profinjuje $\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}$ profinjuje $\mathcal{U}$ to $\mathcal{A}$ profinjuje $\mathcal{U}$. Neka je $x \in X$ proizvoljan. Sada postoji okolina M od x koja siječe samo konačno mnogo elemenata $A_{n_1}, \ldots, A_{n_k}$ množine $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$. Za svaki $i = 1, \ldots, k$ postoji

okolina N_{n_i} od x koja siječe samo konačno mnogo elemenata od $\mathcal{V}_{n_i}$ Tada je $M \cap (\bigcap_{i=1}^{k} N_{n_i})$ okolina od x koja siječe samo konačno mnogo elemenata od $\mathcal{A}$.

(iii) $\Rightarrow$ *(iv)*. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X. Sada vrijedi

$$(\forall x \in X)(\exists U_x \in \mathcal{U})\ x \in U_x.$$

Prostor $(X, \mathcal{T})$ je regularan, pa vrijedi

$$(\forall x \in X)(\exists V_x \in \mathcal{O}(x))\ \operatorname{Cl} V_x \subseteq U_x.$$

Sada je $\{V_x \mid x \in X\}$ otvoreni pokrivač od X, pa postoji njegovo lokalno konačno profinjenje $\{A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$. Po Teoremu 2.7, množina $\{\operatorname{Cl} A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ je lokalno konačan pokrivač od X.
Za svaki $\lambda \in \Lambda$ postoji $x \in X$ tako da je $A_\lambda \subseteq V_x$, pa je

$$\operatorname{Cl} A_\lambda \subseteq \operatorname{Cl} V_x \subseteq U_x.$$

Dakle, $\{\operatorname{Cl} A_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ je zatvoreno lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$.

(iv) $\Rightarrow$ *(i)*. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X. Sada postoji njegovo zatvoreno lokalno konačno profinjenje $\mathcal{A}$. Za svaki $x \in X$ postoji okolina V_x koja siječe samo konačno mnogo elemenata množine $\mathcal{A}$. Sada je $\{V_x \mid x \in X\}$ otvoreni pokrivač od X, pa postoji njegovo zatvoreno lokalno konačno profinjenje $\mathcal{C}$. Kako je $\mathcal{C}$ lokalno konačan i elementi su mu zatvoreni skupovi, za svaki $A \in \mathcal{A}$ vrijedi:

$$\begin{aligned}\operatorname{Cl}(\bigcup\{C \in \mathcal{C} \mid A \cap C = \emptyset\}) &= \bigcup\{\operatorname{Cl} C \mid A \cap C = \emptyset,\ C \in \mathcal{C}\} \\ &= \bigcup\{C \in \mathcal{C} \mid A \cap C = \emptyset\}.\end{aligned}$$

Dakle, $\bigcup\{C \in \mathcal{C} \mid A \cap C = \emptyset\}$ je zatvoren, pa je $A^* := X \setminus (\bigcup\{C \in \mathcal{C} \mid A \cap C = \emptyset\})$ otvoren. Za svaki $A \in \mathcal{A}$ vrijedi $A \subseteq A^*$, pa je $\{A^* \mid A \in \mathcal{A}\}$ otvoreni pokrivač od X. Tvrdimo da je $\{A^* \mid A \in \mathcal{A}\}$ lokalno konačan. Neka je $x \in X$ po volji odabrana točka. Tada postoji okolina W od x koja siječe samo konačno mnogo elemenata $C_1, \ldots, C_n$ od $\mathcal{C}$. Kako $\mathcal{C}$ pokriva X to je $W \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} C_i$.

Ako je $W \cap A^* \neq \emptyset$, tada postoji $k = 1, \ldots, n$ tako da je $C_k \cap A^* \neq \emptyset$. Ali $C_k \cap A^* \neq \emptyset$ implicira $C_k \cap A \neq \emptyset$. Kako svaki C_i siječe samo konačno mnogo članova množine $\mathcal{A}$. To je $W \cap A^* = \emptyset$, osim samo za konačno mnogo elemenata iz $\{A^* \mid A \in \mathcal{A}\}$. Dakle, $\{A^* \mid A \in \mathcal{A}\}$ je lokalno konačan. Budući da je $\mathcal{A}$ profinjenje od $\mathcal{U}$, za svaki $A \in \mathcal{A}$ postoji $U_A \in \mathcal{U}$ tako da je $A \subseteq U_A$. Sada je $\{U_A \cap A^* \mid A \in \mathcal{A}\}$ otvoreno lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$. ∎

Iskoristit ćemo prethodni teorem kako bismo dokazali da su metrizabilni prostori parakompaktni. Za to nam je potrebna lema koja koristi Zermelov teorem. Njega navodimo bez dokaza (vidi [8]).

Teorem 2.22 (Zermelo) *Svaki skup se može dobro urediti.*

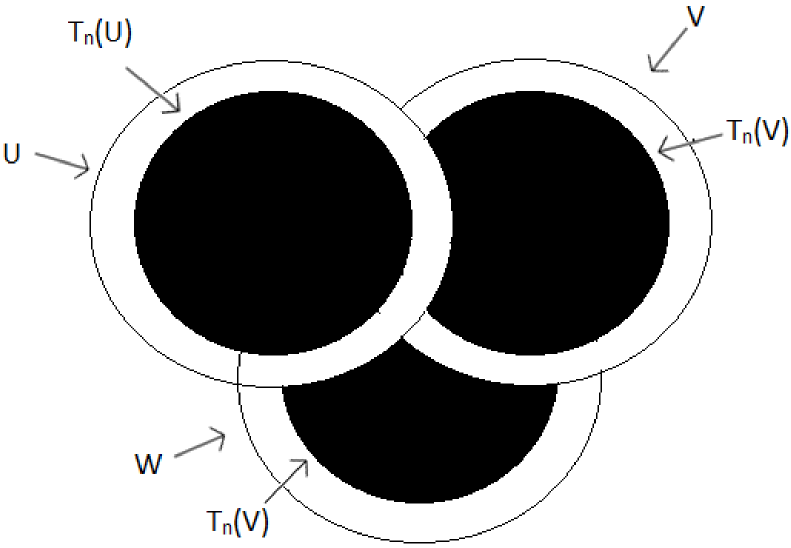
Lema 2.23 *Neka je X metrizabilan prostor. Tada svaki otvoreni pokrivač od X ima otvoreno σ-lokalno konačno profinjenje.*

Dokaz. Odaberimo po volji metriku d na X koja metrizira pripadnu topologiju. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X i neka je $\preceq$ dobar uređaj za množinu $\mathcal{U}$ (postoji po Zermelovom teoremu).

Za $U \in \mathcal{U}$ i $n \in \mathbb{N}$ definiramo:

$$S_n(U) := \{x \in U \mid B(x, 1/n) \subseteq U\},$$

$$T_n(U) := S_n(U) \setminus (\bigcup_{V \prec U} V).$$



Slika 2.3: Prikaz slučaja kad se $\mathcal{A}$ sastoji od tri skupa, $U \prec V \prec W$, (vidi [10]).

Sada su $T_n(U)$, $U \in \mathcal{U}$, međusobno disjunktni, to jest, udaljeni su za barem $1/n$. To znači da ako su V i W različiti elementi množine $\mathcal{U}$, onda vrijedi

$$(\forall x \in T_n(V))(\forall y \in T_n(W))\ d(x,y) \geq 1/n.$$

Kako bismo ovo pokazali, bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo da je $V \prec W$. Budući da je $x \in T_n(V)$, slijedi da je $x \in S_n(V)$, pa je $B(x, 1/n) \subseteq V$. S druge strane, kako je $V \prec W$ i $y \in T_n(W)$, to je $y \notin V$, što povlači $y \notin B(x, 1/n)$.

Kako skupovi $T_n(U)$ ne moraju nužno biti otvoreni, *proširit* ćemo ih do otvorenih skupova $E_n(U)$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je

$$E_n(U) := \bigcup_{x \in T_n(U)} B(x, 1/3n),\ n \in \mathbb{N}.$$

Primijetimo da su ovakvi skupovi međusobno disjunktni, za različite $U \in \mathcal{U}$. Ako su V i W različiti elementi množine $\mathcal{U}$, tvrdimo da vrijedi

$$(\forall x \in E_n(V))(\forall y \in E_n(W))\ d(x, y) \geq 1/3n.$$

Neka su $x \in E_n(V)$ i $y \in E_n(W)$ po volji odabrane točke. Po definiciji skupova $E_n(V)$, $E_n(W)$, postoje točke $x_1 \in T_n(U)$ i $y_1 \in T_n(W)$ tako da je $x \in B(x_1, 1/3n)$ i $y \in B(y_1, 1/3n)$. Sada vrijedi

$$\begin{aligned} 1/n \leq d(x_1, y_1) &\leq d(x_1, x) + d(x, y) + d(y, y_1) \\ &\leq 1/3n + +d(x, y) + 1/3n, \end{aligned}$$

iz čega odmah slijedi $1/3n \leq d(x, y)$.
Također, vrijedi

$$(\forall U \in \mathcal{U})\ E_n(U) \subseteq U,$$

što povlači da su elementi množine

$$\mathcal{E}_n := \{E_n(U) \mid U \in \mathcal{U}\},\ n \in \mathbb{N},$$

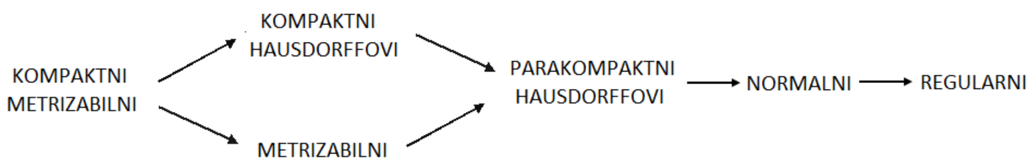
podskupovi elemenata od $\mathcal{U}$. Množina $\mathcal{E}_n$ nije profinjenje, jer ne mora biti pokrivač od X, ali zato

$$\mathcal{E} := \textstyle\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_n$$

profinjuje $\mathcal{U}$. Pokazat ćemo da je $\mathcal{E}$ pokrivač od X. Neka je $x \in X$ po volji odabrana točka. Odaberimo najmanji element U u dobro uređenom skupu $(\mathcal{U}, \preceq)$ koji sadrži x. Kako je U otvoren, postoji $n \in \mathbb{N}$, tako da je $B(x, 1/n) \subseteq U$. Tada je, po definiciji, $x \in S_n(U)$. Kako je U prvi element u množini $\mathcal{U}$ koji sadrži x, to x pripada $T_n(U)$, pa x pripada elementu $E_n(U)$ od $\mathcal{E}_n$. Dakle, $\mathcal{E}$ je pokrivač od X. Iz činjenice da za svaki $x \in X$ skup $B(x, 1/6n)$ može siječi najviše jedan element iz $\mathcal{E}_n$, slijedi da je $\mathcal{E}_n$ lokalno konačna množina, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $\mathcal{E}$ otvoren σ-lokalno konačan pokrivač od X. Dakle, $\mathcal{E}$ je otvoreno σ- lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$. ■

Teorem 2.24 *Svaki metrizabilan prostor je parakompaktan.*

Dokaz. Neka je X metrizabilan prostor i neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoreni pokrivač od X. Po prethodnoj lemi, postoji otvoreno σ-lokalno konačno profinjenje $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$. Svaki metrizabilan prostor je i regularan, pa, po Teoremu 2.21, slijedi da je X parakompaktan. ■



Slika 2.4: Prikaz međusobnih odnosa klasa kompaktnih metrizabilnih, kompaktnih Hausdorffovih, metrizabilnih, parakompaktnih hausdorffovih, normalnih i regularnih prostora.

Sljedeći primjer pokazuje da klasa parakompaktnih prava podklasa klase metakompaktnih prostora. Tu ćemo iskoristiti da je svaki metrizabilan prostor metakompaktan, što je direktna posljedica prethodnog korolara.

Primjer 2.25 *Neka je na $\mathbb{R}$ dana topologija kojoj je baza jednaka*

$$\mathcal{B} := \{\{x\} : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\} \cup \{\langle a, b\rangle : a, b \in \mathbb{R},\ a < b\}$$

i neka je na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dana inducirana euklidska topologija. Promotrimo topološki produkt $X := \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$. Dokažimo najprije da je X metakompaktan. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoreni pokrivač prostora X. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je svaki element iz $\mathcal{U}$ oblika $\langle a, b\rangle \times (\langle c, d\rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$ ili $\{i\} \times (\langle c, d\rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}))$, pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c < d$, $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, jer, ako to nije slučaj, onda postoji njegovo profinjenje s elementima ovog oblika. Neka je $\mathcal{U}'$ skup svih elemenata iz $\mathcal{U}$ prvog *oblika. Tada je* $\mathcal{U}'$ *otvoreni pokrivač potprostora* $Y := \bigcup \mathcal{U}'$ *euklidskog prostora* $\mathbb{R}^2$*. Budući da je* Y *metrizabilan, postoji točkovno konačno otvoreno profinjenje* $\mathcal{V}'$ *od* $\mathcal{U}'$*. Budući da zadana topologija na* X *profinjuje euklidsku topologiju, slijedi da su elementi od* $\mathcal{V}'$ *otvoreni u* X *i s obzirom na zadanu topologiju. Sada za svaki* $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *postoji množina* $\mathcal{U}_i$ *svih elemenata iz* $\mathcal{U}$ *oblika* $\{i\} \times \langle c, d \rangle$ *koja je otvoreni pokrivač od* $\{i\} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ *(a on je homeomorfan euklidskom potprostoru* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*). Sada postoji otvoreno točkovno konačno profinjenje* $\mathcal{V}_i$ *od* $\mathcal{U}_i$ *koje je otvoreno onda i u* X*, za svaki* $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*. Primijetimo da je sada i* $\mathcal{V} := \mathcal{V}' \cup \left(\bigcup_{i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} \mathcal{V}_i \right)$ *otvoreno točkovno konačno profinjenje pokrivača* $\mathcal{U}$*. Time smo dokazali da je* X *metakompaktan.*

Dokažimo da X *nije parakompaktan. Primijetimo da je* X *regularan prostor kao produkt dva regularna prostora, pa je i Hausdorffov. Po Teoremu 2.19 dovoljno je dokazati da* X *nije normalan prostor. Neka je* $A := \mathbb{Q} \times (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$*. Primijetimo da je* A *zatvoren podskup od* X*, kao produkt dva zatvorena podskupa koordinatnih prostora. Neka je* $U := \{(x, y) \in X : x \neq y\}$*. Primijetimo da je* $A \subseteq U$*. Neka je* $(x, y) \in U$*. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je* $x < y$*. Razlikujemo dva slučaja. Ako je* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, onda je* $W := \{x\} \times (\langle x, \cdot \rangle \setminus \mathbb{Q})$ *okolina točke* (x, y) *u prostoru* X*, takva da je* $W \subseteq U$*. Ako je* $x \in \mathbb{Q}$*, onda je* $W := \left\langle x - 1, \frac{x+y}{2} \right\rangle \times \left(\left\langle \frac{x+y}{2}, \cdot \right\rangle \setminus \mathbb{Q} \right)$ *okolina točke* (x, y) *u prostoru* X*, takva da je* $W \subseteq U$*. Time smo dokazali da je* U *otvoren podskup od* X*. Pretpostavimo da postoji otvoren podskup* V *prostora* X*, takav da je* $A \subseteq V \subseteq \operatorname{Cl} V \subseteq U$*. Tada je* $W := X \setminus \operatorname{Cl} V$ *otvoren nadskup od* $\{(x, x) : x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\}$*. Sada za svaki* $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *postoji realan broj* $\varepsilon_x > 0$*, takav da je* $\{x\} \times \langle x - \varepsilon_x, x + \varepsilon_x \rangle \subseteq W$*. Primijetimo da je* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \varepsilon_x \geq \frac{1}{n} \right\}$*. Iz svojstva iracionalnih brojeva (vidi [5]), postoji* $n \in \mathbb{N}$*, takav da je nutrina zatvorenja skupa*

