Igre sume nula

Bešlić, Ivana

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

IVANA BEŠLIĆ

IGRE SUME NULA

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

IGRE SUME NULA

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Ivana Bešlić

Mentor:
doc. dr. sc. Aljoša Šubašić

Split, rujan 2023.

Zahvaljujem se roditeljima i Domi na ljubavi i pomoći sve ove godine.

Uvod

Teorija igara je interdisciplinarno područje koje se bavi analizom odluka i ponašanja pojedinaca u situacijama sukoba i suradnje, poznatijim kao „igre”. Ova teorija koristi matematičke modele kako bi analizirala takve situacije i izvela optimalne strategije za igrače. Unatoč dugoj povijesti matematike i još dužem postojanju društvenih igara i interesa za pobjedom u istima, teorija igara smatra se novijom granom znanosti.

Osnove teorije igara nalazimo početkom 20. stoljeća u radu matematičara Emila Borela, ali svoj najizražajniji napredak bilježi od 1944. godine kada su John von Neumann i Oskar Morgenstern objavili knjigu „Theory of Games and Economic Behavior”, u kojoj su predstavljeni temeljni koncepti teorije igara, te uspostavljene veze s rješavanjem problema u ekonomiji i drugim društvenim znanostima.

U sljedećim poglavljima upoznat ćemo se s osnovnim pojmovima teorije igara, a posebno ćemo se baviti igrama sume nula. Te igre su nam osobito zanimljive jer odgovaraju situacijama čistog sukoba, jer dobitci igrača u tim igrama su suprotni. Na konkretnim primjerima pokazat ćemo kako u ovisnosti u o broju igrača, igri i njenoj složenosti, odabrati najbolju strategiju. Pokazat ćemo primjenu takvih igara u realnim situacijama kao što su primjene u ratovanju i Newcombovom problemu, te možemo li dati odgovor na filozofska pitanja u problemu slobodne volje.

Kroz sljedeće poglavlje pokazat ćemo prednosti prikazivanja igre stablom u slučaju igri s velikim brojem strategija. Razlikovat ćemo igre savršene i nepotpune informacije, te analizirati primjer natjecateljskog odlučivanja. Na samom kraju upoznat ćemo se s vrlo popularnom teorijom korisnosti i njenim najvažnijim rezultatima.

Sadržaj

Uvod **iv**

Sadržaj **vi**

1 Osnovni pojmovi **1**

1.1 Strateške igre i racionalni igrači 1

1.2 Dominantne strategije i sedlaste točke 4

1.3 Mješovite strategije 8

2 Primjene teorije igara **12**

2.1 Primjene u ratovanju 12

2.2 Newcombov problem i slobodna volja 18

3 Sekvencijalne igre **22**

3.1 Igre prikazane stablima 22

3.2 Natjecateljsko odlučivanje 27

4 Teorija korisnosti **32**

Literatura **39**

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi

1.1 Strateške igre i racionalni igrači

Kao što je u uvodu rečeno, u ovom radu bavit ćemo se proučavanjem postupaka pojedinaca u situacijama sukoba i/ili suradnje, tj.situacijama u kojima ishod ne ovisi samo o jednom subjektu već i akcijama ostalih sudionika.
Igrom ćemo smatrati situaciju u kojoj:

- sudjeluju barem dva igrača. Igrači mogu biti pojedinci, ali i tvrtke, nacije, određene skupine. . .
- svaki igrač ima određene strategije, odnosno odluke koje kroz igru može poduzeti
- odabrana strategija svakog igrača utječe na krajnji ishod igre
- svakom mogućem ishodu igre dodijeljena je numerička vrijednost, jedna po svakom igraču. Te vrijednosti predstavljaju profit (dobit) igrača po odigranom potezu.

1.1. Strateške igre i racionalni igrači

Sudionike u igri ćemo zvati igračima i od svih igrača očekujemo da su racionalni. Igra racionalog igrača sadržavat će odluke usmjerene ostvarenju što većeg osobnog profita, imajući na umu da ostali igrači donose odluke koje su najpovoljnije za njih. Krajnji cilj svakog igrača je maksimizirati svoj profit, pa će u nekim igrama odluke igrača ponekad uključivati i odabire kada i s kim surađivati. Takve primjere u realnom svijetu pronalazimo u politici kroz parlamentarne izbore, biologiji prateći životinjske vrste s boljim svojstvima prilagodbe…

Na sljedećem jednostavnom primjeru pokazat ćemo situaciju koja će nam biti od interesa. Bavit ćemo se igrama s dva igrača i zvat ćemo ih Mia i Luka. Pretpostavit ćemo da u ovoj igri Mia ima 3 moguće strategije (pridružene redcima), a Luka dvije (pridružene stupcima) i situaciju ćemo prikazati tablicom.

	A	B
X	(2,-2)	(-3,3)
Y	(0,0)	(2,-2)
Z	(-5,5)	(10,-10)

Tablica 1.1: Igra sume nula

Prve koordinate uređenog para označavaju vrijednost koju odabirom te strategije osvaja Mia, a druge Luka. Važno je primijetiti da u ovakvoj igri odabir bilo koje strategije daje 0 kao sumu profita igrača. To znači, da su u ovakvoj igri interesi Mie i Luke suprotni, odnosno koliko Mia osvoji Luka gubi i obratno. Ovakav tip igre se naziva igrom sume nula i predstavlja situaciju „čistog” sukoba među igračima.

Analiziramo li igru, mogli bismo doći do sljedećih zaključaka: Mia želi dobiti maksimalan broj bodova, pa bi trebala igrati strategiju Z, no s obzirom na to da je i Luka racionalan igrač i želi izbjeći maksimalan broj negativnih bodova, za očekivati je da će Luka odigrati strategiju A. No, predvidi li Mia ovakav ishod, za očekivati je da će Mia odigrati strategiju X, a Lukin odgovor na to bila bi njegova strategija B. Daljnjim razmišljanjem u ovom smjeru, vratili bismo se na početak, pa se pitamo postoji li optimalan izbor strategije u ovakvoj igri? Odgovor na to ćemo pronaći u nastavku, koristeći mješovite strategije.

1.2 Dominantne strategije i sedlaste točke

U prethodnom dijelu vidjeli smo da igre sume nula između dva igrača, gdje jedan ima m, a drugi n strategija možemo prikazati $m \times n$ matricom. Mia bira retke matrice sa što većim vrijednostima, a Luka kao odgovor bira stupce sa što manjim vrijednostima.

	A	B	C	D
X	$(12, -12)$	$(-1, 1)$	$(1, -1)$	$(0, 0)$
Y	$(5, -5)$	$(1, -1)$	(7,-7)	$(-20, 20)$
Z	$(3, -3)$	$(2, -2)$	$(4, -4)$	$(3, -3)$
W	$(-16, 16)$	$(0, 0)$	$(0, 0)$	$(16, -16)$

Tablica 1.2: Strategija B dominira nad strategijom C

U sljedećem primjeru važno je primijetiti da je Luki u svakom slučaju bolje igrati strategiju B negoli strategiju C, jer neovisno o Mijinom odabiru strategije njegov profit u stategiji B je veći nego u usporedbi s C.

Definicija 1.1 *Kažemo da strategija S* ***dominira nad strategijom*** *T ako je svaka vrijednost iz S barem jednako dobra kao pripadna iz T, a barem jedna vrijednost iz S je strogo bolja od pripadne vrijednosti iz T.*

Racionalan igrač nikada ne bi trebao igrati dominiranu strategiju.
Ovakav pristup ponekad nam neće biti dovoljan za pronalaženje optimalnog rješenja, naime ne možemo ništa reći o odnosu Lukinih strategija A,B i D, ili Mijinih X,Y,Z,W.

Definicija 1.2 ***Ekvilibrij*** *u teoriji igara predstavlja situaciju u kojoj će igrač nastaviti sa svojom odabranom strategijom, bez namjere da od nje odstupi, nakon što uzme u obzir strategiju protivnika.*

Daljnim promatranjem tablice1.2 uočavamo da Mia odabirom strategije Z sebi osigurava dobitak od najmanje 2, dok Luka strategijom B ne gubi više od 2, dok u bilo kojoj drugoj strategiji njegovi gubitci mogu postati veći. Mia sa strategijom Z i Luka sa strategijom B postižu ekvilibrij, odnosno ukoliko Luka zna ili naslućuje da će Mia odigrati Z, on će odgovoriti sa strategijom B i obratno Mijin Z je najbolji odgovor na Lukin B. U tom slučaju nijedan od igrača neće imati bolju strategiju kao opciju. Zaključujemo Mia-Z i Luka-B je racionalan potez u ovoj igri, a ujedno je najmanja vrijednost po retku i najveća po apsolutnoj vrijednosti u stupcu.

