# Konusno programiranje

**Jukić, Ivan**

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

IVAN JUKIĆ

# KONUSNO PROGRAMIRANJE

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2023.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

# KONUSNO PROGRAMIRANJE

Ivan Jukić

**Sažetak**:

*U ovom radu pobliže upoznajemo jednu od grana konveksne optimizacije koju nazivamo konusnim programiranjem. Prikazujemo teorijsku podlogu pri čemu navodimo važan teorem konusne dualnosti koji nam omogućuje rješavanje mnogih problema. Također, navodimo zanimljiva svojstva kvadratnog konusnog programiranja.*

**Ključne riječi**:

*Konus, konveksan skup, optimizacijski problem, optimalna vrijednost, optimalna točka, linearno programiranje, teorem dualnosti, slaba dualnost, konusno programiranje, teorem konusne dualnosti, kvadratno konusno programiranje, CQI , CQr*

**Podatci o radu**:

*49 stranica, 8 slika i 2 tablice , 6 literaturnih navoda, Hrvatski*

**Mentor(ica)**: *prof. dr. sc. Milica Klaričić Bakula*

**Članovi povjerenstva**:

*prof. dr. sc. Jurica Perić*

*doc. dr. sc. Andrijana Ćurković*

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *08.09.2023.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

# CONIC PROGRAMMING

Ivan Jukić

**Abstract**:

*In this thesis we discuss one of the branches of convex optimization called conic programming. We present the theoretical background and state the important cone duality theorem that allows us to solve many problems. We also list interesting properties of quadratic conic programming.*

**Key words**:

*Conic, convex set, optimization problem, optimal value, optimal point, linear programming, duality theorem, weak duality, conic programming, conic duality theorem, quadratic conic programming, CQI , CQr*

**Specifications**:

*49 pages, 8 pictures and two tables, 6 literature references, English*

**Mentor**: *Professor Milica Klaričić Bakula*

**Committee**:

*Associate Professor Jurica Perić*

*Assisstat Profesor Andrijana Ćurković*

This thesis was approved by a Thesis commettee on *08.09.2023.*

# Uvod

Konusno programiranje je grana konveksne optimizacije koja je važno mjesto u matematičkom programiranju stekla krajem prošloga stoljeća. Konusno programiranje kao podklase sadrži neke od najvažnijih klasa konveksne optimizacije: linearno i semidefinitno programiranje. Pokazalo se kao iznimno koristan alat s mnogo primjena. Mnoge probleme konveksne optimizacije možemo zapisati kao probleme konusnog programiranja, tako da nam konusno programiranje nudi jedinstven način za proučavanje svojstava i razvijanje algoritama za širok spektar različitih problema konveksne optimizacije. Glavni cilj ovog rada je upoznati čitatelja s teorijom konusnog programiranja te posebno kvadratnog konusnog programiranja te upoznati se s njihovim svojstvima te dati ilustrativne primjere. Prvo poglavlje se bavi uvodnim pojmovima potrebnim za nastavak samoga rada te linearnim programiranjem radi lakšeg razumijevanja konusnog i kvadratnog konusnog programiranja i međusobne usporedbe.

# Sadržaj

# Poglavlje 1

# Linearno programiranje

## 1.1 Defincije

Linearno programiranje je grana optimizacije koja se bavi problemom optimizacije sustava unutar posebnog oblika. Uveo ju je Leonid Kantorovič kasnih 1930-ih godina kao metodu rješavanja problema planiranja proizvodnje. Prije same definicije linearnog programiranja, navest ćemo ključne pojmove u teoriji.

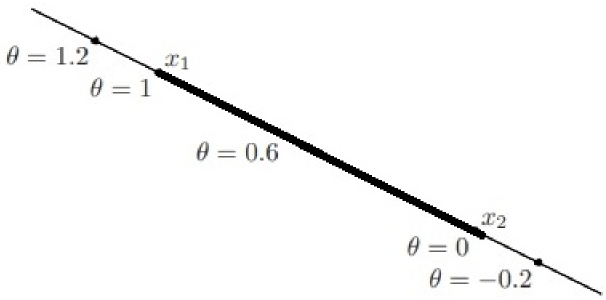
**Definicija 1.1** *Kažemo da je skup $C \subseteq \mathbb{R}^n$ afin ako za sve $x_1, x_2 \in C$ i $\Theta \in \mathbb{R}$ vrijedi*

$$\Theta x_1 + (1 - \Theta)x_2 \in C$$

**Napomena 1.2** *Poopćimo li uvjet iz defincije (1.1) na k točaka, dolazimo do pojma afine kombinacije točaka oblika :*

$$\Theta_1 x_1 + \cdots + \Theta_k x_k \in C,$$

*za sve $x_1, \ldots, x_k \in C$ i $\Theta_1 + \cdots + \Theta_k = 1$ , $\Theta_i \in \mathbb{R}$.*




Slika 1.1:

**Primjer 1.3 (Slika 1.1)** *Pravac koji prolazi kroz $x_1$ i $x_2$ zadan je parametarski pomoću $\Theta x_1 + (1-\Theta)x_2$, gdje $\Theta$ poprima vrijednosti iz $\mathbb{R}$. Segment linije između $x_1$ i $x_2$, koji odgovara $\Theta$ između 0 i 1, prikazan je tamnije.*

**Primjer 1.4 (Rješenje skupa linearnih jednadžbi)** *Skup rješenja sustava linearnih jednadžbi*

$$C = \{x : \ Ax = b\},$$

*gdje je $A \in \mathbb{R}^{(m\times n)}$ i $b \in \mathbb{R}^m$, je afin skup. Za dokazati ovo, pretpostavimo da su $x_1, x_2 \in C$ takvi da vrijedi $Ax_1 = b$ i $Ax_2 = b$. Za bilo koji $\Theta \in \mathbb{R}$, vrijedi*

$$\begin{aligned} A(\Theta x_1 + (1-\Theta)x_2) &= \Theta Ax_1 + (1-\Theta)Ax_2 \\ &= \Theta b + (1-\Theta)b \\ &= b, \end{aligned}$$

*što pokazuje da je afina kombinacija $\Theta x_1 + (1-\Theta)x_2$ također u $C$.*

**Definicija 1.5** *Skup svih afinih kombinacija točaka nekoga skupa $C \subseteq \mathbb{R}^n$ zovemo afina ljuska skupa $C$ i pišemo aff $C$,*

$$affC = \{\Theta_1 x_1 + \cdots + \Theta_k x_k : x_i \in C, \ i = 1, \ldots, k, \ \Theta_1 + \cdots + \Theta_k = 1, k \in \mathbb{N}\backslash\{1\}\}.$$

**Primjer 1.6** *Promotrimo kvadrat u $(x_1, x_2)$-ravnini u $\mathbb{R}^3$, definiran kao*

$$C = \{x \in \mathbb{R}^3 : -1 \leq x_1 \leq 1, -1 \leq x_2 \leq 1, x_3 = 0\}.$$

*Njegova afina ljuska je $(x_1, x_2)$-ravnina, tj.*

$$affC = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 0\}.$$

**Definicija 1.7** *Kažemo da je skup $C$ konveksan ako vrijedi*

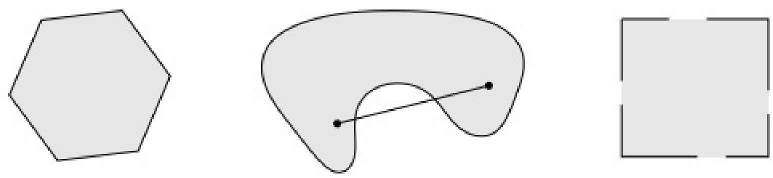
$$\Theta x_1 + (1 - \Theta)x_2 \in C,$$

*za sve $x_1, x_2 \in C$ i $\Theta \in [\,0, 1\,]$.*

**Primjer 1.8** *Jednostavni primjeri konveksnog skupa su:*

- *prazan skup $\emptyset$ , jednočlani skup $\{x_0\}$, cijeli $\mathbb{R}^n$*
- *intervali*
- *euklidska kugla $B(x_0, \varepsilon) = \{x : \| x - x_0 \|_2 \leq \varepsilon\}$.*

**Primjer 1.9** *Na slici 1.2 su prikazani konveksni i ne konveksni skupovi. Na lijevoj slici se nalazi šesterokut kojemu su uključene granice te je ovo primjer konveksnog skupa. Na srednjoj slici se nalazi oblikovani skup koji nije konveksan, budući se segment dviju istaknutih točaka se ne nalazi u samome skupu. Na desnoj slici se nalazi kvadrat koji sadrži samo neke točke ruba te on nije konveksan.*



Slika 1.2:

**Napomena 1.10** *Poopćimo li uvjet konveksnog skupa s dvije točke na k točaka, dolazimo do pojma konveksne kombinacije točaka skupa C oblika :*

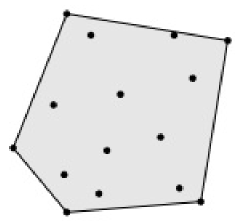
$$\Theta_1 x_1 + \cdots + \Theta_k x_k \in C,$$

*za sve* $x_1, \ldots, x_k \in C$ *i* $\Theta_1 + \cdots + \Theta_k = 1$ , $\Theta_i \in [\,0, 1\,]$.

**Definicija 1.11** *Skup svih konveksnih kombinacija točaka nekoga skupa* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *zovemo konveksna ljuska skupa C i pišemo convC,*

$$convC = \{\Theta_1 x_1 + \cdots + \Theta_k x_k : x_i \in C,\ i = 1, \ldots, k,\ \Theta_1 + \cdots + \Theta_k = 1, \Theta_i \geq 0\}.$$

**Primjer 1.12** *Konveksna ljuska nad* $\mathbb{R}^2$. *Na slici 1.3 konveksna ljuska skupa od petnaest točaka (prikazan kao točkice) je peterokut (prikazan osjenčeno).*



Slika 1.3:

**Definicija 1.13** *Kažemo da je skup C konus ako vrijedi*

$$\Theta x \in C,$$

*za sve* $x \in C$ , $\Theta \geq 0$.

Za skup C kažemo da je konveksni konus, ako je konveksan i konus. Može se pokazati da je C konveksan konus ako i samo ako za sve $x_1, x_2 \in C$ i $\Theta_1, \Theta_2 \geq 0$ vrijedi:

$$\Theta_1 x_1 + \Theta_2 x_2 \in C.$$

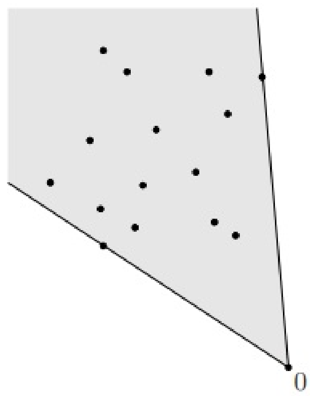
**Napomena 1.14** *Poopćimo li uvjet konveksnog konusa s dvije točke na k točaka, dobivamo oblik:*

$$\Theta_1 x_1 + \cdots + \Theta_k x_k \in C,$$

*za sve* $x_1, \ldots, x_k \in C$ *i* $\Theta_1, \ldots, \Theta_k \geq 0$ *. Točka oblika* $\Theta_1 x_1 + \cdots + \Theta_k x_k$ *s* $\Theta_1, \ldots, \Theta_k \geq 0$ *naziva se konusna kombinacija točaka* $x_1, \ldots x_k$.