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \varepsilon_x \geq \frac{1}{n} \right\}$$

neprazna, s obzirom na euklidsku topologiju. To povlači postojanje intervala $\langle a, b\rangle$, $a < b$, *tako da je* $\langle a, b\rangle$ *podskup zatvorenja od* $\left\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \varepsilon_x \geq \frac{1}{n}\right\}$, *s obzirom na euklidsku topologiju. Neka su* $q \in \langle a, b\rangle \cap \mathbb{Q}$ *te* $i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, $|q - i| < \frac{1}{2n}$ *po volji odabrani. Sada je* V *okolina točke* (q, i), *pa postoje* $c, d, c', d' \in \mathbb{R}$, $c < d$, $c' < d'$, *tako da je* $(q, i) \in \langle c, d\rangle \times (\langle c', d'\rangle \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})) \subseteq V$, *što povlači postojanje iracionalne točke* $z \in \langle \max\{a, c\}, q\rangle$ *tako da je* $|z - q| < \frac{1}{2n}$ *i* $z \in \left\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \varepsilon_x \geq \frac{1}{n}\right\}$. *Primijetimo da je* $(z, i) \in V$ *i* $|z - i| \leq |z - q| + |q - i| < \frac{1}{n}$, *pa je*

$$(z, i) \in \{z\} \times \left\langle z - \tfrac{1}{n}, z + \tfrac{1}{n}\right\rangle \subseteq W = X \setminus \operatorname{Cl} V \subseteq X \setminus V,$$

što je kontradikcija. Dakle, prostor X *nije normalan.*

Osim metrizabilnih prostora postoji još jedna važna podklasa parakompaktnih prostora, a to su regularni Lindelöfovi prostori, o čemu govori sljedeće poglavlje.

Poglavlje 3

Lindelöfovi prostori

3.1 Osnovna svojstva i veza s kompaktnosti

Sljedeća klasa prostora koju uvodimo su Lindelöfovi prostori. Iz same definicije će biti jasno kako je to klasa prostora koja poopćava kompaktne prostore. Osim toga, ona nam omogućava da povežemo neke topološke fenomene poput separabilnosti, 2-prebrojivost, metrizabilnosti i lokalne metrizabilnosti.

Definicija 3.1 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Kažemo da je X Lindelöfov ako svaki otvoreni pokrivač ima otvoreno prebrojivo ili konačno profinjenje.*

Za razliku od parakompatnih prostora, u definiciji Lindelöfovih prostora, profinjenje možemo zamjeniti s potpokrivačem (kao i kod kompaktnih prostora).

Teorem 3.2 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Prostor X je Lindelöfov ako i samo ako svaki otvoreni pokrivač ima prebrojiv ili konačan potpokrivač.*

Dokaz. Dokažimo nužnost. Neka je X je Lindelöfov prostor i neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoreni pokrivač od X. Sada postoji njegovo otvoreno prebrojivo ili konačno profinjenje $\mathcal{V}$. Kako $\mathcal{V}$ profinjuje $\mathcal{U}$, to za svaki $V \in \mathcal{V}$

postoji $U_V \in \mathcal{U}$ tako da je $V \subseteq U_V$. Sada je $\{U_V \mid V \in \mathcal{V}\}$ traženi prebrojiv ili konačan potpokrivač od $\mathcal{U}$.
Dovoljnost slijedi trivijalno, jer je svaki potpokrivač ujedno i profinjenje danog pokrivača. ■
U nastavku dajemo primjer Lindelöfovog prostora i onoga koji to nije.

Primjer 3.3 *Tvrdimo da je $(\Omega, \mathcal{T})$ Lindelöfov prostor.*
Neka je $\mathcal{U}$ proizvoljan otvoren pokrivač od Ω. Tada postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je $\omega_1 \in U$, pa postoji $x \in \Omega_0$ tako da je $\langle x, \omega_1] \subseteq U$. Kako je $[0, x]$ prebrojiv ili konačan, to postoji prebrojiva ili konačna podmnožina $\mathcal{U}'$ pokrivača $\mathcal{U}$ koja pokriva $[0, x]$. Sada je $\mathcal{U}' \cup \{U\}$ traženi prebrojiv ili konačan potpokrivač od $\mathcal{U}$, pa je $(\Omega, \mathcal{T})$ Lindelöfov prostor.
Tvrdimo da $(\Omega_0, \mathcal{T}_0)$ nije Lindelöfov prostor.
Promatrajmo otvoreni pokrivač $\{[0, x\rangle \mid x \in \Omega_0\}$. Pretpostavimo da je $\{[0, x_n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ neki njegov prebrojiv ili konačan potpokrivač. Sada je skup svih gornjih međa skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ u Ω_0 neprazan (jer je Ω_0 neprebrojiv) i ima minimum (jer je Ω_0 dobro uređen), pa $\{[0, x_n\rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ nije pokrivač od Ω_0 jer nijedan njegov element ne sadrži taj minimum.

Iako bi brzopleto mogli zaključiti da su podskupovi Lindelöfovog prostora Lindelöfovi, jer ako možemo naći prebrojiv ili konačan potpokrivač za *veći* prostor onda to možemo i za *manji*. Prethodni primjer pokazuje da to ipak nije istina. No, ako promatramo zatvorene podskupove Lindelöfovog prostora, oni će biti Lindelöfovi, što nas podsjeća na analogno svojstvo koje imaju i kompaktni prostori te se dokazuje analogno.

Očigledno je da je svaki kompaktan prostor Lindelöfov, pa Lindelöfove prostore smatramo poopćenjem kompaktnih prostora u smislu postojanja profinjenja određene kardinalnosti. Nadalje, preko Lindelöfovih prostora se kompaktni prostori mogu karakterizirati na sljedeći način.

Teorem 3.4 *Topološki prostor X je kompaktan ako i samo ako je X Lindelöfov prostor u kojem svaki otvoren prebrojiv pokrivač ima konačan potpokrivač.*

Dokaz. Nužnost je očita.

Dokažimo dovoljnost. Neka je X Lindelöfov prostor u kojem svaki otvoren prebrojiv pokrivač ima konačni potpokrivač. Odaberimo po volji otvoreni pokrivač $\mathcal{U}$ prostora X. Budući da je X Lindelöfov, $\mathcal{U}$ ima prebrojiv potpokrivač. Sada se taj prebrojiv pokrivač može reducirati na konačan potpokrivač. Dakle, $\mathcal{U}$ ima konačan potpokrivač, što dokazuje da je X kompaktan.

■

Neka svojstva Lindelöfovih prostora su slična kao i kod kompaktnih prostora.

Teorem 3.5 *Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) Svaki zatvoren podskup Lindelöfovog prostora je Lindelöfov.

(ii) Lindelöfovo svojstvo je invarijantno s obzirom na neprekidnu surjekciju.

Dokaz. (i) Neka je X Lindelöfov prostor i neka je $F \subseteq X$ po volji odabran zatvoren podskup od X. Neka je $\mathcal{U}$ otvoren pokrivač (obzirom na relativnu topologiju na F) od F. Sada za svaki $U \in \mathcal{U}$ postoji otvoren (s obzirom na topologiju na X) podskup V_U od X tako da je $U = V_U \cap F$. Definirajmo $\mathcal{V} := \{V_U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Sada je $\mathcal{V} \cup \{X \setminus F\}$ otvoreni pokrivač prostora X, pa ima prebrojiv ili konačan potpokrivač $\mathcal{Z}$. Primjetimo da je $\{U \in \mathcal{U} \mid V_U \in \mathcal{Z} \setminus \{X \setminus F\}\}$ traženi prebrojiv ili konačan potpokrivač od $\mathcal{U}$.

(ii) Neka je X Lindelöfov prostor, Y topološki prostor, $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija i neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od Y. Sada je $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ otvoreni pokrivač od X, pa postoji njegov prebrojiv ili konačan potpokrivač $\{f^{-1}(U_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Sada je $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiva ili konačna podmnožina od $\mathcal{U}$. Surjektivnost funkcije f povlači da

$\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pokriva Y. Pa je $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ prebrojivi ili konačni potpokrivač od $\mathcal{U}$. Dakle, Y je Lindelöfov prostor. ■

Koristeći prethodni teorem, u sljedećem primjeru, pokazat ćemo da Lindelöfovo svojstvo nije multiplikativno.

Primjer 3.6 *Neka je $\mathcal{T}_{dl}$ topologija donjeg limesa na $\mathbb{R}$, to jest topologija čija je baza $\mathcal{B} = \{[a,b\rangle \mid a,b \in \mathbb{R},\ a < b\}$. Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$ je Lindelöfov prostor (po [9]). Tvrdimo da produkt $\mathbb{R}^2$ nije Lindelöfov. Promotrimo skup $L := \{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Lako se vidi da L je zatvoren u $\mathbb{R}^2$, jer za svaku točku njegovog komplementa možemo naći bazni element koji sadrži tu točku, a sadržan je u tom komplementu. Za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\{(x,-x)\} = L \cap ([x, x+1\rangle \times [-x, -x+1\rangle),$$

pa je $\{(x,-x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ otvoreni pokrivač od L koji očigledno nema prebrojiv ili konačan potpokrivač. Dakle, L nije Lindelöfov. Odmah možemo zaključiti da $\mathbb{R}^2$ nije Lindelöfov, jer bi u protivnom i L bio Lindelöfov, kao njegov zatvoreni potprostor (po tvrdnji (i) Teorema 3.5).

3.2 Veza s metrizabilnosti i aksiomima prebrojivosti

U ovom odjeljku cilj nam je, s jedne strane, povezati 2-prebrojivost, separabilnost i Lindelöfovo svojstvo, a s druge strane, dati nužne i dovoljne za metrizabilnost Lindelöfovih svojstava.

Teorem 3.7 (Lindelöf) *Svaki 2-prebrojiv topološki prostor je Lindelöfov.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor koji je 2-prebrojiv i neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X. Kako je X 2-prebrojiv, to postoji njegova prebrojiva ili konačna baza $\mathcal{B}$. Neka je $U \in \mathcal{U}$ proizvoljan i neka je $x \in U$ po volji odabrana točka. Sada postoji $B_x \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B_x \subseteq U$. Kako je $\mathcal{B}$ prebrojiva ili konačna množina, to je i njezina podmnožina $\mathcal{B}' = \{B_x \mid x \in X\}$ prebrojiva ili konačna i očito je otvoreni pokrivač od X. Primijetimo da za svaki B_x postoji $U_x \in \mathcal{U}$ takav da je $B_x \subseteq U_x$, pa je $\mathcal{B}'$ prebrojivo ili konačno otvoreno profinjenje od $\mathcal{U}$. Dakle, X je Lindelöfov prostor. ■

Primjer 3.8 *Promatrajmo euklidski prostor $\mathbb{R}$. Kako je $\mathbb{R}$ 2-prebrojiv prostor, to je i svaki njegov potprostor 2-prebrojiv. Po Teoremu 3.7 zaključujemo da je svaki njegov potprostor Lindelöfov.*

Prethodni primjer nam pokazuje da analogon svojstva da je svaki kompaktni potprostor u Hausdorffovom prostoru zatvoren, ne vrijedi za Lindelöfove prostore, jer proizvoljni potprostor euklidskog prostora ne mora općenito biti zatvoren.

Teorem 3.9 *Svaki 2-prebrojiv prostor je separabilan.*

Dokaz. Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor koji je 2-prebrojiv. Kako je X 2-prebrojiv, to postoji njegova prebrojiva ili konačna baza $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su svi bazni elementi neprazni. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberimo po volji $x_n \in B_n$. Neka je $D := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Primijetimo da je D gust na X, jer svaki bazni element B_n siječe D (u točki x_n). ■

Iz prethodna dva teorema naslućujemo da su separabilnost i Lindelöfovost *slabija* svojstva od 2-prebrojivosti. Sljedeći primjer nam pokazuje kako to zaista jest tako.

Primjer 3.10 *Neka je $\mathcal{T}_{dl}$ topologija donjeg limesa na $\mathbb{R}$. Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$ je*

Lindelöfov prostor i očito je separabilan ($\mathbb{Q}$ je njegov gust podskup). S druge strane, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$ nije 2-prebrojiv (po [10]).

Dakle, povezali smo 2-prebrojivost i separabilnost te 2-prebrojivost i Lindelöfovo svojstvo u proizvoljnom topološkom prostoru. No, za separabilnost i Lindelöfovo svojstvo to općenito ne možemo napraviti. Sljedeći primjer je primjer prostora koji je separabilan, a nije Lindelöfov.

Primjer 3.11 *U Primjeru 3.6 pokazali smo da Sorgenfreyeva ravnina nije Lindelöfov prostor. No, ako stavimo $D := \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Q}\}$, to je očito prebrojiv i gust podskup od $\mathbb{R}^2$, pa je $\mathbb{R}^2$ separabilan.*

Sljedeći primjer je primjer prostora koji je Lindelöfov (čak i kompaktan), a nije separabilan.

Primjer 3.12 *Neka je $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ i $X := A \cup \{(0, 1)\}$. Može se pokazati da je množina*

$$\mathcal{T} := \{U \subseteq X \mid U \subseteq A\} \cup \{U \subseteq X \mid (0,1) \in U \text{ i } A \setminus U \text{ je konačan.}\}$$

topologija na X.
Dokažimo da je X Lindelöfov prostor.
Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X. Tada postoji $U \in \mathcal{U}$ tako da je $(0, 1) \in U$. Sada je $A \setminus U$ konačan, pa postoji konačna podmnožina $\mathcal{U}'$ od $\mathcal{U}$ koja pokriva $A \setminus U$. Stoga je $\mathcal{U}' \cup \{U\}$ konačan potpokrivač pokrivača $\mathcal{U}$. Dakle, X je kompaktan, pa je i Lindelöfov prostor.
Dokažimo da X nije separabilan.
Neka je B po volji odabran prebrojiv ili konačan podskup od X. Kako je A neprebojiv to postoji $a \in A \backslash B$. Sada je $\{a\} \in \mathcal{T}$ i $\{a\} \cap B = \emptyset$. Dakle, nijedan prebrojiv ili konačan podskup od X nije gust na X, pa X nije separabilan.

Znamo da su 2-prebrojivost i separabilnost ekvivalentna svojstva u metrizabilnim prostorima (vidi [7]). Analogna tvrdnja će vrijediti za 2-prebrojivost i Lindelöfovo svojstvo.

