

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet

Gibanje nogometne lopte pri slobodnom udarcu

Završni rad

Josip Krnić

Split, srpanj 2023.

Hvala bratu Marinu i svim prijateljima iz mog rodnog Podlukovnika koji su mi na ulici prenosili praktično znanje potrebno za izradu ovog rada posljednjih 20 godina, i što su tolerirali moje izostanke s tih praksi zadnjih par godina zbog svakodnevnih fakultetskih obaveza. Uz pomoć ovog modela prvim idućim turnirom idemo do zlata!

Hvala svim profesorima sa odjela za fiziku PMF-a u Splitu na trudu, prenesenom znanju, pristupačnosti i prijateljskom držanju. Hvala izv. prof. dr. sc. Željani Bonačić Lošić na prihvaćenom mentorstvu, a posebno hvala dr. rer. nat. Mislavu Cvitkoviću koji je objeručke prihvatio moju ideju za ovaj rad, i što je tijekom cijelog studija uvijek bio otvoren za raspravljanje o bilo kakvoj materiji (nikada neću zaboraviti raspravu o značenju “male” u briškuli). Vaš pristup nastavi je na mene, kao budućeg nastavnika (ako Bog da), ostavio najdublji utisak.

Hvala mojoj majci i ocu, i cijeloj obitelji, njihova beskrajna potpora je razlog zašto sam danas u prilici braniti prvi veliki rad (a sutra možda i neki viši rad, majci svakako više odgovara tišina učenja od razornih frekvencija bubnjeva s tavana). Hvala im na svemu što su mi priuštili u ove 22 godine života.

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet
Odjel za fiziku
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

Gibanje nogometne lopte pri slobodnom udarcu

Josip Krnić

Sveučilišni prijediplomski studij Fizika

Sažetak:

Među najzanimljivijim trenucima u nogometnoj utakmici su slobodni udarci. Putanja lopte u letu pretežno ovisi o načinu na koji je lopta udarena. Posebno je fascinantna pojava zakretanja smjera gibanja lopte, koja je prouzročena Magnusovim efektom. Razumijevanje prirode sila koje se javljaju na loptu u letu je od praktične koristi za proizvođače nogometnih lopti i za same igrače. Motivacija ovog rada je opisati gibanje nogometne lopte pri slobodnom udarcu za proizvoljan udarac na loptu. Detaljno se obrađuju geometrija problema (koja uključuje modeliranje obrambenog zida) te različiti početni uvjeti i sile koje se javljaju na loptu u letu. Jednadžbe gibanja dane su drugim Newtonovim zakonom, uključuju sve relevantne sile na loptu, i rješavaju se numerički Runge-Kutta metodom 4. reda, uz zadane početne uvjete. Rješavanje jednadžbi gibanja daje traženu putanju lopte. Različite putanje prikazane su grafički na modelu nogometnog terena. Svi računi i grafički prikazi napravljeni su u *Pythonu*. Prikazano je i nekoliko teorijskih primjena modela. Dobiveni rezultati se vrlo dobro podudaraju s realnim očekivanjima.

- Ključne riječi:** nogomet, slobodni udarac, nogometna lopta, putanja, klasična mehanika, aerodinamika, Magnusov efekt
- Rad sadrži:** 40 stranica, 13 slika, 0 tablica, 31 literaturni navod. Izvornik je na hrvatskom jeziku.
- Mentor:** izv. prof. dr. sc. Željana Bonačić Lošić
- Neposredni voditelj:** dr. rer. nat. Mislav Cvitković, mag. phys.
- Ocjenjivači:** izv. prof. dr. sc. Željana Bonačić Lošić,
dr. rer. nat. Mislav Cvitković, mag. phys.
izv. prof. dr. sc. Larisa Zoranić
- Rad prihvaćen:** 11. srpnja 2023.

Rad je pohranjen u Knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

Basic documentation card

University of Split
Faculty of Science
Department of Physics
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Bachelor thesis

Motion of the football ball in a free kick

Josip Krnić

University undergraduate study programme Physics

Abstract:

Free kicks are among the most interesting moments in a football match. The trajectory of a ball in the flight mostly depends on the way the ball is kicked. Especially fascinating is a phenomenon when the trajectory is being curved with respect to the initial direction of the shot, caused by the Magnus effect. Understanding the nature of the forces occurring on a ball in the flight is of a practical interest to both ball manufacturers and players. The goal of this thesis is to describe the motion of a soccer ball in a free kick, given an arbitrary impact on a ball. The geometry of the problem (including the modelling of a defensive wall) as well as different initial conditions and forces that act on a flying ball are elaborated in detail. The equations of motion are given by Newton's second law, comprise all the relevant forces on the ball and, given the initial conditions, are being solved numerically by the Runge-Kutta method of the 4th order. Solving the equations yields the desired trajectory of a ball. Different trajectories are shown graphically on a football field model. All the calculations and graphics are made in *Python*. A couple of different theoretical applications of the model are also shown. The final results match very well with the real-life expectations.

Keywords: football, free kick, soccer ball, trajectory, classical mechanics, aerodynamics, Magnus effect

Thesis consists of: 40 pages, 13 figures, 0 tables, 31 references. Original language: Croatian.

Supervisor: Asoc. Prof. Dr. Željana Bonačić Lošić

Leader: Dr. Mislav Cvitković

Reviewers: Asoc. Prof. Dr. Željana Bonačić Lošić,
Dr. Mislav Cvitković
Asoc. Prof. Dr. Larisa Zoranić

Thesis accepted: July 11th 2023

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

Sadržaj

1	Uvod	1
2	Temeljne značajke modela	3
2.1	Nogometna lopta	3
2.2	Referentni sustav	3
2.3	Uvjeti i ograničenja na gibanje	4
2.3.1	Uvjeti za pogodak	4
2.3.2	Obrambeni zid	5
2.3.3	Komentar na uvjete zaobilaska obrambenog zida	6
3	Početni uvjeti	7
3.1	Pomoćni koordinatni sustav	7
3.2	Početne brzine	9
3.2.1	Ukupna početna brzina i ulazni parametri	9
3.2.2	Početna translacijska brzina	9
3.2.3	Početna kutna brzina	10
3.2.4	Različite vrste rotacija	11
3.3	Shema za praćenje smjerova brzina	12
3.4	Komentar na računanje početnih uvjeta	13
4	Sile na loptu u gibanju	14
4.1	Gravitacijska sila	14
4.2	Sila otpora zraka	14
4.3	Magnusova sila	16
4.4	Zanemarene sile	18
4.4.1	Aerodinamički moment sile	18
4.4.2	Inercijske sile	19
5	Jednadžbe gibanja	19
5.1	Kosi hitac	20
5.2	Prigušeni kosi hitac	21
5.3	Jednadžbe gibanja nogometne lopte pri slobodnom udarcu	21
6	Rješenje jednadžbi gibanja	22
6.1	Runge-Kutta metoda 4. reda	22
6.2	Rješavanje putanje slobodnog udarca	24
6.2.1	Rješenje za komponente brzine	24
6.2.2	Rješenje za putanju lopte	25
6.3	Princip računalnog rješavanja jednadžbi gibanja	26

6.4	Grafički prikaz rješenja	27
7	Zaključak	31
A	Kod korištenog računalnog programa	36

1 Uvod

Starijim ljubiteljima nogometa je 1997. godine trajno urezan u sjećanje spektakularni pogodak Roberta Carlosa iz slobodnog udarca u utakmici protiv Francuske [1]. Putanja lopte, koja se činila kao da vodi u potpuni promašaj, po luku se zakrivila prema голу. Mediji su taj slobodni udarac tada prozvali “nemogućim slobodnim udarcem” i “udarcem koji krši zakone fizike” [2], te sve do danas nastavlja fascinirati milijune ljudi diljem svijeta, uključujući i znanstvenike.

Pojava zbog koje se naglo mijenja smjer gibanja nogometne lopte u zraku je zapravo karakteristika bilo koje *rotirajuće sfere*¹ [3]. Još u 17. stoljeću je Sir Isaac Newton primjetio da rotirajuća teniska loptica ima zakrivljenu putanju [4]. Nekoliko desetljeća poslije Benjamin Robins uočio je da se na rotirajuću sferu koja se giba kroz zrak javlja sila *okomita* na smjer gibanja [4]. Pojavu zbog koje nastaje takva sila prvi je kvalitativno opisao njemački znanstvenik Gustav Magnus u 19. stoljeću, te ju po njemu danas zovemo *Magnusov efekt*, a rezultirajuću silu *Magnusovom silom*. Detaljno ćemo ju opisati u poglavlju posvećenom silama.

Osim što pojava sile “felšanja”² čini nogomet mnogo zabavnijim, razumijevanje uzroka i računanje intenziteta aerodinamičkih sila vrlo je važno za izradu kvalitetnih nogometnih lopti, ali i za igrače, osobito kada govorimo o *slobodnim udarcima* i *kornerima*³ budući da su ovo relativno kontrolirane situacije i vrlo su važna stavka u postizanju pogodaka [3]. Poznavanje aerodinamičkih karakteristika nogometne lopte u letu bi igračima olakšalo put prema izvođenju savršenih slobodnih udaraca, poput Carlosovog. Ne treba zanemariti ni činjenicu da je nogomet popularno smatran najvažnijom sporednom stvari na svijetu, pa inkorporiranje pripadnih fizičkih koncepata u nogometne razgovore može doprinijeti popularizaciji fizike, osobito među mladima.

U aerodinamici se puno pažnje predaje računanju *koeficijenata otpora zraka* C_D i *koeficijenata dinamičkog uzgona* u zraku C_L ⁴ [5]. Ove veličine su bitne za skaliranje sile otpora zraka i sile aerodinamičkog uzgona. U slučaju gibanja nogometne lopte ova se sila ponekad poistovjećuje s Magnusovom silom. Tada se umjesto C_L piše C_S ⁵. Računanje ovih koeficijenata je *notorno komplicirano* budući da njihov iznos na složen način ovisi o svojstvima fluida (viskoznost, gustoća, kompresibilnost), parametrima koji opisuju stanje fluida (temperatura, tlak, gibanje fluida) te svojstvima tijela koja se kreću kroz fluid (oblik, brzina, deformabilnost, gustoća) [6]. Isključivo teorijskim pristupom je iznose ovih koeficijenata gotovo nemoguće dobiti, pa za dobar kvantitativni opis gibanja tijela kroz fluid iznose ovih koeficijenata treba eksperimentalno odrediti, iako je općenito i eksperimentalno ovo nevjerojatno zahtjevan

¹Sferom nazivamo zatvorenu šuplju površinu kugle.