**Definicija 1.15** *Skup svih konusnih kombinacija točaka nekoga skupa* $C \subseteq \mathbb{R}^n$ *zovemo konusna ljuska,*

$$\{\Theta_1 x_1 + \cdots + \Theta_k x_k : x_i \in C,\ \Theta_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k\}.$$




Slika 1.4: Konusna ljuska

**Definicija 1.16** *Hiperravnina je skup oblika*

$$\{x : a^\tau x = b\} \subseteq \mathbb{R}^n,$$

*gdje* $A \in \mathbb{R}^n, a \neq 0$ *i* $b \in \mathbb{R}$

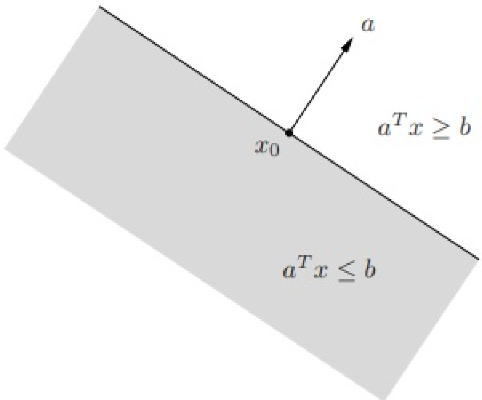
Geometrijski, hiperravnina $\{x : a^\tau x = b\}$ se može interpretirati kao skup točaka s konstantnim skalarnim produktom na zadani vektor a.

**Definicija 1.17** *Poluprostor je skup oblika*

$$\{x : a^{\tau} x \leq b\},$$

*gdje je* $a \neq 0$.

Hiperravnina dijeli prostor $\mathbb{R}^n$ na dva poluprostora. Poluprostor je konveksan, ali nije afin. To nam ilustrira slika 1.5.

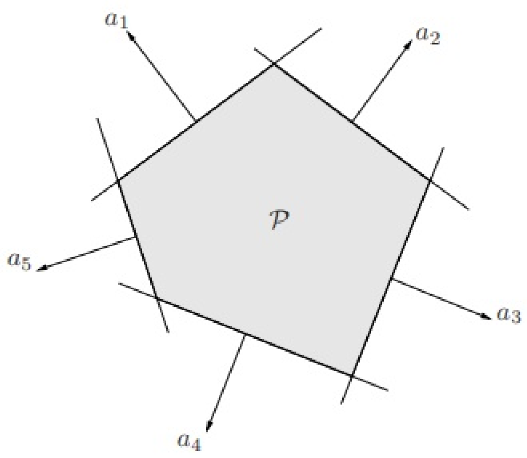



Slika 1.5: Hiperravnina definirana s $a^{\tau} x = b$ u $\mathbb{R}^2$ određuje dva poluprostora. Poluprostor određen s $a^{\tau} x \geq b$ (nije osjenčen) je poluprostor protežući se u pravcu a. Poluprostor određen $a^{\tau} x \leq b$ (što je prikazan osjenčen) proteže se u smjeru a. Vektor a je vanjska normala ovih poluprostora.

**Definicija 1.18** *Poliedar je skup rješenja konačnog broja linearnih jednadžbi i nejednadžbi:*

$$\mathcal{P} = \{x : a_j^T x \leq b_j,\ j = 1, \ldots, m,\ c_j^T = d_j,\ j = 1, \ldots, p\}.$$

**Napomena 1.19** *Poliedri su presjeci konačnog broja hiperravnina i poluprostora. Uočimo da su afini skupovi (dakle i potprostori, hiperravnine i pravci), segmenti i poluprostori poliedri.*




Slika 1.6: Poliedar $\mathcal{P}$ je presjek pet poluprostora s vanjskim normalama vektora $a_1, \ldots, a_5$ .

## 1.2 Optimizacijski problem

Koristimo notaciju

$$\begin{aligned} &\textit{minimizirati } f_0(x) \\ &\qquad f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m \\ &\qquad h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, p \end{aligned} \tag{1.1}$$

za opisati problem pronalaženja $x$ koji minimizira $f_0(x)$ između svih $x$-eva koji zadovoljavu uvjete $f_i(x) \leq 0, i = 1, \ldots, m$ i $h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, p$. $x \in \mathbb{R}^n$ nazivamo optimizacijskom varijablom, a funkciju $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ funkcijom cilja ili funkcijom troška. Nejednakosti $f_i(x) \leq 0$ zovemo nejednakosni uvjeti, dok funkcije $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zovemo nejednakosne funkcije. Jednadžbe $h_i(x) = 0$ zovemo jednakosni uvjeti, dok funkcije $h_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zovemo jednakosne funkcije. Skup

$$D = \bigcap_{i=1}^{m} dom f_i \cap \bigcap_{i=1}^{p} dom g_i$$

se zove domena optimizacijskog problema (1.1). Za točku $x \in D$ kažemo da je dopustiva ako ispunjava svih m + p uvjeta. Za problem (1.1) kažemo da je dopustiv ako postoji bar jedna dopustiva točka za taj problem. U suprotnom, kažemo da je problem nedopustiv.
Optimalna vrijednost $p^*$problema (1.1) definirana je s

$$p^* = inf\{f_0(x) : f_i \leq 0, i = 1, \ldots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, p\}.$$

Kažemo da je $x^*$ optimalna točka problema (1.1) ili da rješava problem (1.1) ako je dopustiva i ako je

$$f_0(x^*) = p^*.$$

Skup optimalnih točaka tvori takozvani optimalni skup

$$Xopt = \{x : f_i \leq 0, i = 1, \ldots, m, h_i(x) = 0, i = 1, \ldots, p \ i \ f_0(x^*) = p^*\}.$$

**Primjer 1.20** *Razmotrimo probleme bez uvjeta s* $Domf_0 = \mathbb{R}_{++}$

1. $f_0(x) = \frac{1}{x}$
2. $f_0(x) = -logx$
3. $f_0(x) = xlogx$

*Rješenje:*

1. $p^* = 0$, *ali nije dosežna.*
2. $p^* = -\infty$, *problem nije omeđen odozdo.*
3. $p^* = -\frac{1}{e}$ , $x^* = \frac{1}{e}$

## 1.3 Linearno programiranje

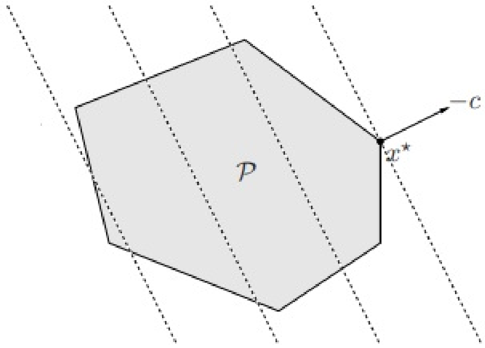
Kada je funckija cilja afina kao i sve funkcije ograničenja, problem se zove linearni program (LP). Opći problem linearnog programiranja ima oblik

$$\begin{aligned} \min\ & c^T x + d \\ & Gx \preceq h \\ & Ax = b, \end{aligned} \tag{1.2}$$

gdje je $G \in \mathbb{R}^{m \times n}$ i $A \in \mathbb{R}^{p \times n}$. Problemi linearnog programiranja su, naravno, problemi konveksne optimizacije, no sve funkcije koje se javljaju u njemu su afine pa nisu strogo konveksne.
U praksi se obično izostavlja broj d jer ne utječe na optimalnu točku, već samo na optimalnu vrijednost.

Budući da možemo maksimizirati afini cilj $c^T x + d$ minimiziranjem $-c^T x - d$ (koja je još uvijek konveksna), to se problemi određivanja maksimuma afine funkcije s afinim funckijama ograničenja također smatraju LP problemima

Geometrijska interpretacija LP-a ilustrirana je na slici 1.7 . Dopustiv skup LP (1.2) je poliedar $\mathcal{P}$; problem je minimizirati afine funkcija $c^T x + d$ (ili, ekvivalentno, linearnu funkciju $c^T x$) preko $\mathcal{P}$.




Slika 1.7: Geometrijska interpretacija LP. Dopustiv skup $\mathcal{P}$, koji je poliedar, na slici osjenčen. Cilj $c^T x$ je linearan pa njegove razine krivulje su hiperravnine okomite na c (prikazane isprekidanim linijama). Točka $x^*$ je optimalna; to je najudaljenija točka u $\mathcal{P}$ u smjeru vektora -c.

Dva posebna slučaja LP-a (1.2):

1. Standardni oblik:

$$
\begin{aligned}
min\ c^T x \\
Ax = b, \\
x \succeq 0
\end{aligned} \tag{1.3}
$$

2. Nejednakosni oblik:

$$
\begin{aligned}
min\ c^T x \\
Ax \preceq b,
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

**Primjer 1.21 (Problem dijete)** *Pretpostavimo da zdrava prehrana sadrži $m$ različitih nutrijenata u količinama koje ne smiju biti manje od $b_1, \ldots, b_m$. Biramo sustav prehrane izabirući $x_1, \ldots, x_n$ nenegativnih količina $n$ različitih prehrambenih proizvoda. Jedna jedinica hrane $j$ sadrži $a_{ij}$ nutrijenata i ima cijenu $c_j$. Želimo izraditi plan prehrane koji će biti najjeftiniji, a ima sve potrebne nutrijente.*
*Problem se može modelirati kao LP problem:*

$$
\begin{aligned}
&min\ c^T x \\
&\quad Ax \succeq b \\
&\quad x \succeq 0,
\end{aligned}
$$

*gdje $c$ ima komponente cijene, $x$ ima komponente količine, $b$ ima kompenente ograničenja nutrijenski sastojaka i $A = [a_{ij}]$.*

**Zadatak 1.22** *Tvrtka proizvodi dvije vrste bicikli, brdski bicikl i cestovni bicikl. Potrebno je 3 sata da bi se sastavio brdski bicikl te 4 sata da bi se sastavio cestovni bicikl. Ukupno vrijeme dostupno za sastavljanje bicikla je 60 sati. Tvrtka želi prodati barem dvostruko više brdskih bicikli nego cestovnih. Tvrtka ostvaruje profit od 200\$ po cestovnom biciklu i 100\$ po brdskom biciklu. Koliko bi od svake vrste bicikli trebao proizvesti da bi se maksimizirao profit?*

*Rješenje:*
*$x$ - broj brdski bicikli*

*y - broj cestovni bicikli*

$$3x + 4y \leq 60$$

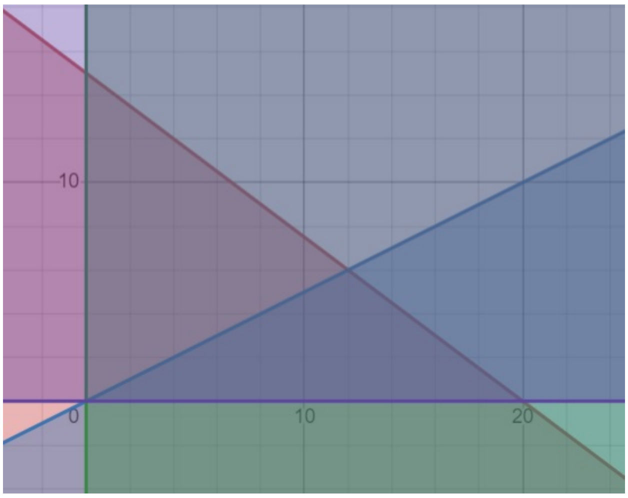
$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$x \geq 2y \Rightarrow y \leq \frac{x}{2}$$