Teorem 3.13 *Neka je X metrizabilan prostor. Prostor X je 2-prebrojiv ako i samo ako je Lindelöfov.*

Dokaz. Nužnost slijedi po Teoremu 3.7
Dokažimo dovoljnost. Odaberimo po volji metriku d koja metrizira topologiju na X. Odaberimo po volji $n \in \mathbb{N}$. Prostor X je Lindelöfov, pa se otvoreni pokrivač $\{B(x, 1/n) \mid x \in X\}$ od X može reducirati na prebrojivi ili konačni potpokrivač $\{B(x_i^n, 1/n) \mid i \in \mathbb{N}\}$. Stavimo da je $D_n := \{x_i^n \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq X$, $n \in \mathbb{N}$. Neka je $D := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Očito je D prebrojiv ili konačan skup. Pokažimo da je D gust na X. Dovoljno je pokazati da

$$(\forall x \in X)(\forall \varepsilon > 0)(\exists y \in D)\ d(x, y) < \varepsilon$$

Neka su $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ proizvoljni. Po Arhimedovom aksiomu postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $n > 1/\varepsilon$. Kako je $X = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B(x_i^n, 1/n)$, postoji $i \in \mathbb{N}$ tako da je $x \in B(x_i^n, 1/n)$. Stavimo da je $y := x_i^n \in D_n$, pa vrijedi $d(x, y) < 1/n < \varepsilon$ i $y \in D$. Dakle, D je gust na X, pa je X separabilan prostor. No, onda je, zbog metrizabilnosti, X i 2-prebrojiv. ■
Dakle, u metrizabilnom topološkom prostoru, 2-prebrojivost, separabilnost i Lindelöfovo svojstvo, su ekvivalentna svojstva. Posebno istaknimo da su separabilnost i Lindelöfovo svojstvo ekvivalentna svojstva u metrizabilnom prostoru, dok općenito nisu povezana. Za sljedeći teorem nam je potreban pojam lokalne metrizabilnosti, pa se prisjetimo njezine definicije.

Definicija 3.14 *Kažemo da je topološki prostor X lokalno metrizabilan ako za svaku točku $x \in X$ postoji okolina $U \in \mathcal{O}(x)$ koja je metrizabilna kao topološki potprostor od X.*

Teorem 3.15 *Neka je X regularan Lindelöfov prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je lokalno metrizabilan.
(ii) X je 2-prebrojiv.
(iii) X je metrizabilan.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Budući da je X lokalno metrizabilan, to za svaku točku $x \in X$ možemo odabrati okolinu $U(x)$ koja je metrizabilan potprostor od X. Po prepostavci je X regularan, pa za okolinu $U(x)$ postoji otvorena okolina $V(x)$ točke x, tako da je

$$x \in V(x) \subseteq \operatorname{Cl} V(x) \subseteq U(x).$$

Time je dobiven otvoreni pokrivač $\{V(x) \mid x \in X\}$ prostora X. Prostor X je Lindelöfov, pa se $\{V(x) \mid x \in X\}$ može reducirati na prebrojivi potpokrivač $\{V(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$. Po tvrdnji (i), Teorema 4.3, slijedi da je svaki potprostor $\operatorname{Cl} V(x_n)$ Lindelöfov, a kako je potprostor metrizabilnog prostora $U(x_n)$ to je i metrizabilan. Primjenom prethodnog teorema slijedi da je svaki $\operatorname{Cl} V(x_n)$ 2-prebrojiv prostor, a onda je i njegov potprostor $V(x_n)$ 2-prebrojiv. Označimo s $\mathcal{B}_n$ prebrojivu bazu topologije potprostora $V(x_n)$. Primijetimo da se $\mathcal{B}_n$ sastoji od skupova koji su otvoreni i u X, budući da je $V(x_n)$ otvoreni podskup od X za svaki $n \in \mathbb{N}$. Definiramo

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n.$$

Očito je $\mathcal{B}$ prebrojiv ili konačan skup koji se sastoji od otvorenih podskupova od X. Tvrdimo da je $\mathcal{B}$ baza topologije na X. Neka je $W \subseteq X$ proizvoljan otvoreni podskup od X i $x \in W$ po volji odabrana točka. Budući da je $\{V(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ pokrivač od X, postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $x \in V(x_n)$. Sada je $x \in W \cap V(x_n)$ i $W \cap V(x_n)$ je otvoreni podskup od $V(x_n)$. Stoga postoji

$B \in \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}$ tako da je $x \in B \subseteq W \cap V(x_n) \subseteq W$, što dokazuje da je $\mathcal{B}$ baza topologije na X. Dakle, X je 2-prebrojiv.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Slijedi primjenom Urysohnovog metrizacijskog teorema.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Trivijalno. ■

Svaki kompaktan Hausdorffov prostor je i parakompaktan Hausdorffov, pa je, po Teoremu 2.19, i normalan, a time i regularan. Također je i Lindelöfov (jer je kompaktan), pa izravno dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 3.16 *Neka je X kompaktan Hausdorffov prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) *X je lokalno metrizabilan.*

(ii) *X je 2-prebrojiv.*

(iii) *X je metrizabilan.*

Prethodna dva teorema su idealan primjer za demonstrirati čest slučaj koji se događa u matematici. Naime, početne pretpostavke Teorema 3.15 smo promijenili na sljedeći način: regularnost smo zamijenili sa slabijim svojstvom, *biti Hausdorffov*, a Lindelöfovo svojstvo smo zamijenili s jačim svojstvom, *biti kompaktan*, i time smo dobili istu tvrdnju teorema. Dakle, da bismo nešto *dobili*, uvijek moramo nešto *dati*.

3.3 Veza s parakompaktnosti

U ovom odjeljku povezat ćemo klasu Lindelöfovih i parakompaktnih prostora preko regularnosti. Navedeno ćemo iskoristiti kako bismo pokazali da parakompaktnost nije multiplikativno svojstvo i da bismo povezali metakompaktnost i parakompaktnost preko separabilnosti.

Teorem 3.17 *Svaki regularan Lindelöfov prostor je parakompaktan i normalan.*

Dokaz. Neka je X regularan i neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X. Kako je X Lindelöfov, to postoji prebrojiv ili konačan potpokrivač $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$. Sada $\mathcal{V}$ možemo napisati u obliku

$$\mathcal{V} = \bigcup_{V \in \mathcal{V}} \{V\}.$$

Kako je $\mathcal{V}$ prebrojiv ili konačan i jednočlane množine su lokalno konačne, to je $\mathcal{V}$ σ-lokalno konačno profinjenje od $\mathcal{U}$. Zbog regularnosti prostora X, po tvrdnji (ii) Teorema 2.21, slijedi da je X parakompaktan. Dokažimo još da je normalan. Kako je X regularan, onda je i Hausdorffov, pa po Teoremu 2.19 slijedi da je normalan. ■

Već smo spomenuli da parakompaktnost nije multiplikativno svojstvo, no nismo to potkrijepili primjerom. Koristeći prethodni teorem, u sljedećem primjeru ćemo to i pokazati.

Primjer 3.18 *Neka je $\mathcal{T}_{dl}$ topologija donjeg limesa na $\mathbb{R}$. Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$ je Lindelöfov prostor (vidi [9]). To je također i normalan prostor (vidi [7]), pa je i regularan. Po Teoremu 3.17 je i parakompaktan. No, produkt $\mathbb{R}^2$ je Haussdorfov prostor, a nije normalan (po [12]), pa nije ni parakompaktan, po Teoremu 2.19.*

Vrijedi neka vrsta obrata Teorema 3.17, uz dodatni uvjet.

Teorem 3.19 *Neka je X metakompaktan prostor.*
Ako je X separabilan, onda je X Lindelöfov prostor.

Dokaz. Neka je X metakompaktan separabilan prostor i neka je $\{d_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ po volji odabran gust prebrojiv ili konačan podskup od X. Neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X. Kako je X metakompaktan, to postoji njegovo otvoreno točkovno konačno profinjenje $\mathcal{V}$. Tvrdimo da je $\mathcal{V}$ prebrojiv ili konačan. Pretpostavimo suprotno, to jest da je $\mathcal{V}$ neprebrojiv. Sada sigurno postoji neki d_n koji je sadržan u neprebrojivo mnogo elemenata od $\mathcal{V}$, što je kontradikcija sa činjenicom da je $\mathcal{V}$ točkovno konačan. ■

Posebno, gornji teorem vrijedi ako je X parakompaktan, pa imamo sljedeći korolar.

Korolar 3.20 *Neka je X regularan separabilan prostor.*
Tada je X parakompaktan ako i samo ako je X Lindelöfov prostor.

Slika 3.1: Prikaz međusobnih odnosa klasa kompaktnih, parakompaktnih, Lindelöfovih i metakompaktnih prostora.

Iz Teorema 2.19 slijedi da je svaki parakompaktan Hausdorffov prostor normalan. Obrat ne vrijedi općenito. Međutim, za klasu Lindelöfovih prostora imamo sljedeći teorem.

Teorem 3.21 *Neka je X Lindelöfov prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je parakompaktan Hausdorffov.
(ii) X je normalan
(iii) X je regularan.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Slijedi po Teoremu 2.19
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Trivijalno.
$(iii) \Rightarrow (i)$. Slijedi iz Teorema 3.17 ■

Poglavlje 4

Prebrojiva kompaktnost

4.1 Definicija i osnovna svojstva

U poglavlju Lindelöfovi prostori smo dokazali teorem da je prostor kompaktan ako i samo ako je Lindelöfov prostor u kojem svaki prebrojivi pokrivač ima konačan potpokrivač. Stoga ima smisla sljedeća definicija.

Definicija 4.1 *Kažemo da je topološki prostor prebrojivo kompaktan ako za svaki prebrojivi otvoreni pokrivač postoji njegovo konačno otvoreno profinjenje.*

Analogno kao u Teoremu 3.2 pokaže se da je prostor prebrojivo kompaktan ako i samo ako za svaki njegov prebrojivi otvoreni pokrivač postoji konačan potpokrivač.
Sada je jasno da je prostor X kompaktan ako i samo ako je Lindelöfov i prebrojivo kompaktan. Očito je svaki kompaktan prostor i prebrojivo kompaktan, a obratno ne vrijedi, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 4.2 *Promatrajmo prostor* Ω_0. *U Primjeru 2.20 smo dokazali da on nije parakompaktan prostor, pa nije ni kompaktan. Dokažimo da je* Ω_0 *prebrojivo kompaktan. Neka je* $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *po volji odabran otvoren prebrojiv pokrivač od* Ω_0. *Za svaki* $a \in \Omega_0$ *vrijedi da je* $[0, a]$ *kompaktan jer je zatvoren u* Ω *(koji je kompaktan). To povlači da se* $[0, a]$ *može pokriti s konačno mnogo elemnata množine* $\mathcal{U}$. *Kada* $\mathcal{U}$ *ne bi imao konačan potpokrivač, onda bi vrijedilo*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall U_1, \ldots, U_n \in \mathcal{U})(\exists a_n \in \Omega_0)\ a_n \notin U_1 \cup \ldots \cup U_n.$$

Sada skup $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *ima supremum* $a_0 \in \Omega_0$, *pa se interval* $[0, a_0]$ *ne može pokriti s konačno mnogo elemenata množine* $\mathcal{U}$, *što je kontradikcija s kompaktnošću od* $[0, a_0]$. *Dakle,* $\mathcal{U}$ *ima konačni potpokrivač.*

Promotimo neka svojstva prebrojivo kompaktnih prostora koja nas *podsijećaju* na svojstva kompaktnih prostora.

Teorem 4.3 *Vrijede sljedeće tvrdnje.*
(i) *Svaki zatvoren podskup prebrojivo kompaktnog prostora je prebrojivo kompaktan.*
(ii) *Prebrojiva kompaktnost je invarijantno svojstvo s obzirom na neprekidnu surjekciju.*

Dokaz. (i) Neka je X prebrojivo kompaktan prostor i neka je $F \subseteq X$ po volji odabran zatvoren podskup od X. Neka je $\mathcal{U}$ prebrojiv otvoren pokrivač (obzirom na relativnu topologiju na F) od F. Sada za svaki $U \in \mathcal{U}$ postoji otvoren (s obzirom na topologiju na X) podskup V_U od X tako da je $U = V_U \cap F$. Definirajmo $\mathcal{V} := \{V_U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Sada je $\mathcal{V} \cup \{X \setminus F\}$ otvoreni pokrivač prostora X, pa ima konačan potpokrivač $\mathcal{Z}$. Primjetimo da je $\{U \in \mathcal{U} \mid V_U \in \mathcal{Z} \setminus \{X \setminus F\}\}$ traženi konačan potpokrivač od $\mathcal{U}$.

(ii) Neka je X prebrojivo kompaktan prostor, Y topološki prostor, $f: X \to Y$ neprekidna surjekcija i neka je $\mathcal{U}$ po volji odabrani otvoreni prebrojivi pokrivač od Y. Sada je $\{f^{-1}(U) \mid U \in \mathcal{U}\}$ otvoreni prebrojiv ili konačan pokrivač od X, pa postoji njegov konačni potpokrivač $\{f^{-1}(U_1), \ldots, f^{-1}(U_n)\}$. Sada je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ konačna podmnožina od $\mathcal{U}$. Surjektivnost funkcije f povlači da $\{U_1, \ldots, U_n\}$ pokriva Y. Pa je $\{U_1, \ldots, U_n\}$ konačni potpokrivač od $\mathcal{U}$. Dakle, Y je prebrojivo kompaktan prostor. ■

Svojstvo kompaktnosti se može karakterizirati preko centriranih množina na način da je topološki prostor kompaktan ako i samo ako svaka centrirana množina zatvorenih podskupova ima neprazan presjek. Analogno možemo karakterizirati prebrojivo kompaktne prostore uz uvjet da centrirane množine moraju biti prebrojive.

Teorem 4.4 *Neka je X topološki prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) Prostor X je prebrojivo kompaktan.

(ii) Svaka prebrojiva centrirana množina $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ zatvorenih podskupova $F_n \subseteq X$ ima neprazan presjek, to jest $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

(iii) Svaki silazan niz (F_n), $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq \cdots$, nepraznih zatvorenih podskupova $F_n \subseteq X$, ima neprazan presjek, to jest $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.

(iv) Svaki niz ima gomilište u X.

Dokaz. $(i) \Rightarrow (ii)$. Neka je X kompaktan i $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ proizvoljna prebrojiva centrirana množina zatvorenih podskupova od X. Tvrdimo da je $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$. Pretpostavimo suprotno, to jest $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \emptyset$. Tada je

$$X = X \setminus \emptyset = X \setminus (\textstyle\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus F_n).$$

Sada je $\{X \setminus F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ otvoren pokrivač kompaktnog prostora X, pa se može reducirati na konačan potpokrivač $\{X \setminus F_{n_1}, \ldots, X \setminus F_{n_k}\}$. Vrijedi

$$X = \bigcup_{i=1}^{k}(X \setminus F_{n_i}) = X \setminus (\bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i}),$$

pa je $\bigcap_{i=1}^{k} F_{n_i} = \emptyset$, no, to je kontradikcija sa činjenicom da je množina $\{F_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ centrirana.

$(ii) \Rightarrow (iii)$. Svaki silazan niz nepraznih zatvorenih podskupova očito tvori prebrojivu ili konačnu centriranu množinu zatvorenih podskupova, pa tvrdnja slijedi direktno iz tvrdnje (ii).