²*Felš* je popularan izraz za zakrivljenu putanju lopte.

³Eng. *corner*, odnosi se na udarac iz kuta.

⁴Korištene su standardne oznake za aerodinamičke koeficijente.

⁵Zove ga se *koeficijent spina*, što je razlog slovu “S” u indeksu.

posao. Stoga je glavni cilj ovog rada opisati gibanje nogometne lopte pri slobodnom udarcu *isključivo na teorijski način*, uz određena pojednostavljenja, ali ne pregruba da se ne bi izgubila suština promatranog problema.

Postupak kojim ćemo pokušati dobiti uspješnu simulaciju slobodnog udarca je sljedeći: prvo ćemo definirati svojstva lopte i referentni sustav u kojem će se pratiti gibanje lopte. Zatim ćemo odrediti geometrijske odnose između početnog položaja lopte i branke. Da bi situacija bila što realističnija, modelirat ćemo i *obrambeni zid*. U istom poglavlju definirat ćemo uvjete koje putanja lopte mora zadovoljavati da bi se proglasio pogodak. Iduće poglavlje bavit ćemo se *početnim uvjetima* na loptu. Naime, da bi putanja lopte bila jedinstveno definirana potrebno je odrediti početne uvjete, koji će uvelike ovisiti o tome gdje je i na koji način lopta udarena, a to posljedično može drastično utjecati na putanju lopte. Budući da očekujemo promjene smjerova i translacijske i kutne brzine, u ovom poglavlju uvest ćemo shemu za praćenje smjerova obiju brzina.

Iduće poglavlje posvetit ćemo silama koje djeluju na loptu u letu. Osim gravitacijske sile, čiji iznos i smjer se može smatrati konstantnim, u općenitom slučaju će na loptu djelovati i aerodinamičke sile, specifično sila otpora zraka i Magnusova sila [7]. Iznos i smjer ovih sila će se kontinuirano mijenjati s obzirom na to da su ovisne o brzini⁶ i rotaciji lopte, te će shema za praćenje smjerova brzina ujedno poslužiti i za praćenje smjerova sila.

Sljedeće poglavlje raspisujemo jednadžbe gibanja. Jednom kada znamo početne uvjete i sve sile koje djeluju na loptu, putanja je jednoznačno određena *drugim Newtonovim zakonom* koji daje 3 jednadžbe gibanja, po jednu za svaku prostornu dimenziju. Započet ćemo poglavlje s najjednostavnijim slučajem — jednostavnim kosim hitcem. Potom ćemo opisati realističniji slučaj, kad zrak uzimamo u obzir, ali kad lopta ne rotira. Poglavlje završavamo s postavljanjem jednadžbi gibanja za općeniti slučaj, kad se i rotacija lopte uzima u obzir.

Ispostavit će se da dobivene jednadžbe gibanja nisu analitički rješive [7], pa ćemo ih rješavati numerički *Runge Kutta metodom 4. reda* (RK4) pomoću računalnog programa u *Pythonu*. Napraviti ćemo simulaciju nogometnog terena u kojem ćemo nacrtati putanje lopte koje su rješenja jednadžbi gibanja, da bismo stekli dojam o kvaliteti modela koji smo osmislili. Za kraj ćemo priložiti nekoliko različitih grafičkih rješenja, nekoliko zanimljivih primjena i diskutirati rezultate. Kôd računalnog programa za rješavanje jednadžbi gibanja može se naći kao dodatak na samom kraju rada.

⁶Misli se na translacijsku brzinu.

2 Temeljne značajke modela

Da bismo mogli opisati gibanje nogometne lopte potrebno je definirati referentni koordinatni sustav u kojem ćemo promatrati gibanje. S obzirom na to da nam je u cilju modelirati realnu pojavu, moramo definirati kako su razni objekti pozicionirani u odnosu na loptu u sustavu iz kojeg promatramo, koja su ograničenja na gibanje, te što uopće podrazumijevamo *nogometnom loptom*.

2.1 Nogometna lopta

Na prvi pogled može se činiti da bi opis gibanja nogometne lopte odgovarao i teniskoj loptici ili loptici za golf zbog zajedničkog sfernog oblika. Međutim, razlike u površinskom sloju na svakoj od lopti dramatično utječu na tok zraka oko lopte. Tako na primjer loptica za golf sadrži mnoštvo rupica na sebi jer tako u letu stvara turbulentni tok zraka na svojoj površini, čime umanjuje silu otpora i povećava silu uzgona [8].

Površina nogometne lopte je u usporedbi s drugim loptama mnogo glađa, a mi ćemo promatrati nogometnu loptu kao idealnu glatku krutu sferu jednoliko raspodjeljene mase [9]. Uvjetom krutosti zanemarujemo utjecaj kompresije zraka u lopti (literatura je o tom pitanju vrlo oskudna). U slučaju jednoliko raspoređene mase, što je praktično i odgovara pravoj lopti, translacijsko gibanje lopte možemo promatrati kao gibanje točkaste mase koja se nalazi u centru mase lopte, tj. u središtu lopte. Za polumjer lopte R i masu lopte m koristit ćemo stvarne vrijednosti $m = 430$ g, $R = 11$ cm⁷ [10].

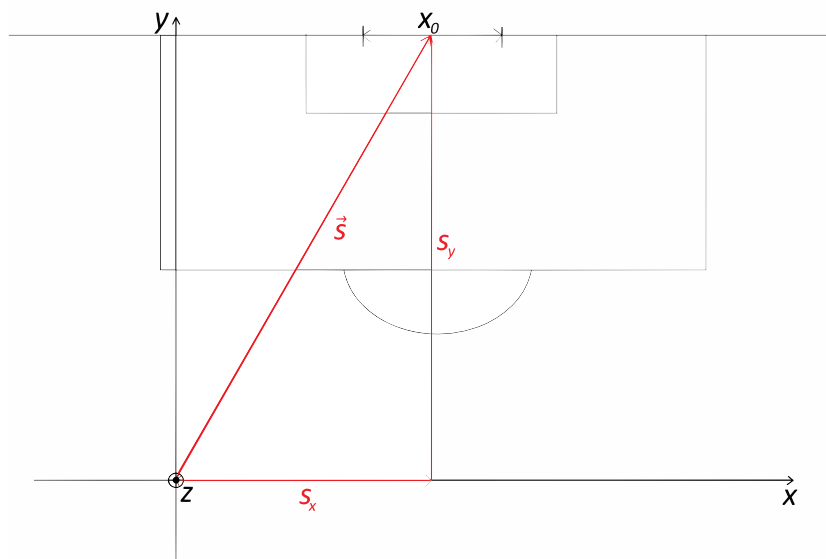
2.2 Referentni sustav

Gotovo svi fizički problemi zahtijevaju definiranje referentnog koordinatnog sustava u kojem se promatra dani problem. U našem slučaju koristit ćemo Kartezijev koordinatni sustav i ishodište postaviti u početni položaj lopte, odnosno u točku s koje se izvodi slobodni udarac. Os x položena je paralelno ravnini branke, os y okomito na ravninu branke, a os z je okomita na ravninu terena, kako je prikazano na Slici 1. Glavna motivacija ovog rada je pronaći putanju $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{x}} + y(t) \hat{\mathbf{y}} + z(t) \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.1)$$

gdje su $x(t)$, $y(t)$ i $z(t)$ projekcije trenutnog položaja lopte na x , y i z os.

⁷Propisana masa nogometne lopte je između 410 i 450 g, koristit ćemo aritmetičku sredinu.



Slika 1: Koordinatni sustav u kojem pratimo gibanje lopte pri slobodnom udarcu. Linije na tlocrtu terena nisu u točnom mjerilu.

2.3 Uvjeti i ograničenja na gibanje

Definiramo vektor s :

$$\mathbf{s} = s_x \hat{\mathbf{x}} + s_y \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.2)$$

koji označava najnižu točku na sredini branke, gdje je s_x udaljenost do sredine branke u smjeru x , a s_y udaljenost do sredine branke u smjeru y (Slika 1). Pritom su s_x i s_y bitni jer pomoću njih znamo međusobni položaj branke i točke izvođenja te uvjete koje putanja mora zadovoljavati da bi lopta ušla u branku.

2.3.1 Uvjeti za pogodak

Neka je širina gola $x_0 = 7.32$ m, a visina gola $z_0 = 2.44$ m⁸. Putanja lopte prekida se u trenutku kada je $y = s_y$, jer je tada lopta prešla granice igrališta. U trenutku kad putanja ima navedenu y -komponentu za preostale dvije komponente treba vrijediti:

$$x \in \left\langle s_x - \frac{x_0}{2}, s_x + \frac{x_0}{2} \right\rangle, \quad (2.3)$$

$$z \in [0, z_0), \quad (2.4)$$

⁸Uzete su tipične dimenzije gola, [11].

da bi krajnja točka putanje lopte bila u branci, tj. da bi bio pogodak. Ako samo jedan od ovih uvjeta nije ispunjen, radi se o promašaju.

2.3.2 Obrambeni zid

Prebacivanje obrambenog zida predstavlja jedan od najvećih izazova izvođača slobodnih udaraca. U obrambenom zidu se tipično nalazi od 1 do 5 igrača, a funkcija mu je ograničiti dio prostora kroz koji lopta može proći na putu do branke.