$3x + 4y \leq 60 \Rightarrow$

| $x$ | $y$ |
|---|---|
| *0* | *15* |
| *20* | *0* |




Slika 1.8: Rješenje nejednadžbi (ljubičasti trokut)

*Izračunajmo točku koja je u presjeku pravaca* $3x + 4y \leq 60$ *i* $y \leq \frac{x}{2}$
*Rješavanje jednadžbi* $3x + 4y = 60$ *i* $y = \frac{x}{2}$ *dobivamo da je* $x = 12$ *i* $y = 6$.
*Ostaje nam ispitati za koju od ovih triju točaka (0,0),(20,0) i (12,6) tvrtka bi imala najveći profit.*
*Profit je dan formulom:*

$$p = 100x + 200y$$

| *Točka* | *Profit* |
|---|---|
| *(0,0)* | *0* |
| *(20,0)* | *2000* |
| *(12,6)* | *2400* |

*Da bi maksimizirala svoj profit tvrtka treba proizvesti 12 brdski i 6 cestovnih bicikli.*

# 1.4 Dualnost u linearno programiranju

Prije formalnog definiranja dualnog problema, pogledajmo jedan primjer:

**Primjer 1.23**

$$\begin{aligned} max\ z = 3x_1 + 4x_2 & \\ \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 \leq 30 & \quad (1.5) \\ 3x_1 + x_2 \leq 25 & \quad (1.6) \\ x_1, x_2 \geq 0 & \end{aligned}$$

*Pomnožimo li nejednadžbu (1.5) sa 6, dobijemo* $3x_1 + 12x_2 \leq 120$. *Kako su* $x_1, x_2 \geq 0$, *možemo zaključiti:*

$$z = 3x_1 + 4x_2 \leq 3x_1 + 12x_2 \leq 120$$

*iz čega slijedi da z ne može biti veći od 120.*

*Na isti način, možemo zaključiti, pomnožimo li nejednadžbu (1.6) sa 4 dobijemo:*

$$z = 3x_1 + 4x_2 \leq 12x_1 + 4x_2 \leq 100,$$

*odnosno da je* $z \leq 100$

*Pomnožimo li nejednadžbu (1.5) s 2 te zbrojimo s nejednadžbom (1.6) dobi-*

*jemo:*

$$z = 3x_1 + 4x_2 \leq 4x_1 + 5x_2 \leq 85,$$

*odnosno da je* $z \leq 85$.

*U svakom od ovih slučajeva uzimamo linearnu kombinaciju ograničenja s pozitivnim koeficijentima i gledamo što bolju među na najveću moguću vrijednost od* $3x_1 + 4x_2$.

*Neka su* $y_1$ *i* $y_2$ *koeficijenti linearne kombinacije. Imamo:*

$y_1\left(\frac{1}{2}x_1 + 2x_2\right) \leq y_1 30$ *i* $y_2 (3x_1 + x_2). \leq y_2 25$ *Zbrojimo li ove dvije nejednadžbe, dobivamo:*

$$\left(\frac{1}{2}y_1 + 3y_2\right)x_1 + (2y_1 + y_2)\,x_2 \leq 30y_1 + 25y_2.$$

*Sada nam je cilj minimizirati desnu stranu* $30y_1 + 25y_2$ *s uvjetima da je* $\frac{1}{2}y_1 + 3y_2 \geq 3$ *i* $2y_1 + y_2 \geq 4$, *odnosno riješiti problem:*

$$\begin{aligned} min\ w = {} & 30y_1 + 25y_2 \\ & \frac{1}{2}y_1 + 3y_2 \geq 3 \\ & 2y_1 + y_2 \geq 4 \\ & y_1, y_2 \geq 0 \end{aligned}$$

*Ovo je također problem linearnog programiranja koju nazivamo dualnim problemom, dok polazni problem nazivamo primarnim. Konstruirali smo dualni problem kako bi poslužio kao gornja međa na optimalnu vrijednost primarnog problema. Naime, ako je y dopustiva točka dualnog i x dopustiva točka primarnog problema, onda po teoremu slabe dualnosti (navest ćemo ga kasnije) mora vrijediti:*

$$3x_1 + 4x_2 \leq 30y_1 + 25y_2.$$

*Cilj nam je pronaći (ako je moguće) dopustive točke primarnog i dualnog problema koje su jednake. Tada smo pronašli optimalnu vrijednost ovoga*

*optimalnog problema.*
*U našem primjeru* $x_1 = \frac{40}{11}, x_2 = \frac{155}{11}$ *i* $y_1 = \frac{18}{11}, y_2 = \frac{8}{11}$ *daju jednaku vrijednost* $\frac{740}{11}$ *te to mora biti optimalna vrijednost.*

Neka nam je dan primarni problem:

$$min\ cx$$
$$Ax \geq b$$
$$x \geq 0.$$

Kao i primarni, dualni problem zadan je s A, b i c. U primarnom problemu c je bio zadan funkcijom cilja, a b problemskim ograničenjima. U dualnom problemu je obratno, odnosno c je zadan problemskim ograničenjima, a b funkcijom cilja. Nepoznanica y dualnog problema je vektor redak dimenzije m. Za razliku od primarnog problema u kojem su problemska ograničenja dana s $Ax \geq b$, u dualnom su dani s $yA \leq c$. Svaki problem minimizacije povezan je s problemom maksimizacije, stoga dualni problem problema linearnog programiranja glasi:

$$max\ yb$$
$$yA \leq c$$
$$y \geq 0.$$

Dualni problem dualnog problema je početni primarni problem. Zapišemo dualni problem kao problem minimizacije:

$$max\ yb = -min(-yb) = -min((-b)^T y^T,$$

uz

$$(-A^T)y^T = -(yA)^T \geq -c^T \ i\ y^T \geq 0.$$

Dakle, $y^T$ zadovoljava standardan oblik minimizacijskog problema uz matricu $A^T$ i desnu stranu nejednakosti $c^T$, te vektor $b^T$ u funkciji cilja.
Ako ovaj problem shvatimo kao primarni, pripadni dualni problem sada glasi:

$$-max(z(-c^T))$$

uz uvjete

$$z(-A^T) \leq -b^T$$
$$z \geq 0,$$

gdje je z vektor redak dimenzije n. Uz $x = z^T$ konačno dobivamo

$$-max(z(-c^T)) = min(zc^T) = min\ cz^T = min\ cx,$$

te

$$\begin{aligned} z(-A^T) \leq -b^T &\iff zA^T \geq b^T \\ &\iff Az^T \geq b \\ &\iff Ax \geq b, \end{aligned}$$

čime smo zaista dobili primarni problem.

Intepretirajmo primarni i dualni problem problema dijete promatranog poglavlju (1.3), ali općenito. U problemu moramo minimizirati trošak dijete. U dijetu ulaze n vrsta namirnica. Od svake vrste $x_1, \ldots, x_n$ moramo odabrati nenegativan broj komada. Ograničenja su dana s m vrsta potrebnih vitamina. Sukladno primarnom problemu u kojem vrijedi: $Ax \geq b$, $x \geq 0$, ograničenja možemo zapisati tako da je s $a_{ij}$ označena količina i-tog vitamina u j-toj namirnici. i-ti redak sustava $Ax \geq b$ mora sadržavati najmanje $b_i$ određenog vitamina kako bi se zadovoljile potrebe dijete. Ako je s $c_j$ oznacen trošak j-te namirnice, tada je trošak dijete: $cx = c_1x_1 + \cdots + c_nx_n$.

Promatrano u matričnom obliku imamo:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad \text{b}= \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, ; \text{c}= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}.$$

Promotrimo dualni problem, problem maksimalizacije. Pretpostavimo da ljekarnik prodaje vitaminske tablete po cijeni $y_i \geq 0$. Buduci da namirnica j sadrzi vitamine u količini $a_{ij}$, ljekarnikova cijena vitaminskih tableta ne moze prekoračiti cijenu namirnice $c_j$. To predstavlja j-to ogranicenje u $yA \leq c$. Radeći unutar ograničenja cijena vitamina, ljekarnik može prodati potrebnu količinu $b_i$ svakog vitamina. Ukupan prihod prodaje iznosi:

$$y_1 b_1 + \cdots + y_m b_m = y_b.$$

Prihod od prodaje ljekarnik želi maksimizirati.

**Teorem 1.24 (Teorem dualnosti)** *Ako su dopustivi skupovi primarnog i dualnog problema neprazni, onda imaju optimalna rješenja $x^*$ i $y^*$. Minimalna vrijednost (trošak) $cx^*$ primarnog problema jednaka je maksimalnoj vrijednosti $y^*b$ (dobit) dualnog problema.*

**Teorem 1.25 (Slaba dualnost)** *Ako su $x$ i $y$ točke dopustivog skupa primarnog i dualnog problema, onda je $yb \leq cx$.*

**Dokaz.** Budući da su $x$ i $y$ točke područja rješenja, moraju biti zadovoljena sljedeća ograničenja: $Ax \geq b$ i $yA \leq c$. Iz definicije primarnog i dualnog problema slijedi: $x \geq 0$ i $y \geq 0$. Iz nenegativnosti komponenti vektora $x$ i $y$, množenjem s vektorom $x$, odnosno y, smjer nejednakosti ostaje sačuvan:

$$yAx \geq yb \;\; i \;\; yAx \leq cx.$$

Budući da vrijedi: $yb \leq yAx \leq cx$, slijedi slaba dualnost $yb \leq cx$ $\blacksquare$

Nejednadžba ne dozvoljava da oba problema (primarnog i dualnog) linearnog programiranja budu neograničena. Ako je vrijednost $yb$ proizvoljno velika, točka $x$ mogla bi proturječiti nejednakosti $yb \leq cx$. Slično, ako vrijednost od $cx$ postane beskonačna, onda za dualni problem se ne može odabrati proizvoljna točka y . Dakle, ako je dualni problem neomeđen (odozgo), onda je dopustivi skup primarnog problema nužno prazan skup, i obratno. Također, ako vrijedi jednakost $yb = cx$, $x$ i $y$ moraju biti optimalne točke.

# Poglavlje 2

# Konusno programiranje

Modeli linearnog programiranja pokrivaju brojne primjene. Specifična analitička struktura LP programa dovodi do brojnih općih rezultata (npr. oni iz teorije dualnosti LP) koji nam u mnogim slučajevima pružaju vrijedan uvid i razumijevanje. Ipak, postoje situacije u stvarnom životu koje ne mogu biti opisane LP modelima. Za rješavanje ovih u biti nelinearnih slučajeva potrebno je proširiti osnovne teorijske rezultate i računalne tehnike poznate za LP izvan granice LP.

Najšira nadklasa LP problema je klasa problema konveksne optimizacije. Postoji nekoliko ekvivaletnih načina definiranja općeg problema konveksne optimizacije.

Pri prijelazu s općeg problema LP

$$\min_x \{c^T x | Ax \geq b\}, \quad [A : m \times n], \tag{2.1}$$

do njegovih nelinearnih proširenja, trebali bismo očekivati da ćemo naići na neke nelinearne komponente u problemu. Tradicionalni način ovdje je reći: " U (2.1) postoji linearna funkcija cilja: $f_0(x) = c^T x$ i nejednakosni uvjeti $f_i(x) \geq b_i$ s linearnom funkcijom $f_i(x) = a_i^T x, i = 1, \ldots, m$. Dopustimo da

neke ili sve funkcije $f_0, f_1, \ldots, f_m$ budu nelinearne."
Za razliku od ovog tradicionalnog načina, namjeravamo zadržati cilj i ograničenja linearnima, ali uvesti nelinearnost kod nejednakosnih uvjeta$\geq$ .