$(iii) \Rightarrow (iv)$. Neka je (x_n) po volji odabran niz u prostoru X i $F_n := \mathrm{Cl}\,\{x_k : k \geq n\}$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Tada je (F_n) silazni niz zatvorenih nepraznih podskupova od X. Iz tvrdnje (iii) postoji točka $x_0 \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$. Neka je U po volji odabrana okolina točke x_0 i $n \in \mathbb{N}$. Tada je $U \cap \{x_k : k \geq n+1\} \neq \emptyset$, pa postoji prirodni broj $n' > n$, takav da je $x_{n'} \in U$. Time smo dokazali da je x_0 gomilište niza (x_n) u prostoru X.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Neka je $\mathcal{U} = \{U_n : n \in \mathbb{N}\}$ po volji odabran prebrojiv otvoren pokrivač prostora X. Bez smanjenja općenitosti, neka je $U_n \neq \emptyset$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Pretpostavimo da $\mathcal{U}$ nema konačno otvoreno profinjenje. Tada $\mathcal{U}$ očito nema konačan potpokrivač, pa za svaki $n \in \mathbb{N}$ postoji točka $x_n \in X \setminus (\bigcup_{i=1}^{n} U_i)$. Po (iv), postoji gomilište $x_0 \in X$ niza (x_n). Budući da je $\mathcal{U}$ pokrivač prostora X, postoji $m \in \mathbb{N}$, takav da je $x_0 \in U_m$. Sada za dani m postoji $n > m$, takav da je $x_n \in U_m$, što je kontradikcija s definicijom niza točaka (x_n). Dakle, pokrivač $\mathcal{U}$ ima otvoreno konačno profinjenje. Time smo dokazali da je X prebrojivo kompaktan prostor. ■

Sada navodimo jedno zanimljivo svojstvo prebrojivo kompaktnog prostora.

Korolar 4.5 *Neka je X prebrojivo kompaktan prostor. Tada svaki beskonačan skup $A \subseteq X$ ima gomilište u X.*

Dokaz. Neka je $A \subseteq X$ po volji odabran beskonačan podskup od X. Tada A sadrži prebrojiv podskup $F = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dovoljno je dokazati da je derivat $F' \neq \emptyset$, jer vrijedi $F' \subseteq A'$. Pretpostavimo suprotno tvrdnji, tj. neka je $F' = \emptyset$. Za svaki $k \in \mathbb{N}$ označimo s

$$F_k := \{x_n \mid k \leq n\} \subseteq F.$$

Tada je $F_k' \subseteq F' = \emptyset$, pa je $\mathrm{Cl}\, F_k = F_k \cup F_k' = F_k$. Dakle, svaki F_k je zatvoren i neprazan te vrijedi

$$F = F_1 \supseteq F_2 \supseteq \cdots \supseteq F_k \supseteq \cdots.$$

Prema prethodnom teoremu slijedi da je $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \neq \emptyset$. Neka je

$$x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k \subseteq F.$$

Budući da je $x \in F$, postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $x = x_n$, pa, po definiciji skupova F_k, vrijedi $x \notin F_k$ za $k > n$. No, to je u kontradikciji sa činjenicom da je $x \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} F_k$. Dakle, mora biti $F' \neq \emptyset$. ■

Obrat ne vrijedi općenito, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 4.6 *Definirajmo:*

$$B_n := \{2n-1, 2n\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Neka je $\mathcal{T}$ množina svih unija ovakvih skupova. Lako se vidi da je $\mathcal{T}$ topologija na $\mathbb{N}$ kojoj je $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ baza. Tvrdimo da $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ ima svojstvo da svaki beskonačan podskup ima gomilište, ali nije prebrojivo kompaktan.

Dokazat ćemo da svaki neprazan podskup od $\mathbb{N}$ *ima gomilište, pa će posebno to vrijediti i za svaki beskonačan podskup od* $\mathbb{N}$*. Neka je* $A \subseteq \mathbb{N}$ *proizvoljan neprazan podskup i neka je* $a \in A$ *proizvoljan. Ako je* a *neparan, onda svaka okolina od* $a+1$ *sadrži* a *pa je* $a+1$ *gomilište od* A*. Ako je* a *paran, onda svaka okolina od* $a-1$ *sadrži* a*, pa je* $a-1$ *gomilište od* A*.*
Nadalje, $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$ *nije prebrojivo kompaktan, jer je baza* $\mathcal{B}$ *prebrojiv otvoren pokrivač od* $\mathbb{N}$ *koji nema konačan potpokrivač.*

4.2 Veza između prebrojive kompaktnosti i metakompaktnosti

Ono što nedostaje prebrojivoj kompaktnosti da bi povlačila kompaktnost je Lindelöfovo svojstvo. To smo dokazali u Teoremu 3.4. No, istu stvar ćemo dobiti ako umjesto Lindelöfovog svojstva stavimo metakompaktnost. U tu svrhu uvodimo sljedeću definiciju i lemu.

Definicija 4.7 *Za pokrivač* $\mathcal{U}$ *skupa* X *kažemo da je ireduciblan ako ne postoji njegova prava podmnožina koja je pokrivač od* X*.*

Nema svaki pokrivač ireducubilni potpokrivač, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 4.8 *Promatrajmo topološki prostor* $(\mathbb{N}, \mathcal{T})$*, gdje je* $\mathcal{T}$ *diskretna topologija. Neka je* $U_n := \{1, \ldots, n\}$*, za svaki* $n \in \mathbb{N}$*. Očito je* $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ *pokrivač od* $\mathbb{N}$*, koji nema ireducibilni potpokrivač.*

Postojanje ireducibilnog potpokrivača osigurat ćemo tako što cemo pokrivaču dodati svojstvo točkovne konačnosti. Da bismo to dokazali, koristit ćemo Zornovu lemu koju navodimo bez dokaza (vidi [11]).

Lema 4.9 (Zornova lema) *Neka je X parcijalno uređen skup u kojem svaki potpuno uređen podskup ima gornju među. Tada X ima barem jedan maksimalan element.*

Lema 4.10 *Neka je $\mathcal{U}$ točkovno konačan pokrivač skupa X. Tada postoji ireducibilni potpokrivač $\mathcal{V}$ pokrivača $\mathcal{U}$.*

Dokaz. Definirajmo

$$\mathcal{R} := \{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{U} \mid \mathcal{U} \setminus \mathcal{F} \textit{ pokriva } X\}.$$

Sada je $(\mathcal{R}, \subseteq)$ parcijalno uređen skup. Neka je $\{\mathcal{F}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ neki njegov potpuno uređen podskup. Tvrdimo da je $\mathcal{F} := \bigcup_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{F}_\lambda$ gornja međa za taj potpuno uređen skup u $\mathcal{R}$. Ako pretpostavimo da $\mathcal{F} \notin \mathcal{R}$, onda $\mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$ ne bi pokrivao X, pa bi postojala točka $x_0 \in X$ koja ne pripada nijednom elementu množine $\mathcal{U} \setminus \mathcal{F}$. Kako x pripada samo konačno mnogo elemenata $U_1, \ldots, U_n$ od $\mathcal{U}$, to oni moraju biti sadržani u $\mathcal{F}$, a kako je $\{\mathcal{F}_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ potpuno uređen skup, to mora postojati $\mathcal{F}_{\lambda_0}$ koji sadržava skupove $U_1, \ldots, U_n$. No, onda je $\mathcal{U} \setminus \mathcal{F}_{\lambda_0} \subseteq \mathcal{U} \setminus \{U_1, \ldots, U_n\}$, što povlači da $\mathcal{U} \setminus \mathcal{F}_{\lambda_0}$ ne pokriva X (jer mu nijedan element ne sadrži x), a to je kontradikcija s $\mathcal{F}_{\lambda_0} \in \mathcal{R}$. Sada, po Zornovoj lemi slijedi da $(\mathcal{R}, \subseteq)$ ima barem jedan maksimalni element $\mathcal{M} \in \mathcal{R}$. Tvrdimo da je $\mathcal{V} := \mathcal{U} \setminus \mathcal{M}$ traženi ireducibilni potpokrivač od $\mathcal{U}$. Pretpostavimo suprotno, to jest neka postoji skup $V \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{M}$ tako da je $(\mathcal{U} \setminus \mathcal{M}) \setminus \{V\} = \mathcal{U} \setminus (\mathcal{M} \cup \{V\})$ pokrivač od X, iz čega odmah slijedi $\mathcal{M} \cup \{V\} \in \mathcal{R}$. No, sada vrijedi $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{M} \cup \{V\}$ i $\mathcal{M}$, $\mathcal{M} \cup \{V\} \in \mathcal{R}$, što je kontradikcija sa činjenicom da je $\mathcal{M}$ maksimalni element skupa $\mathcal{R}$. ■

Teorem 4.11 *Neka je X topološki prostor. Tada je X kompaktan ako i samo ako je prebrojivo kompaktan i metakompaktan.*

Dokaz. Nužnost je trivijalna.
Dokažimo dovoljnost.
Neka je X prebrojivo kompaktan i metakompaktan prostor i neka je $\mathcal{U}$ po volji odabran otvoren pokrivač od X. Kako je X metakompaktan, to postoji otvoreno točkovno konačno profinjenje $\mathcal{V}$ od $\mathcal{U}$. Sada postoji ireducibilni potpokrivač $\mathcal{Z}$ pokrivača $\mathcal{V}$. Tvrdimo da je $\mathcal{Z}$ konačan. Pretpostavimo suprotno, to jest neka je $\mathcal{Z}$ beskonačan. Budući da je $\mathcal{Z}$ ireducibilan, to za svaki $Z \in \mathcal{Z}$ postoji točka $x_Z \in X$ koja ne pripada nijednom skupu u množini $\mathcal{Z}$ osim Z. Sada je skup $\{x_Z : Z \in \mathcal{Z}\}$ beskonačan, pa postoji niz (x_{Z_n}) s međusobno različitim članovima. Po Teoremu 4.4 postoji njegovo gomilište $x_0 \in X$. Primjetimo da postoji $Z_0 \in \mathcal{Z}$ tako da je $x_0 \in Z_0$. Kako je x_0 gomilište niza (x_{Z_n}), to Z_0 sadrži beskonačno mnogo članova niza (x_{Z_n}), a time i beskonačno mnogo točaka skupa $\{x_Z : Z \in \mathcal{Z}\}$. No, to je kontradikcija sa činjenicom da je x_{Z_0} jedini element tog skupa koji se nalazi u Z_0. Dakle, $\mathcal{Z}$ je konačan. Kako je $\mathcal{Z}$ potpokrivač od $\mathcal{V}$ i $\mathcal{V}$ profinjuje $\mathcal{U}$, to je $\mathcal{Z}$ konačno otvoreno profinjenje od $\mathcal{U}$. ■

Korolar 4.12 *Neka je X topološki prostor. Prebrojiva kompaktnost je ekvivalentna kompaktnosti, ako je prostor X parakompaktan ili Lindelöfov.*

Dokaz. Ako je prostor parakompaktan, onda je i metakompaktan, pa je tražena tvrdnja direktna posljedica prošlog teorema, a ako je Lindelöfov, tvrdnja slijedi iz Teoremu 3.4. ■

Poglavlje 5

Poopćenja kompaktnosti temeljena na konvergenciji

5.1 Gomilišno kompaktni i nizovno kompaktni prostori

Svojstvo navedeno u Teoremu 4.5 se naziva Bolzano–Weierstrassovo svojstvo. Kako smo dokazali da Bolzano–Weierstrassovo svojstvo ne karakterizira prebrojivo kompaktne prostore, ima smisla definirati novu klasu topoloških prostora s ovim svojstvom. No, prije nego što uvedemo takve prostore, sijetimo se Bolzano–Weierstrassovog teorema za realne brojeve.

Teorem 5.1 *Svaki omeđen niz euklidskog prostora* $\mathbb{R}$ *ima konvergentan podniz.*

Ili, ekvivalentno:

Teorem 5.2 *Svaki omeđen niz euklidskog prostora* $\mathbb{R}$ *ima gomilište.*

Ekvivalentna formulacija koja se odnosi na skupove glasi ovako,

Teorem 5.3 *Svaki omeđen beskonačan podskup euklidskog prostora* $\mathbb{R}$ *ima gomilište.*

Ekvivalencija ovih teorema slijedi jer je $\mathbb{R}$ jako *lijep* prostor. Neka je X proizvoljan topološki prostor. Promatrajmo niz (x_n) u X, takav da su točke x_n međusobno različite. Komentirajmo odnose između sljedećih tvrdnji:

(i) Niz (x_n) ima konvergentan podniz.
(ii) Niz (x_n) ima gomilište.
(iii) Skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ima gomilište.

Vrijedi: $(i) \Rightarrow (ii) \Rightarrow (iii)$.
U 1-prebrojivom prostoru vrijedi: $(ii) \Rightarrow (i)$.
U T_1-prostoru vrijedi: $(iii) \Rightarrow (ii)$.
Dakle, u 1-prebrojivom T_1-prostoru vrijedi ekvivalencija tvrdnji (i), (ii), (iii). Kako je euklidski prostor $\mathbb{R}$ 1-prebrojiv i T_1-prostor, vrijedi ekvivalencija tvrdnji (i), (ii), (iii). Upravo zbog činjenice da ove tvrdnje nisu općenito ekvivalentne, definirat ćemo različite klase topoloških prostora koje će imati svojstva koja nas podsjećaju na svojstva kompaktnih podskupova euklidskog prostora $\mathbb{R}$. Prisjetimo se da je prebrojiva kompaktnost ekvivalentna sa svojstvom da svaki niz ima gomilište, ali ne i s BW-svojstvom i svojstvom da svaki niz ima konvergentan podniz. Stoga imamo sljedeće definicije.

Definicija 5.4 *Za topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *kažemo da je gomilišno kompaktan (ili da ima Bolzano-Weierstrassovo svojstvo, kraće BW-svojstvo) ako svaki beskonačan podskup* A *od* X *ima gomilište u prostoru* X*.*

Definicija 5.5 *Za topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *kažemo da je nizovno kompaktan ako svaki niz u* X *ima konvergentan podniz.*

Navedimo neka svojstva gomilišno kompaktnih i nizovno kompaktnih prostora.