Neka je H visina, a L širina obrambenog zida. Neka je obrambeni zid okomit na s . Cijela geometrija obrambenog zida nalazi se na Slici 2. Neka je D udaljenost od početnog položaja lopte do najniže točke na sredini obrambenog zida. Tada možemo definirati vektor udaljenosti obrambenog zida \mathbf{D} :

$$\mathbf{D} = D_x \hat{\mathbf{x}} + D_y \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.5)$$

gdje je D_x udaljenost sredine obrambenog zida u smjeru x , a D_y udaljenost sredine obrambenog zida u smjeru y . \mathbf{D} i s su paralelni, što znači da je obrambeni zid okomit i na \mathbf{D} . Zato je sredina obrambenog zida njegov najbliži dio točki pucanja, a njegove krajnje točke najudaljenije su od točke pucanja. Označimo maksimalnu udaljenost s D_{\max} . Sa Slike 2 se lako vidi da je iznos D_{\max} :

$$D_{\max} = \sqrt{D^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}. \quad (2.6)$$

Očigledno je domena udaljenosti od ishodišta u x, y -ravnini kad lopta može potencijalno udariti u obrambeni zid jednaka:

$$r_{xy} \in [D, D_{\max}]. \quad (2.7)$$

Neka je ψ kut između projekcije vektora \mathbf{r} na x, y -ravninu i osi x , α kut koji \mathbf{D} zatvara s dužinama koje spajaju rubove obrambenog zida i β kut između \mathbf{D} i osi x . Njihovi su iznosi:

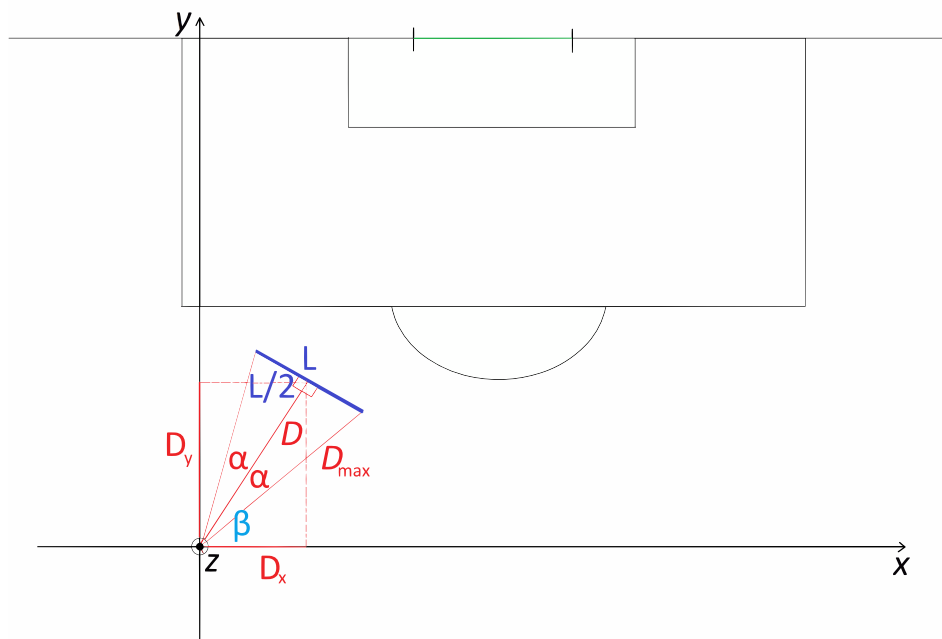
$$\psi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad \alpha = \arctan\left(\frac{L}{2D}\right), \quad \beta = \arctan\left(\frac{D_y}{D_x}\right). \quad (2.8)$$

U rasponu udaljenosti lopte od ishodišta nakon izvođenja slobodnog udarca definiranog izrazom (2.7) treba vrijediti barem jedan od dvaju uvjeta:

1. z -komponenta položaja lopte u tom rasponu mora biti veća od H , tj. $z > H$ (u tom slučaju lopta je preletjela zid), ili
2. za ψ mora vrijediti:

$$\beta - \alpha > \psi > \beta + \alpha; \quad (2.9)$$

u tom je slučaju lopta prošla pokraj zida.



Slika 2: Tlocrt geometrije za obrambeni zid, koji je označen plavom linijom. Linije na tlocrtu terena nisu u točnom mjerilu.

Dakle, obrambeni zid u našem modelu je pravokutnik duljine L i visine H čije se središte nalazi na udaljenosti D od ishodišta. Ovim parametrima i pomoću gornjih dvaju uvjeta prelaska zida potpuno je definiran jednostavni obrambeni zid.

2.3.3 Komentar na uvjete zaobilaska obrambenog zida

Primjetimo da samo jedan od ova dva uvjeta mora biti ispunjen. Na primjer, ako je ispunjen prvi uvjet za r u promatranom rasponu, drugi uvjet može biti i prekršen jer projekcija putanje u x, y -ravninu može proći kroz područje zabranjeno drugim uvjetom jer je lopta ionako previsoko da bi ju zid zaustavio. Slično vrijedi i za drugi uvjet: ako je lopta već prošla pokraj zida, nije bitno nalazi li se 3 m ili 10 cm iznad terena. Ako nijedan od ovih uvjeta nije zadovoljen, gibanje lopte se prekida pratiti jer je rezultat udarac u obrambeni zid, koji smatramo promašajem jer nas zanimaju pogodci samo izravnom izvedbom slobodnog udarca.

Treba obratiti pažnju na činjenicu da pomoću ovih dvaju uvjeta možemo eliminirati putanje koje bi inače zaobišle zid, a mogu ući u branku. Naime, ako lopta prođe točno preko ruba obrambenog zida u putanji prema dolje točno iznad sredine zida, njena udaljenost od ishodišta u trenutku kad je prešla zid je D . U ovom slučaju drugi uvjet nije ispunjen. Odmah trenutak poslije lopta pada ispod visine H , pa je tada (osim ako se giba jako velikim brzinama) i dalje u rasponu definiranom izrazom (2.7). Time naizgled prekidamo praćenje gibanja koje je moglo rezultirati postignutim pogotkom.

Međutim, u stvarnim slobodnim udarcima obrambeni zid naravno nije doslovni nepomični zid, već se sastoji od nekoliko igrača koji su sposobni pomicati raspon zida (skakati ili micati se lijevo-desno). Stoga, u slučajevima kad lopti koja je uspješno preletjela preko zida, a ne ispunjava gornja dva uvjeta, prekinemo gibanje, pozvat ćemo se na stvarni manevar obrambenog zida.

Ovim poglavljem upoznali smo prostor u kojem se lopta giba te uvjete koje putanja lopte mora zadovoljavati za postizanje pogotka. Prije nego što možemo analizirati putanju, trebamo opisati način na koji pokrećemo loptu. To je predmet idućeg poglavlja.

3 Početni uvjeti

Jednom kad je lopta u zraku, sile su te koje formiraju putanju. Kakve će te sile biti ovisit će o načinu na koji je lopta pokrenuta. Početni uvjeti — početna translacijska i kutna brzina — u ovom modelu ovisit će o 3 stvari:

1. položaju na lopti gdje ju udaramo,
2. jačini kojom je udaramo (što ćemo opisivati iznosom ukupne početne brzine \mathbf{v}_0), te
3. smjeru \mathbf{v}_0 .

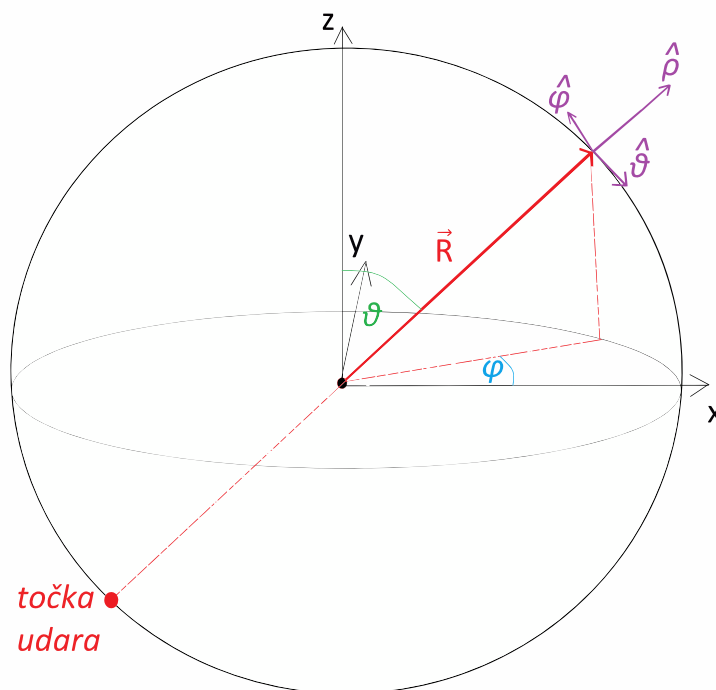
3.1 Pomoćni koordinatni sustav

Uz definirani Kartezijev sustav u kojem ćemo pratiti gibanje lopte, možemo definirati pomoćni sferni koordinatni sustav koji će poslužiti da lakše odredimo smjerove početne translacijske i kutne brzine [3]. Definiramo radij-vektor lopte \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = R \hat{\rho} = R \sin \vartheta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + R \sin \vartheta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + R \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.1)$$

Kut ϑ je općenito u sfernom sustavu polarni kut, onaj između radij-vektora i pozitivne strane osi z , a φ je azimutalni kut, onaj koji projekcija radij-vektora na x, y -ravninu zatvara s pozitivnom osi x . Ovdje je situacija praktično ista, ali potrebno je preciznije objasniti na što se konkretno odnose ovi kutovi.

Pogledajmo Sliku 3. \mathbf{R} je vektor koji spaja središte lopte, njen centar mase, s točkom *dijametralno suprotnoj* točki u koju je lopta udarena. Dakle, smjer vektora \mathbf{R} je potpuno određen koordinatama točke u koju je udarena lopta. Iz tog razloga smjer *početne translacijske*



Slika 3: Položaj vektora \mathbf{R} u definiranom Kartezijevu sustavu, uz pomoćne koordinate ϑ i φ za određenu točku udara. Smjer \mathbf{R} definirat će smjerove $\hat{\rho}, \hat{\vartheta}, \hat{\varphi}$, kako je i prikazano.

brzine \mathbf{v}_{0T} bit će upravo u smjeru vektora \mathbf{R} (ranije smo rekli da promatranje lopte kao točkaste mase u njenom središtu, što se tiče translacijskog gibanja, omogućuje jednoliko raspodjeljena masa na njenoj površini). Dakle, \mathbf{v}_{0T} bit će u smjeru jediničnog vektora $\hat{\rho}$. U ovom kontekstu, ϑ je kut koji \mathbf{R} zatvara s pozitivnom osi z , a φ kut koji projekcija \mathbf{R} na x, y -ravninu zatvara s pozitivnom osi x .