Definicija 1.3 *Rezultat matrično prikazane igre (s dobitima prvog igrača) naziva se* ***sedlastom točkom*** *ukoliko je manji ili jednak od svih drugih vrijednosti u tom retku i veći ili jednak od svih vrijednosti u tom stupcu.*

Teorem 1.4 *Ukoliko matrično prikazana igra ima sedlastu točku, oba igrača bi trebala igrati strategije koje je sadržavaju.*

Definicija 1.5 *Ukoliko u matričnom prikazu igre postoji broj v takav da prvi igrač ima strategiju koja mu osigurava dobitak od barem v i drugi igrač ima strategiju koja osigurava da prvi igrač neće osvojiti više od v, tada v nazivamo* ***vrijednošću igre****.*

Ako igra ima sedlastu točku, onda je ona jednaka vrijednosti igre.

Sve četiri označene vrijednosti su sedlaste točke i to su jedine sedlaste točke u ovoj igri. Primijetimo, sve imaju istu vrijednost i nalaze se na vrhovima pravokutnika. To svojstvo vrijedi za sve igre s višestrukim sedlastim točkama.

Teorem 1.6 *Svake dvije sedlaste točke u matrično zapisanoj igri imaju jednaku vrijednost. Nadalje, ukoliko oba igrača odigraju strategiju koja sadrži sedlastu točku, rezultat igre će uvijek biti sedlasta točka.*

	A	B	C	D
X	$(4, -4)$	$(2, -2)$	$(5, -5)$	$(2, -2)$
Y	$(2, -2)$	$(1, -1)$	$(-1, 1)$	$(-20, 20)$
Z	$(3, -3)$	$(2, -2)$	$(4, -4)$	$(2, -2)$
W	$(-16, 16)$	$(0, 0)$	$(16, -16)$	$(1, -1)$

Tablica 1.3: Sedlaste točke

Dokaz. Pretpostavimo da su a i b sedlaste točke i neka su c i d točke na preostalim vrhovima pravokutnika kojeg čine s a i b. Kako je a najmanja vrijednost u svom retku i b najveća vrijednost u svom stupcu, zaključujemo $a \leq c \leq b$. Budući da je b najmanja vrijednost u svom retku i a najveća vrijednost u svom stupcu, $b \leq d \leq a$. Zaključujemo da ove nejednakosti moraju biti jednakosti i da se radi o četiri iste vrijednosti, tj. c i d su također sedlaste točke. ∎

Postoji brža metoda za traženje sedlastih točaka. Prvo ispišemo najmanje vrijednosti za svaki redak i označimo njihov maksimum. Zatim ispišemo najveće vrijednosti po svim stupcima i označimo njihov minimum.

Primijetimo da smo u tablici 1.4 upisivali samo Mijine profite jer kako je riječ o igri sume nule Lukini su samo suprotni.

Ako su maxmin po retcima i minmax po stupcima isti, onda se oni javljaju u sedlastoj točki strategija. Ukoliko se maxmin i minmax ne podudaraju, igra nema sedlastih točaka.

		A	B	C	D	Minimum redaka
	A	4	3	2	5	$2 \longleftarrow$ maximin
	B	-10	2	0	-1	-10
	C	7	5	2	3	$2 \longleftarrow$ maximin
	D	0	8	-4	-5	-5
Maksimum stupaca		7	8	2	5	
				$\uparrow$		
				minimax		

Tablica 1.4: Minmax i maxmin

1.3 Mješovite strategije

U sljedećem primjeru vidjet ćemo igru u kojoj su maxmin redaka i minmax stupaca različiti, odnosno igra je bez sedlastih točaka.

	A	B	Minimum redaka
A	2	-3	-3
B	0	3	$0 \longleftarrow$ maximin
Maksimum stupaca	2	3	
	$\uparrow$ minimax		

Tablica 1.5: Igra bez sedlastih točaka

U ovakvim igrama igrači nisu sigurni u odabir najbolje strategije, pa njihova igra više neće biti igra jedne, čiste strategije već će uključivati miješanje strategija u ovisnosti o zadanim vjerojatnostima. U analizi igre mještovitim strategijama, jednog ili oba igrača, koristit ćemo se konceptom očekivanih dobiti.

Definicija 1.7 ***Očekivana dobit skupa ishoda*** $\{a_1, a_2, ..a_k\}$ *s vjerojatnostima* $p_1, p_2, ..., p_k$*, redom, je* $p_1a_1 + p_2a_2 + ... + p_ka_k$.

Promatrajući prethodni primjer 1.5, ako pretpostavimo da Luka igra obje strategije s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$, Mijin očekivani dobitak ukoliko odigra strategiju A bit će $\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot(-3) = -\frac{1}{2}$, a ukoliko odigra strategiju B $\frac{1}{2}\cdot 0+\frac{1}{2}\cdot(3) = -\frac{3}{2}$. Zaključujemo, ukoliko Mia zna da Luka igra mješovitu strategiju $\frac{1}{2}A$, $\frac{1}{2}B$, Mia bi trebala igrati strategiju B.

Teorem 1.8 *Ako je poznato da protivnički igrač igra određenu mješovitu* *strategiju i nastavit će je igrati bez obzira na poteze drugog igrača, drugi igrač treba igrati strategiju koja mu daje najveću očekivanu dobit.*

Sada promatrajući primjer zadan Tablicom 1.5, želimo pronaći Lukinu mješovitu strategiju u kojoj se Mia neće „profitirati". Pretpostavimo da Luka igra mješovitu strategiju A s vjerojatnošću x i B s vjerojatnošću $1-x$ gdje je $x \in [0,1]$. U ovakvom slučaju Mijini očekivani dobitci su:

$$\text{Mia } A\text{: } x \cdot (2) + (1-x) \cdot (-3) = -3 + 5x$$

$$\text{Mia } B\text{: } x \cdot (0) + (1-x) \cdot (3) = 3 - 3x$$

Mia neće moći odabrati strategiju u kojoj više profitira ukoliko su ova dva očekivana dobitka jednaka tj. $-3+5x = 3-3x$ iz čega slijedi da je $x = \frac{3}{4}$. Ukoliko Luka odigra $\frac{3}{4}A$, $\frac{1}{4}B$, sigurni smo da Mijina očekivana dobit neće biti veća od

$$\frac{3}{4} \cdot (0) + \frac{1}{4} \cdot (3) = \frac{3}{4}$$

Istom logikom pronaći ćemo Mijinu mješovitu strategiju xA i $(1-x)B$ u kojoj Luka neće „profitirati".

$$\text{Luka } A\text{: } x \cdot (2) + (1-x) \cdot (0) = 2x$$

$$\text{Luka } B\text{: } x \cdot (-3) + (1-x) \cdot (3) = 3 - 6x$$

Dakle, $2x = 3 - 6x$ iz čega slijedi $x = \frac{3}{8}$. Ukoliko Mia odigra mješovitu strategiju $\frac{3}{8}A$ i $\frac{5}{8}B$ osigurava si dobitak od barem $\frac{3}{4}$, neovisno o Lukinoj igri. Primijetimo da smo je ovim odabirom mješovitih strategija Mia osigurala očekivanu dobit barem $\frac{3}{4}$, a Luka odabirom svoje mješovite strategije je osigurao da Mijina očekivana dobit ne prelazi $\frac{3}{4}$.

Zaključivanjem kao kod primjera sa sedlastim točkama dobivamo sljedeće:

$\frac{3}{4}$ je vrijednost igre

$\frac{3}{4}A$, $\frac{1}{4}B$ je Lukina optimalna strategija

$\frac{3}{8}A$, $\frac{5}{8}B$ je Mijina optimalna strategija

Vrijednost igre i optimalne strategije za oba igrača daju rješenje igre.