Teorem 5.6 *Vrijede sljedeće tvrdnje.*
(i) *Zatvoren podskup nizovno kompaktnog prostora je nizovno kompaktan.*
(ii) *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija. Ako je X nizovno kompaktan, onda je i Y nizovno kompaktan.*

Dokaz. (i) Neka je X nizovno kompaktan prostor i neka je $F \subseteq X$ zatvoren podskup od X. Neka je (x_n) niz u skupu F. Treba dokazati da (x_n) ima konvergentan (s obzirom na relativnu topologiju na F) podniz. Kako je X nizovno kompaktan prostor, to postoji konvergentan (s obzirom na topologiju na X) podniz (x_{n_k}) niza (x_n). Neka je $x_0 \in X$ limes tog podniza u X. Kako je F zatvoren, to je onda $x_0 \in F$. Tvrdimo da (x_{n_k}) konvergira prema x_0, s obzirom na relativnu topologiju na F. Neka je U po volji odabrana otvorena okolina točke x_0 u prostoru F. Sada postoji otvoren skup U_X u X takav da je $U = U_X \cap F$ i vrijedi $x_0 \in U = U_X \cap F$. Dakle, U_X je otvorena okolina točke x_0 u prostoru X. Sada postoji $k_0 \in \mathbb{N}$ tako da za svaki $k \geq k_0$ vrijedi $x_{n_k} \in U_X$. No, kako je (x_n) niz u skupu F, to je $x_{n_k} \in U_X \cap F = U$, za svaki $k \geq k_0$. Dakle, (x_{n_k}) konvergira prema x_0, s obzirom na relativnu topologiju na F. Time smo pronašli konvergentan podniz niza (x_n) u potprostoru F.
(ii) Neka je $(f(x_n))$ po volji odabran niz u prostoru Y. Kako je X nizovno kompaktan, to postoji konvergentan podniz (x_{n_k}) niza (x_n) u prostoru X. Neka je $x_0 \in X$ limes toga podniza. Kako je f neprekidna, to onda $f(x_{n_k})$ konvergira prema $f(x_0)$ u Y. Time smo pronašli konvergentan podniz niza $(f(x_n))$ u prostoru Y. ■

Teorem 5.7 *Vrijede sljedeće tvrdnje.*

(i) *Zatvoren podskup gomilišno kompaktnog prostora je gomilišno kompaktan.*

(ii) *Neka su X i Y topološki prostori i $f : X \to Y$ neprekidna bijekcija. Ako je X gomilišno kompaktan, onda je i Y gomilišno kompaktan.*

Dokaz. (i) Neka je X gomilišno kompaktan prostor i neka je $F \subseteq X$ zatvoren podskup od X. Neka je $A \subseteq F$ beskonačan podskup od F. Treba dokazati da A ima gomilište (s obzirom na relativnu topologiju na F). Kako je X gomilišno kompaktan prostor, to postoji gomilište (s obzirom na topologiju na X) $x_0 \in X$. Budući da je $A \subseteq F$ i F je zatvoren podskup od X, to je onda $x_0 \in \mathrm{Cl}_X\, A \subseteq \mathrm{Cl}_X\, F = F$. Tvrdimo da je x_0 gomilište (s obzirom na relativnu topologiju na F) skupa A. Neka je U po volji odabrana otvorena okolina točke x_0 u prostoru F. Sada postoji otvoren podskup U_X od X takav da je $U = U_X \cap F$ i $x_0 \in U = U_X \cap F$. Dakle, U_X je otvorena okolina točke x_0 u prostoru X, pa siječe skup $A \setminus \{x_0\}$, to jest $U_X \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. Kako je $A \setminus \{x_0\} \subseteq A \subseteq F$, to je onda

$$U \cap (A \setminus \{x_0\}) = U_X \cap F \cap (A \setminus \{x_0\}) = U_X \cap (A \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset.$$

Dakle, x_0 je gomilište (s obzirom na relativnu topologiju na F) skupa A.

(ii) Neka je $A \subseteq Y$ beskonačan podskup od Y. Kako je f bijekcija, to je $f^{-1}(A)$ beskonačan podskup od X. Prostor X je gomilišno kompaktan, pa $f^{-1}(A)$ ima gomilište $x_0 \in X$. Tvrdimo da je $f(x_0)$ gomilište za A. Neka je U po volji odabrana otvorena okolina točke $f(x_0)$. Sada je $f^{-1}(U)$ otvorena okolina točke x_0, pa siječe skup $f^{-1}(A) \setminus \{x_0\}$, to jest vrijedi $f^{-1}(U) \cap (f^{-1}(A) \setminus \{x_0\}) \neq \emptyset$. No, onda je $U \cap (A \setminus \{f(x_0)\}) \neq \emptyset$. Dakle, $f(x_0)$ je gomilište podskupa A u Y. ■

5.2 Veza s (prebrojivom) kompaktnosti

U ovom odjeljku povezat ćemo gomilišnu, nizovnu i prebrojivu kompaktnost.

Teorem 5.8 *Svaki prebrojivo kompaktan prostor je gomilišno kompaktan.*

Dokaz. Direktna posljedica Korolara 4.5. ■

Iz Primjera 4.6 možemo vidjeti da obrat ne vrijedi općenito. Međutim ako dodamo uvjet da se radi o T_1-prostoru, onda dobivamo sljedeći teorem.

Teorem 5.9 *Neka je X T_1-prostor.*
Ako je X gomilišno kompaktan, onda je X prebrojivo kompaktan.

Dokaz. Neka je X gomilišno kompaktan T_1-prostor. Po Teoremu 4.4 dovoljno je dokazati da svaki niz u x ima gomilište. Pa neka je (x_n) po volji odabran niz u prostoru X. Ako je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ konačan, onda postoji $x_0 \in \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tako da je $x_0 = x_n$, za beskonačno mnogo $n \in \mathbb{N}$. Sada se lako vidi da je x_0 gomilište niza (x_n). Pretpostavimo da je $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ beskonačan. Kako je X gomilišno kompaktan, onda postoji gomilište x_0 skupa $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Budući da je X T_1-prostor, onda svaka okolina točke x_0 siječe skup $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ u beskonačno mnogo točaka, iz čega odmah slijedi da je x_0 gomilište niza (x_n). ■

Teorem 5.10 *Svaki nizovno kompaktan prostor je prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. Neka je X nizovno kompaktan prostor. Kako svaki niz ima konvergentan podniz, to svaki niz ima gomište (limes tog konvergentnog podniza je gomilište niza), pa, po Teoremu 4.4, je X prebrojivo kompaktan. ■

Obrat ne vrijedi općenito, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 5.11 *Promatrajmo prostor $X = \Pi_{\alpha \in \mathbb{R}} X_\alpha$ gdje je $X_\alpha := [0, 1]$, za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$. Kako je $[0, 1]$ kompaktan podskup euklidskog prostora $\mathbb{R}$ i kompaktnost je multiplikativno svojstvo, to je X kompaktan, pa je i prebrojivo* *kompaktan. Tvrdimo da X nije nizovno kompaktan. Promatrajmo niz (n) u $\mathbb{N}$. Neka je f injekcija iz $\mathbb{R}$ u skup*

$$\{(a_n) \mid (a_n) \text{ je podniz od } (n)\}.$$

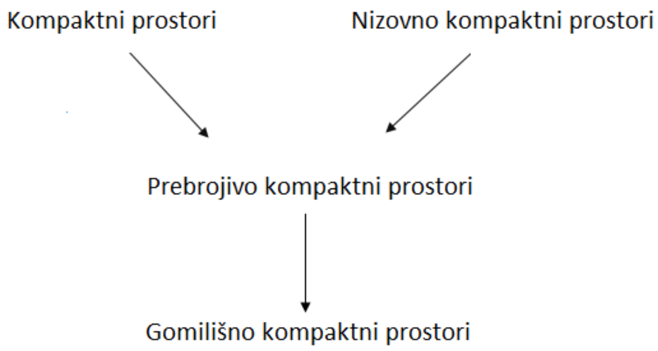
Definirajmo niz (x_n) u X na sljedeći način. Neka su $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ proizvoljni i neka je $f(\alpha) = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$. Ako postoji neparni broj j takav da je $n = a_j$, onda je $x_n(\alpha) := 0$, a inače $x_n(\alpha) := 1$. Neka je (x_{i_n}) konvergentan podniz niza (x_n) i neka je $\alpha_0 := f^{-1}((x_{i_n}))$. Sada niz $(x_{i_n}(\alpha_0))$ konverigira u $[0,1]$. No, to je kontradikcija sa činjenicom da su neparni članovi ovog niza 0, a parni 1.

Dakle, iz prethodnog primjera slijedi da čak ni kompaktnost ne povlači općenito nizovnu kompaktnost. Ono što nedostaje (prebrojivoj) kompaktnosti da bi povlačila nizovnu kompaktnost je svojstvo 1-prebrojivosti.

Teorem 5.12 *Neka je X 1-prebrojiv prostor.*
Ako je X (prebrojivo) kompaktan, onda je i nizovno kompaktan.

Dokaz. Neka je X 1-prebrojiv i (prebrojivo) kompaktan prostor. Tada, po Teoremu 4.4, svaki niz ima gomilište, a kako je X 1-prebrojiv, onda svaki niz ima konvergentan podniz (koji konvergira prema tom gomilištu), pa je X nizovno kompaktan. ■

Zanimljivo je da svojstvo da svaki niz ima konvergentan podniz nema nikakve povezanosti sa svojstvom kompaktnosti u proizvoljnom topološkom prostoru. Naime postoje prostori koji su kompaktni, a nisu nizovno kompaktni i obratno. Dakle, nizovno kompaktni prostori nisu generalizacija kompaktnih prostora kao što su to ostale klase topoloških prostora koje smo definirali. Primjer prostora koji je kompaktan, a nije nizovno kompaktan dan je u Primjeru 5.11. Sljedeći primjer je primjer nizovno kompaktnog prostora koji nije kompaktan.



Slika 5.1: Prikaz odnosa kompaktnih, nizovno kompaktnih, prebrojivo kompaktnih i gomilišno kompaktnih prostora.

Primjer 5.13 *Promatrajmo prostor* Ω_0. *U Primjeru 2.20 smo dokazali da* Ω_0 *nije parakompaktan prostor, pa nije ni kompaktan. Tvrdimo da je* Ω_0 *nizovno kompaktan. Kako smo u Primjeru 4.2 dokazali da je* Ω_0 *prebrojivo kompaktan, dovoljno je dokazati da je 1-prebrojiv, pa će, po prethodnom teoremu, slijediti da je i nizovno kompaktan. Neka je* $a \in \Omega_0 \setminus \{0\}$ *proizvoljan i neka je* $b \in \Omega_0$ *neposredni sljedbenik od* a. *Sada je* $\{\langle x, b\rangle \mid x < a\}$ *očigledno prebrojiva lokalna baza točke* a *u* Ω_0. *U slučaju* $a = 0$ *slijedi da je* $\{\{0\}\}$ *konačna lokalna baza od* a.

Sada direktno slijede navedeni korolari.

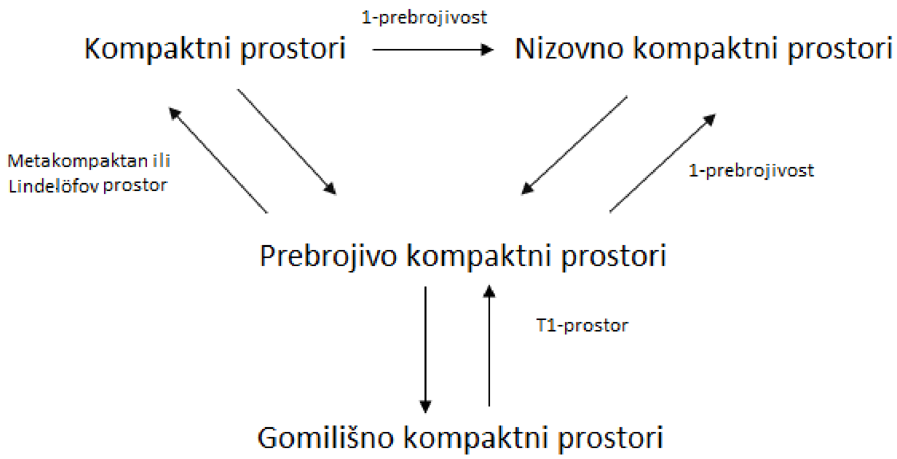
Korolar 5.14 *Neka je* X *1-prebrojiv* T_1*-prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X *je prebrojivo kompaktan.*
(ii) X *je gomilišno kompaktan.*
(iii) X *je nizovno kompaktan.*

Korolar 5.15 *Neka je X metakompaktan (ili Lindelöfov) 1-prebrojiv prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(*i*) *X je prebrojivo kompaktan.*
(*ii*) *X je nizovno kompaktan.*
(*iii*) *X je kompaktan.*

Korolar 5.16 *Neka je X metakompaktan (ili Lindelöfov) T_1-prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(*i*) *X je prebrojivo kompaktan.*
(*ii*) *X je gomilišno kompaktan.*
(*iii*) *X je kompaktan.*

Korolar 5.17 *Neka je X metakompaktan (ili Lindelöfov), 1-prebrojiv i T_1-prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(*i*) *X je prebrojivo kompaktan.*
(*ii*) *X je gomilišno kompaktan.*
(*iii*) *X je nizovno kompaktan.*
(*iv*) *X je kompaktan.*

A sada možemo nadopuniti prethodnu sliku, te na taj način vizualno predočiti odnose među poopćenjima kompaktnosti koje smo dokazali.



Slika 5.2: Prikaz odnosa klasa kompaktnih, nizovno kompaktnih, prebrojivo kompaktnih i gomilišno kompaktnih prostora.

Poglavlje 6

Pseudokompaktni prostori

6.1 Definicija i osnovna svojstva

Prisjetimo se Teorema 1.18 koji je tvrdio da je svaka neprekidna realna funkcija s kompaktnom domenom omeđena. Prirodno se postavlja pitanje karakterizira li to svojstvo kompaktnost. Odgovor je negativan, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 6.1 *Neka je X beskonačan skup i $x_0 \in X$. Neka je*

$$\mathcal{T} := \{A \subseteq X \mid x_0 \in A\} \cup \{\emptyset\}.$$

Lako se vidi da je $\mathcal{T}$ topologija na X. Dokazat ćemo da je proizvoljna neprekidna realna funkcija konstantna funkcija. Iz toga će odmah slijediti da prostor X ima svojstvo da je svaka neprekidna realna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$ omeđena. Neka je $f : X \to \mathbb{R}$ po volji odabrana neprekidna realna funkcija. Tvrdimo da je f konstantna funkcija. Pretpostavimo suprotno, to jest, neka postoji $x_1 \in X \setminus \{x_0\}$ tako da je $f(x_0) \neq f(x_1)$. Sada je $f^{-1}(\langle f(x_1) - |f(x_1) - f(x_0)|, f(x_1) + |f(x_1) - f(x_0)|\rangle)$ otvoren skup koji ne sadrži x_0, pa je prazan skup. No, to je kontradikcija sa činjenicom da sadrži

točku x_0. *Dakle,* f *je konstantna funkcija.*
Tvrdimo da X *nije gomilišno kompaktan. Kako je* X *beskonačan skup, to je i* $X \setminus \{x_0\}$ *beskonačan. Taj skup nema gomilište jer za svaku točku* $x \in X$ *je* $\{x, x_0\}$ *okolina točke* x *koja ne siječe* $(X \setminus \{x_0\}) \setminus \{x\}$. *Dakle,* X *nije gomilišno kompaktan, pa nije ni kompaktan.*

Ovo nas motivira da definiramo prostore koji imaju navedeno svojstvo.

Definicija 6.2 *Za topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *kažemo da je pseudokompaktan ako ima svojstvo da je svaka neprekidna realna funkcija* $f : X \to \mathbb{R}$ *omeđena.*

Iz definicije direktno slijedi da je prostor X pseudokompaktan ako i samo ako vrijedi $\mathcal{BC}(X, \mathbb{R}) = \mathcal{C}(X, \mathbb{R})$.

Teorem 6.3 *Pseudokompaktnost je invarijantno svojstvo s obzirom na neprekidnu surjekciju.*

Dokaz. Neka je X pseudokompaktan, Y topološki prostor i $f : X \to Y$ neprekidna surjekcija. Sada je svaka neprekidna realna funkcija $g : Y \to \mathbb{R}$ omeđena, jer u protivnome bi realna funkcija $gof : X \to \mathbb{R}$ bila neprekidna (kao kompozicija dvije neprekidne), koja nije omeđena. Međutim, to je kontradikcija sa činjenicom da je X pseudokompaktan.