Prethodnim odijeljkom postalo je jasno zašto \mathbf{R} nije vektor koji spaja središte lopte s točkom udara. U tom slučaju φ bi bio različit za π od onoga kakvim smo ga definirali (i negativan), a ϑ bi u tom slučaju bio kut za koji vrijedi: $\vartheta' = \pi - \vartheta$. Obje konvencije mogu se koristiti, ali naša je definicija mnogo praktičnija, što će se i pokazati u daljnjem računu. Sferni koordinatni sustav inače razapinju tri međusobno okomita jedinična vektora:

$$\hat{\rho} = \sin \vartheta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \sin \vartheta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.2)$$

$$\hat{\vartheta} = \cos \vartheta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \vartheta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} - \sin \vartheta \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.3)$$

$$\hat{\varphi} = -\sin \varphi \hat{\mathbf{x}} + \cos \varphi \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.4)$$

gdje je $\hat{\rho}$ jedinični vektor u radijalnom smjeru (ranije već implicitno definiran), $\hat{\vartheta}$ jedinični vektor u smjeru promjene polarnog kuta ϑ , a $\hat{\varphi}$ jedinični vektor u smjeru promjene azimutalnog kuta, što se može vidjeti na slici 3.

3.2 Početne brzine

3.2.1 Ukupna početna brzina i ulazni parametri

Neka loptu pokreće *ukupna početna brzina* \mathbf{v}_0 ⁹:

$$\mathbf{v}_0 = v_{0x} \hat{\mathbf{x}} + v_{0y} \hat{\mathbf{y}} + v_{0z} \hat{\mathbf{z}}, \quad (3.5)$$

gdje su v_{0x} , v_{0y} i v_{0z} komponente \mathbf{v}_0 na osima x , y i z , redom. Međutim, nećemo zadati komponente i onda određivati smjer \mathbf{v}_0 , već ćemo se poslužiti pripadnim sfernim sustavom kako bismo opisali iznos i smjer pripadne brzine. Neka je početni iznos brzine v_0 , kut koji smjer te brzine zatvara s osi z označimo s ϑ' , a kut koji njena projekcija na x, y -ravninu zatvara s pozitivnom stranom osi x neka je φ' . Tada je \mathbf{v}_0 :

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \sin \vartheta' \cos \varphi' \hat{\mathbf{x}} + v_0 \sin \vartheta' \sin \varphi' \hat{\mathbf{y}} + v_0 \cos \vartheta' \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.6)$$

Preostaje izračunati kako se \mathbf{v}_0 raspodjeljuje na loptu, tj. koliki dio doprinosi translacijskom, a koliki dio rotacijskom gibanju. To je čisto matematički posao jer smo sve potrebne parametre za računanje već uveli: to su ϑ , φ , ϑ' i φ' i v_0 . Ovo su ulazni parametri koje moramo navesti da bismo znali gdje i na koji način je lopta udarena.

3.2.2 Početna translacijska brzina

Rastavljanje \mathbf{v}_0 na komponente prikazano je na Slici 4. \mathbf{v}_{0T} je očito paralelna s $\hat{\boldsymbol{\rho}}$, dok u općenitom slučaju \mathbf{v}_0 neće biti paralelna $\hat{\boldsymbol{\rho}}$. Tada komponentu $|\mathbf{v}_{0T}|$ možemo odrediti *skalarnim umnoškom* \mathbf{v}_0 i $\hat{\boldsymbol{\rho}}$:

$$|\mathbf{v}_{0T}| = v_{0T} = \mathbf{v}_0 \cdot \hat{\boldsymbol{\rho}}. \quad (3.7)$$

Time je vektor početne translacijske brzine:

$$\mathbf{v}_{0T} = v_{0T} \sin \vartheta \cos \varphi \hat{\mathbf{x}} + v_{0T} \sin \vartheta \sin \varphi \hat{\mathbf{y}} + v_{0T} \cos \vartheta \hat{\mathbf{z}}. \quad (3.8)$$

U posebnom slučaju kada su \mathbf{v}_0 i $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ paralelni ($\vartheta = \vartheta'$, $\varphi = \varphi'$) će vrijediti: $\mathbf{v}_{0T} = \mathbf{v}_0$, tj. početni impuls na loptu rezultirat će isključivo translacijskim gibanjem. Najbolji primjer ovoga je udarac “špicem” točno po sredini lopte. Komponenta v_{0T} će u realnom slobodnom udarcu biti uvijek *pozitivna* jer bi negativan predznak efektivno značio pucanje prema vlastitoj brani.

⁹Početni položaj trivijalno je određen odabirom koordinatnog sustava i uvijek odgovara točki (0,0,0).

3.2.3 Početna kutna brzina

Znamo da se u općenitom slučaju nogometna lopta vrti dok se giba kroz zrak, a njena rotacija isključivo je posljedica načina na koji je lopta udarena. Ako se \mathbf{v}_0 i $\hat{\rho}$ nalaze pod nekim kutem, dio ukupne početne brzine otići će i na *početnu tangentnu brzinu*, koja je s kutnom brzinom općenito povezana izrazom $\mathbf{v}_R = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$, a u našoj konvenciji je:

$$\mathbf{v}_R = -\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}, \quad (3.9)$$

gdje je \mathbf{v}_R tangentna brzina lopte, a $\boldsymbol{\omega}$ kutna brzina. Onaj dio \mathbf{v}_0 koji ne bude u smjeru $\hat{\rho}$ bit će *okomit* na taj smjer, tj. *okomit na smjer gibanja*. Vektor tangentne brzine tada možemo rastaviti na komponente u smjerovima jediničnih vektora $\hat{\vartheta}$ i $\hat{\varphi}$, ali jednostavnije je skalarno pomnožiti \mathbf{v}_0 s pripadnim jediničnim vektorima kako bismo dobili njene komponente u tim smjerovima:

$$\mathbf{v}_{0R\vartheta} = (\mathbf{v}_0 \cdot \hat{\vartheta}) \hat{\vartheta}, \quad (3.10)$$

$$\mathbf{v}_{0R\varphi} = (\mathbf{v}_0 \cdot \hat{\varphi}) \hat{\varphi}, \quad (3.11)$$

gdje je $\mathbf{v}_{0R\vartheta}$ početna tangentna brzina u $\hat{\vartheta}$ smjeru, a $\mathbf{v}_{0R\varphi}$ početna tangentna brzina u $\hat{\varphi}$ smjeru.

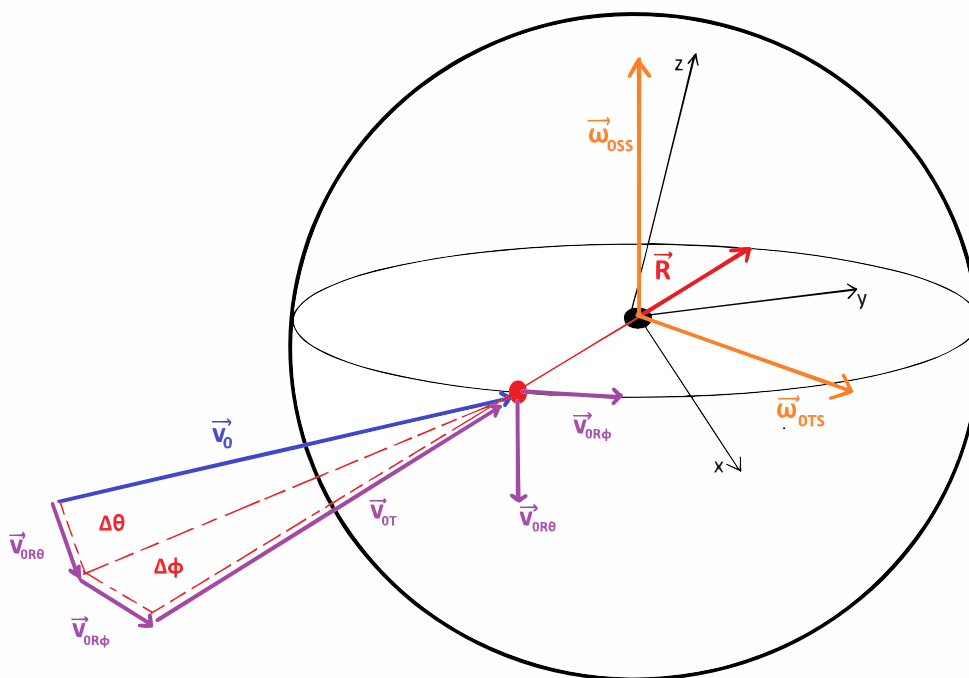
Kako je sfera savršeno simetrično tijelo, \mathbf{v}_{0R} će biti brzina na ekvatoru lopte, čija je ekvatorska ravnina zapravo ravnina u kojoj leži \mathbf{v}_{0T} . To je maksimalna tangentna brzina lopte koja se smanjuje od ekvatora prema polovima, a to znači da je i početna kutna brzina *okomita* na \mathbf{v}_{0T} [3]. Isto vrijedi i za komponente kutne brzine, koje iznose:

$$\omega_{0TS} = \frac{v_{0R\vartheta}}{R}, \quad \omega_{0SS} = \frac{v_{0R\varphi}}{R}, \quad (3.12)$$

gdje je ω_{0TS} komponenta početne kutne brzine u $\hat{\vartheta}$ smjeru, ω_{0SS} komponenta početne kutne brzine u $\hat{\varphi}$ smjeru (značenje indeksa postat će jasno u idućem odjeljku), a $v_{0R\vartheta}$ i $v_{0R\varphi}$ komponente \mathbf{v}_0 na $\hat{\vartheta}$ i $\hat{\varphi}$. Ukupna početna kutna brzina bit će vektorski zbroj ovih dviju kutnih brzina. Preostaje definirati njihov smjer. ω_{0TS} i ω_{0SS} su okomite i na $\mathbf{v}_{0R\vartheta}$ i na \mathbf{R} . $\mathbf{v}_{0R\vartheta}$ je u smjeru $\hat{\vartheta}$, $\mathbf{v}_{0R\varphi}$ u smjeru $\hat{\varphi}$, a \mathbf{R} u smjeru $\hat{\rho}$. Kako bi vrijedio izraz (3.9) treba biti:

$$\boldsymbol{\omega}_{0TS} = -\omega_{0TS} \hat{\varphi}, \quad \boldsymbol{\omega}_{0SS} = \omega_{0SS} \hat{\vartheta}. \quad (3.13)$$

S posljednjim dvjema relacijama poznamo sve početne uvjete koji su potrebni za daljnje opisivanje gibanja nogometne lopte. Komponente početne kutne brzine ω_{0TS} i ω_{0SS} iz izraza (3.12) *nisu nužno pozitivne* jer su dobivene skalarnim umnošcima u izrazima (3.10) i (3.11), koji ne moraju nužno biti pozitivni. Ova činjenica će igrati važnu ulogu kod definiranja izraza za Magnusovu silu.