Teorem 1.9 (Minimax teorem) *Svaka igra prikazana $m \times n$ matricom ima rješenje. Postoji jedinstveni v, kojeg nazivamo* ***vrijednošću igre*** *za optimalne strategije oba igrača za koje vrijedi:*

- *ako prvi igrač igra svoju optimalnu strategiju, njegov očekivani profit će biti $\geq v$, bez obzira na igru drugog igrača*
- *ako drugi igrač igra svoju optimalnu strategiju, očekivani profit prvog igrača bit će $\leq v$, bez obzira na igru prvog igrača*

Nadalje, ovakvo rješenje uvijek možemo pronaći kao rješenje neke $k \times k$ podigre zadane igre.

Rješenje $m \times n$ igre je uvijek rješenje neke 1×1, 2×2, 3×3 ili bilo koje druge podigre s kvadratnom matricom. Čiste strategije koje su uključene u rješenje nazivamo aktivnim strategijama. One bi trebale biti igrane uz određene vjerojatnosti, a preostale strategije treba izostaviti.

	A	B	C
A	1	2	2
B	2	1	2
C	2	2	0

Tablica 1.6: Metoda izjednačavanja očekivanja

Na početku provjerimo da zadana igra nema sedlastih točki niti dominantnih strategija. Zatim pretpostavimo da Luka igra strategije A,B,C s

vjerojatnostima x, y i $1 - x - y$, redom.
Mijin očekivani ishod izgleda:

$$\text{Mia } A\text{: } x \cdot (1) + y \cdot (2) + (1 - x - y) \cdot (2) = 2 - x$$

$$\text{Mia } B\text{: } x \cdot (2) + y \cdot (1) + (1 - x - y) \cdot (2) = 2 - y$$

$$\text{Mia } C\text{: } x \cdot (2) + y \cdot (2) + (1 - x - y) \cdot (0) = 2x + 2y$$

Ukoliko su svi očekivani ishodi jednaki, Mia neće moći profitirati birajući određenu strategiju:

$$2 - x = 2 - y = 2x + 2y$$

Rješavajući sustav:

$$x - y = 0$$

$$2x + 3y = 2$$

dobivamo rješenje $x = y = \frac{2}{5}$. Lukina mještovita strategija je: $\left(\frac{2}{5}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$. Zbog simetričnosti Tablice 1.5 to je ujedno i Mijina mješovita strategija, a vrijednost igre je $\frac{8}{5}$. Koristeći metode koje smo do sada spomenuli teoretski mogli bismo riješiti bilo koju $m \times n$ matrično prikazanu igru, no u praksi stvari su nešto kompliciranije. Ukoliko imamo zadanu 4×4 igru, za koju smo provjerom utvrdili da nema sedlastih točki, ni dominantnih strategija, pokušat ćemo metodom izjednačavanja očekivanja doći do rješenja rješavajući dva sustava s tri jednadžbe i tri nepoznanice. Ukoliko igra sadržava 3×3 ili 2×2 podigru, nećemo naći rješenje, pa ćemo morati provjeriti te podigre posebno. U tom slučaju imamo 16 mogućih 3×3 igara i 36 mogućih 2×2 igara. Time je rješavanje igre postalo vremenski zahtjevno, pa takve probleme danas uglavnom rješavamo koristeći metode linearnog programiranja.

Poglavlje 2

Primjene teorije igara

2.1 Primjene u ratovanju

Igre sume nule analiziraju situacije sukoba, a teorija igara nudi racionalne strategije kao njihovo rješenje. Budući da je rat najekstremniji primjer situacije sukoba, nije iznenađujuće što su prve primjene teorije igara predložene u kreiranju vojnih strategija u Drugom svjetskom ratu.
U ovom poglavlju promatrat ćemo pojednostavljenje primjere kako bismo stekli dojam kako igre sume nula mogu doprinijeti razvoju vojnih taktika. Prvi primjer ilustrirat će situaciju moguću u gerilskom ratovanju, zato ćemo u nastavku tu igru nazivati „Gerilci protiv policije". U igri sudjeluje m gerilaca i n policajaca i 2 skladišta oružja koje gerilci žele osvojiti, a policija treba obraniti. Gerilci mogu napasti jedno ili oba skladišta, a smatrat ćemo da je skladište osvojeno ukoliko je napadnuto s većim brojem ljudi negoli je skladište čuvalo. Također, gerilcima je za pobjedu u igri dovoljno da osvoje barem jedno skladište, dok policija za pobjedu mora sačuvati oba. Trivijalan slučaj u kojem gerilci pobjeđuju je ukoliko je $m > n$, a policija za $n \geq 2m$, zato ćemo mi promatrati slučajeve u kojima je $m \leq n < 2m$.

Za početak ćemo promotriti slučaj u kojemu je $m = 2$ i $n = 3$. Gerila može svoje jedinice rasporediti na dva moguća načina, $2 - 0$ i donijeti odluku koje će skladište napasti ili $1 - 1$, dok policija svoje jedinice može rasporediti u $3 - 0$ i $2 - 1$ i odlučiti na koje će skladište poslati veću grupu. Na slici je matrični prikaz igre u kojem 1 označava pobjedu gerilaca, a 0 njihov poraz.

	$3 - 0$	$2 - 1$
$2 - 0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$1 - 1$	1	0

Tablica 2.1: Gerila protiv policije :1

Sedlaste i točke i vrijednost ove igre je $\frac{1}{2}$. Ukoliko gerilci odaberu formaciju $2 - 0$, u pola slučajeva će napasti skladište koje je čuvano s većim brojem policajaca i izgubiti, a u drugoj polovici će pobijediti. No, za različite vrijednosti m i n optimalne strategije bit će mješovite.

	$4 - 0$	$3 - 1$	$2 - 2$
$4 - 0$	$\frac{1}{2}$	1	1
$3 - 1$	1	$\frac{1}{2}$	1
$2 - 2$	1	1	0

Tablica 2.2: Gerila protiv policije: $m = n = 4$

Rješavajući sustave iz primjera 2.2, mješovita strategija za gerilce izgledat će kako je prikazano u nastavku:

$$\text{Gerila } 4-0\text{: } x\cdot(\frac{1}{2})+y\cdot(1)+(1-x-y)\cdot(1)=-\frac{1}{2}x+1$$
$$\text{Gerila } 3-1\text{: } x\cdot(1)+y\cdot(\frac{1}{2})+(1-x-y)\cdot(1)=-\frac{1}{2}y+1$$
$$\text{Gerila } 2-2\text{: } x\cdot(1)+y\cdot(1)+(1-x-y)\cdot(0)=x+y$$

$$-\frac{1}{2}x+1=x+y \tag{2.1}$$
$$-\frac{1}{2}y+1=x+y \tag{2.2}$$
$$-\frac{1}{2}x+1=-\frac{1}{2}y+1\rightarrow x=y \tag{2.3}$$

Stategija za gerilce je : $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$, a istim računom za policajce dobijemo $\left(\frac{2}{5},\frac{2}{5},\frac{1}{5}\right)$ i vrijednost igre je $\left(\frac{4}{5}\right)$.

	$9-0$	$8-1$	$7-2$	$6-3$	$5-4$
$7-0$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	1
$6-1$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
$5-2$	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$4-3$	1	1	1	$\frac{1}{2}$	0

Tablica 2.3: Gerila protiv policije: $m=7$, $n=9$

Na isti način za Tablicu 2.3 kao rješenje dobivamo:
Gerilci $\left(\frac{2}{3},0,0,\frac{1}{3}\right)$,
Policija $\left(0,0,\frac{2}{3},0,\frac{1}{3}\right)$ i vrijednost igre $\left(\frac{2}{3}\right)$.
Primjetimo da smo za Tablicu 2.2 u rješenju koristili sve dostupne strategije, dok su u Tablici 2.3 korištene samo dvije (grupu maksimalne veličine i približno jednake veličine kod gerilaca, a kod policije raspored koji parira

maksimalnom rasporedu gerilaca i njihov približno jednak raspored.)
Kada bismo nastavili tražiti rješenje igre za različite parove m i n, uočili bismo zanimljive rezultate. Naime, može se primjetiti širok raspon u kojem povećanje broja policajaca ne smanjuje vjerojatnost pobjede gerilaca.Nadalje, vrijednost igre ostaje $\frac{1}{2}$ za sve m i n takve da je $\frac{3}{2}m \leq n < 2m$.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1/2											
2		2/3	1/2									
3			3/4	1/2	1/2						sve 0	
4				4/5	2/3	1/2	1/2					
5					5/6	2/3	1/2	1/2	1/2			
6						6/7	3/4	2/3	1/2	1/2	1/2	
7							7/8	3/4	2/3	1/2	1/2	1/2
8								8/9	4/5	2/3	2/3	1/2
9									9/10	4/5	3/4	2/3
10				sve 1						10/11	5/6	3/4
11											11/12	5/6
12												12/13

Tablica 2.4: Gerila protiv policije za male vrijednosti m i n

Sljedeći primjer primjene teorije igara u ratovanju bit će vezan uz program proturaketne obrane SAD-a iz 80.tih godina. Igrači u ovom primjeru biti će države, koje ćemo nazvati Crvena i Plava. Pretpostavimo da Crvena želi uništiti Plavu vojnu bazu. Crvena ima četiri rakete koje biti ispaljene u nizu. Dvije rakete su prave (imaju bojeve glave), a preostale dvije su lažni projektili. Za obranu, Plavi imaju dvije proturakete. Svaka proturaketa može detektirati dvije Crvene rakete i uništiti prvu s bojevom glavom koju detektira. Crveni moraju odabrati poredak u kojem će ispaljivati prave i lažne rakete. Koristit ćemo oznake LPPL za poredak lažna,prava,prava,lažna.