## 2.1 Uređaj na $\mathbb{R}^m$

Nejednakosni uvjeti $Ax \geq b$ u (2.1) predstavljaju nejednakost među vektorima pa kao takva zahtjeva definiciju.

**Definicija 2.1** *Neka su dana dva vektora $a, b \in \mathbb{R}^m$. Pišemo $a \geq b$ ako su odgovarajuće koordinate od $a$ veće ili jednake odgovarajućim koordinata od $b$, odnosno:*

$$a \geq b \Leftrightarrow \{a_i \geq b_i, i = 1, \ldots, m\}. \tag{2.2}$$

Gore navedena relacija među vektorima je relacija djelomičnog uređaja jer ima sva potrebna svojstva i k tomu neka dodatna. Naime, za sve vektore $a, b, c, d, \dots \in \mathbb{R}^m$ vrijedi:

1. refleksivnost: $a \geq a$
2. antisimetričnost: ako vrijedi $a \geq b$ i $b \geq a$, onda je $a = b$
3. tranzitivnost: ako vrijedi $a \geq b$ i $b \geq c$, onda je $a \geq c$
4. kompatibilnost s linearnim operacijama:

   homogenost: ako vrijedi $a \geq b$ i $\lambda$ je nenegativni realan broj, onda je $\lambda a \geq \lambda b$

   aditivnost: ako vrijedi $a \geq b$ i $c \geq d$, onda je $a + c \geq b + d$.

**Primjer 2.2** *Jednostavni primjeri djelomičnog uređaja su:*

- *realni brojevi, ili općenito bilo koji potpuno uređen skup, poredan standardnom relacijom manje jednako $\leq$, je djelomičan uređaj*
- *skup potprostora vektorskog prostora s uređajem inkluzije*
- *Još jedan klasičan primjer djelomičnog uređenja je relacija podskupa, označena $\subseteq$, na skupu $\mathcal{P}(S)$, gdje je $S$ bilo koji skup . Primijetimo da $S$ može biti prazan skup. U tom slučaju je $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ i očito je $(\mathcal{P}(\emptyset), \subseteq)$ djelomično uređen skup.*

Dakle, ovakav djelomični uređaj na $\mathbb{R}^m$ obično označavamo s $\succeq$. Uređaj nazivamo dobrim uređajem ako ima svojstva svojstva (1-4).

Uređaj $\succeq$ usko vezan uz skup $\mathbf{K}$ $\succeq$-nenegativnih vektora:

$$\mathbf{K} = \{a \in \mathbb{R}^m \mid a \succeq 0\}.$$

Naime,

$$a \succeq b \Leftrightarrow a - b \succeq 0, \quad [\Leftrightarrow a - b \in \mathbf{K}].$$

Doista, neka je $a \succeq b$. Zbog refleksivnosti vrijedi $-b \succeq -b$, a zbog aditivnosti možemo ovu nejednakost zbrojiti s prvom nejednakošću i dobijemo $a - b \succeq 0$. Obrnuto, ako vrijedi $a - b \succeq 0$, onda zbrajajući ovu nejednakost s $b \succeq b$, dobijemo $a \succeq b$.

Skup $\mathbf{K}$ u promatranju ne može biti proizvoljan. Lako se provjeri da mora biti šiljasti konveksni konus, tj. mora zadovoljavati sljedeće uvjete:

1. $\mathbf{K}$ je neprazan i zatvoren obzirom na aditivnost:

$$a, a' \in \mathbf{K} \Rightarrow a + a' \in \mathbf{K}.$$

2. $\mathbf{K}$ je konus:
$$a \in \mathbf{K}, \lambda \geq 0 \Rightarrow \lambda a \in \mathbf{K}.$$

3. $\mathbf{K}$ je šiljat:
$$a \in \mathbf{K} \; i \; -a \in \mathbf{K} \Rightarrow a = 0.$$

Geometrijski, $\mathbf{K}$ ne sadrži pravce koje prolaze kroz ishodište.
Prema tome, svaki neprazni šiljasti konveksni konus $\mathbf{K}$ u $\mathbb{R}^m$ inducira djelomični uređaj na $\mathbb{R}^m$ koji zadovoljava svojstva (1-4). Taj uređaj označavamo s $\geq_{\mathbf{K}}$:
$$a \geq_{\mathbf{K}} b \Leftrightarrow a - b \geq_{\mathbf{K}} 0 \Leftrightarrow a - b \in \mathbf{K}.$$

Konus koji odgovara standardnom koordinatnom uređaju među vektorima $\geq$ je nenegativni ortant
$$\mathbb{R}^m_+ = \{x = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, i = 1, \ldots, m\}.$$

**Napomena 2.3** *Dakle, da bismo zapisali da vektor $a$ nije manji od vektora $b$ u standardnom koordinatnom djelomičnom uređaju u $\mathbb{R}^m$, trebali bismo napisati $a \geq_{\mathbb{R}^m_+} b$. Međutim, nećemo biti tako formalni. Koristit će standardnu skraćenu oznaku $a \geq b$.*

Nenegativni ortant $\mathbb{R}^m_+$ nije samo šiljasti konveksni konus. Ima dva dodatna korisna svojstva:

1. Zatvoren je. Ako niz vektora $a^i$ od konusa ima limes, onda također pripada konusu.

2. Ima nepraznu unutrašnjost. Postoji vektor takav da je kugla pozitivnog radijusa centrirana prema tome vektoru koji je sadržan u konusu.

Pokazuje se da ima smisla ograničiti se na razmatranje samo onih relacija uređaja čiji pripadni konusi koji imaju sva prije navedena svojstva.

**Napomena 2.4** *Od sada, govoreći o dobrim parcijalnim uređajima $\geq_{\mathbf{K}}$, uvijek pretpostavljamo da je skup $\mathbf{K}$ šiljasti i zatvoreni konveksni konus s nepraznom unutrašnjosti.*

**Primjer 2.5** *Djelomični uređaj koji nas posebno zanimaju dani su sljedećim konusima:*

- *nenegativni ortant $\mathbb{R}^m_+$*
- *Lorentz (ili drugog reda, ili sladoled) konus:*

$$\mathbf{L}^m = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_{m-1}, x_m)^T \in \mathbb{R}^m : x_m \geq \sqrt{\sum_{i=1}^{m-1} x_i^2} \right\}.$$

- *Pozitvni semidefinitni konus $\mathbf{S}^m_+$. Ovaj konus se nalazi u prostoru $\mathbf{S}^m$ od $m \times m$ simetričnih matrica koji se sastoji od svih $m \times m$ matrica $A$ koje su pozitivno semidefinitne, tj.*

$$A = A^T, \quad x^T A x \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^m.$$

## 2.2 Konusno programiranje

Neka je $\mathbf{K}$ konus u $\mathbb{R}^m$ (konveksan, šiljast, zatvoren i s nepraznom unutrašnjosti). Za dani $c \in \mathbb{R}^m$ , $m \times n$ matricu ograničenja A i $b \in \mathbb{R}^m$, razmotrimo problem optimizacije:

$$\min_x \{c^T x | Ax - b \geq_{\mathbf{K}} 0\}. \tag{2.3}$$

Konusno programiranje (2.3) nazivat ćemo konusnim problemom povezanim s konusom $\mathbf{K}$. Treba imati na umu da se ovaj problem razlikuje od LP problema jedino po tome što je ovdje odabrano $\mathbf{K} = \mathbb{R}^m$. Formulacijom (2.3) možemo pokriti mnogo širi spektar problema koje LP ne može riješiti.

**Primjer 2.6** *(Sinteza nizova antena) Važna inženjerska primjena problema Čebiševljeve aproksimacije je sinteza nizova antena. Antena je elektromagnetski uređaj koji može generirati (ili primati) elektromagnetske valove. Glavna karakteristika monokromatske antene je njezin dijagram* $Z(\delta)$, *koji je funkcija kompleksnih vrijednosti trodimenzionalnog (3D) pravca* $\delta$. *Apsolutna vrijednost* $|Z(\delta)|$ *dijagrama odgovorna je za usmjerenu gustoću energije koju šalje antena u smjeru* $\delta$; *ova gustoća je proporcionalna* $|Z(\delta)|^2$. *Argument arg* $Z(\delta)$ *dijagrama odgovara početnoj fazi širenja vala u smjeru* $\delta$, *tako da je električno polje koje stvara antena u točki* $P = r\delta$ *(pretpostavljamo da je antena postavljena u ishodište) je proporcionalno*

$$E(r, \delta, t) = |Z(\delta)| r^{-1} cos(arg Z(\delta) + t\omega - 2\pi r/\lambda), \tag{2.4}$$

*gdje* $t$ *označava vrijeme,* $\omega$ *je frekvencija vala, a* $\lambda$ *je valna duljina. Za složene antene koje se sastoji od* $N$ *antenskih elemenata s dijagramima* $Z_1(\delta), \ldots, Z_N(\delta)$, *dijagram* $Z(\cdot)$ *je*

$$Z(\delta) = \sum_{j=1}^{N} Z_j(\delta)$$

*Prilikom projektiranja antenskog niza koji se sastoji od nekoliko antenskih elemenata, inženjer počinje s $N$ zadanih gradivnih blokova s dijagramima $Z_1, \ldots, Z_n$. Za svaki blok inženjer može pojačati signal koji šalje blok za faktor $\rho_j$ i pomaknuti početnu fazu $\phi_j(\cdot)$ za konstantu $\psi_j$. Drugim riječima, inženjer može modificirati izvorne dijagrame blokova prema*

$$\begin{aligned} Z_j(\delta) &= a_j(\delta)[cos(\phi_j(\delta)) + i\ sin(\phi_j(\delta))] \\ &\longmapsto Z_j^+(\delta) = \rho_j a_j(\delta)[cos(\phi_j(\delta) + \psi_j) + i\ sin(\phi_j(\delta) + \psi_j)]. \end{aligned}$$

*Dakle, moguće je pomnožiti početni dijagram svakog bloka proizvoljnom kompleksnom konstantom ("težina"):*

$$z_j = \rho_j(cos\psi_j + i\ sin\psi_j) = u_j + iv_j.$$

*Dijagram rezultirajuće složene antene će biti:*

$$Z(\delta) = \sum_{j=1}^{N} z_j Z_j(\delta). \tag{2.5}$$

*Tipičan problem dizajna povezan s gornjim opisom je odabir dizajna parametra $z_j, j = 1, \ldots, N$, kako bi se dobio dijagram (2.5) što bliže zadanom ciljnom dijagramu $Z_*(\delta)$.*
*Rješenje ovoga problema možemo prikazati preko linearnog programiranja:*

$$\min_{z_1,\ldots,z_N \in \mathbb{C}^n} \max_{\delta:\|\delta,\|_2=1} |Z_*(\delta) - \sum_{j=1}^{N} z_j Z_j(\delta)|,$$

*gdje su varijable $N$ kompleksnih brojeva $z_1, \ldots, z_N$.*
*Pogledajmo kako bismo ovaj problem riješili pomoću konusnog programiranja. Uzmimo $N$ blokova antena $S_1, \ldots, S_N$ s dijagramima $Z_1(\delta), \ldots, Z_N(\delta)$ ,dijagram cilja $Z_*(\delta)$ i konačnu mrežu $T$ u prostoru pravaca s težinama $z_l = u_l + iv_l$*

.