Slika 4: Rastavljanje \mathbf{v}_0 na komponente. $\Delta\vartheta = |\vartheta' - \vartheta|$, $\Delta\varphi = |\varphi' - \varphi|$.

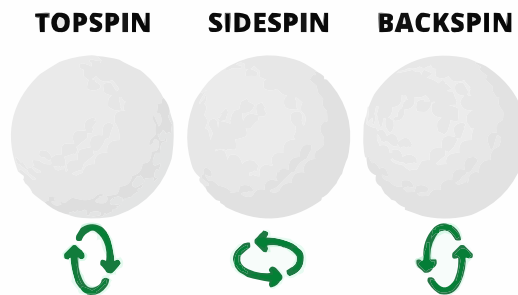
3.2.4 Različite vrste rotacija

Komponenta tangente brzine u smjeru $+\hat{\vartheta}$ uzrokuje gibanje koje se popularno zove *topspin*, dok se gibanje u smjeru $-\hat{\vartheta}$ naziva *backspin* [12]. *Backspin* se vrlo rijetko koristi kod izvođenja slobodnih udaraca jer sila koja nastaje pri takvoj rotaciji lopte efektivno smanjuje utjecaj gravitacijske sile, tj. lopta sporije pada na tlo (ovu silu možemo interpretirati kao aerodinamički uzgon). Ovaj je efekt poželjniji kod “lobova”¹⁰ lopte [13]. *Topspin* se koristi češće jer se sila koja nastaje takvom rotacijom zbraja s gravitacijom i lopta brže pada, što je prilično zgodno ako je kut ispaljivanja lopte velik.

Komponenta tangente brzine u smjeru $\hat{\varphi}$ uzrokuje gibanje koje se popularno zove *sidespin*. Ovisno o tome je li $\mathbf{v}_{OR\varphi}$ u $+\hat{\varphi}$ ili $-\hat{\varphi}$ smjeru, imat ćemo *desni sidespin* (u smjeru $+\hat{\varphi}$) i *lijevi sidespin* (u smjeru $-\hat{\varphi}$). Uglavnom je *sidespin* taj kojeg opažamo u slobodnim udarcima jer generira gibanje koje popularno zovemo “felš”.

Različite vrste rotacija shematski su prikazane na Slici 5. U općenitom slučaju lopta će biti udarena tako da nećemo imati ni čisti *topspin* ni čisti *sidespin*, ali svaku vrstu rotacije možemo prikazati kao vektorski zbroj ovih dviju međusobno neovisnih rotacija da bismo dobili ukupnu rotaciju lopte, što je bio i cilj kod računanja ω_{OTS} i ω_{OSS} . U početnom trenutku obe kutne brzine bit će okomite na smjer gibanja, a ovo ćemo zahtijevati i za trajanje cijelog leta lopte, tj.

¹⁰Udarac lopte u visokom luku.



Slika 5: Smjerovi različitih vrsta rotacije za golflopticu, ali ista stvar vrijedi i za nogometne lopte. (Slika preuzeta s [12])

zahtijevat ćemo da je kutna brzina duž cijele putanje okomita na translacijsku, što u odličnoj aproksimaciji i jest [3].

3.3 Shema za praćenje smjerova brzina

Ako je u početnom trenutku $t = 0$ translacijska brzina jednaka v_{0T} , u nekom trenutku $t > 0$ možemo očekivati da će joj se promijeniti i iznos i smjer. Bez poznavanja smjera translacijske brzine lopte u svakom trenutku nećemo moći odrediti smjerove kutnih brzina, ni smjerove sila koje djeluju na loptu u nekom danom trenutku. No, postoji način da povedemo računa o tome.

Ako se mijenja smjer vektora translacijske brzine, tada se mijenjaju i kutevi ϑ i φ koje trenutna translacijska brzina \mathbf{v} zatvara s koordinatnim osima Kartezijevog sustava, a tako se mijenjaju i smjerovi jediničnih vektora $\hat{\rho}$, $\hat{\vartheta}$ i $\hat{\varphi}$. Tada vrijedi:

$$\sin \vartheta = \sqrt{\frac{v_x^2 + v_y^2}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \quad (3.14)$$

$$\cos \vartheta = \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}}, \quad (3.15)$$

$$\sin \varphi = \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}, \quad (3.16)$$

$$\cos \varphi = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}}. \quad (3.17)$$

Prema tome, koristeći gornje izraze, te mijenjajući naziv jediničnog vektora $\hat{\rho}$ u \hat{v} , jer je to jedinični vektor smjera brzine, za jedinične vektore \hat{v} , $\hat{\vartheta}$ i $\hat{\varphi}$ vrijedi:

$$\hat{v} = \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \hat{x} + \frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \hat{y} + \frac{v_z}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \hat{z}, \quad (3.18)$$

$$\hat{\vartheta} = \frac{v_x v_z}{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2)}} \hat{x} + \frac{v_y v_z}{\sqrt{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)(v_x^2 + v_y^2)}} \hat{y} - \sqrt{\frac{v_x^2 + v_y^2}{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}} \hat{z}, \quad (3.19)$$

$$\hat{\varphi} = -\frac{v_y}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \hat{x} + \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + v_y^2}} \hat{y}. \quad (3.20)$$

Određivanjem jediničnih vektora pomoćnog sfernog sustava kao funkcija komponenti trenutne brzine znamo komponente translacijske brzine, kutnih brzina i , kao što ćemo vidjeti, svih sila koje će djelovati na loptu u svakom trenutku.

3.4 Komentar na računanje početnih uvjeta

Kroz cijelo poglavlje prešutno je pretpostavljena jedna stvar: početni zalet na loptu je koncentriran u jednoj točki. Svatko tko je ikad igrao nogomet zna da se lopta ne udara “špicem”¹¹, a ipak slučaj koji mi opisujemo najbolje odgovara slučaju kada loptu udarimo upravo tako. Lopta se uglavnom udara punom nogom ili jednom stranom noge, nogom će biti obuhvaćen *konačan dio površine* lopte. Kako će se zalet koji noga preda lopti uslijed takvog udarca rasporediti po lopti je praktično nemoguće odrediti, jer se zalet ne predaje jednoliko dok su stopalo i lopta u kontaktu, a dio stopala će se i odvojiti od lopte tijekom ukupnog trajanja kontakta (radovi koji su se više bavili upravo ovom tematikom su [14] i [15]). Raspodjela zaleta ovisi i o zaletu pojedinih dijelova stopala koji udaraju loptu i trajanju kontakta stopala i lopte. Previše je parametara potrebno uzeti u obzir da bi se egzaktno odredio početni zalet na loptu. Zato se u literaturi rijetko ulazi u takve kalkulacije. Zbog toga u okviru ovog modela pretpostavljamo da je sva silina početnog udarca, kakav god on bio, koncentrirana u jednoj točki.

Cilj ovog poglavlja bio je odrediti ulazne parametre i izračunati pomoću njih početne uvjete. Zadavanjem ranije definiranih parametara v_0 , ϑ , φ , ϑ' i φ' potpuno su određene početna translacijska brzina v_{0T} i početne kutne brzine ω_{0TS} i ω_{0SS} . U sljedećem poglavlju proučit ćemo koje od ovih veličina i na koji način utječu na sile koje se javljaju na loptu u letu.

¹¹Nije zabranjeno, više je nepisano pravilo jer nema smisla.

4 Sile na loptu u gibanju

Zajedno s početnim uvjetima, poznavanje sila u svakom trenutku kretanja lopte jednoznačno određuje putanju lopte. Pažnju obraćamo na 3 najvažnije sile: gravitacijsku, otpor zraka i Magnusovu silu.

4.1 Gravitacijska sila

Na svako tijelo na Zemljinoj površini djeluje gravitacijska sila koja ga privlači u središte Zemlje. Dakle, usmjerena je vertikalno dolje u odnosu na površinu Zemlje. Iznos gravitacijske sile između Zemlje i nogometne lopte dan je Newtonovim općim zakonom gravitacije:

$$F_g = G \frac{Mm}{(R+z)^2}, \quad (4.1)$$

gdje je G gravitacijska konstanta, M masa Zemlje, R polumjer Zemlje, a z visina lopte iznad površine Zemlje. S obzirom na to da će u svakoj točki putanje vrijediti $z \ll R$, doprinos visine z zanemarujemo, te možemo smatrati iznos gravitacijske sile konstantnim.

Veličina koju dobijemo dijeljenjem F_g s masom lopte m je gravitacijsko ubrzanje g :

$$g = G \frac{M}{R^2}. \quad (4.2)$$

Iznos gravitacijskog ubrzanja pri površini Zemlje je $g \approx 9.81 \text{ ms}^{-2}$. U našem koordinatnom sustavu g je u smjeru $-z$, pa konačno za gravitacijsku silu možemo pisati:

$$\mathbf{F}_g = -mg = -mg \hat{z}. \quad (4.3)$$

4.2 Sila otpora zraka

Sila otpora zraka F_o je u suštini *aerodinamičko trenje*. Vrlo je lako zaključiti da sila otpora zraka ovisi o brzini kretanja nekog objekta kroz zrak, primjerice imamo iskustvo da manje osjetimo *pritisak* zraka na sebe kada vozimo sporije, a mnogo više kada vozimo brzo [7]. Kao i svaka sila trenja, sila otpora zraka je usmjerena suprotno smjeru gibanja.