Plavi odlučuju kada ispaliti proturakete. Oznake za poteze Plavih označavat ćemo brojevima, npr.

13 označava ispaljivanje proturakete na prvu i treću raketu Crvenih. Plavi pobjeđuju (+1) ukoliko unište obje prave rakete, a gube (0) ako Crveni uspiju pogoditi barem jednu vojnu bazu.

	PPLL	PLPL	PLLP	LPPL	LPLP	LLPP
12	1	1	0	1	0	0
13	0	1	1	1	1	0
14	0	0	1	0	1	0
23	0	0	0	1	1	1
24	0	0	0	0	1	1
34	0	0	0	0	0	1

Tablica 2.5: Moguće strategije u igri raketa

Iz tablice 2.5 vidimo da je strategija Plavih 14 dominirana strategijom 13, a strategije 24 i 34 su dominirane od strategije 23. Plavi nikada ne bi trebali čuvati proturaketu za gađanje četvrte Crvene rakete, jer time ne iskorištavaju mogućnost detekcije dviju protivničkih raketa. U strategijama Crvenih PPLL, PLPL su dominirane od strategije LPPL, a LLPP dominira nad strategijom LPLP, pa možemo reducirati tablicu na:

	PPLL	PLLP	LLPP
12	1	0	0
13	0	1	0
23	0	0	1

Tablica 2.6: Reducirani prikaz strategija u igri raketa

Rješenje je mješovita strategija $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ i za Crvene i Plave i vrijednost igre je $\frac{1}{3}$. Zaključujemo, Crveni bi uvijek trebali ispaljivati lažne projektile u nizu, nadajući se da će Plavi potrošiti proturaketu. Plavi imaju vjerojatnost samo $\frac{1}{3}$ da će spasiti baze, što i u stvarnosti predstavlja problem kako razviti tehnologije za što bolju proturaketnu obranu.

2.2 Newcombov problem i slobodna volja

Jedan od najdugovječnijih problema u filozofiji vezan je uz slobodnu volju; je li čovjek slobodan i jesu li njegovi postupci predodređeni? Je li moguće dovoljno poznavati osobu da bi pretpostavke o budućim postupcima te osobe bile točnije od slučajnog pogađanja? Postavlja se pitanje da li Bog ima takva predviđanja i ako je čovjekova volja uistinu slobodna, može li ona „poremetiti" Božja predviđanja.
1960. američki filozof William Newcomb postavio je problem koji se može prikazati u obliku igre, a tiče se problema slobodne volje.
Pretpostavimo da imamo dvije neprozirne crne kutije. U prvoj kutiji se nalazi 1000 $, a u drugoj kutiji se nalazi ili 1000000 $ ili je prazna (u ovisnosti o detalju koji ćemo kasnije spomenuti).
Igrač ima dvije opcije:

- uzeti obje kutije
- uzeti samo drugu kutiju

Nadalje, jučer je Biće nadnaravnih sposobnosti predvidilo današnju igru igrača. Ako je Ono predvidilo da će igrač uzeti obje kutije, druga kutija bit će prazna, a ako je predvidilo da će igrač uzeti samo drugu kutiju, u njoj će biti 1000000 $. Bitna stvar u ovoj igri je da igrač ima dobre razloge za vjerovati u točnost predviđanja nadnaravnog Bića jer je njegova točnost 90%.

Biće je rasporedilo novac u kutije, pitanje je koju strategiju igrač treba odabrati. Kod ove igre problem je u tome što se za obje strategije mogu ponuditi opravdani argumenti:

- Argument 1: Pretpostavimo da je igrač uzeo obje kutije. Biće je to gotovo sigurno točno predvidilo, pa je druga kutija prazna i igrač je

	Predviđa da će igrač uzeti obe kutije	Predviđa da će igrač uzeti drugu kutiju
Igrač uzima obe kutije	1000$	1001000$
Igrač uzima drugu kutiju	0	1000000$

Tablica 2.7: Newcombov problem

dobio 1000$. S druge strane, pretpostavimo da je igrač uzeo drugu kutiju. To je također gotovo sigurno točno predviđen potez, pa se u drugoj kutiji nalazi 1000000$ i igrač ih osvaja. Iz ovih objašnjenja igrač bi trebao igrati strategiju u kojoj uzima samo drugu kutiju.

- Argument 2: Biće je svoja predviđanja napravilo jučer i novac je već raspoređen u kutijama, tako da igračev današnji odabir na to neće utjecati. Ukoliko igrač odabere uzeti obje kutije, ako je u drugoj bilo 1000000$ oni neće nestati,a ukoliko je druga kutija prazna, igrač opet osvaja 1000$ iz prve kutije tako da je bolje igrati strategiju u kojoj igrač uzima obje kutije.

Argument 1 vodi se principom očekivanih vrijednosti. Pretpostavimo da Biće predviđa točno s vjerojatnošću 0.9. Tada očekivane vrijednosti igračevih strategija izgledaju:

$$\text{Uzima obje kutije: } 0.9 \times 1000 + 0.1 \times 1001000 = 101000$$
$$\text{Uzima samo drugu kutiju: } 0.1 \times 0 + 0.9 \times 1000000 = 900000$$

Igrač treba uzeti samo drugu kutiju. Štoviše, ovaj rezultat nastavlja vrijediti dok god Biće predviđa točno s vjerojatnošću većom od 0.505.
S druge strane, argument 2 vodi se principom dominantne strategije. Strategija u kojoj igrač uzima obe kutije dominira nad strategijom gdje uzima

samo drugu, a pravilo je da uvijek igramo dominantnu strategiju.

Uobičajno ova dva osnovna principa teorije igara ne vode do suprotnih zaključaka. Inače bismo za neku vjerojatnost x s kojom Biće predviđa da će igrač uzeti obe kutije i $(1-x)$ da će uzeti samo drugu dobili izraz:

$$\text{Uzima obe kutije: } 1000x + 1001000(1-x) = 1001000 - 1000000x$$

$$\text{Uzima drugu kutiju: } 0x + 1000000(1-x) = 1000000 - 1000000x$$

Očekivana vrijednost za prvu strategiju bila bi veća za bilo koji x, pa bi se argument dobiven koristeći princip očekivane vrijednosti i princip dominantne strategije podudarali. Međutim naša situacija je specifična zbog uvjerenja da postoji veza između igračevog odabira i predviđanja, a ta veza stvara konflikt. Budući da uvjerenje u tu povezanost stvara problem, pitamo se odakle je uopće nastalo. Jedan odgovor bi mogao biti iz vjera, a drugi iz dokaza. Ukoliko smo npr. odgledali kako se eksperiment izvodi 200 puta i sigurni smo da se sve odigralo kako je opisano u pravilima igre i ispostavilo se da Biće zaista predviđa točno u 90% slučajeva, igrač nema razloga vjerovati da će Biće pogriješiti u predviđanju baš u njegovoj igri. U takvom slučaju ne bi imalo smisla odustati od 1000000$ i čini se da ovaj način podupire Argument 1. Kada je američki matematičar Martin Gardner pisao o ovom problemu u svojoj kolumni, pozvao je čitatelje da pošalju svoje prijedloge i rješenja za navedeni problem. Od 126 odgovora, 89 ih je bilo za uzimanje samo druge kutije, 37 za uzimanje obje kutije i 18 dodatnih odgovora u kojima se smatralo da je problem nerješiv. Uočena je povezanost između vjerovanja u slobodu volje i Newcombovog problema. Igrači koji imaju izraženiju vjeru u slobodnu volju, skloniji su nevjerovati u točnost predviđanja nekog Bića i skloniji biranju obje kutije. Tu tvrdnju potvrđuju i odgovori koje je Gardner zaprimio, svi koji su smatrali da treba uzeti obje kutije naglašavali su element slobodne volje.