*Minimiziramo vrijednost:*

$$\|Z_* - \sum_{l=1}^{N} z_l Z_l\|_\infty = \max_{\delta \in T} |Z_*(\delta) - \sum_{l=1}^{N} z_l Z_l(\delta)|.$$

*U linearnom programiranju smo se bavili posebnim slučajem ovog problema. $Z_*$ i svi $Z_i$ su bili realne vrijednosti. Tu je bilo dovoljno uzeti u obzir stvarne projektne varijable $z_l$, a stoga se problem mogao postaviti i kao LP problem. U općem slučaju, neke ili sve funkcije $Z_*$, $Z_l$ imaju kompleksnu vrijednost. Kao rezultat, transformacija problema u LP problem nije moguća. Međutim, problem možemo postaviti kao problem konusnog programiranja. Doista, neka je $w = (u_1, v_1, \dots, u_N, v_N)^T \in \mathbb{R}^{2N}$ kolekcija naših dizajniranih varijabli - realni i imaginarni dijelovi kompleksnih vrijednosti težina $z_1, \dots, z_N$. Za određeni smjer $\delta$, kompleksni broj*

$$Z_*(\delta) - \sum_{l=1}^{N} z_l Z_l(\delta)$$

*tretiran kao 2D realni vektor je afina funkcija od $w$:*

$$Z_*(\delta) - \sum_{l=1}^{N} z_l Z_l(\delta)) = \alpha_\delta w + \beta_\delta,$$

*gdje je $\alpha_\delta$ matrica $2 \times 2N$, $\beta_\delta \in \mathbb{R}^2$.*
*Prema tome, problem se može postaviti kao*

$$\min_{w,t} \{t : \|\alpha_\delta w + \beta_\delta\|_2 \leq t, \forall \delta \in T\}. \tag{2.6}$$

*Sada, ograničenje*

$$\|\alpha_\delta w + \beta_\delta\|_2 \leq t$$

*znači da 3D vektor*

$$\begin{pmatrix} \alpha_\delta w + \beta_\delta \\ t \end{pmatrix},$$

*afino ovisan o vektoru $x = (w, t)$ od (2.6),*

$$\begin{pmatrix} \alpha_\delta w + \beta_\delta \\ t \end{pmatrix} \equiv A_\delta x - b_\delta$$

*pripada 3D Lorentzovom konusu $\mathbf{L}^3$. Prema tome, (2.6) se može postaviti kao*

$$\min_{x=(w,t)} \left\{ c^T x \equiv t : A_\delta x + b_\delta \in \mathbf{L}^3 \;\; \forall \delta \in T \right\}.$$

*Definirajmo konus*

$$\mathbf{K} = \prod_{\delta \in T} \mathbf{L}^3$$

*zajedno s afinim preslikavanjem*

$$Ax - b = \{A_\delta x + \beta_\delta\}_{\delta \in T}.$$

*Konačno izrazimo naš problem kao konusni problem*

$$\min_x \{c^T x | Ax - b \geq_{\mathbf{K}} 0\}.$$

**Primjer 2.7** *Pogledajmo tri varijante zapisivanja optimizacijskog problema:*

- *Klasičan LP problem u standardnoj formi:*

$$\begin{aligned} &min\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ &\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

- *Problem konusa drugog reda (SOCP) u standardnoj formi:*

$$\begin{aligned} &min\ 2x_1 + x_2 + x_3 \\ &\qquad x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ &\qquad x_1 - \sqrt{x_2^2 + x_3^2} \geq \mathbf{0}. \end{aligned}$$

- *Problem semidefinitnog konusa (SDP) u standardnoj formi:*

$$\min\ 2x_1 + x_2 + x_3$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 1,$$
$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_2 & x_3 \end{bmatrix} \succeq \mathbf{0},$$

*gdje simbol $\succeq$ implicira da je matrica s lijeve strane pozitivno semidefinitna. U ovom slučaju, dimenzija matrice je dva .*

**Napomena 2.8** *Dodatno, u konusnim programima možemo primijetiti da smijemo koristiti infimum umjesto minimuma. Pogledajmo primjer:*

$$Inf\ x_2 + x_3$$
$$x_1 = 1$$
$$x \in L^m.$$

*Budući da je $L^m$ konus drugog reda, dobijemo da postoji rješenje ako i samo ako*

$$x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2 \ i \ x_3 \geq 0 \Leftrightarrow x_1^2 \leq (x_3 - x_2)(x_2 + x_3) \Leftrightarrow 1 \leq (x_3 - x_2)(x_2 + x_3).$$

*Dakle, za svaki $\epsilon > 0$, ako stavimo da je $x_3 = \frac{1}{2}(\epsilon + \frac{1}{2})$ i $x_2 = \frac{1}{2}(\epsilon - \frac{1}{2})$, dobijemo $x_2 + x_3 = \epsilon$ i $x_2 - x_3 = \frac{1}{\epsilon}$.*
*Dakle, funkcija cilja $x_2 + x_3 = \epsilon$ može biti proizvoljno mala, ali ne može biti nula.*

## 2.3 Dual konusnog programiranja

Teorem o dualnosti LP nastao iz potrebe za pronalskom donje međe za optimalnu vrijedmost $c^*$ LP problema. Osim pronalska algoritama za rješavanje LP problema najvažniji teorijski rezultati su oni vezani uz dualnost, Cilj nam je proširiti navedeni teorem na konusno programiranje.

Posjetimo se da je donja međa dobivena promatranjem nejednakosti tipa

$$\lambda^T Ax \geq \lambda^T b \qquad (Cons(\lambda))$$

s težinskim vektorima $\lambda \geq 0$. Po svom nastanku nejednakost je posljedica sustava ograničenja $Ax \geq b$ u (LP), tj. zadovoljena je za svako rješenje sustava. Posljedica toga je kad god postoji nenegativni težinski vektor $\lambda$ koja zadovoljava relaciju

$$A^T \lambda = c,$$

nejednakost (Cons($\lambda$)) daje donju među $b^T \lambda$ na optimalnu vrijednost u (LP). Dualni problem

$$max\{b^T \lambda \mid \lambda \geq 0, A^T \lambda = c\}$$

nije bio ništa drugo nego problem pronalaženja najbolje donje međe koju je moguće dobiti na ovaj način.

Isti način može korišten za razvijanje dualnog problema kod konusa

$$\min\{c^T x | Ax - b \geq_{\mathbf{K}} 0\}. \qquad (CP)$$

Potrebno je objasniti koji su to težinski vektori $\lambda$, odnosno vektori takvi da je skalarna nejednakost

$$\lambda^T Ax \geq \lambda^T b$$

posljedica vektorske nejednakosti $A^T x \geq_{\mathbf{K}} b$.

U posebnom slučaju koordinatnog parcijalnog uređenja, tj. u slučaju da je

$\mathbf{K} = \mathbb{R}^m_+$, dopustivi vektori bili su oni s nenegativnim koordinatama. Ovi vektori, nisu nužno prihvatljivi za poredak $\geq_{\mathbf{K}}$ kada je $\mathbf{K}$ različit od nenegativnog ortanta.

**Primjer 2.9** *Razmotrite uređaj $\geq_{\mathbf{L}^3}$ na $\mathbb{R}^3$ dan 3D kornetom sladoleda (konus) :*

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \geq_{\mathbf{L}^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_3 \geq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}.$$

*Nejednakost*

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \geq_{\mathbf{L}^3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

*vrijedi. Međutim, mijenjanjem ove nejednakosti uz pomoć pozitivnog težinskog vektora*

$$\lambda = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

*dobivamo neistinitu nejednakost*

$$-1.8 \geq 0.$$

*Dakle, nije svaki nenegativan težinski vektor prihvatljiv za parcijalni uređaj $\geq_{\mathbf{L}^3}$.*

Potreban je težinski vektor $\lambda$ takav da

$$\forall a \geq_{\mathbf{K}} 0 : \quad \lambda^T a \geq 0, \tag{2.7}$$

Kad god $\lambda$ ima svojstvo (2.7), skalarna nejednakost

$$\lambda^T a \geq \lambda^T b$$

je posljedica vektorske nejednakosti $a \geq_{\mathbf{K}} b$:

$$\begin{aligned} a \geq_{\mathbf{K}} b \Leftrightarrow a - b \geq_{\mathbf{K}} 0 & \qquad (aditivnost \geq_{\mathbf{K}}), \\ \Rightarrow \lambda^T(a-b) \geq 0 & \qquad (zbog (2.7)), \\ \Leftrightarrow \lambda^T a \geq \lambda^T b. & \end{aligned}$$

Obrnuto, ako je $\lambda$ dopustivi težinski vektor za parcijalni uređaj $\geq_{\mathbf{K}}$,

$$\forall (a, b : a \geq_{\mathbf{K}} b) : \ \lambda^T a \geq \lambda^T b,$$

onda $\lambda$ zadovoljava (2.7).
Stoga su težinski vektori $\lambda$ koji su prihvatljivi za parcijalni uređaj $\geq_{\mathbf{K}}$ upravo oni vektori koji zadovoljavaju (2.7), odnosno vektori iz skupa

$$\mathbf{K}_* = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \lambda^T a \geq 0 \ \ \forall a \in \mathbf{K}\}.$$

Skup $\mathbf{K}_*$ sastoji se od vektora čiji su skalarni produkti sa svim vektorima iz $\mathbf{K}$ nenegativni. $\mathbf{K}_*$ naziva se dualan konus na $\mathbf{K}$. Naziv je opravdan sljedećim teoremom.

**Teorem 2.10** *(Svojstva dualnog konusa) Neka je $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^m$ neprazan skup. Vrijedi:*

1. *Skup*

$$\mathbf{K}_* = \{\lambda \in \mathbb{R}^m : \lambda^T a \geq 0 \ \ \forall a \in \mathbf{K}\}$$

*je zatvoren konveksni konus.*

2. *Ako je Int $\mathbf{K} \neq \emptyset$, onda je $\mathbf{K}_*$ šiljast.*

*3. Ako je* $\mathbf{K}$ *zatvoreni šiljat konveksni konus, onda je* $\mathbf{K}_* \neq \emptyset$*.*

*4. Ako je* $\mathbf{K}$ *zatvoreni konveksni konus, onda je takav i* $\mathbf{K}_*$*. Dualan konus na* $\mathbf{K}_*$ *je sam* $\mathbf{K}$*:*

$$(\mathbf{K}_*)_* = \mathbf{K}.$$

**Korolar 2.11** *Skup* $\mathbf{K} \subset \mathbb{R}^m$ *je zatvoreni konveksni šiljasti konus s nepraznom unutrašnjosti ako i samo ako je skup* $\mathbf{K}_*$ *takav.*

Sada smo spremni izvesti dualni problem konusnog problema (CP). Kao i u slučaju LP, polazimo od zapažanja da kad god je x dopustivo rješenje za (CP) i $\lambda$ dopustivi težinski vektor, tj. $\lambda \in \mathbf{K}_*$, tada x zadovoljava skalarnu nejednakost

$$\lambda^T Ax \geq \lambda^T b.$$

Ovo zapažanje je neposredna posljedica definicije $\mathbf{K}_*$. Iz toga slijedi da kad je god $\lambda_*$ dopustivi težinski vektor koji zadovoljava relaciju

$$A^T \lambda = c,$$

vrijedi

$$c^T x = (A^T \lambda)^T x = \lambda^T Ax \geq \lambda^T b = b^T \lambda$$

za sve x moguće za (CP), tako da je vrijednost $b^T \lambda$ donja granica optimalne vrijednosti (CP). Najbolja granica koju je moguće dobiti na ovaj način je optimalna vrijednost problema

$$max\{b^T \lambda | \; A^T \lambda = c, \lambda \geq_{\mathbf{K}_*} 0\} \tag{2.8}$$

i problem (2.8) nazivamo dualni problemom problema (CP) i označavamo ga s (D).