Neće se svaki fluid jednako opirati gibanju nekog objekta, niti će u svakom fluidu ovisnost F_o o brzini biti jednaka. Tako je za vrlo viskozne¹² fluide ili vrlo male objekte ovisnost sile otpora o brzini približno *linearna*, a za veće objekte i manje viskozne medije (poput zraka), ovisnost sile otpora o brzini je približno *kvadratna* (linearna ovisnost je u potpunosti zanemariva u slučaju gibanja nogometne lopte kroz zrak) [7]. U izračunima iznosa aerodinamičke sile otpora zraka

¹²Viskoznost je unutarnje trenje pri strujanju fluida zbog različitih brzina gibanja njegovih slojeva, [16]

općenito se koristi formula:

$$F_o = \frac{1}{2}\rho AC_D v^2, \quad (4.4)$$

gdje je ρ gustoća zraka (vrijednost na sobnoj temperaturi i atmosferskom tlaku¹³ je $\rho = 1.2 \text{ kgm}^{-3}$), $A = R^2\pi$ je površina poprečnog presjeka lopte, a C_D koeficijent otpora zraka [5]. Dakle, sila otpora zraka bit će veća u fluidima veće gustoće i bit će veća na tijela većeg poprečnog presjeka. Poznavanje koeficijenta C_D od neprocjenjive je važnosti ne samo za let nogometne lopte, već i za modeliranje sila na bilo koji objekt kojem je zadaća kretati se kroz zrak (projektili, zrakoplovi, helikopteri, rakete, itd.).

U uvodu rada je spomenuto da je računanje C_D nevjerojatno složeno budući da ovisi o izrazito velikom broju parametara. Jedna od najvažnijih stavki o kojima C_D ovisi je tok zraka oko tijela koje se giba kroz zrak. Tako je ranije spomenuto da loptica za golf lakše potakne turbulentni tok zraka od nogometne lopte, što smanjuje vrijednost koeficijenta C_D , dok je njegov iznos mnogo veći u režimu laminarnog toka [5].

U slučaju nogometne lopte C_D je jako ovisan o aerodinamičkoj veličini koju zovemo *parametar spina* S_p [17]. Iznos S_p je po definiciji:

$$S_p = \frac{R\omega}{v}. \quad (4.5)$$

S_p je u suštini omjer tangentne i translacijske brzine. U [17] je navedeno da je ovisnost C_D o S_p kod gibanja lopte u slobodnom udarcu približno linearna:

$$C_D = 0.8S_p + 0.12 = 0.8\frac{R\omega}{v} + 0.12, \quad (4.6)$$

i upravo ćemo ovaj izraz za C_D koristiti u daljnjim izračunima. Primjetimo da za iščezavajuću rotaciju vrijedi $C_D = 0.12$, što se dobro poklapa s eksperimentalnim rezultatima za C_D za nerotirajuće lopte pri brzinama pristunim kod izvođenja slobodnih udaraca [19].

Sila otpora zraka je usmjerena suprotno smjeru gibanja. Ako se lopta giba u smjeru jediničnog vektora \hat{v} , tada je konačno \mathbf{F}_o :

$$\mathbf{F}_o = -\frac{1}{2}\rho R^2\pi \left(0.8\frac{R\sqrt{\omega_{0TS}^2 + \omega_{0SS}^2}}{v} + 0.12 \right) v^2 \hat{v}, \quad (4.7)$$

gdje je $\omega = \sqrt{\omega_{0TS}^2 + \omega_{0SS}^2}$ ukupna kutna brzina lopte.

¹³Sobna temperatura je oko 20-25°C, a atmosferski tlak iznosi 101 325 Pa.

4.3 Magnusova sila

Upravo je *Magnusov efekt* ono što čini slobodne udarce i općenite putanje igračih lopti vrlo zanimljivima. Taj fenomen je zaslužan za pojavu sile okomite na smjer gibanja — *Magnusove sile*. Još u doba Isaaca Newtona se znalo da ova sila postoji, a prvi put ju je točno opisao Gustav Magnus u 19. stoljeću. Zato je po njemu prozvana Magnusovom silom.

Promotrimo Sliku 6. Zbog jednostavnosti se prebacujemo u referentni sustav u kojem lopta rotira, ali se translacijski ne giba, već se zrak giba prema lopti brzinom v udesno. Neka lopta radijusa R rotira kutnom brzinom ω u smjeru kazaljke na satu. Kad se lopta vrti tok zraka oko nje je asimetričan. Nekad se mislilo da rotirajuća lopta “povlači” zrak za sobom na dijelu lopte gdje tok zraka ide ususret rotaciji [18]. To znači da bi na toj strani brzina toka zraka bila efektivno povećana, što bi prema Bernoullijevom principu smanjilo tlak zraka na toj strani [5]. Na drugoj strani bi tada vrijedilo obratno. Zbog razlike tlakova na dvije strane lopte nastala bi sila okomita na smjer gibanja lopte. Međutim, danas ovaj opis više nije prihvatljiv.

Oko površine nogometne lopte postoji tanki granični sloj zraka. Ovaj je sloj ubrzan na strani lopte gdje tok zraka ide u smjeru rotacije, a usporen na strani lopte gdje je tok zraka suprotan smjeru rotacije. Zbog toga se granični sloj zraka ranije odvoji od lopte na strani gdje je tok zraka suprotan smjeru rotacije.

Posljedica ovoga je da je smjer toka zraka koji napušta loptu zakrenut u smjeru tangentne brzine koju lopta ima točki u kojoj se granični sloj zraka odvojio od lopte. Uzrok zakretanja smjera je očito djelovanje sile kojom površina lopte djeluje na zrak. Ovdje je to *viskozna sila* [18]. Prema *trećem Newtonovom zakonu* tada će i zrak djelovati silom na loptu i zakrenuti ju u suprotnu stranu — ovo zovemo *Magnusovom silom*.

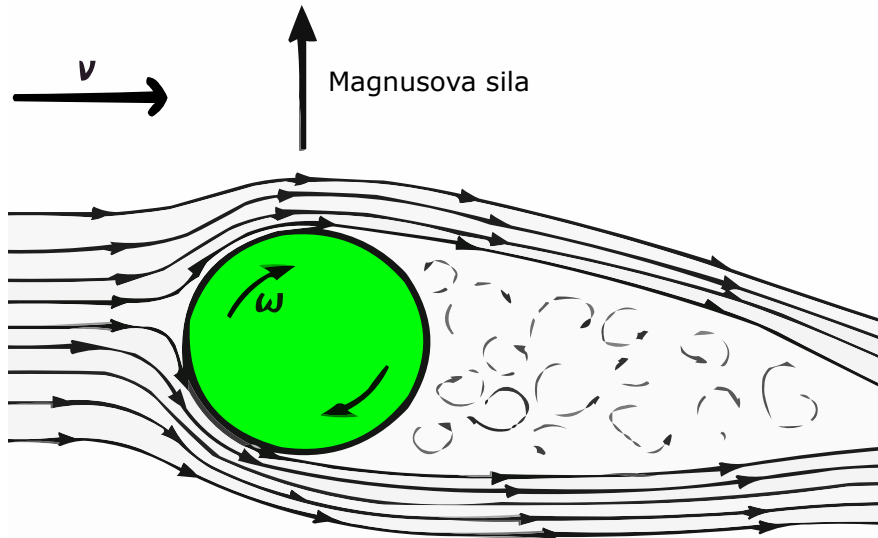
Magnusova sila je okomita na brzinu strujanja fluida \mathbf{v} (odnosno na translacijsku brzinu lopte) i na kutnu brzinu ω [3], a pravilom desne ruke zaključujemo da je smjer Magnusove sile $\hat{\mathbf{F}}_M$:

$$\hat{\mathbf{F}}_M = \hat{\omega} \times \hat{\mathbf{v}}, \quad (4.8)$$

gdje je $\hat{\omega}$ jedinični vektor smjera ω , a $\hat{\mathbf{v}}$ jedinični vektor smjera \mathbf{v} .

Dijagram sila na loptu prikazan je na Slici 7. Treba uočiti da, ako govorimo npr. o ω_{TS} , ne možemo uzeti $\hat{\omega}_{TS} = -\hat{\varphi}$, što se može učiniti zbog (3.13). Komponenta ω_{TS} može biti *negativna*, a tu esencijalnu informaciju gubimo uzimajući samo jedinični vektor uz tu komponentu, pa je za jedinični vektor smjera *Magnusove sile topspina* $\hat{\mathbf{F}}_{M_{TS}}$ potrebno pisati:

$$\hat{\mathbf{F}}_{M_{TS}} = -\frac{\omega_{TS}}{|\omega_{TS}|} \hat{\varphi}, \quad (4.9)$$



Slika 6: Skica pojednostavljenog strujanja zraka oko lopte. Zbog različitih brzina zraka na dvije strane lopte javlja se sila okomita na gibanje zraka i kutnu brzinu lopte — Magnusova sila (slika preuzeta s [20]).

i ekvivalentno za *Magnusovu silu sidespina* \mathbf{F}_{MSS} :

$$\hat{\mathbf{F}}_{\text{MSS}} = -\frac{\omega_{\text{SS}}}{|\omega_{\text{SS}}|} \hat{\varphi}. \quad (4.10)$$

Za potrebe ovog rada je nepotrebno provjeravati iznos komponente translacijske brzine, s obzirom na to da bi njena negativna vrijednost značila pucanje u smjeru vlastite branke.

Magnusova sila se javlja očito samo kada postoji rotacija lopte, te je $F_{\text{M}} = 0$ ako je $\omega = 0$, jer je tada tok zraka oko lopte isti na jednoj i na drugoj strani, što znači da nema ni razlike tlakova na jednoj i na drugoj strani, pa nema sile zakretanja.