2.2. Newcombov problem i slobodna volja

Postoje dvije moguće veze između pitanja slobodne volje i Newcombovog problema. Jedna je da bi snažno vjerovanje u slobodnu volju moglo proizvesti uvjerenje da je Newcombove uvjete nemoguće ispuniti. Ukoliko je ljudsko ponašanje potpuno nepredvidivo i odabiri potpuno slobodni, tada Biće iz Newcombovog problema ne može postojati, kao ni sam problem.

Druga opcija, koju zagovara Gardner, je da Necombov problem dokazuje da je ljudska volja slobodna ili da se barem čovjekovo djelovanje u situacijama izbora ne može predvidjeti s većom točnošću od slučajne. Ovaj argument vidi dilemu Newcombovog problema toliko jaku da je njeno postojanje logički neprihvatljivo.

Problem nastavlja dijeliti filozofe i danas, u anketi iz 2020. većina filozofa odlučila je preporučiti uzimanje obje kutije.

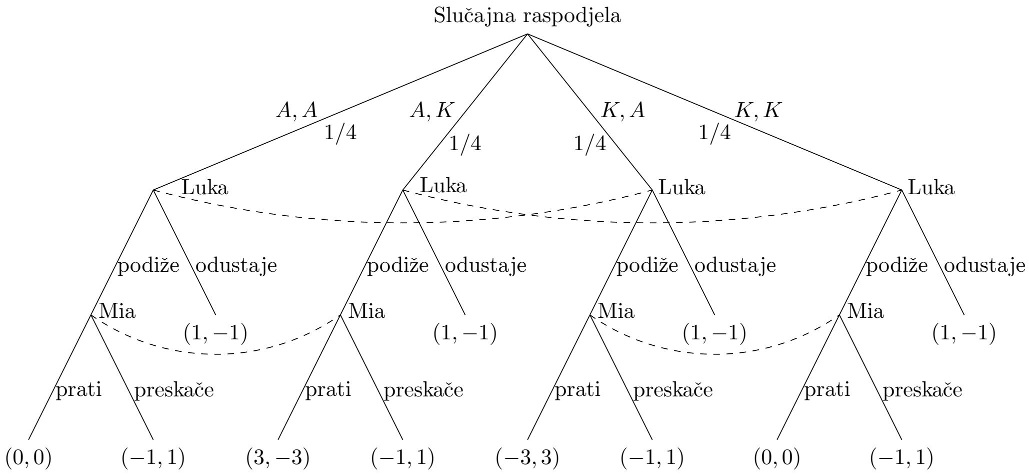
Poglavlje 3

Sekvencijalne igre

3.1 Igre prikazane stablima

U dosadašnjim igrama pretpostavljali smo da igrači odluke izboru strategije donose istodobno i bez znanja što će druga strana odlučiti. Takav pristup je iznimno ograničavajući, posebno u primjerima iz života gdje odluke uglavnom donosimo sekvencijalno, kao reakciju na prethodno. U ovom poglavlju posvetit ćemo se takvim igrama koje ćemo prikazivati uz pomoć stabla igre. Pogledajmo pojednostavljenu igru pokera kao primjer. Svaki od dvaju igrača, nazovimo ih Mia i Luka, na početku igre ulaže 2$. Zatim svaki igrač dobije po jednu kartu iz špila koji sadrži samo aseve i kraljeve. Luka mora odlučiti hoće li uložiti 2$ ili izaći iz igre. Ukoliko izađe, Mia osvaja uloženo. Ukoliko Luka uloži, Mia mora odlučiti hoće li pratiti(staviti iznos jednak posljednjem Lukinom povećanju) ili odbacuje (odriče se mogućnosti osvajanja trenutno sakupljenog novca). Ako Mia odbaci, Luka osvaja novac sakupljen u toj rundi, a ako prati igrači uspoređuju karte i onaj s jačom kartom osvaja. Ukoliko imaju kartu iste jakosti, novac se raspodjeljuje na dva dijela. Ovako zadana igra je primjer sekvencijalne igre, prvi potez je napravljen slučajno u kojem

se dijele karte. Četiri su moguće slučajne podjele: (A,A),(K,K),(A,K),(K,A) i pretpostavljamo da je vjerojatnost za svaku od njih $\frac{1}{4}$.
Dosad rečeno prikazat ćemo stablom igre:



Slika 3.1

U čvorovima je označeno koji je igrač na potezu u promatranom čvoru. Na granama su napisane opcije koje igrač može izabrati, a listovi su profiti do kojih mogu doći (prvi broj označava profit prvog igrača, a drugi broj označava profit drugog igrača). Isprekidane linije na slici povezuju iste informacijske skupove.

Definicija 3.1 ***Informacijskim skupom*** *smatramo skup vrhova stabla koje igrač ne razlikuje.*
Ako je svaki informacijski skup jednočlan (tj. igrač razlikuje sve vrhove), onda govorimo o igri ***savršene informacije****, a u protivnom je riječ o igri* ***nepotpune informacije****.*

Naša igra je, kao i većina kartaških, igra nepotpune informacije jer igrači ne znaju karte svojih protivnika, pa samim time ni u kojem čvoru se u određenom trenutku nalaze.

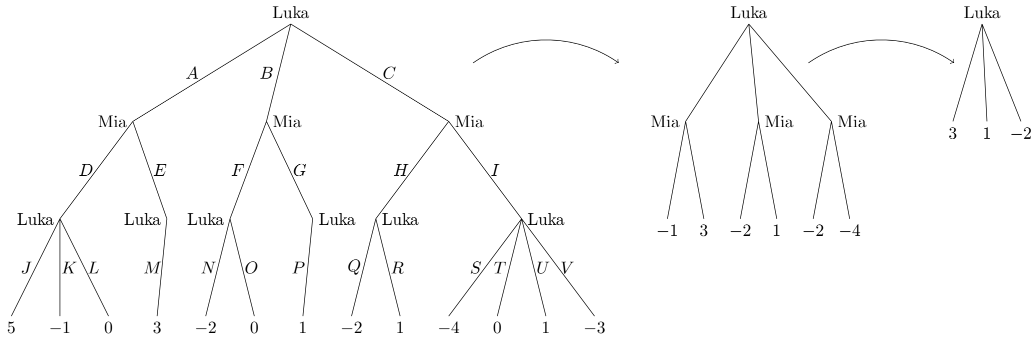
Svaka igra s dva igrača koja se može prikazati stablom, može se prikazati i matricom. Strategiju u stablu predstavlja opis igrača i njegovog poteza u bilo kojem informacijskom skupu unutar igre. Konkretno, u našoj igri Lukina strategija može biti: U prvom informacijskom skupu (ako imam asa) - „ulažem”,a u drugom informacijskom skupu (ako imam kralja) - „preskačem”. Obzirom da Luka ima dva informacijska skupa i dva moguća poteza, on ima 4 moguće strategije. Isto tako, Mia ima 4 strategije na raspolaganju, a budući da znamo vjerojatnost početne raspodjele karata možemo izračunati očekivane dobitke za oba igrača. U ovom prikazu vidimo da igra ima dvije sedlaste točke, $\frac{1}{4}$, pa bi Luka trebao ulagati i s asom i kraljem, a Mia pratiti isključivo s asom.

		Luka ulaže			
		uvijek	samo A	samo K	nikada
	uvijek	0	-$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	1
Mia prati	samo A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	1	1
	samo K	-$\frac{5}{4}$	-$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	1
	nikada	-1	0	0	1

Tablica 3.1: Poker prikazan tablicom

Iako je rečeno da svaku igru zadanu stablom možemo prikazati matricom, u praksi broj strategija može biti izuzetno velik, iako smo krenuli od relativno malog stabla. Na primjer, kod šaha već u prva dva poteza, imamo 20 mogućih izbora za prvi potez bijelih figura i za svaki taj izbor postoji 20 mogućih odgovora igrača s crnim figurama. Time bismo u samo prva dva poteza već imali stablo s 400 grana, a kada bismo to prikazali matricom imali bismo $20^{20} \approx 10^{26}$ stupaca. U takvom slučaju povoljnije nam je nastaviti rad

na stablima.
Ukoliko imamo igru savršene informacije u kojoj svi igrači znaju sve prethodne poteze, njeno stablo nastojimo skraćivati.