**Propozicija 2.12** *(Slabi teorem dualnosti) Optimalna vrijednost (D) je donja međa za optimalnu vrijednost (CP).*

## 2.4 Teorem konusne dualnosti

Do sada smo ustanovili da je slaba dualnost (Propozicija 2.12) za konusne probleme je mnogo slabija od LP problema. Je li moguće dobiti rezultate slične onima dobivenim teoremom dualnosti LP-a i u općem slučaju konusa? Odgovor je potvrdan, pod uvjetom da je primarni problem (CP) strogo dopustiv, tj. da postoji x takav da je $Ax - b >_{\mathbf{K}} 0$.

**Teorem 2.13** *(Teorem konusne dualnosti) Promotrimo konusni problem*

$$c^* = \min_x \{c^T x | Ax \geq_{\mathbf{K}} b\} \qquad (CP)$$

*zajedno s njegovim konusnim dualom*

$$b^* = max\{b^T \lambda \mid A^T \lambda = c, \lambda \geq_{\mathbf{K}} 0\}. \qquad (D)$$

1. *Dualnost je simetrična: dualni problem je konusan, a problem dualan dualnom problemu je ekvivalentan početnom problemu.*

2. *Vrijednost dualnog cilja pri svakom dualnom dopustivom rješenju $\lambda$ je manje jednaka vrijednosti od primarnog cilja pri svakom primarnom dopustivom rješenju $x$, tako da je razlika*

$$c^T x - b^T \lambda$$

   *nenegativna na svakom primarno-dualnom dopustivom paru $(x, \lambda)$.*

3. *Ako je primarni problem (CP) ograničen odozdo i strogo dopustiv (tj. $Ax >_{\mathbf{K}} b$ za neke $x$), onda je dual (D) rješiv i optimalne vrijednosti u problemima su međusobno jednake: $c^* = b^*$.*

4. *Ako je dual (D) ograničen odozgo i strogo dopustiv (tj. postoji $\lambda >_{\mathbf{K}_*} 0$ takav da je $A^T \lambda = c$), onda je primarni problem (CP) rješiv i $c^* = b^*$*

5. *Pretpostavimo da je barem jedan od problema (CP), (D) ograničen i strogo dopustiv. Tada je primarno-dualni dopustivi par $(x, \lambda)$ par optimalnih rješenja odgovarajućeg problema*

   *5.a ako i samo ako*

$$b^T\lambda = c^T x.$$

   *5.b ako i samo ako*

$$\lambda^T[Ax - b] = 0. \qquad (\textit{slaba komplementarnost})$$

Prije samoga dokaza teorema, navest ćemo toerem i propoziciju koja će nam pomoći pri dokazu.

**Teorem 2.14** *(Teorem o razdvajanju konveksnih skupova.) Neka su $S$, $T$ neprazni disjunktni konveksni podskupovi od $\mathbb{R}^m$. Tada se $S$ i $T$ mogu razdvojiti linearnim funkcionalom, tj. postoji vektor $\lambda \in \mathbb{R}^m$ različit od nule takav da je*

$$\sup_{u\in S} \lambda^T u \leq \inf_{u\in T} \lambda^T u.$$

**Propozicija 2.15** *Za svaki primarno-dualni dopustiv par $(x, \lambda)$ rješenja za (CP), (D), dualna razlika $c^T x - b^T\lambda$ jednaka je skalarnom produktu primarnog slaboga vektora y=Ax-b s dualnim vektorom $\lambda$.*

**Napomena 2.16** *Moramo imati na umu da zaključak u propoziciji (2.15) zapravo ne zahtijeva punu primarno-dualnu dopustivost: $x$ može biti proizvoljan (tj. $y$ treba pripadati primarnoj dopustivoj ravnini $ImA - b$), i $\lambda$ treba pripadati dualnoj dopustivoj ravnini $A^T\lambda = c$, ali $y$ i $\lambda$ ne bi trebali nužno pripadati odgovarajućim konusima.*

Sada možemo krenuti na dokaz teorema (2.13).

**Dokaz.** 1. Rezultat se može dobiti u geometriji primarnog i dualnog problema.

2. Ovo je slabi teorem dualnosti.

3. Pretpostavimo da je (CP) strogo dopustiv i ograničen odozdo, i neka je $c^*$ optimalna vrijednost problema. Trebali bismo dokazati da je dual rješiv s istom optimalnom vrijednošću. Budući da već znamo da je optimalna vrijednost duala manja jednaka od $c^*$ , sve što trebamo je pronaći dualno dopustivo rješenje $\lambda_*$ takvo da vrijedi $b^T\lambda_* \geq c^*$.

Promotrimo konveksni skup

$$M = \{y = Ax - b \mid x \in \mathbb{R}^n, c^T x \leq c^*\}.$$

Počnimo sa slučajem $c \neq 0$. Tvrdimo da u ovom slučaju vrijedi:

1. Skup M je neprazan.
2. Ravnina M ne siječe unutrašnjost **K** od konusa **K**, tj. $M \cap int\mathbf{K} = \emptyset$.

Tvrdnja 1. je očigledna. Da bismo dokazali tvrdnju 2., pretpostavimo suprotno, tj. da postoji točka $\overline{x}, c^T\overline{x} \leq c^*$, takva da je $\overline{y} \equiv A\overline{x} - b >_{\mathbf{K}} 0$. Tada je $Ax - b >_{\mathbf{K}} 0$, za svaki $x$ dovoljno blizu $\overline{x}$ , tj. sve točke x u dovoljno maloj okolini od $\overline{x}$ su također dopustive za (CP). Budući da je $c \neq 0$, to postoje točke x u ovom okruženju takve da je $c^T x < c^T\overline{x} \leq c^T$ što je nemoguće, budući da je $c^*$ optimalna vrijednost (CP).

Sada iskoristimo teorem (2.14) na slučaj kada je S=M i T=K. Možemo zaključiti da postoji $\lambda \in \mathbb{R}^m$ takav da je

$$\sup_{y \in M} \lambda^T y \leq \inf_{y \in intK} \lambda^T y. \tag{2.9}$$

Iz nejednakosti slijedi da je linearna forma $\lambda^T y$ odozdo omeđena na $K = int\mathbf{K}$. Budući da je ovaj interior konusni skup,

$$y \in K, \mu > 0 \Rightarrow \mu y \in K,$$

ova omeđenost implicira da je $\lambda^T y \geq 0$, za svaki $y \in K$. Prema tome, vrijedi $\lambda^T y \geq 0$, $\forall y$ od K, tj. $\forall y \in \mathbf{K}$. Zaključujemo da je $\lambda \geq_{K_*} 0$ pa je infimum u (2.9) nenegativan. S druge strane, infimum linearne forme nad konusnim skupom očito ne može biti pozitivan. Zaključujemo da je infimum u (2.9) jednak 0 pa nejednakost glasi

$$\sup_{u \in M} \lambda^T u \leq 0$$

Prisjećajući se definicije M, dobijemo

$$[A^T \lambda]^T x \leq \lambda^T b, \tag{2.10}$$

za sve x iz poluprostora $c^T x \leq c^*$. No, linearna forma $[A^T\lambda]^T x$ može biti omeđena odozgo na poluprostoru ako i samo ako je vektor $A^T\lambda$ proporcionalan s nenegativnim koeficijentom vektoru $c$, to jest

$$A^T \lambda = \mu c,$$

za neki $\mu \geq 0$. Tvrdimo da je $\mu > 0$. Doista, uz pretpostavku $\mu = 0$ dobijemo $A^T\lambda = 0$, odakle je , zbog (2.10), $\lambda^T b \geq 0$ s obzirom na (2.10). Sada je vrijeme da se prisjetimo da je (CP) strogo dopustiv, tj. $A\overline{x} - b >_{\mathbf{K}_*} 0$ za neki $\overline{x}$. Budući da je $\lambda \geq_{\mathbf{K}_*} 0$ i $\lambda \neq 0$ , produkt $\lambda^T[A\overline{x} - b]$ je strogo veći od nule, dok znamo da je produkt $-\lambda^T b \leq 0$. (Jer je $A^T\lambda = 0$ i $\lambda^T b \geq 0$). Dakle, $\mu > 0$. Stavimo li $\lambda_* = \mu^{-1}\lambda$, dobijemo

$$\begin{array}{lll} \lambda_* \geq_{\mathbf{K}_*} 0 & & [\ od\ \lambda_* \geq_{\mathbf{K}} 0\ i\ \mu > 0] \\ A^T\lambda_* = c & & [\ od\ A^T\lambda = \mu c] \\ c^T x \leq \lambda_*^T b \quad \forall x : c^T x \leq c^* & & [(2.10)] \end{array}$$

Vidimo da je $\lambda_*$ dopustiv za (D), pri čemu je vrijednost dualnog cilja na $\lambda_*$ najmanje $c^*$, kao što se zahtjeva. Prestaje razmotriti slučaj $c = 0$. Ovdje je, naravno, $c^* = 0$ i postojanje dualnog dopustivog rješenja s vrijednošću cilja $c^* = 0$ je očigledno. Traženo rješenje je $\lambda = 0$. Time je 3. dokazano.
4. rezultat slijedi iz 3. s obzirom na primarno-dualnu simetriju.
5. Neka je x primarno dopustiv i $\lambda$ dualno dopustiv. Tada je

$$c^T x - b^T \lambda = (A^T \lambda)^T x - b^T \lambda = [Ax - b]^T \lambda.$$

Iz propozicije (2.15), slaba komplementarnost vrijedi ako i samo ako je $c^* x - b^t \lambda = 0$; dakle, sve što trebamo dokazati je 5.a.
Primarni rezidual $c^T x - c^*$ i dualni rezidual $b^* - b^t \lambda$ su nenegativni, pod uvjetom da je $x$ primalno dopustiv, a $\lambda$ dualno dopustiv. Iz toga slijedi da praznina

$$c^T x - b^T \lambda = [c^T x - c^*] + [b^* - b^T \lambda] + [c^* - b^*]$$

nenegativna (sjetimo se da je $c^* \geq b^*$ ), i jednaka je nuli ako i samo ako je $c^* = b^*$ i primarni i dualni reziduali su nula (tj. x je primarno optimalan, a $\lambda$ je dualno optimalan). Svi ovi argumenti vrijede bez ikakvih pretpostavki stroge dopustivosti. Vidimo da je stanje "razmak dualnosti na primarno-dualnom mogućem paru je nula" uvijek dovoljno za primarno-dualnu optimalnost para. Ako je $c^* = b^*$, potreban je i ovaj dovoljan uvjet. Budući da u slučaju 5 doista imamo $c^* = b^*$ (to je navedeno u 4), slijedi 5.a. ■

Tvrdnja teorema o dualnosti konusa je slabija od teorema o dualnosti LP. U slučaj LP, dopustivost (čak i stroga) i ograničenost primarnog ili dualnog problema implicira rješivost primarnog problema i duala i jednakost između njihovih optimalnih vrijednosti. U općem slučaju konusa, netrivijalna svojstva se navode samo u slučaju stroge dopustivosti (i ograničenost) jednog od problema. Primjerima se može pokazati da ovaj fenomen odražava prirodu stvari i nije posljedica naše sposobnosti da ga analiziramo. Slučaj nepoliedarskog stošca $K$ uistinu je kompliciraniji od onog nenegativnog ortanta $K$.