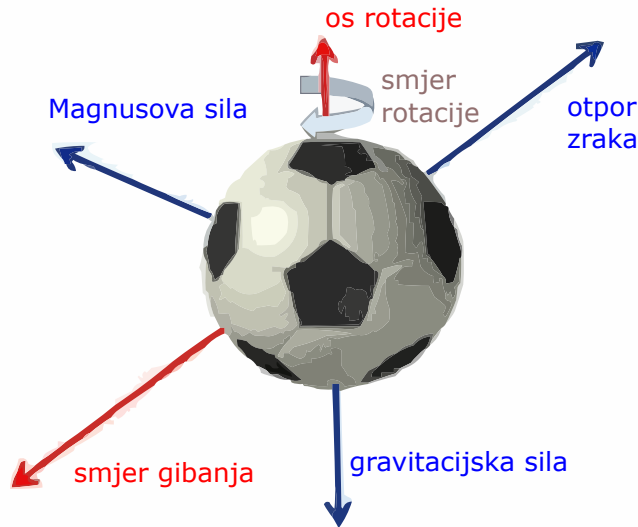
Magnusovu silu, kao ni silu otpora zraka, nije jednostavno odrediti upravo zbog nepredvidljivosti toka zraka oko lopte za sve moguće brzine i kutne brzine. Međutim, generični je izraz za F_{M} gotovo identičan onomu za F_{o} [5]:

$$F_{\text{M}} = \frac{1}{2} \rho A C_{\text{S}} v^2, \quad (4.11)$$

gdje je C_{S} *koeficijent spina*, koji je ovisan o S_{p} . Prema [17] i [28], može se uzeti da je ovisnost C_{S} o S_{p} približno linearna:

$$C_{\text{S}} \approx \begin{cases} 0.77 \frac{R\omega}{v} + 0.12, & S_{\text{p}} \geq 0.1 \\ 1.93 \frac{R\omega}{v}, & S_{\text{p}} < 0.1 \end{cases} \quad (4.12)$$

Kako promatramo dvije rotacije, u izrazima ćemo razlikovati *koeficijent topspina* C_{TS} i *koeficijent sidespina* C_{SS} . Njihovi iznosi konformiraju se izrazu (4.12), ali podijelili smo ih da bude jasnije koju kutnu brzinu uvrštavamo u koji C_{S} .



Slika 7: Dijagram sila na nogometnu loptu u letu (slika preuzeta s [24]).

Konačno možemo napisati izraze za *Magnusovu silu topspina* \mathbf{F}_{MTS} i *Magnusovu silu sidespina* \mathbf{F}_{MSS} :

$$\mathbf{F}_{\text{MTS}} = \frac{1}{2}\rho AC_{\text{TS}}v^2(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\text{TS}} \times \hat{\mathbf{v}}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\rho R^2\pi(1.93\frac{R\omega_{\text{TS}}}{v})\hat{\boldsymbol{\theta}}, S_p < 0.1 \\ -\frac{1}{2}\rho R^2\pi(0.77\frac{R|\omega_{\text{TS}}|}{v} + 0.12)\frac{\omega_{\text{TS}}}{|\omega_{\text{TS}}|}\hat{\boldsymbol{\theta}}, S_p \geq 0.1 \end{cases}, \quad (4.13)$$

$$\mathbf{F}_{\text{MSS}} = \frac{1}{2}\rho AC_{\text{SS}}v^2(\hat{\boldsymbol{\omega}}_{\text{SS}} \times \hat{\mathbf{v}}) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\rho R^2\pi(1.93\frac{R\omega_{\text{SS}}}{v})\hat{\boldsymbol{\phi}}, S_p < 0.1 \\ -\frac{1}{2}\rho R^2\pi(0.77\frac{R|\omega_{\text{SS}}|}{v} + 0.12)\frac{\omega_{\text{SS}}}{|\omega_{\text{SS}}|}\hat{\boldsymbol{\phi}}, S_p \geq 0.1. \end{cases} \quad (4.14)$$

gdje u izrazu za C_S uvrštavamo *iznos* komponenti kutne brzine. Posljednjim dvama izrazima zaključen je postupak određivanja sila koje će se koristiti u jednadžbama gibanja.

4.4 Zanemarene sile

4.4.1 Aerodinamički moment sile

U prethodnim trima odjeljcima fokus je bio na silama koje utječu na *translacijsko* gibanje. Tri sile koje uvrštavamo u jednadžbe gibanja ne utječu na kutnu brzinu lopte. Međutim, većina radova (npr. [3], [17], [21]) gotovo potpuno zanemaruje efekte koji doprinose smanjenju kutne brzine lopte, iako je eksperimentalna činjenica da se kutna brzina lopte doista mijenja tijekom leta kroz zrak. U literaturi se ponegdje koristi model eksponencijalnog gušenja kutne brzine [17], međutim ona se na taj način smanjila za svega 0.5 % tijekom cijelog leta. U literaturi postoje izvedeni izrazi za momente gušenja za vrlo viskozne fluide [22] i za vrlo male brzine gibanja određenih tijela kroz fluide (uključujući sfere) [23]. Nijedan od ovih scenarija nije

prisutan u zraku čija je viskoznost vrlo mala, a prisutne brzine lopti mnogo veće od onih za koje je moment gušenja izračunat. Stoga ćemo za svrhe ovog rada smatrati iznos kutne brzine konstantnim duž cijele putanje.

4.4.2 Inercijske sile

U odličnoj aproksimaciji je koordinatni sustav vezan za površinu Zemlje inercijski [7]. Međutim, Zemlja rotira oko svoje osi i učini puni krug u 24 sata, zbog čega je Zemlja zapravo rotirajući, odnosno *neinercijski* sustav u kojem će se javiti dodatne sile. To su centrifugalna sila (djeluje obrnuto od smjera gravitacije), te Coriolisova sila.. Ove sile nazivamo *inercijskim* silama, i one doista djeluju na loptu u slobodnom udarcu, ali je njihov efekt u potpunosti zanemariv u odnosu na doprinose gravitacije, sile otpora i Magnusove sile. Na primjer, ako je trenutna brzina lopte $v = 30 \text{ ms}^{-1}$ i trenutna kutna brzina $\omega = 50 \text{ rads}^{-1}$, tada su iznosi sila koje uzimamo u obzir:

$$F_g = 4.22 \text{ N}, \quad F_o = 0.55 \text{ N}, \quad F_M = 5.36 \text{ N}, \quad (4.15)$$

a maksimalni¹⁴ iznosi inercijskih sila su:

$$F_{CF} = m\omega_Z^2 R^2 = 0.014 \text{ N}, \quad F_{COR} = 2mv\omega_Z = 0.002 \text{ N}, \quad (4.16)$$

gdje je F_{CF} iznos centrifugalne sile, F_{COR} iznos Coriolisove sile, a $\omega_Z = 2\pi/86400 \text{ rads}^{-1}$ kutna brzina Zemljine rotacije oko vlastite osi [7]. Vidimo da je doprinos inercijskih sila u potpunosti zanemariv, pa ih nećemo uzimati u obzir pri postavljanju jednadžbi gibanja.

Ovim poglavljem konačno su određene i sile koje značajno djeluju na gibanje nogometne lopte pri slobodnom udarcu. Sve što preostaje je postaviti jednadžbe gibanja i pronaći temeljni motiv ovog rada — putanju $\mathbf{r}(t)$.

5 Jednadžbe gibanja

Sušтина klasične mehanike je sljedeća: poznajemo li početni položaj i početnu brzinu nekog tijela, te sve sile koje djeluju na njega, poznavat ćemo njegov položaj u bilo kojem budućem i prošlom vremenu. Putanja promatranog tijela tada je potpuno i jednoznačno određena *drugim Newtonovim zakonom*, temeljnim zakonom gibanja. Drugi Newtonov zakon je diferencijalna

¹⁴Iznosi inercijskih sila ovise o položaju tijela na Zemlji, a Coriolisova sila dodatno ovisi o brzini gibanja tijela na Zemlji. Na polovima je F_{COR} maksimalna, a F_{CF} je nula, dok je na ekvatoru F_{CF} maksimalna, a F_{COR} nula [7].

jednadžba drugog reda za položaj \mathbf{r} , a glasi:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} = m\ddot{\mathbf{r}}, \quad (5.1)$$

gdje je \mathbf{p} zalet tijela, \mathbf{F} ukupna sila koja djeluje na promatrano tijelo, a $\ddot{\mathbf{r}}$ resultantno ubrzanje (druga vremenska derivacija položaja).

Prvih nekoliko poglavlja posvetili smo početnim uvjetima i silama, a sada konačno možemo napisati jednadžbe gibanja za nogometnu loptu u slobodnom udarcu. Počet ćemo od najjednostavnijeg slučaja — običnog kosog hitca u zrakopraznom prostoru. Potom ćemo uvesti otpor zraka da bi se uočilo kako se situacija komplicira uvođenjem samo još jedne nove sile, a poglavlje ćemo završiti ispisivanjem jednadžbi gibanja za proizvoljno gibanje lopte.

5.1 Kosi hitac

Kad se spomene termin *kosi hitac*, uglavnom se misli na jedan od elementarnih problema u fizici. On predstavlja gibanje tijela u gravitacijskom polju, općenito bez obraćanja pažnje na otpor zraka i ostale sile koje se mogu javiti na promatrano tijelo. Jednadžba gibanja kosog hitca je:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\mathbf{g}. \quad (5.2)$$

Ovo je vektorska diferencijalna jednadžba koju možemo rastaviti na 3 skalarne jednadžbe, po jednu za svaku prostornu dimenziju:

$$\ddot{x} = 0, \quad (5.3)$$

$$\ddot{y} = 0, \quad (5.4)$$

$$\ddot{z} = -g, \quad (5.5)$$

gdje su \ddot{x} , \ddot{y} i \ddot{z} resultantna ubrzanja u x , y i z smjeru, redom (mase su pokraćene). Rješenja danih jednadžbi gibanja su trivijalno određiva integracijom [7]:

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t, \quad (5.6)$$

$$y(t) = y_0 + v_{0y}t, \quad (5.7)$$

$$z(t) = z_0 + v_{0z}t - \frac{1}{2}gt^2, \quad (5.8)$$

za početni položaj $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ i početnu brzinu $\mathbf{v}_0 = (v_{0x}, v_{0y}, v_{0z})$. Kosi hitac u vakuumu (jednostavni kosi hitac) treba se dobro razumijeti da bi se moglo razumijeti gibanje projektila kad se vratimo u stvarni svijet i uračunamo učinak prisutnosti zraka. Međutim, jednostavni kosi hitac je vrlo ograničen po pitanju praktične upotrebe.