Slika 3.2: Skraćivanje polaznog stabla

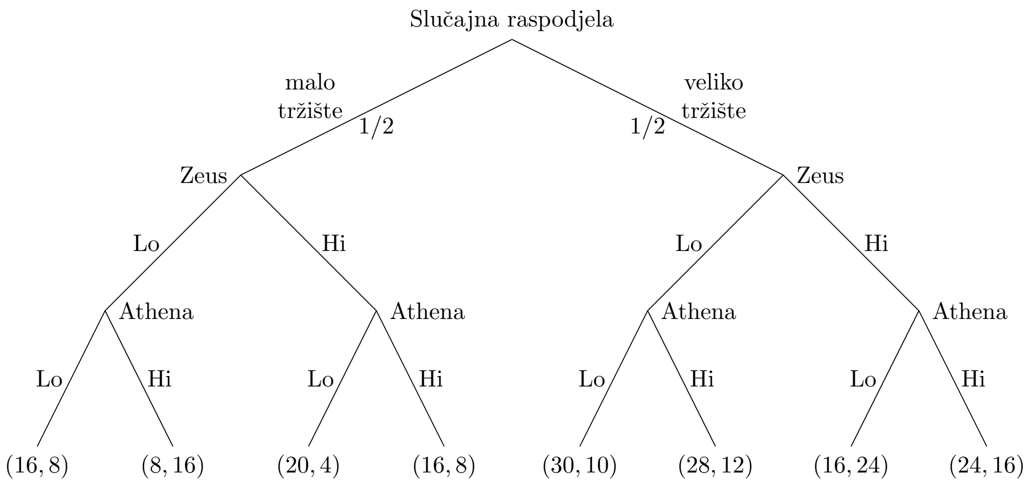
U primjeru 3.2 krećemo od vrhova čiji svi sljedbenici imaju izračunate profite. U tim vrhovima igrač na potezu je Luka i nastojat će odabrati grane koje vode do najmanjih dobitaka za Miu, pa ćemo u sljedećoj iteraciji na stablu eliminirati grane koje Luka nije odabrao. Na novoj slici Mia bira grane koje vode do najvećih profita, pa eliminiramo preostale. U posljednjoj iteraciji Luka opet bira granu s najmanjim profitom i igra se završava.
Da smo ovu igru prikazali matricom i pratili skraćivanje početnog stabla, uočili bismo da prvim kraćenjem eliminiramo 10 Lukinih strategija pricipom dominacije. Na isti način sljedeće kraćenje eliminira 7 Mijinih strategija i u posljednjem kraćenju eliminirau se preostale 2 Lukine strategije, ostavljajući -2 kao sedlastu točku.

Teorem 3.2 ***(Zermelov teorem)*** *U igri dva igrača savršene informacije s konačnim brojem vrhova i s tri moguća ishoda: pobjeda prvog igrača, pobjeda drugog igrača i neriješeno, postoji ili strategija prvog igrača kojom on može ostvariti pobjedu, ili strategija prvog igrača kojom on može osigurati neriješeno, ili strategija drugog igrača kojom on može osigurati pobjedu.*

Dokaz. Zermelov teorem dokazujemo indukcijom po broju vrhova igre. Ako igra ima samo jedan vrh (tj. nitko ne vuče niti jedan potez) – tvrdnja je trivijalna. Sada pretpostavimo da igra ima n vrhova i da tvrdnja vrijedi za sve igre s manje od n vrhova. Primijetimo da postoji bar jedan vrh v čiji svi sljedbenici označavaju kraj igre. Racionalni igrač koji igra u tom vrhu će odabrati onu opciju koja je njemu najpovoljnija, pa je ova igra ekvivalentna igri u kojoj se vrh v zamijeni s navedenim ishodom, a svi njegovi sljedbenici obrišu. No, takvo stablo ima manje vrhova, pa nam tvrdnja vrijedi po pretpostavci indukcije. ■

3.2 Natjecateljsko odlučivanje

U poslovnom svijetu tvrtke se često nalaze u situacijama koje uključuju određenu neizvjesnost po pitanju poslovnih poteza ostalih tvrtki. Takve nedoumice uglavnom se tiču veličine tržišta, troškova, budućih ekonomskih prilika . . . U takvim primjerima uloga informacija, bilo saznanja što će druga tvrtka poduzeti i/ili sa kojom sigurnošću će to učiniti može biti jako važna. U ovom dijelu bavit ćemo se primjerom situacije natjecanja između dvije tvrtke formuliranim kao igra sume nula, a posebno ćemo obratiti pozornost na ulogu informacije u donošenju poslovnih odluka. Zeus Music je vodeća tvrtka u industriji stereo opreme, tvrtka s reputacijom i prepoznatljivošću na tržištu. Athena Acoustics je manja tvrtka poznata po visokokvalitetnim istraživanjima i razvoju posla. Obe tvrtke razvijaju sličan novi proizvod. U ovom trenutku nejasan je podatak o veličini tržišta na koje obje tvrtka planiraju plasirati proizvod; može biti malo s potencijalnim profitom od 24 milijuna $ ili veliko s profitom od oko 40 milijuna $. Stručnjaci u Zeusu procjenjuju da su vjerojatnosti za malo naspram veliko tržište oko $50 - 50$. Tvrtke moraju odlučiti kakvu kvalitetu proizvoda žele isporučiti, visoko kvalitetnu opremu, koja će se bolje prodavati ukoliko je tržište malo ili opremu nešto niže kvalitete koja će privući više kupaca ukoliko je riječ o većem tržištu. Athena Acoustics ima prednost u proizvodnji visoko kvalitetne opreme. Iz tvrtke Zeus očekuju veliki tržišni udio zahvaljujući svojoj prepoznatljivosti čime bi mogli imati odličnu prodaju proizvoda niže kvalitete. Uzimajući sve prethodno u obzir, u tablici su prikazani očekivani profiti obje tvrtke u milijunima dolara.



Slika 3.3: Stablo igre kada tvrtke donose odluku o proizvodnji u tajnosti

Prvo ćemo razmotriti slučaj kada obje tvrke donose odluku o proizvodnji u tajnosti, ne znajući točne podatke o veličini tržišta. Tada su oba vrha tvrtke Zeus u istom informacijskom skupu, kao i četiri čvora tvrtke Athena. Obje tvrtke imaju samo dvije strategije: proizvoditi visoko kvalitetnu opremu (Hi) ili opremu niže kvalitete (Lo). Prikazano matricom imamo:

		Athena	
		Lo	Hi
Zeus	Lo	$(23, 9)$	$(18, 14)$
	Hi	$(18, 14)$	$(20, 12)$

Tablica 3.2: Profiti kada tvrtke donose odluku o proizvodnji u tajnosti

Vrijednosti unutar tablice smo dobili na sljedeći način:

$\left(\frac{1}{2}\right)(16, 8) + \left(\frac{1}{2}\right)(30, 10) = (23, 9)$

$\left(\frac{1}{2}\right)(8, 16) + \left(\frac{1}{2}\right)(28, 12) = (18, 14)$

$\left(\frac{1}{2}\right)(20, 4) + \left(\frac{1}{2}\right)(16, 24) = (18, 14)$

$\left(\frac{1}{2}\right)(16, 8) + \left(\frac{1}{2}\right)(24, 16) = (20, 12)$

Obzirom da je riječ o igri konstantne sume, možemo izračunati optimalne strategije, koje su $\frac{2}{7}$Lo i $\frac{5}{7}$ Hi za obje tvrtke. Vrijednost igre je $19\frac{3}{7}$ za tvrtku Zeus i $12\frac{4}{7}$ za Athenu.
Pretpostavimo, obzirom da je tvrtka Zeus vodeća u industriji, mora prva donijeti odluku, a tvrtka Zeus može vidjeti prvo odluku Zeusa prije nego li donese vlastitu. Ovakva pretpostavka promijenila bi polazno stablo igre utoliko što bi tvrtka Athena sada imala dva informacijska skupa, jedan koji bi sačinjavali vrhovi gdje je Zeus odabrao Lo i drugi s vrhovima gdje je Zeus odabrao Hi. Obzirom da sada može donijeti dvije odluke u dva informacijska skupa, Athena sada ima 4 moguće strategije.