**Primjer 2.17** *Razmotrimo sljedeći problem konusa s dvije varijable* $x = (x_1, x_2)^T$ *i 3D kornet sladoleda (konus)* $\mathbf{K}$ :

$$min \left\{ x_2 \mid Ax - b = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \geq_{\mathbf{L}^3} 0 \right\}.$$

*Problem je ekvivalentan problemu*

$$\left\{ x_2 \mid \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq x_1 \right\},$$

*tj. problemu*

$$min\{x_2 \mid x_2 = 0, x_1 \geq 0\}.$$

*Problem je očito rješiv, a njegov optimalni skup je zraka* $\{x_1 \geq 0, x_2 = 0\}$. *Formirajmo konus dualan našem (rješivom!) primalu. Dualan konus kornetu sladoleda je i sam kornet sladoleda. Dakle, dualni problem je*

$$\max_{\lambda} \left\{ 0 \mid \begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \geq_{\mathbf{l}^3} 0 \right\}.$$

*Iako je primal rješiv, dual nije. Doista, pod pretpostavkom da je* $\lambda$ *dualno dopustiva, imamo* $\lambda \geq_{\mathbf{L}^3} 0$, *što znači da je* $\lambda_3 \geq \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$. *Budući da je* $\lambda_1 + \lambda_3 = 0$, *dolazimo do toga da je* $\lambda_2 = 0$ , *što je u suprotnosti s jednakošću* $\lambda_2 = 1$.

# Poglavlje 3

# Kvadratno konusno programiranje

Nekoliko generičkih familija problema konusa od posebnog su interesa, sa stajališta teorije i primjene. Konusi u podlozi ovih problema dovoljno su jednostavni pa se dualni konus može opisati eksplicitno. Posljedićno, opći alati dualnosti koje smo razvili postaju algoritamski, kao u slučaju LP. Najpoznatiji primjer "lijepog" generičkog problema konusa je, bez sumnje, LP. Međutim, to nije jedini problem te vrste. Još jedan konusni problem od izuzetne važnosti je kvadratni konus.

## 3.1 Kvadratno konusno programiranje

Prisjetimo se definicije m-dimenzionalnog korneta ($\equiv$ drugog reda $\equiv$ Lorentz) konusa $\mathbf{L^m}$:

$$\mathbf{L^m} = \{x = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathbb{R}^m |\ x_m \geq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_{m-1}^2}\},\ m \geq 2.$$

Konusni kvadratni problem (CP) je konusni problem

$$\min_x \{c^T x | Ax - b \geq_{\mathbf{K}} 0\},$$

gdje je konus **K** direktan produkt nekoliko korneta sladoleda:

$$\mathbf{K} = \mathbf{L^{m_1}} \times \mathbf{L^{m_2}} \times \cdots \times \mathbf{L^{m_k}}$$

$$= \left\{ y = \begin{pmatrix} y[1] \\ y[2] \\ \cdots \\ y[k] \end{pmatrix} \mid y[i] \in \mathbf{L^{m_i}},\ \mathbf{i} = \mathbf{1}, \ldots, \mathbf{k} \right\}. \tag{3.1}$$

Drugim riječima, konusni kvadratni problem je problem optimizacije s linearnim ciljem i konačno mnogo ograničenja korneta sladoleda

$$A_i x - b_i \geq_{\mathbf{L^{m_i}}} 0,\ i = 1, \ldots k, \tag{3.2}$$

gdje je

$$[A; b] = \begin{bmatrix} [A_1; b_1] \\ [A_2; b_2] \\ \cdots \\ [A_k; b_k] \end{bmatrix}$$

particija matrice podataka [A;b] koja odgovara particiji y u (3.1). Takav konusni kvadratni program može se zapisati kao

$$\min_x \{c^T x | A_i x - b_i \geq_{\mathbf{L^{m_i}}} 0,\ i = 1, \ldots, k\}. \tag{3.3}$$

Prisjetimo se da za vektor $z \in \mathbb{R}^m$, nejednakost $z \geq_{\mathbf{L^m}} 0$ znači da je zadnji unos u $z$ euklidska norma $|| \cdot ||_2$ podvektora od $z$ koji se sastoji prvih $m$-1 unosa od $z$. Prema tome, $\geq_{\mathbf{L^{m_i}}}$ 0-nejednakosti u (3.3) mogu se napisati kao

$$||D_i x - d_i||_2 \leq p_i^T x - q_i,$$

gdje je

$$[A_i; b_i] = \begin{bmatrix} D_i & d_i \\ p_i^T & q_i \end{bmatrix}$$

particija matrice podataka $[A_i, b_i]$ u pomatricu $[D_i; d_i]$ koja se sastoji od prvih $m_i - 1$ redova i zadnjeg reda $[p_i^T; q_i]$. Stoga se konusni kvadratni problem može zapisati kao

$$\min_x \{c^T x | \; ||D_i x - d_i||_2 \leq p_i^T x - q_i, \; i = 1, \ldots, k\}, \qquad (QP)$$

a najradije koristimo upravo ovaj, najeksplicitniji oblik problema. U ovom obliku, $D_i$ su matrice istih dimenzija redaka kao $x$, $d_i$ su vektori čije su dimenzije jednake dimenzijama stupaca od matrica $D_i$, $p_i$ su vektori iste dimenzije kao $x$ i $q_i$ su realni brojevi.

Konus (3.1) je samodualni konus ($\mathbf{K}^* = \mathbf{K}$). Prema tome, problem dualan problemu (CP) je

$$\max_\lambda \{b^T \lambda | \; A^T \lambda = c, \; \lambda \geq_{\mathbf{K}} 0\}.$$

Označavanjem

$$\lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \ldots \\ \lambda_k \end{pmatrix}$$

s $m_i$-dimenzionalnim blokovima $\lambda_i$ (usp. (3.1)), dualni problem možemo napisati kao

$$\max_{\lambda_1, \ldots, \lambda_m} \left\{ \sum_{i=1}^{k} b^T \lambda_i \mid \sum_{i=1}^{k} A_i^T \lambda_i = c, \; \lambda_i \geq_{\mathbf{L^{m_i}}} 0, \; i = 1, \ldots, k \right\}.$$

Prisjećajući se značenja $\geq_{\mathbf{L^{m_i}}} 0$ i predstavljajući $\lambda_i = \begin{pmatrix} \mu_i \\ \nu_i \end{pmatrix}$ sa skalarnom komponentom $\nu_i$, napokon dolazimo do sljedećeg oblika dualnog problema

(QP):

$$\max_{\mu_i,\nu_i}\left\{\sum_{i=1}^{k}[\mu_i^T d_i+\nu_i g_i]\mid \sum_{i=1}^{k}[D_i^T\mu_i+\nu_i p_i]=c, \mid ||\mu_i||\leq \nu_i,\ i=1,\ldots,k\right\}. \ (QD)$$

Varijable u (QD) su vektori $\mu_i$ istih dimenzija kao vektori $d_i$ i realne vrijednosti $\nu_i, i=1,\ldots,k$.

**Definicija 3.1** *Kažemo da se skup $X\subset\mathbb{R}^n$ može predstaviti putem CQI (da je CQr—konusno kvadratno reprezentativan) ako postoji sustav S od konačnog broja vektorskih nejednakosti oblika $A_j\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}-b_j\geq_{L^{m_j}}0$ ($x\in\mathbb{R}^n$ u varijablama $x\in\mathbb{R}^n$ i dodatnih varijabla u takvih da je X projekcija skupa rješenja od S na x-prostor, tj. $x\in X$ ako i samo ako se x može proširiti na rješenje (x,u) sustava S:*

$$x\in X\Leftrightarrow \exists u: A_j\begin{pmatrix}x\\u\end{pmatrix}-b_j\geq_{L^{m_j}}0,\ j=1,\ldots,N.$$

*Svaki takav sustav S naziva se konusna kvadratna reprezentacija (CQr) skupa X.*

**Napomena 3.2** *Ideja iza ove definicije pojašnjena je sljedećim opažanjem: Razmotrimo problem optimizacije*

$$\min_x\{c^Tx|\ x\in X\}$$

*i pretpostavimo da je X CQr. Tada je problem ekvivalentan kvadratnom konusnom problemu. Poslije program može biti napisan eksplicitno, pod uvjetom da smo uzeli CQR od X.*

## 3.2 Primjeri kvadratnog konusnog programiranja

**Primjer 3.3** *(Euklidska norma)*
*Možemo definirati n-dimenzionalni rotacijski kvadratni konus kao*

$$\mathbf{L_r^n} = \{x \in \mathbb{R}^n |\ 2x_1x_2 \geq x_3^2 + \cdots + x_n^2, x_1, x_2 \geq 0\}. \tag{3.4}$$

*Euklidska norma od* $x \in \mathbb{R}^n$*,*

$$||x||_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2},$$

*u biti definira kvadratni konus,tj.,*

$$||x||_2 \leq t \iff (t, x) \in \mathbf{L}^{n+1}.$$

*Epigraf kvadratne euklidske norme može se opisati kao sjecište rotirajućeg kvadratnog konusa s afinom hiperravninom,*

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = ||x||_2^2 \leq t \iff (\frac{1}{2}, t, x) \in \mathbf{L}_r^{n+2}.$$

**Primjer 3.4** *(Čebiševljev aproksimacijski problem)*
*Zadan je konačni skup* $T$*, ciljna funkcija* $f_*$ *na skupu* $T$ *i* $n$ *gradivnih blokova — funkcija* $f_1, \dots, f_n$ *na* $T$*. Cilj je pronaći linearnu kombinaciju funkcija* $f_1, \dots, f_n$ *koja je najbliža, u uniformnoj normi na* $T$*, ciljnoj funkciji* $f_*$*, tj. riješiti problem*

$$\min_x \left\{ \max_{t \in T} |f_*(t) - \sum_{j=1}^{n} x_j f_j(t)| \right\}. \tag{3.5}$$

*U slučaju funkcija s realnim vrijednostima* $f_*, f_1, \dots, f_n$ *problem može biti* *postavljen kao LP program. Također smo vidjeli da su kod nekih funkcija u pitanju kompleksne vrijednosti, npr. u općem problemu sinteze antene (Primjer 2.6). U toj situaciji, naš pristup bio je aproksimirati modul kompleksnog broja (tj. euklidska norma realnog 2D vektora) pomoću poliedarske norme, maksimum nekoliko linearnih funkcija vektora. Uz ovu aproksimaciju, (3.5) doista postaje LP program. Ako želimo izbjeći aproksimaciju, možemo lako iskoristiti kompleksno vrijedni Čebiševljev problem kao konusni kvadratni program*

$$\min_{\tau,x}\left\{\tau|\ ||f_*(t)-\sum_{j=1}^{n}x_jf_j(t)||_2\le\tau,\ t\in T\right\}. \tag{3.6}$$

*U (3.6), tretiramo kompleksne brojeve $f_*(t), f_j(t)$ kao realne 2D vektore.*

**Primjer 3.5** *Elementarne konusno kvadratno-reprezentabilne funkcije i skupovi:*

1. *Konstantna funkcija $g(x)\equiv a$. Doista, epigraf funkcije $\{(x,t)|a\le t\}$ je dan linearnom nejednadžbom, a linearna nejednadžba $0\le p^z-q$ je ujedno i konus kvadratne nejednadžbe $||0||_2\le p^z-q$.*
2. *Afina funkcija $g(x)=a^Tx+b$. Doista, epigraf afine funkcije je dan linearnom nejednakošću.*
3. *Kvadrat euklidske norme $g(x)=X^TX$. Doista, $t=\frac{(t+1)^2}{4}-\frac{(t-1)^2}{4}$ pa je*

$$x^Tx\le t\Leftrightarrow x^Tx+\frac{(t-1)^2}{4}\le\frac{(t+1)^2}{4}\Leftrightarrow\left\|\begin{pmatrix}x\\ \frac{t-1}{2}\end{pmatrix}\right\|_2\le\frac{t+1}{2}.$$

## 3.3 Operacije koje čuvaju konusno kvadratnu reprezentabilnost skupova i funkcija

1. Presjek. Ako su skupovi $X_i \subset \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, N$, CQr , onda je i njihov presjek

$$X = \bigcap_{i=1}^{N} X_i$$

CQr. Doista, neka su $S_i$ CQR $X_i$ i $u_i$ odgovarajući vektori od dodatnih varijabli. Tada je sustav S ograničenja varijabli $(x, u_1, \ldots, u_N)$,

$$\{(x, u_i) \; zadovoljava \; S_i\}, \; i = 1, \ldots, N.$$

sustav CQI, a ovaj sustav je očito CQr od X.