■

Teorem 6.4 *Neka je* X *normalan pseudokompaktan prostor. Ako je* $A \subseteq X$ *zatvoren podskup od* X*, onda je i* A *pseudokompaktan.*

Dokaz. Za svaku neprekidnu realnu funkciju $f : A \to \mathbb{R}$ sa zatvorenog podskupa A normalnog prostora X, po Tietzeovom teoremu (vidi [7]), postoji neprekidno proširenje $g : X \to \mathbb{R}$ na cijeli prostor X. Kako je X pseudokompaktan, to g je omeđeno, pa je i f omeđeno (jer je $f(A) = g(A) \subseteq g(X)$).

■

6.2 Veza s ostalim poopćenjima kompaktnosti

Sada ćemo dovesti u vezu pseudokompaktnost sa svim dosadašnjim obrađenim poopćenjima kompaktnosti. Prvo je na redu prebrojiva kompaktnost.

Teorem 6.5 *Svaki prebrojivo kompaktan prostor je i pseudokompaktan.*

Dokaz. Pretpostavimo da je X prebrojivo kompaktan, ali nije pseudokompaktan. Sada postoji neprekidna realna funkcija $f : X \to \mathbb{R}$, tako da $f(X)$ nije omeđen. Budući da je f neprekidna funkcija, to je $\mathcal{U} := \{f^{-1}(\langle n, n \rangle) \mid n \in \mathbb{N}\}$ prebrojivi otvoreni pokrivač prostora X. S obzirom da $f(X)$ nije omeđen, slijedi da $\mathcal{U}$ nema konačan potpokrivač, što je kontradikcija s pretpostavkom da je X prebrojivo kompaktan. ∎

Sljedeći primjer pokazuje da obrat ne vrijedi općenito.

Primjer 6.6 *Neka je $f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$ po volji odabrana neprekidna realna funkcija, pri čemu je $\mathcal{T}_{lz}$ topologija lijevih zraka, a $\mathcal{T}_s$ euklidska topologija na $\mathbb{R}$. Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ po volji odabrana točka. Tvrdimo da je $f(x) = f(x_0)$, za svaki $x \in \mathbb{R}$. Neka je $x \in \mathbb{R}$ po volji odabrana točka različita od x_0. Primijetimo da je svaki podskup od $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$ povezan, pa je posebno i $A := \{x_0, x\}$ povezan podskup od $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$. To povlači da je $f(A)$ povezan podskup od $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_s)$, pa je $f(A)$ jednočlan, tj. $f(x_0) = f(x)$. Time smo dokazali da je f konstanta. Dakle, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$ je pseudokompaktan. Međutim, $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$ nije prebrojivo kompaktan, jer je, primjerice, $\{\langle \cdot, n \rangle \mid n \in \mathbb{N}\}$ prebrojiv otvoren pokrivač od $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{lz})$ koji nema konačan potpokrivač.*

Međutim ako je X normalan prostor vrijedi sljedeća tvrdnja.

Teorem 6.7 *Neka je X normalan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je gomilišno kompaktan.
(ii) X je prebrojivo kompaktan.
(iii) X je pseudokompaktan.

Dokaz. Po Teoremu 5.8 i Teoremu 5.9 vrijedi $(i) \Leftrightarrow (ii)$ u T_1-prostoru, pa posebno i u normalnom prostoru. Stoga dokažimo $(ii) \Leftrightarrow (iii)$.
$(ii) \Rightarrow (iii)$. Vrijedi po Teoremu 6.5
$(iii) \Rightarrow (ii)$. Pretpostavimo da je X pseudokompaktan, ali nije prebrojivo kompaktan. Sada postoji niz (x_n) koji nema gomilište u prostoru X. Budući da je X normalan, pa i T_1-prostor, to skup $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ nema gomilište. To povlači da je A zatvoren i diskretan. Definirajmo funkciju na sljedeći način:

$$f : A \to \mathbb{R},$$
$$f(x_n) := n, \ x \in X.$$

Budući da je A diskretan, to je f neprekidna funkcija. Kako je X normalan, po Tietzeovom teoremu (vidi [7]), postoji neprekidno proširenje $g : X \to \mathbb{R}$ funkcije f. Međutim, funkcija f nije omeđena, pa ni funkcija g nije omeđena, što je kontradikcija s pretpostavkom da je X pseudokompaktan. ■

Korolar 6.8 *Neka je X normalan prostor. Tada je X kompaktan ako i samo ako je metakompaktan i pseudokompaktan.*

Dokaz. Kako je X normalan prostor, iz prethodnog teorema slijedi da je pseudokompaktnost ekvivalentna prebrojivoj kompaktnosti, pa tvrdnja direktno slijedi iz Teorema 4.11. ■

Korolar 6.9 *Neka je X 1-prebrojiv normalan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) *X je gomilišno kompaktan.*
(ii) *X je prebrojivo kompaktan.*
(iii) *X je pseudokompaktan.*
(iv) *X je nizovno kompaktan.*

Dokaz. Slijedi iz prethodnog teorema i Korolara 5.14. ■

Korolar 6.10 *Neka je X metakompaktan i normalan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) *X je kompaktan.*
(ii) *X je prebrojivo kompaktan.*
(iii) *X je gomilišno kompaktan.*
(iv) *X je pseudokompaktan.*

Dokaz. Slijedi iz prethodnog teorema i Teorema 4.11. ■

Korolar 6.11 *Neka je X metakompaktan, 1-prebrojiv i normalan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) *X je kompaktan.*
(ii) *X je prebrojivo kompaktan.*
(iii) *X je gomilišno kompaktan.*
(iv) *X je pseudokompaktan.*
(v) *X je nizovno kompaktan.*

Dokaz. Direktna posljedica prethodna dva korolara. ■

Teorem 6.12 *Neka je X regularan Lindelöfov prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je kompaktan.
(ii) X je prebrojivo kompaktan.
(iii) X je gomilišno kompaktan.
(iv) X je pseudokompaktan.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Slijedi po Korolaru 4.12.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Po Teoremu 3.21 u klasi Lindelöfovih prostora, regularnost je ekvivalentna normalnosti, pa su ove dvije ekvivalencije direktna posljedica Teorema 6.7. $\blacksquare$

Korolar 6.13 *Neka je X 1-prebrojiv, regularan i Lindelöfov prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je kompaktan.
(ii) X je prebrojivo kompaktan.
(iii) X je gomilišno kompaktan.
(iv) X je pseudokompaktan.
(v) X je nizovno kompaktan.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema i Korolara 5.14. $\blacksquare$

Teorem 6.14 *Neka je X parakompatan Hausdorffov prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) X je kompaktan.
(ii) X je prebrojivo kompaktan.
(iii) X je gomilišno kompaktan.
(iv) X je pseudokompaktan.

Dokaz. (i) $\Leftrightarrow$ (ii). Slijedi po Korolaru 4.12.
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Po Teoremu 2.19 je svaki parakompaktan Hausdor-

ffov prostor je normalan, pa su ove dvije ekvivalencije direktna posljedica Teorema 6.7. ■

Korolar 6.15 *Neka je X 1-prebrojiv, parakompatan Hausdorffov prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*

(i) X je kompaktan.

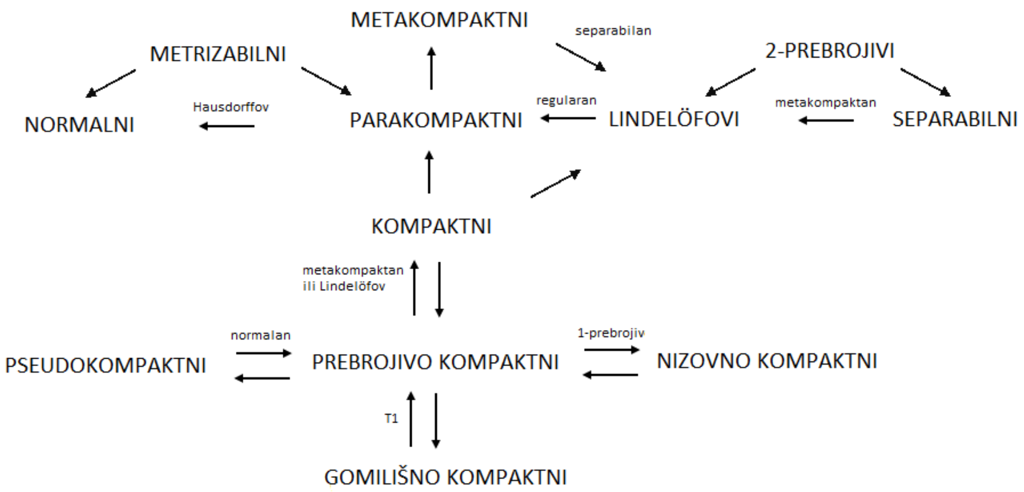
(ii) X je prebrojivo kompaktan.

(iii) X je gomilišno kompaktan.

(iv) X je pseudokompaktan.

(v) X je nizovno kompaktan.

Dokaz. Tvrdnja slijedi iz prethodnog teorema i Korolara 5.14. ■



Slika 6.1: Prikaz odnosa klasa kompaktnih, nizovno kompaktnih, prebrojivo kompaktnih, gomilišno kompaktnih, pseudokompaktnih, parakompaktnih, metakompaktnih, normalnih, metrizabilnih, Lindelöfovih, 2-prebrojivih i separabilnih prostora.

Poglavlje 7

Različita poopćenja kompaktnosti i metrizabilnost

Već smo vidjeli da određena poopćenja kompaktnosti, na nekim klasama topoloških prostora, postaju ekvivalentna. U prvom odjeljku ovog poglavlja vidjet ćemo što se dogodi na klasi metrizabilnih prostora. Nadalje, u drugom odjeljku, navest ćemo metrizacijske teoreme, u kojima ćemo vidjeti povezanost metrizabilnosti i parakompaktnosti.

7.1 Odnos različitih poopćenja kompaktnosti u klasi metrizabilnih prostora

Snaga metrizabilnosti topološkog prostora je da kompaktnost postaje ekvivalentno svojstvo sa svojim poopćenjima: prebrojivom kompaktnošću, gomilišnom kompaktnošću, nizovnom kompaktnošću, pseudokompaktnošću. O tome nam govori sljedeći teorem.

Teorem 7.1 *Neka je X metrizabilan prostor. Tada su sljedeće tvrdnje ekvivalentne.*
(i) *X je kompaktan.*
(ii) *X je pseudokompaktan.*
(iii) *X je gomilišno kompaktan.*
(iv) *X je nizovno kompaktan.*
(v) *X je prebrojivo kompaktan.*

Dokaz. S obzirom da je svaki metrizabilan prostor normalan, 1-prebrojiv i metakompaktan, tvrdnja slijedi iz Korolara 6.11. ■
Istaknimo da je taj korolar, kao i većina karakterizacija koje smo dobili, proizašao iz Teorema 4.11 koji kaže da je prostor kompaktan ako i samo ako je metakompaktan i prebrojivo kompaktan. Dakle, prava *snaga* je u tom teoremu.

7.2 Metrizacijski teoremi

Jedna od bitnih motivacija za uvođenje pojma parakompaktnosti je pitanje metrizabilnosti topološkog prostora. Prisjetimo se Urysohnovog metrizacijskog teorema (dokaz vidi u [5]).

Teorem 7.2 *Neka je X 2-prebrojiv regularan prostor. Tada je X metrizabilan.*

Urysohnov metrizacijski teorem nam daje dovoljne uvjete za metrizabilnost prostora. Prirodno se postavlja pitanje jesu li to i nužni uvjeti za metrizabilnost. Odgovor je ne, a to nam pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 7.3 *Neka je X neprebrojiv skup i neka je d diskretna metrika na X. Ova metrika inducira diskretnu topologiju. Kako je svaki jednočlani podskup* *od X otvoren, to svaka baza mora sadržavati sve jednočlane podskupove, pa ne može biti prebrojiva (jer je X neprebrojiv). Dakle, ovo je primjer topološkog prostora koji je metrizabilan, a nije 2-prebrojiv.*

Dakle, morat ćemo *oslabiti* uvjete u Urysohnovom metrizacijskom teoremu da bismo dobili karakterizaciju metrizabilnosti. Regularnost je nužno svojstvo i ne možemo ga *oslabiti.* Upravo zato možemo pokušati zamijeniti uvjet 2-prebrojivosti s nekim *slabijim* uvjetom. Dakle, taj uvjet mora biti dovoljno *jak* da implicira metrizabilnost, a dovoljno *slab* da ga svaki metrizabilni prostor zadovoljava. Dakle, umjesto postojanja prebrojive ili konačne baze prostora, imat ćemo zahtjev da postoji baza koja je σ-lokalno konačna. O tome govori Nagata-Smirnovljev teorem.
Prisjetimo se sada Teorema 3.15. U njemu smo dokazali da su u klasi regularnih Lindelöfovih prostora, 2-prebrojivost, metrizabilnost i lokalna metrizabilnost ekvivalentna svojstva. Dakle, postoji klasa regularnih prostora u kojima se 2-prebrojivost može zamijeniti sa svojstvom lokalne metrizabilnosti, ali to nije bilokakva klasa regularnih prostora, već su to također parakompaktani prostori. Budući da smo u Teoremu 2.24 dokazali da je svaki metrizabilan prostor parakompaktan, postavlja se pitanje ima li parakompaktnost veze s metrizabilnošću. Ispostavlja se da je topološki prostor metrizabilan ako i samo ako je parakompaktan Hausdorffov prostor koji je lokalno metrizabilan. Regularnost se izostavlja jer je svaki parakompaktan Hausdroffov prostor normalan, pa i regularan. Ovo je takozvani Smirnovljev teorem. Prvo ćemo dokazati Nagata-Smirnovljev teorem koji je povijesno dokazan ranije, a iz njega će slijediti Smirnovljev teorem. Nagata-Smirnovljev teorem možemo shvatiti kao poopćenje Urysohnovog teorema, dok Smirnovljev teorem možemo shvatiti kao poopćenje Teorema 3.15.

7.2.1 Nagata-Smirnovljev teorem

Već smo spomenuli da proizvoljan prebrojiv pokrivač $\mathcal{U} = \{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ topološkog prostora X ne mora općenito biti lokalno konačan. No, ako ga zapišemo na sljedeći način:

$$\mathcal{U} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{U_n\},$$

onda smo ga prikazali kao prebrojivu uniju lokalno konačnih množina. To nas je motiviralo za uvođenjem pojma σ-lokalno konačne množine u drugom poglavlju. Jedan od načina iskazivanja da je neki prostor 2-prebrojiv je da postoji baza $\mathcal{B}$ oblika

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n,$$

gdje je svaki $\mathcal{B}_n$ konačan. Dakle, ta baza, iako je prebrojiva, ne mora biti lokalno konačna, ali je možemo prikazati kao prebrojivu uniju konačnih množina (koje su i, posebno, lokalno konačne). Stoga je svaka prebrojiva baza posebno i σ-lokalno konačna. Način na koji ćemo oslabiti 2-prebrojivost je postojanje baze $\mathcal{B}$ oblika

$$\mathcal{B} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n,$$

gdje je svaki $\mathcal{B}_n$ lokalno konačan. Drugim riječima, zahtijevat ćemo postojanje baze koja je σ-lokalno konačna. Prije nego što dokažemo Nagata-Smirnovljev teorem, uvedimo novi pojam i dokažimo jednu pomoćnu tvrdnju.