		Athena			
		Lo/Lo	Lo/Hi	Hi/Lo	Hi/Hi
Zeus	Lo	23	23	18	18
	Hi	18	20	18	20

Tablica 3.3: Tvrtka Zeus je prva na potezu

Obzirom da je igra konstantne sume u tablici su prikazani samo profiti tvrtke Zeus. Ova igra ima dvije sedlaste točke, što god tvrtka Zeus odigra, Athena bi trebala odigrati suprotno i Zeusov profit će biti 18, a Athenin 14. Athenina mogućnost da sačeka da Zeus napravi prvi potez košta tvrtku Zeus 1.43 milijuna \$.
Pretpostavimo sada da tvrtka Zeus i dalje mora prva odigrati potez, ali prije nego to učini napravit će detaljnu analizu da bi saznala hoće li tržište bili veliko ili malo. Tvrtka Athena neće znati rezultate te analize, ali će znati da je analiza napravljena. Zbog ove izmjene sada će stablo igre imati 2 informacijska skupa i za tvrtku Zeus, pa i on sada ima 4 moguće strategije.

Iz tablice 3.4 vidimo da je strategija Hi/Lo tvrtke Zeus dominantna. At-

		Athena			
		Lo/Lo	Lo/Hi	Hi/Lo	Hi/Hi
Zeus	Lo/Lo	23	23	18	18
	Lo/Hi	16	20	12	16
	Hi/Lo	25	23	24	22
	Hi/Hi	18	20	18	20

Tablica 3.4: Strategije nakon provedenog istraživanja čija je provedba poznata

hena bi trebala proizvoditi visoko kvalitetne proizvode bez obzira što Zeus odigra i očekivani profiti bi bili 22 za tvrtku Zeus i 10 za Athenu. Primijetimo da se sada optimalna strategija tvrtke Athena promijenila iz „napravi obratno od onog što je odigrao Zeus" u „uvijek igraj Hi", a jedina promjena u igri je ta što tvrtka Athena zna da je tvrtka Zeus napravila istraživanje. Ukoliko Zeus prvi odigra Hi, Atheni bi bilo bolje igrati Lo samo ako je riječ o velikom tržištu, ali znajući za istraživanje ukoliko Zeus odigra Hi, Athena će znati da je rezultat tog istraživanja očito bio da je tržište maleno. U tom slučaju tvrtka Athena bi također trebala odigrati Hi. Nadalje, provođenjem analize i baziranjem odluke o proizvodnji na njenim rezultatima Zeusov očekivani profit se povećao s 18 na 22 milijuna $; ukoliko analiza košta manje od 4 milijuna, odluka se isplatila. Ukoliko bi se i tvrtka Athena odlučila na provođenje takve analize, u stablu igre svaki Athenin vrh postao bi zaseban informacijski skup i time bi imala 16 mogućih strategija. Tehnikom skraćivanja polaznog stabla **??** na lijevom dijelu dobijemo rješenje $(16, 8)$, a u desnom dijelu stabla $(28, 12)$. Obzirom da se oba poteza igraju s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$, očekivani profit je $(22, 10)$. Nažalost ove rješenje nije ništa bolje za tvrtku Athena nego prije provedenog vlastitog istraživanja.

Zamislimo još situaciju u kojoj bi tvrtka Zeus mogla provesti istraživanje o tržištu bez da itko drugi sazna. Efekt bi bio sljedeći: tvrtka Athena bi imala pogrešne interpretacije igre tvrke Zeus, mislila bi da se igra kao u 3.3, a Zeus bi zapravo igrao igru iz 3.4. Athena bi odigrala strategiju Hi/Lo, a znajući to Zeus bi odigrao također Hi/Lo i povećao svoju vrijednost igre na 24. Drugim riječima, ukoliko bi provedeno istraživanje moglo ostati tajno, Zeus bi zaradio dodatna 2 milijuna dolara. Ono što možemo zaključiti je da je znanje informacija jako bitno.

Poglavlje 4

Teorija korisnosti

U dosadašnjim primjerima, pretpostavljali smo da su numeričke vrijednosti u matricama i stablima igara unaprijed zadane. U ovom poglavlju detaljnije ćemo se baviti upravo procesom pridruživanja numeričkih vrijednosti ishodima jer primjenjivost teorije igara na stvarne situacije počiva na pretpostavci da se takvo pridruživanje može učiniti na razuman način.
Na početku, zanima nas koja svojstva elementi u matricama moraju imati da bi pravila iz teorije igara imala praktični smisao. U prvom slučaju, pretpostavimo da igra koju promatramo ima sedlastu točku, numeričku vrijednost koja je dobivena kao najveći broj u svom stupcu i najmanji u svom retku. To jednostavno znači da Mia preferira ovaj ishod više od bilo kojeg drugog u svom stupcu i preferira bilo koji drugi unos u svom redu od njega. Stoga sve što je potrebno da teorija igara da razumnu preporuku je da brojevi predstavljaju redoslijed kojim Mia preferira ishode (a time i obrnuti redoslijed kojim ih preferira Luka). Na primjer, pretpostavimo da igra 3 X 2 ima ishode označene slovima na sljedeći način:

		Luka	
		A	B
	A	u	v
Mia	B	w	x
	C	y	z

Tablica 4.1: Ishodi igre bez poznatog uređaja

Pretpostavimo da Mia mora poredati ove ishode od najpoželjnijih do najmanje poželjnih. Moguće je da Mia to neće moći učiniti. Na primjer, mogla bi reći da više voli u nego v i v nego w, ali da također više voli w nego u. U slučaju takvih *netranzitivnih preferencija* nikakav poredak ne bi bio moguć. S druge strane, Mia bi nam mogla dati poredak, recimo u,w,x,z,y,v. Zatražimo od Luke da također rangira rezultate. Da bi teorija igara sume nula bila primjenjiva, Luka to mora moći učiniti i njegov poredak mora biti obrnut od Mijinog, dakle $v,\ y,\ z,\ x,\ w,\ u$. Ako to učini, ishodima možemo dodijeliti brojeve tako da najveći broj damo u, drugi po veličini w, i tako dalje. Na primjer:

		Luka	
		A	B
	A	6	1
Mia	B	5	4
	C	2	3

Tablica 4.2: Numerički vrednovani ishodi

Igra ima sedlastu točku na BB. Sedlasta točka bi postojala i bila bi ista ako bismo mijenjali brojeve bilo kojom transformacijom koja čuva poredak. Svaka transformacija koja čuva poredak također bi sačuvala „dominaciju"(npr. da Mia B dominira Miom C). Ljestvica na kojoj veći brojevi predstavljaju poželjnije ishode na način da je važan samo redoslijed brojeva, a ne njihova apsolutna ili relativna veličina, naziva se **rednom ljestvicom**. Brojevi određeni iz preferencija na ovaj način nazivaju se **rednim korisnostima**.

Drugi slučaj je kada igra koju razmatramo nema sedlastu točku i rješenje uključuje mješovite strategije. Promotrimo primjer 2×2 igre gdje su a, b, c, d takvi da je $a > b$ i $d > c$.

		Luka		
		A	B	ostatak
Mia	A	a	b	$d - c$
	B	c	d	$a - b$

Tablica 4.3: Ukoliko su dvije najveće vrijednosti dijagonalno suprotne, igra nema sedlaste točke

Mijina optimalna mješovita strategija je: $\frac{d-c}{(d-c)+(a-b)}$ A, $\frac{a-b}{(d-c)+(a-b)}$ B.
Da bi ovo imalo smisla, brojevi moraju biti dodijeljeni na način da je omjer razlika $(d - c)$:$(a - b)$ smislen.

Ljestvica na kojoj nije važan samo redoslijed brojeva, već je i omjeri razlika brojeva smislen naziva se **intervalna ljestvica**. Brojevi koji odražavaju preferencije na intervalnoj ljestvici nazivaju se **kardinalne korisnosti**.

Da bi rješenje igre s mješovitom strategijom imalo smisla, brojevi u matrici igre moraju biti kardinalne korisnosti. Pretpostavimo da razmatramo igru s mogućim ishodima u, v, w, x, a Mijin poredak obzirom na preferencije je u, x, w, v. Da bismo odredili Mijine korisnosti na kardinalnoj ljestvici, moramo dodijeliti brojeve ishodima tako da omjeri razlika između brojeva odražavaju nešto o Mijinim preferencijama.