**Korolar 3.6** *Poliedarski skup, skup u $\mathbb{R}^n$ zadan konačnim brojem linearnih nejednakosti $a_j^T x \leq b_i, \; i = 1, \ldots, m$ je CQr.*

Doista, poliedarski skup je sjecište konačnog broja afinih skupova razina funkcija, a sve te funkcije (a time i njihovi skupovi) su CQr.

2. Direktan produkt. Ako su skupovi $X_i \subset \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, k$, CQr , onda je i njihov direktan produkt $X_1 \times \cdots \times X_k$ CQr.
Doista, ako su $S_i = \{\|\alpha_j^i(x_i, u_i)\|_2 \leq \beta_j^i(x_i, u_i)\}_{j=1}^{N_j}, \; i = 1, \ldots k$, CQR-ovi skupova $X_i$, onda je unija po $i$ od ovog sustava nejednakosti, koji se smatra sustavom s varijablom x $= (x_1, \ldots, x_k)$ i dodatnim varijablama u= $(u_1, \ldots, u_k)$, CQr za direktan produkt od $X_1, \ldots, X_k$.

3. Afina slika (Projekcija). Ako je skup $X \subset \mathbb{R}^n$ CQr i $x \mapsto y = \ell(x) = Ax + b$ afino preslikavanje $\mathbb{R}^n$ na $\mathbb{R}^k$, onda je slika $\ell(X)$ skupa X preslikavanje CQr.

**Korolar 3.7** *Neprazan skup X je CQr ako i samo ako je njegova karakteristična funckija*

$$\chi(x) = \begin{cases} 0, & x \in X, \\ +\infty & inače \end{cases}$$

*CQr.*

**Dokaz.** Naime, Epi$\{\chi\}$ je direktan produkt skupa $X$ i nenegativne zrake. Stoga, ako je X CQr, onda je i $\chi(\cdot)$ (Iz 2. i korolara (3.6)). Obrnuto, ako je $\chi$ CQr, onda je $X$ CQr prema 3, budući da je X projekcija Epi$\{\chi\}$ na prostor x-varijabli. ∎

Prisjetimo se da se funkcija $g(x)$ naziva CQr ako je njen epigraf Epi{g} $= \{(x,t) \mid g(x) \leq t\}$ CQr skup. CQR epigrafa $g$ naziva se CQr od $g$ . Također se prisjetimo da nivo skup CQr funkcije je CQr.

Pogledajmo transformacije koje čuvaju CQ-reprezentabilnost funkcija.

4. Maksimum. Ako su funkcije $g_i(x),\ i = 1, \ldots, m$, CQr, onda je i njihov maksimum $g(x) = \max_{i=1,\ldots,m} g_i(x)$ CQr.

   Doista, Epi{g} $=\bigcap_i Epi\{g_i\}$ i presjek konačnog broja CQr skupova opet je CQr.

5. Zbrajanje s nenegativnim težinama. Ako su funkcije $g_i(x), x \in \mathbb{R}^n$, CQr, $i = 1, \ldots, m$ i $\alpha_i$ su nenegativne težine, onda je funkcija $g(x) = \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(x)$ također CQr.

   Doista, promotrimo skup

$$\Pi = \{(x_1, t_1; x_2, t_2; \ldots; x_m, t_m; t) \mid x_i \in \mathbb{R}^n, t_i \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, g_i(x_i) \\ \leq t_i, i = 1, \ldots, m; \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \leq t\}.$$

Ovaj skup je CQr. Doista, skup je presjek direktonog produkta epigrafa $g_i$ i poluprostora zadanog linearnom nejednakošću $\sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \leq t$. Nadalje, direktan produkt CQr skupova je također CQr, a poluprostor je CQr (to je nivo skup afine funkcije, a takva funkcija je CQr). Presjek CQr skupova je također CQr. Kako je $\Pi$ CQr, to je i njegova projekcija na potprostor varijabli $x_1, x_2, \ldots, x_m, t$ tj. skup

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) : \exists t_1, \ldots, t_m : g_i(x_i) \leq t_i, i = 1, \ldots, m, \sum_{i=1}^m \alpha_i t_i \leq t\right\}$$

$$= \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_m, t) : \sum_{i=1}^m \alpha_i g_i(x_i) \leq t\right\}.$$

Budući da je ovaj skup CQr, to je i njegova inverzna slika s obzirom na preslikavnje

$$(x, t) \mapsto (x, x, \ldots, x, t),$$

a navedena inverzna slika je upravo epigraf $g$.

6. Direktno zbrajanje. Ako su funckije $g_i(x_i), x_i \in \mathbb{R}^n, i = 1, \ldots, m$ CQr, onda je i njihova direktna suma

$$g(x_1, \ldots, x_m) = g_1(x_1) + \cdots + g_m(x_m)$$

CQr.

Doista, funkcije $\hat{g}_i(x_1, \ldots, x_m) = g_i(x_i)$ su očito CQr, njihovi epigrafi su inverzne slike epigrafa $g_i$ afinih preslikavanja $(x_1, \ldots, x_m, t) \mapsto (x_i, t)$. Ostaje uočiti da je $g = \sum_i \hat{g}_i$.

## 3.4 Primjeri CQr funkcija i skupova

**Primjer 3.8** *Konveksna kvadratna forma.* $g(x) = x^T Qx + q^T x + r$ *($Q$ je pozitivno semidefinitna simetrična matrica) je CQr.*

*Doista, $Q$ je pozitivno semidefinitna simetrična i stoga se može rastaviti kao $Q = D^T D$, tako da je $g(x) = \|Dx\|_2^2 + q^T x + r$. Vidimo da se $g$ dobiva iz kvadratne euklidske norme i afine funkcije afinom supstitucijom argumenta i zbrajanjem.*

*Ispod je prikazan eksplicitni CQr od $g$:*

$$\{(x,t)|\ x^T D^T Dx + q^T x + r \le t\} = \left\{(x,t)|\ \left\|\begin{pmatrix} Dx \\ \frac{1+q^T x+r}{2}\end{pmatrix}\right\|_2 \le \frac{t - g^T x - r}{2}\right\}.$$

**Primjer 3.9** *Konus* $\mathbf{K} = \{(x,\sigma_1,\sigma_2) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} | \sigma_1, \sigma_2 \ge 0, \sigma_1, \sigma_2 \ge x^T x\}$ *je CQr.*

*Doista, skup je epigraf racionalne kvadratne funkcije $x^T x/s$. Pišemo $\sigma_1$ umjesto $s$ i $\sigma_2$ umjesto $t$.*

*Eksplicitni CQR za skup:*

$$\mathbf{K} = \left\{(x,\sigma_1,\sigma_2)|\ \left\|\begin{pmatrix} x \\ \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\end{pmatrix}\right\|_2 \le \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}\right\}.$$

*Začudo, naš skup je kornet sladoleda, točnije njegova inverzna slika obzirom na bijektivno preslikavanje je*

$$\begin{pmatrix} x \\ \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x \\ \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2} \\ \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} \end{pmatrix}.$$

## 3.5 Čebiševljeva aproksimacija u relativnom mjerilu

U problemu Čebiševljeve aproksimacije tražimo linearnu kombinaciju danih funkcija baze $f_i(t)$ koja je što bliža određenoj ciljnoj funkciji $f_*(t)$ na zadanom konačnom skupu $T$. U izvornoj verziji problema, kvaliteta aproksimacije

$\sum_i x_i f_i(t)$ je mjereno maksimalnim apsolutnim odstupanjem aproksimacije od funkcije cilja po $t \in T$. U brojnim primjenama gdje je ciljna funkcija pozitivna, a takva bi trebala biti i njena aproksimacija, prikladnije je mjerenje relativnog odstupanja. Prirodan način mjerenja relativnog odstupanja između dvije pozitivne realne vrijednosti a i b je promatranjem najmanjeg $\tau \equiv \tau(a, b)$ takvog da je

$$\frac{1}{1+\tau} \leq \frac{a}{b} \leq 1 + \tau.$$

Ovim pristupom relativan Čebiševljev problem postaje

$$\min_x \max_{t \in T} \tau \left( f_*(t), \sum_i x_i f_i(t) \right),$$

gdje bismo trebali dodati ograničenja $\sum_i x_i f_i(t) > 0, t \in T$, kako bismo zajamčili pozitivnost aproksimacija. Ekvivaletno, rezultirajući problem se može zapisati kao

$$\min_{x,\tau} \left\{ \tau | \sum_i x_i f_i(t) \leq (1+\tau) f_*(t),\ f_*(t) \leq 1 + \tau + \sum_i x_i f_i(t) \forall t \in T \right\}.$$

Nelinearna ograničenja koja dobivamo su hiperbolična ograničenja "produkt dviju nenegativnih afini formi dizajn varijabli mora biti veći ili jednaki pozitivnoj konstanti," i skupovi dani ovim ograničenjima su CQr . Dakle, problem je ekvivalentan konusnom kvadratnom programu, konkretno problemu

$$\min_{x,\tau} \left\{ \tau | \forall (t \in T) : \left\{ \begin{array}{c} \sum_i x_i f_i(t) \leq (1+\tau) f_*(t), \\ \left\| \begin{pmatrix} 2\sqrt{f_*(\tau)} \\ 1 + \tau - \sum_i x_i f_i(t) \end{pmatrix} \right\|_2 \leq 1 + \tau + \sum_i x_i f_i(t) \end{array} \right. \right\}.$$

# Literatura


[1] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe, *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2004.

[2] Arkadi Nemirovski, *Advances in Convex Optimization: Conic Programming*, Georgia Institute of Technology, 2000.

[3] Yinyu Ye, *Conic Linear Programming*, Stanford, 2004.

[4] L. Čaklović, *Geometrija linearnog programiranja*, Element, 2010.

[5] L. Brickmann, *Mathematical introduction to linear programming and game theory*, Springer, 1989.

[6] Aharon Ben-Tal, Arkadi Nemirovski, *Lectures on modern convex optimization*, Technion-Israel Institute of Technology Haifa, 2001.