Definicija 7.4 *Za podskup topološkog prostora X kažemo da je G_δ-skup ako se može prikazati kao prebrojiv presjek otvorenih podskupova od X.*

Primjer 7.5 *Skup svih iracionalnih brojeva $\mathbb{I}$ je G_δ-skup u euklidskom prostoru $\mathbb{R}$ jer ga možemo prikazati u obliku*

$$\mathbb{I} = \bigcap_{q\in\mathbb{Q}}(\mathbb{R} \setminus \{q\}).$$

Lema 7.6 *Neka je X regularan prostor sa σ-lokalno konačnom bazom $\mathcal{B}$. Tada je X normalan i svaki zatvoren podskup od X je G_δ-skup u X.*

Dokaz. Dokaz ćemo provesti u tri koraka.

1. korak. Pokazat ćemo da za svaki otvoren skup $U \subseteq X$ postoji prebrojiva množina $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ otvorenih skupova tako da je

$$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl} U_n.$$

Neka je $U \subseteq X$ po volji odabran otvoren podskup od X. Množina $\mathcal{B}$ je σ-lokalno konačna baza pa je možemo napisati u obliku $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, gdje je svaki $\mathcal{B}_n$ lokalno konačan. Definiramo:

$$\mathcal{C}_n := \{B \in \mathcal{B}_n \mid \operatorname{Cl} B \subseteq U\},$$
$$U_n := \bigcup_{B\in\mathcal{C}_n} B, \ n \in \mathbb{N}.$$

Sada je množina $\mathcal{C}_n$ lokalno konačna, jer je podmnožina od $\mathcal{B}_n$, pa, po Teoremu 2.7, slijedi

$$\operatorname{Cl} U_n = \operatorname{Cl}(\bigcup_{B\in\mathcal{C}_n} B) = \bigcup_{B\in\mathcal{C}_n} \operatorname{Cl} B \subseteq U,$$

što povlači $\operatorname{Cl} U_n \subseteq U$, za svaki $n \in \mathbb{N}$, pa je $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl} U_n \subseteq U$. Dokažimo jednakost ovih skupova. Neka je $x \in U$ proizvoljan. Zbog regularnosti prostora X postoji bazni element $B \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B$ i $\operatorname{Cl} B \subseteq U$. Sada je $B \in \mathcal{B}_n$, za neki $n \in \mathbb{N}$. Po definiciji množine $\mathcal{C}_n$ vrijedi $B \in \mathcal{C}_n$, pa je $x \in U_n$. Dakle, $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$. Time smo dokazali da je $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$.

2. korak. Sada ćemo pokazati da je svaki zatvoren podskup od X G_δ-skup u X. Neka je $C \subseteq X$ zatvoren podskup od X. Tada je $U := X \setminus C$ otvoren, pa, po 1. koraku, postoji prebrojiva množina $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tako da je

$U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl} U_n$, što povlači da je $C = X \setminus (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl} U_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}(X \setminus \operatorname{Cl} U_n)$. Sada je C G_δ-skup u X, jer je prikazan kao prebrojiv presjek otvorenih podskupova od X.

3. korak. Pokažimo da je X normalan.

Neka su $C, D \subseteq X$ po volji odabrani neprazni, zatvoreni i disjunktni podskupovi od X. Sada, po 1. koraku, postoji prebrojiva množina $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ tako da je $X \setminus D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \operatorname{Cl} U_n$. Primjetimo da množina $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ pokriva C i za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\operatorname{Cl} U_n$ disjunktan s D. Analogno dobijemo prebrojivu množinu $\{V_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ koja pokriva D i za svaki $n \in \mathbb{N}$ je $\operatorname{Cl} V_n$ disjunktan s C. Skupovi $U := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ i $V := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ su otvoreni podskupovi od X koji sadrže C i D redom, ali ne moraju nužno biti disjunktni, pa, za svaki $n \in \mathbb{N}$ definiramo ovakve skupove:

$$U_n' := U_n \setminus (\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Cl} V_i),$$
$$V_n' := V_n \setminus (\textstyle\bigcup_{i=1}^{n} \operatorname{Cl} U_i).$$

Sada su skupovi

$$U' := \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n',$$
$$V' := \textstyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n',$$

tražene disjunktne otvorene okoline skupova C i D redom. Naime, svaki U_n' je otvoren kao razlika otvorenog i zatvorenog skupa, što povlači da je i U' otvoren. Analogno zaključujemo da je i V' otvoren. Pokažimo da su U' i V' disjunktni. Neka je $x \in U' \cap V'$. Tada je $x \in U_j' \cap V_k'$ za neke $j, k \in \mathbb{N}$. Bez smanjenja općenitosti, pretpostavimo $j \leq k$. Po definiciji skupa U_j' slijedi $x \in U_j$. Kako je $j \leq k$, po definiciji skupa V_k', slijedi $x \notin \operatorname{Cl} U_j$, što je kontradikcija sa $x \in U_j$. $\blacksquare$

Primjer 7.7 *Neka je X metrizabilan prostor i d neka metrika koja inducira pripadnu topologiju. Neka je $A \subseteq X$ zatvoren podskup od X. Tada je*

$$A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} B(A, 1/n),$$

gdje je $B(A, 1/n) := \bigcup_{a \in A} B(a, 1/n)$.

Prethodna lema prirodno postavlja pitanje jesu li normalnost i zahtjev da je svaki zatvoren podskup G_δ-skup traženi uvjeti za karakterizaciju metrizabilnosti. Sljedeći primjer pokazuje da je, na navedeno pitanje, odgovor negativan.

Primjer 7.8 *Neka je $\mathcal{T}_{dl}$ topologija donjeg limesa na $\mathbb{R}$. Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$ je separabilan, a nije 2-prebrojiv, iz čega zaključujemo da nije ni metrizabilan. Prostor $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$ je normalan (po [7]). Umjesto da dokažemo da je svaki zatvoren podskup od $\mathbb{R}$ G_δ-skup, dokazat ćemo ekvivaletno svojstvo:*
Svaki otvoren podskup se može prikazati kao prebrojiva unija zatvorenih podskupova.
Neka je $U \subseteq \mathbb{R}$ otvoren skup. Promatrajmo nutrinu $\mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$ skupa U, s obzirom na euklidsku topologiju $\mathcal{T}$ na $\mathbb{R}$. Vrijedi $\mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U \subseteq U$.
Slučaj 1: $U \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U \neq \emptyset$.
Vrijedi:

$$(\forall x \in U \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U)(\exists z_x \in \mathbb{R}) \ \ [x, z_x\rangle \subseteq U$$

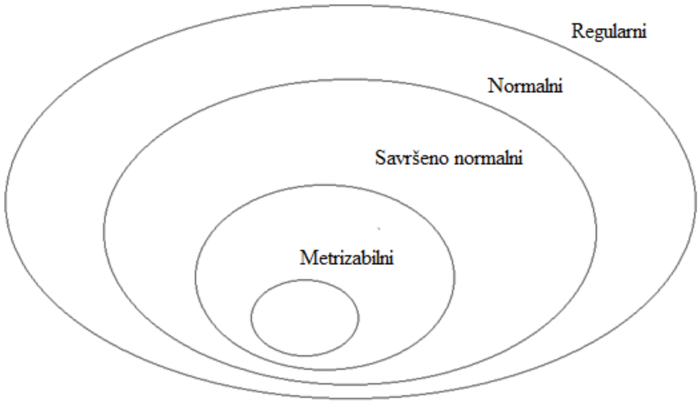
Ako pretpostavimo da je $[x, z_x\rangle \cap [y, z_y\rangle \neq \emptyset$, za neke dvije različite točke $x, y \in U \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$, onda vrijedi $x < y < z_x$ ili $y < x < z_y$.
Ako je $x < y < z_x$, onda je $y \in \langle x, z_x\rangle \subseteq \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$, što je kontradikcija s $y \in U \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$.
Ako je $y < x < z_y$, onda je $x \in \langle y, z_y\rangle \subseteq \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$, što je kontradikcija s $x \in U \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$.

Dakle, množina $\{[x, z_x\rangle \mid x \in U \backslash \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U\}$ *je sastavljena od otvorenih međusobno disjunktnih skupova. Kako je prostor* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$ *separabilan, to postoji prebrojiv ili konačan gust podskup* D *od* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$*. Sada za svaki* $x \in U \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$ *postoji* $d_x \in [x, z_x\rangle \cap D$*. Pridruživanje* $[x, z_x\rangle \longmapsto d_x$ *je injekcija, jer kad bi postojale dvije različite točke* $x, y \in U \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$ *tako da je* $d_x = d_y$*, onda bi vrijedilo* $d_x = d_y \in [x, z_x\rangle \cap [y, z_y\rangle = \emptyset$*, što je očita kontradikcija. Kako je navedeno pridruživanje injekcija i* D *je prebrojiv ili konačan skup, to je onda i množina* $\{[x, z_x\rangle \mid x \in U \backslash \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U\}$*, najviše prebrojiva, pa je i* $U \backslash \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$ *najviše prebrojiv. Sada je* $U \backslash \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$ *prebrojiva ili konačna unija jednotočkovnih podskupova* T_1*-prostora* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$*, pa je* $U \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$ *prebrojiva ili konačna unija zatvorenih podskupova. Nadalje,* $\mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$ *je otvoren u* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$*, koji je metrizabilan, stoga se* $\mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$ *može prikazati kao prebrojiva unija zatvorenih podskupova od* $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ *koji su zatvoreni i u* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$*, jer je* $\mathcal{T}_{dl}$ *finija topologija od* $\mathcal{T}$*.*
Primijetimo da nam je riješen slučaj 2, jer ako je $U \setminus \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U = \emptyset$*, onda je* $U = \mathrm{Int}_{\mathcal{T}} U$*, što povlači da se* U *može prikazati kao prebrojiva unija zatvorenih skupova u* $(\mathbb{R}, \mathcal{T}_{dl})$*.*

Ovime smo dobili novu klasu prostora, koju definiramo na sljedeći način.

Definicija 7.9 *Neka je* $(X, \mathcal{T})$ *topološki prostor. Kažemo da je* X *savršeno normalan ako je normalan i ima svojstvo da je svaki zatvoren podskup od* X G_δ*-skup u* X*.*

Dakle, klasa savršeno normalnih prostora je nadklasa normalnih prostora i prava podklasa metrizabilnih prostora. Nadalje, prostor koji je regularan i ima σ-lokalnu konačnu bazu topologije je savršeno normalan. Postavlja se pitanje vrijedi li više, to jest, je li čak i metrizabilan. Odgovor na to pitanje je potvrdan. U tu svrhu imamo sljedeće leme.



Slika 7.1: Prikaz odnosa klasa regularnih, normalnih, savršeno normalnih i metrizabilnih prostora.

Lema 7.10 *Neka je X normalan prostor i neka je C zatvoren G_δ-skup u X. Tada postoji neprekidna funkcija $f : X \to [0,1]$ tako da je $f(x) = 0$, za $x \in C$, i $f(x) > 0$, za $x \notin C$.*

Dokaz. Kako je C G_δ-skup u X, može se napisati kao presjek množine otvorenih skupova $\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Za svaki $n \in \mathbb{N}$ odaberimo neprekidnu funkciju $f_n : X \to [0,1]$, takvu da je $f_n(x) = 0$, za $x \in C$ i $f_n(x) = 1$, za $x \notin X \setminus U_n$. Takva funkcija postoji po Urysohnovom teoremu (vidi [7]). Definiramo funkciju $f : X \to [0,1]$, $f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)/2^n$. Kako vrijedi

$$(\forall x \in [0,1])(\forall n \in \mathbb{N})\ |f_n(x)|/2^n \leq 1/2^n,$$

i red $\sum 1/2^n$ konvergira, to je f dobro definirana funkcija, te, po Weierstrassovom M-testu, red $\sum_{n=1}^{\infty} f_n/2^n$ konvergira uniformno prema f, pa je f neprekidna funkcija. Nadalje, tvrdimo da je $f(x) = 0$, za svaki $x \in C$ i $f(x) > 0$, za svaki $x \notin C$. Za svaki $x \in C$ vrijedi $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)/2^n = \sum_{n=1}^{\infty} 0/2^n = 0$. Neka je $x \in X \setminus C$. Sada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ tako da $x \notin U_{n_0}$. Kako su f_n nenegativne funkcije, vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)/2^n > f_{n_0}(x)/2^{n_0} = 1/2^{n_0}$$

Dakle, f iščezava na C i pozitivna je na $X \setminus C$. ■

Uvodimo sljedeću definiciju kako bismo naveli dovoljne uvjete da funkcija $F : X \to [0,1]^\Lambda$ bude ulaganje u produkt.

Definicija 7.11 *Neka je $(X, \mathcal{T})$ topološki prostor. Kažemo da je familija $(f_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ neprekidnih funkcija $f_\lambda : X \to Y$, $Y \subseteq \mathbb{R}$, separira točke od zatvorenih skupova ako za svaku točku $x \in X$ i za svaku okolinu $U \in \mathcal{O}(x)$ postoji $\lambda \in \Lambda$ tako da je $f_\lambda(x) > 0$ i $f_\lambda(X \setminus U) = \{0\}$.*

Lema 7.12 *Neka je X T_1-prostor. Pretpostavimo da je $(f_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ familija neprekidnih funkcija $f_\lambda : X \to \mathbb{R}$ koja separira točke od zatvorenih skupova. Tada je funkcija*

$$F : X \to \mathbb{R}^\Lambda,$$
$$F(x) := (f_\lambda(x))_{\lambda \in \Lambda},\ x \in X,$$

ulaganje prostora X u produkt $\mathbb{R}^\Lambda$. Posebno, ako je f_λ funkcija iz X u $[0,1]$, za svaki $\lambda \in \Lambda$, onda je F ulaganje prostora X u produkt $[0,1]^\Lambda$.

Dokaz. Za početak primijetimo da je F neprekidna, jer je svaka od funkcija f_λ neprekidna. Nadalje, za različite točke $x, y \in X$ vrijedi da je $\{y\}$ zatvoren skup, pa je $X \setminus \{y\} \in \mathcal{O}(x)$. Kako familija $(f_\lambda, \lambda \in \Lambda)$ separira točke od zatvorenih skupova, to postoji $\lambda \in \Lambda$ tako da je $f_\lambda(x) > 0$ i $f_\lambda(y) = 0$ pa je $F(x) \neq F(y)$. Dakle, F je injektivna. Moramo pokazati da je F homeomorfizam iz X u sliku $F(X) \subseteq \mathbb{R}^\Lambda$. Zasada znamo da je F neprekidna bijekcija iz X u $F(X)$, pa samo još moramo pokazati da za svaki otvoren podskup U od X vrijedi da je $F(U)$ otvoren u $F(X)$. Neka je U po volji odabran otvoren podskup od X i neka je $F(x_0) \in F(U)$ proizvoljna točka. Trebamo pronaći okolinu W točke $F(x_0)$ u potprostoru $F(X)$ tako da je

$$F(x_0) \in W \subseteq F(U).$$

Odaberimo $\lambda_0 \in \Lambda$ tako da je $f_{\lambda_0}(x_0) > 0$ i $f_{\lambda_0}(X \setminus U) = \{0\}$. Sada je $W := \pi_{\lambda_0}^{-1}(\langle 0, +\infty \rangle) \cap F(X)$ otvoren u $F(X)$ i vrijedi $F(x_0) \in W$, jer je

$$\pi_{\lambda_0}(F(x_0)) = f_{\lambda_0}(x_0) > 0.$$

Nadalje, vrijedi $W \subseteq F(U)$. Naime, za $F(x) \in W$ vrijedi $\pi_{\lambda_0}(F(x)) \in \langle 0, +\infty \rangle$. Kako je $f_{\lambda_0}(x) = \pi_{\lambda_0}(F(x))$ i f_{λ_0} iščezava izvan U, to je $x \in U$, odnosno $F(x) \in F(U)$. Dakle, vrijedi $F(x_0) \in W \subseteq F(U)$, pa je $F(U)$ otvoren u $F(X)$. ■

Sada dokažimo da je regularnost i postojanje σ-lokalno konačne baze ekvivalentno metrizabilnosti. Ideja dokaza je da uložimo topološki prostor X u neki metrizabilni prostor. Prethodne leme će nam omogučiti da uložimo X u produkt $[0,1]^\Lambda$. No, kako topologija $\mathcal{T}_{d_{\text{sup}}}$ generirana metrikom d_{sup} na prostoru $[0,1]^\Lambda$ profinjuje produktnu topologiju, to ulaganje će biti otvoreno preslikavanje s obzirom na $\mathcal{T}_{d_{\text{sup}}}$. Međutim, treba provjeriti je li i neprekidno.