Von Neumann i Morgenstern primijetili su da bismo mogli dobiti relevantne informacije postavljajući Miji pitanja o lutriji. Započnimo proizvoljnim dodjeljivanjem brojeva u i v, s tim da u dobiva veći broj od v. Na primjer, dodijelimo 0 za v, a 100 za u. Sada pitamo Miu: „Što biste radije: x sigurno ili lutriju koja bi vam dala v s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$ i i u s vjerojatnošću $\frac{1}{2}$?" Ovakvu ćemo lutriju označiti s $\frac{1}{2}v$, $\frac{1}{2}u$. Ako Mia kaže da bi radije x nego lutriju, to znači da je x veći od aritmetičke sredine brojeva u i v, tako da moramo dodijeliti x broj veći od 50.

Nastavljajući: „Biste li radije x sigurno ili lutriju $\frac{1}{4}v$, $\frac{3}{4}u$?" Pretpostavimo da i ovoga puta Mia bira lutriju. Tada znamo da je x ispod $\frac{3}{4}$ udaljenosti od v do u tj. ispod 75: Nastavljajući mijenjati koeficijente na lutriji, na kraju možemo pronaći lutriju tako da Mia bude ravnodušna između x i te lutrije. Na primjer, Mia bi mogla biti ravnodušna između x i $\frac{4}{10}v$, $\frac{6}{10}u$.Tada bismo x dodijelili broj 60. Sada ponavljamo postupak za w. Pretpostavimo da na kraju dodijelimo w broj 20. Tada imamo ishode raspoređene duž brojevne crte:

v	w		x		u
0	20	40	60	80	100

Slika 4.1: Mijine kardinalne korisnosti za ishode

te nam dodjele, ako su dosljedne, daju prikaz Mijinih kardinalnih korisnosti za ishode. Ovdje dosljednost znači da bi Mijin izbor među lutrijama trebao biti onakav kakav predviđa ovaj razmak.

Zanima nas kakve moraju biti Lukine preferencije da bi ovo bila igra sume nula. Nužan uvjet je da Lukine preferencije u lutriji budu obrnute od Mijinih, kao što je bila situacija i za čiste strategije. Ukoliko to jesu, a mi smo odabrali krajnje vrijednosti od -100 za u i 0 za v, Lukina kardinalna korisnost bila bi:

u		x		w	v
-100	-80	-60	-40	-20	0

Slika 4.2: Lukine kardinalne korisnosti

a igra bi bila sume nula. Također, važno je primijetiti da su krajnje točke za kardinalnu ljestvicu korisnosti proizvoljne i da smo ih mogli odabrati drugačije. Na primjer, sljedeća dodjela korisnosti predstavlja iste kardinalne preferencije za Miu kao i naša izvorna dodjela 0-100:

v	w		x		u
-1	0	1	2	3	4

(a)

v	w		x		u
17	19	21	23	25	27

(b)

Slika 4.3: Ekvivalentne ljestvice

Transformacija iz jedne od ovih ljestvica u drugu može se postići pozitivnom linearom funkcijom $f(x) = ax + b$, gdje je $a > 0$. U ovom slučaju, funkcija je $f(x) = 2x + 19$. Kardinalne korisnosti mogu se transformirati bilo kojom pozitivnom linearnom funkcijom bez mijenjanja informacija koje prenose.

Invarijantnost kardinalnih korisnosti pod pozitivnim linearnim funkcijama znači da su neke igre koje se ne čine igrama sume nula zapravo njima ekvivalentne. Najlakši primjeri su igre s konstantnom sumom, koje postaju igre sume nula ako oduzmemo konstantni zbroj c od korisnosti jednog igrača.

		Luka	
		A	B
Mia	A	$(27, -5)$	$(17, 0)$
	B	$(19, -1)$	$(23, -3)$

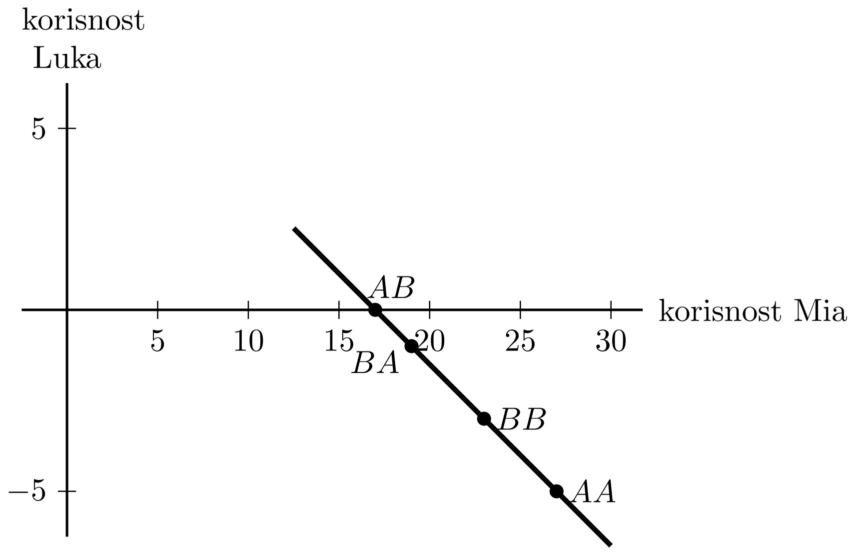
Tablica 4.4: Igra nekonstantne sume

Kao što vidimo igra prikazana 4.4 nije igra konstantne sume , profit za odigranu situaciju AA je 22, a za AB 17. Međutim, ako transformiramo Mijine korisnosti funkcijom $f(x) = \frac{1}{2}(x - 17)$ dobivamo:

		Luka	
		A	B
Mia	A	$(5, -5)$	$(0, 0)$
	B	$(1, -1)$	$(3, -3)$

Tablica 4.5: Igra sume nula dobivena transformacijom

koja prikazuje igru sume nula, stoga se ova igra može riješiti metodama koje smo dosad upoznali.



Slika 4.4: Grafička metoda ispitivanja je li igra ekvivalentna igri sume nula

Slika 4.4 ilustrira jednostavnu grafičku metodu za određivanje je li igra ekvivalentna igri sume nula. Ucrtamo profite za svaki ishod u koordinatnoj ravnini i ukoliko sve točke leže na istom padajućem pravcu, tada je igra ekvivalentna igri sume nula.

Literatura

[A1] Philip D.Straffin, Game Theory and Strategy

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

IGRE SUME NULA

Ivana Bešlić

Sažetak:
U ovom radu obradili smo temu: „Igre sume nula" kao jedan od istaknutih primjera igara konstantne sume u teoriji igara. Definirali smo osnovne pojmove poput dominantnih strategija, sedlastih točaka i mješovitih strategija koji su nam bili alat u pronalasku optimalnih rješenja za promatrane probleme. Povezali smo matematičku teoriju s primjerima iz raznih aspekata života i drugim znanostima poput filozofije, ekonomije i politike. U zadnjem poglavlju dotakli smo se teorije korisnosti i procesima pridruživanja numeričkih vrijednosti ishodima.

Ključne riječi:
sedlasta točka, dominantna strategija, mješovite strategije,informacijski skup,kardinalne korisnosti

Podatci o radu:
broj stranica: 38, broj slika: 7, broj tablica: 22, jezik izvornika: hrvatski

Mentor: *doc. dr. sc., Aljoša Šubašić*

Članovi povjerenstva:
doc. dr. sc., Tanja Vojković
Pavao Radić, mag.math

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *19.rujna 2023.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

ZERO-SUM GAMES

Ivana Bešlić

Abstract:

In this thesis, we discussed the topic: „Zero sum games" as one of the outstanding examples of constant sum games in game theory. We defined basic terms such as dominant strategies, saddle points and mixed strategies, which were a tool for us in finding optimal solutions for the observed problems. We connected mathematical theory with examples from various aspects of life and other sciences such as philosophy, economics and politics. In the last chapter, we touched on the utility theory and the processes of associating numerical values with outcomes.

Key words:

saddle point, dominant strategy, mixed strategies, information set, cardinal utilities

Specifications:

38 pages, 7 figures, 22 tables, original in: Croatian

Mentor: *assisstant professor, Aljoša Šubašić*

Committee:

assisstant professor, Tanja Vojković

Pavao Radić

This thesis was approved by a Thesis commettee on *19.09.2023.*