Teorem 7.13 (Nagata-Smirnovljev) *Topološki prostor X je metrizabilan ako i samo ako je regularan i ima bazu koja je σ-lokalno konačna.*

Dokaz. Dokažimo nužnost.

Neka je X metrizabilan. Tada je X regularan pa treba samo dokazati da postoji njegova baza koja je σ -lokalno konačna. Odaberimo po volji metriku d na X koja metrizira pripadnu topologiju. Sada je $\{B_d(x, 1/n) \mid x \in X\}$ otvoreni pokrivač prostora X. Po Teoremu 2.24 postoji njegovo lokalno konačno otvoreno profinjenje $\mathcal{B}_n$. Primijetimo da svaki element iz $\mathcal{B}_n$ ima dijametar jednak najviše $2/n$. Neka je

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n.$$

Sada je $\mathcal{B}$ σ-lokalno konačan. Pokažimo da je $\mathcal{B}$ baza prostora X.
Neka su $x \in X$ i $\varepsilon > 0$ po volji odabrani. Odaberimo $n \in \mathbb{N}$ tako da je $1/n < \varepsilon/2$. Kako $\mathcal{B}_n$ pokriva X, možemo odabrati element $B \in \mathcal{B}_n$ koji sadržava x. Kako B sadržava x i ima dijametar najviše $2/n < \varepsilon$, sadržan je u kugli $B_d(x, \varepsilon)$. Dakle, X je regularan i $\mathcal{B}$ je njegova σ -lokalno konačna baza.

Dokažimo dovoljnost.
Neka je X regularan i neka je $\mathcal{B}$ baza prostora X koja je σ-lokalno konačna. Tada je $\mathcal{B}$ oblika $\mathcal{B} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_n$, gdje je svaka množina $\mathcal{B}_n$ lokalno konačna. Po Lemi 7.6 je X normalan i svaki zatvoren podskup od X je G_δ-skup. Sada možemo primijeniti Lemu 7.10 na način da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i za svaki $B \in \mathcal{B}_n$ odaberemo neprekidnu funkciju $g_{n,B} : X \to [0,1]$ tako da je $g_{n,B}(x) > 0$ za $x \in B$ i $g(x) = 0$ za $x \notin B$. Sada za svaki $n \in \mathbb{N}$ i $B \in \mathcal{B}_n$, neka je $f_{n,B} : X \to [0, 1/n]$, $f_{n,B}(x) = g_{n,B}(x)/n$.
Množina $\{f_{n,B} \mid n \in \mathbb{N}, B \in \mathcal{B}_n\}$ separira točke i zatvorene skupove u X. Neka je $x_0 \in X$ po volji odabrana točka i neka je $U \in \mathcal{O}(x)$ njezina proizvoljna okolina. Postoji bazni element $B \in \mathcal{B}$ tako da je $x_0 \in B \subseteq U$. Sada je $B \in \mathcal{B}_n$ za neki $n \in \mathbb{N}$, pa je $f_{n,B}(x_0) > 0$ i $f_{n,B}$ iščezava izvan U.
Neka je podskup $\Lambda \subseteq \mathbb{N} \times \mathcal{B}$ takav da za svaki $(n, B) \in \Lambda$ vrijedi $B \in \mathcal{B}_n$. Definiramo:

$$F : X \to [0,1]^\Lambda,$$
$$F(x) := (f_{n,B}(x))_{(n,B)\in\Lambda},\ x \in X.$$

S obzirom na produktnu topologiju na $[0,1]^\Lambda$, po Lemi 7.12, F je ulaganje. Da bismo dokazali metrizabilnost prostora X dokazat ćemo da je F ulaganje u $[0,1]^\Lambda$, s obzirom topologiju induciranu uniformnom metrikom

$$d_{unif}((x_\lambda), (y_\lambda)) := \sup\{|x_\lambda - y_\lambda|/(1 + |x_\lambda - y_\lambda|) : \lambda \in \Lambda\}.$$

Uniformna topologija je finija od produktne topologije (vidi [7]), pa je F injektivno i otvoreno preslikavanje, s obzirom na uniformnu topologiju na potprostoru $F(X)$.

Primijetimo da je na potprostoru $[0,1]^\Lambda$ od $\mathbb{R}^\Lambda$ uniformna metrika topološki ekvivalentna metrici (to jest inducira istu topologiju):

$$d_{sup} : [0,1]^\Lambda \times [0,1]^\Lambda \to \mathbb{R},$$
$$d_{sup}((x_\lambda),(y_\lambda)) := \sup\{|x_\lambda - y_\lambda| : \lambda \in \Lambda\}.$$

Dokažimo neprekidnost.

Neka je $x_0 \in X$ proizvoljna točka i neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Moramo pronaći okolinu $W \in \mathcal{O}(x_0)$ tako da vrijedi:

$$x \in W \Rightarrow d_{sup}(F(x), F(x_0)) < \varepsilon$$

Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Kako je $\mathcal{B}_n$ lokalno konačan, to postoji okolina $U_n \in \mathcal{O}(x_0)$ koja siječe samo konačno mnogo elemenata množine $\mathcal{B}_n$. To znači da samo konačno mnogo funkcija $f_{n,B_1}, \dots, f_{n,B_{k(n)}}$ skupa $\{f_{n,B} \mid B \in \mathcal{B}_n\}$ ne iščezavaju ni u jednoj točki skupa U_n. Kako je svaka od funkcija $f_{n,B_1}, \dots, f_{n,B_{k(n)}}$ neprekidna, to postoje okoline $V_{n,i} \in \mathcal{O}(x_0)$ tako da je $V_{n,i} \subseteq U_n$ i $f_{n,B_i}(V_{n,i}) \subseteq B(f_{n,B_i}(x_0), \varepsilon/2)$, za $i = 1, \dots, k(n)$. Stavimo $V_n := V_{n,1} \cap \dots \cap V_{n,k(n)}$. Odaberimo $N \in \mathbb{N}$ tako da je $1/N \leq \varepsilon/2$ i definirajmo $W := V_1 \cap \dots \cap V_N$. Tvrdimo da je W tražena okolina. Neka je $x \in W$ po volji odabrana.

Za $n \leq N$ vrijedi

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq \varepsilon/2,$$

jer $f_{n,B}$ ili iščzava ili *varira* najviše $\varepsilon/2$ na W, za svaki $B \in \mathcal{B}_n$.

Za $n > N$ vrijedi

$$|f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| \leq 1/n < \varepsilon/2,$$

jer je kodomena od $f_{n,B}$ jednaka $[0, 1/n]$, za svaki $B \in \mathcal{B}_n$. Dakle,

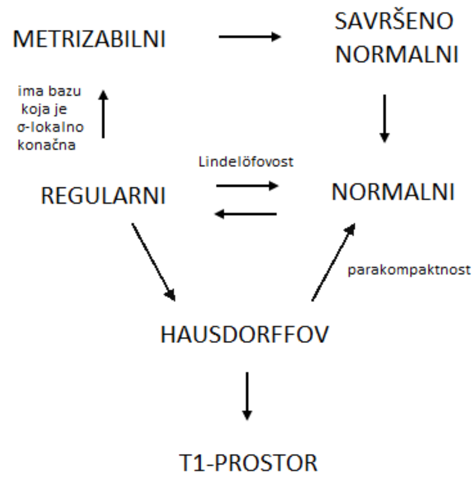
$$(\forall (n, B) \in \Lambda)(\forall x \in W) \quad |f_{n,B}(x) - f_{n,B}(x_0)| < \varepsilon/2,$$

pa vrijedi

$$(\forall x \in W) \quad d_{sup}(F(x), F(x_0)) \leq \varepsilon/2 < \varepsilon.$$

■

Primijetimo da Urysohnov metrizacijski teorem slijedi direktno iz Nagata-Smirnovljevog teorema.



Slika 7.2: Prikaz međusobnih odnosa klasa metrizabilnih, savršeno normalnih, normalnih, regularnih prostora, Hausdorffovih i T_1-prostora.

7.2.2 Smirnovljev teorem

Smirnovljev teorem dobivamo kao posljedicu Nagata-Smirnovljevog teorema, a koristi svojstvo parakompaktnosti, što je prvo poopćenje kompaktnosti koje smo uveli. Navedeni teorem možemo shvatiti kao poopćenje Teorema 3.15.

Teorem 7.14 (Smirnovljev) *Topološki prostor* $(X, \mathcal{T})$ *je metrizabilan ako i samo ako je parakompaktan Hausdorffov i lokalno metrizabilan prostor.*

Dokaz. Dokažimo nužnost.
Neka je X metrizabilan. Tada je X Hausdorffov i lokalno metrizabilan, a parakompaktnost slijedi iz Teorema 2.24.
Dokažimo dovoljnost.
Neka je X parakompaktan Hausdorffov i lokalno metrizabilan prostor. Po Lemi 2.18 slijedi da je X regularan, pa ako pokažemo da postoji σ-lokalno konačna baza prostora X, iz Nagata-Smirnovljevog teorema će nam slijediti metrizabilnost prostora X. Stoga pokažimo da postoji σ-lokalno konačna baza prostora X. Kako je X lokalno metrizabilan, to za svaku točku $x \in X$ postoji njezina metrizabilna okolina. Množina nutrina svih tih okolina čini otvoreni pokrivač od X, pa, zbog parakompaktnosti prostora X, postoji njezino otvoreno lokalno konačno profinjenje $\mathcal{C}$. Svaki $C \in \mathcal{C}$ je metrizabilan, jer je podskup metrizabilne okoline neke točke $x \in X$. Neka je d_C po volji odabrana metrika koja metrizira relativnu topologiju na $C \in \mathcal{C}$. Promatrajmo proizvoljnu kuglu $B_C(x, \varepsilon)$ u prostoru C. Ona je otvorena u C, a kako je C otvoren u X, to je onda i kugla $B_C(x, \varepsilon)$ otvorena u X. Definirajmo

$$\mathcal{A}_n := \{B_C(x, 1/n) \mid x \in C \text{ i } C \in \mathcal{C}\},\ n \in \mathbb{N}.$$

Sada je $\mathcal{A}_n$ otvoreni pokrivač od X, pa, zbog parakompaktnosti prostora X, postoji otvoreno lokalno konačno profinjenje $\mathcal{B}_n$ od $\mathcal{A}_n$. Stavimo da je

$$\mathcal{B} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{B}_n.$$

Očito je $\mathcal{B}$ σ-lokalno konačan. Dokažimo da je $\mathcal{B}$ baza prostora X. Neka je U proizvoljan neprazan otvoren podskup od X i neka je $x \in U$ prozvoljna točka. Tražimo $B \in \mathcal{B}$ tako da je $x \in B \subseteq U$. Kako je $\mathcal{C}$ lokalno konačan, to je i točkovno konačan, pa x pripada najviše konačno mnogo elemenata $C_1, \ldots, C_k$ množine $\mathcal{C}$. Sada je $U \cap C_i$ okolina točke x u prostoru C_i, pa postoji $\varepsilon_i > 0$ tako da je

$$B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subseteq U \cap C_i, \ \ i \in \{1, \ldots, k\}.$$

Po Arhimedovom aksiomu možemo odabrati $n \in \mathbb{N}$ tako da je $2/n < \min\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_k\}$. Kako $\mathcal{B}_n$ pokriva X, to postoji $B \in \mathcal{B}_n$ tako da je $x \in B$. Budući da $\mathcal{B}_n$ profinjuje $\mathcal{A}_n$, to postoji $B_C(y, 1/n) \in \mathcal{A}_n$ tako da je

$$x \in B \subseteq B_C(y, 1/n).$$

Točka x pripada skupu C, pa C mora biti jedan od skupova $C_1, \ldots, C_k$. To jest, $C = C_i$, za neki $i = 1, \ldots, k$. Kako $B_C(y, 1/n)$ ima dijametar manji ili jednak $2/n < \varepsilon_i$, slijedi

$$x \in B \subseteq B_{C_i}(y, 1/n) \subseteq B_{C_i}(x, \varepsilon_i) \subseteq U,$$

što dokazuje traženu tvrdnju. ■

Literatura

[1] J. Dugundji, *Topology*, Allyn and Bacon, University of Michigan, 1966.

[2] R. Engelking, *General Topology*, PWN - Polish Scientific Publishers, Warszawa, 1977.

[3] J. L. Kelly, *General Topology*, Ishi Press International, Boston, 2008

[4] S. Mardešić, *Matematička analiza u n-dimenzionalnom prostoru (Prvi dio)*, Školska knjiga, Zagreb, 1988.

[5] V. Matijević, *Metrički prostori* (interna skripta), Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, 2020.

[6] V. Matijević, *Normirani prostori* (interna skripta), Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, 2022.

[7] V. Matijević, *Opća topologija* (interna skripta), Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu

[8] V. Matijević, *Teorija skupova* (interna skripta), Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, 2013.

[9] V. Matijević, D. Peran, *Elementi opće topologije* (nerecenzirani udžbenik), Prirodoslovno-matematički fakultet, Sveučilište u Splitu, 2023.

[10] J. Munkres, *General Topology*, Pearson Education, London, 2013.

[11] P. Papić, *Teorija skupova*, HMD, Zagreb, 1999.

[12] C. W. Patty, *Foundation of Topology*, PWS-KENT Publishing Company, Boston, 1993.

[13] L. A. Steen, J. A. Seebach, *Counterexamples in Topology*, Dover Publications, New York, 1995.

[14] Š. Ungar, *Matematička analiza 3*, PMF-Matemački odsjek, Zagreb, 2002. dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/MA/Analiza3.pdf` dana 5. prosinca 2023.

[15] Š. Ungar, predavanja i vježbe na kolegiju Opća topoologija, PMF-Matemački odsjek, Sveučilište u Zagreb, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/~ungar/NASTAVA/OT/opca.html` dana 5. prosinca 2023.

[16] M. Vuković, Teorija skupova, predavanja, PMF-Matematički odsjek, Sveučilište u Zagrebu, dostupno na `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/ts/materijali/ts-skripta-2015.pdf`, dana 5. prosinca 2023.