Važno je primjetiti da je u vakuumu svejedno rotira li tijelo ili ne jer tijelo se ne giba u nikakvom

fluidu, dakle $F_M = 0$.

5.2 Prigušeni kosi hitac

Pod prigušenim kosim hitcem podrazumijevamo prisutnost otpora zraka koji u svakom trenutku smanjuje brzinu gibanja projektila u sve tri dimenzije (u uzlaznoj putanji, na putu dolje gravitacija će doprinijeti povećanju iznosa komponente brzine u z -smjeru). Otpor u zraku će uvelike ovisiti o obliku tijela, njegovoj masi i načinu na koji se giba, a konkretno u ovom odjeljku uzet ćemo u obzir samo translacijsko gibanje lopte, da bismo pojednostavili situaciju (nema rotacije: $F_M = 0$). Jednadžba gibanja je:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -m\mathbf{g} - \frac{1}{2}\rho AC_D v^2 \hat{\mathbf{v}}, \quad (5.9)$$

što, kada podijelimo na 3 skalarne jednadžbe, daje:

$$m\ddot{x} = -\frac{1}{2}\rho AC_D v_x \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = -\frac{1}{2}\rho AC_D \dot{x} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (5.10)$$

$$m\ddot{y} = -\frac{1}{2}\rho AC_D v_y \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = -\frac{1}{2}\rho AC_D \dot{y} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}, \quad (5.11)$$

$$m\ddot{z} = -mg - \frac{1}{2}\rho AC_D v_z \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = -mg - \frac{1}{2}\rho AC_D \dot{z} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (5.12)$$

Dobivene su tri vezane nelinearne diferencijalne jednadžbe drugog reda za putanju $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Razlika između ovog slučaja i jednostavnog kosog hitca je što se tamo vrlo lako mogu napisati rješenja postavljenih jednadžbi gibanja. Dobivene jednadžbe ne može se analitički riješiti, može se samo naći približno numeričko rješenje [7].

Numeričko rješenje ovog problema nećemo dati ovdje jer ovo je samo poseban slučaj idućeg odjeljka u kojem ćemo uračunati i rotaciju lopte, to jest i Magnusov efekt. Ovime smo pokazali da se uvođenjem i minimalne korekcije dolazi do analitički nerješivih jednadžbi, te koliko zahtjevno može biti opisivati gibanje tijela kroz fluid općenito.

5.3 Jednadžbe gibanja nogometne lopte pri slobodnom udarcu

Do sada smo definirali koordinatni sustav u kojem ćemo promatrati gibanje lopte, izračunali početne uvjete iz proizvoljnih zadanih parametara, te odredili sve relevantne sile koje djeluju na loptu u letu. Jednadžba gibanja realnog slobodnog udarca sastojat će se od 4 različite sile (\mathbf{F}_{MTS} i \mathbf{F}_{MSS} su posljedica istog efekta, ali promatrat ćemo ih odvojeno), te jednadžba gibanja glasi:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_g + \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_{MTS} + \mathbf{F}_{MSS}, \quad (5.13)$$

odnosno, kad uvrstimo sile:

$$m\ddot{\mathbf{r}} = -mg - KC_D v^2 \hat{\mathbf{v}} - KC_{TS} v^2 \hat{\boldsymbol{\theta}} + KC_{SS} v^2 \hat{\boldsymbol{\varphi}}, \quad (5.14)$$

gdje smo uveli pokratu K :

$$K = \frac{1}{2} \rho R^2 \pi. \quad (5.15)$$

Već na prvi pogled vidimo koliko je situacija složenija u odnosu na jednostavni kosi hitac, čak i odnosu na prigušeni! Vektorsku jednadžbu (5.14) možemo rastaviti na 3 skalarnе jednadžbe:

$$m\ddot{x} = -KC_D \dot{r} \dot{x} - KC_{TS} \frac{\dot{r} \dot{x} \dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\omega_{TS}}{|\omega_{TS}|} + KC_{SS} \frac{\dot{r}^2 \dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\omega_{SS}}{|\omega_{SS}|}, \quad (5.16)$$

$$m\ddot{y} = -KC_D \dot{r} \dot{y} - KC_{TS} \frac{\dot{r} \dot{y} \dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\omega_{TS}}{|\omega_{TS}|} - KC_{SS} \frac{\dot{r}^2 \dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \frac{\omega_{SS}}{|\omega_{SS}|}, \quad (5.17)$$

$$m\ddot{z} = -mg - KC_D \dot{r} \dot{z} + KC_{TS} \dot{r} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \frac{\omega_{TS}}{|\omega_{TS}|}, \quad (5.18)$$

gdje je $\dot{r} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$. Dobili smo jednadžbe koje opisuju gibanje nogometne lopte općenito, te je jedini preostali zadatak riješiti dobivene jednadžbe.

Dobivene jednadžbe nisu analitički rješive¹⁵ [7]. Dobiven je sustav od tri vezane nelinearne diferencijalne jednadžbe prvog reda za komponente brzine. S obzirom na to da ne sadrže silu ovisnu o položaju lopte, možemo riješiti dobiveni sustav za komponente brzine, te pronaći $\mathbf{r}(t)$ izravnom integracijom brzine.

Gornje jednadžbe ćemo riješiti numerički, koristeći metodu RK4.

6 Rješenje jednadžbi gibanja

6.1 Runge-Kutta metoda 4. reda

RK4 je numerička metoda rješavanja diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Sve tri dobivene jednadžbe gibanja u suštini su jednadžbe prvog reda za komponente brzine.

Princip je sljedeći [25, 26]; neka je zadana proizvoljna diferencijalna jednadžba:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y, t), \quad (6.1)$$

¹⁵U literaturi postoje polu-analitička rješenja, uz određena pojednostavljenja, [3].

gdje je $y(t)$ ovisna varijabla, t neovisna varijabla, a $f(y, t)$ funkcija $y(t)$ i t . Neka je u početnom trenutku $t = t_0$ i neka je $y(t_0) = y_0$. Potom diskretiziramo (6.1) definicijom derivacije:

$$f(y, t) = \frac{\Delta y(t)}{\Delta t} = \frac{y(t + \Delta t) - y(t)}{\Delta t}. \quad (6.2)$$

Neka je Δt neki malen, ali konačan vremenski korak. Neka je $y(t + \Delta t) = y_{i+1}$, a $y(t) = y_i$, gdje indeks i daje do znanja da se radi o iteracijskom postupku. Funkcija $f(y, t)$ je nagib funkcije $y(t)$ u nekom i -tom trenutku, te ju možemo označiti s k . Tada je:

$$y_{i+1} = y_i + k\Delta t \quad (6.3)$$

vrijednost funkcije $y(t)$ u koraku $i + 1$. Ova iteracijska shema se zove *Eulerova metoda* rješavanja običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda. Međutim, greška se u Eulerovoj metodi može vrlo brzo akumulirati, pa nam treba nešto preciznije, tj. metoda koja će nam dati precizniji iznos nagiba k . Runge-Kutta metoda 4. reda zapravo Eulerovom metodom traži nagib funkcije u četirima različitim točkama — jedna je početna, dvije su u sredini, i posljednja je na kraju intervala, a njihovi su iznosi:

$$k_1 = f(t_i, y_i), \quad (6.4)$$

$$k_2 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \Delta t \frac{k_1}{2}\right), \quad (6.5)$$

$$k_3 = f\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, y_i + \Delta t \frac{k_2}{2}\right), \quad (6.6)$$

$$k_4 = f(t_i + \Delta t, y_i + \Delta t k_3). \quad (6.7)$$

Konačni iznos y_{i+1} je:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)\Delta t, \quad (6.8)$$

gdje je član uz Δt težinski prosjek svih četiriju nagiba.

Ako je y_i vrijednost funkcije $y(t)$ u vremenu $t = t_0$, tada je y_{i+1} vrijednost funkcije $y(t)$ u vremenu $t = t_0 + \Delta t$. Kad smo našli y_{i+1} , tada ona postaje početni iznos funkcije i pomoću nje tražimo iznos funkcije y u vremenu $t = t_0 + 2\Delta t$ itd. Ova iteracijska metoda definira Runge-Kutta metodu 4. reda.

6.2 Rješavanje putanje slobodnog udarca

6.2.1 Rješenje za komponente brzine

Funkcije $y(t)$ iz prethodnog odjeljka su komponente brzine¹⁶ v_x , v_y i v_z . Početne vrijednosti ovih komponenti generiramo parametrima $v_0, \vartheta, \vartheta', \varphi$ i φ' . Funkcije f iz prethodnog poglavlja su funkcije ubrzanja koje su zadane jednadžbama (5.16)-(5.18) podijeljenih s masom lopte m . Neka su $\ddot{x} = a_x, \ddot{y} = a_y$ i $\ddot{z} = a_z$. Sve tri komponente ubrzanja su funkcije svih triju komponenti brzine i vremena, tj. $a_{x,y,z} \equiv a_{x,y,z}(v_x, v_y, v_z, t)$. Postupak rješavanja je identičan za sve tri komponente brzine, pa ćemo tražiti rješenje samo za komponentu v_x ; ostale komponente se rješavaju potpuno analogno. Rješavamo diferencijalnu jednadžbu:

$$a_x(t, v_x, v_y, v_z) = \frac{dv_x}{dt}, \quad (6.9)$$

koju prebacujemo u diskretizirani iteracijski oblik:

$$a_x(t_i, v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i}) = \frac{v_{x,i+1} - v_{x,i}}{\Delta t} \quad (6.10)$$

Koeficijenti nagiba su:

$$k_{1vx} = a_x(t_i, v_{x,i}, v_{y,i}, v_{z,i}), \quad (6.11)$$

gdje su $v_{x,i}, v_{y,i}$ i $v_{z,i}$ i -te iteracije komponenti brzine:

$$k_{2vx} = a_x\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, v_{x,i} + \Delta t \frac{k_{1vx}}{2}, v_{y,i} + \Delta t \frac{k_{1vy}}{2}, v_{z,i} + \Delta t \frac{k_{1vz}}{2}\right), \quad (6.12)$$

$$k_{3vx} = a_x\left(t_i + \frac{\Delta t}{2}, v_{x,i} + \Delta t \frac{k_{2vx}}{2}, v_{y,i} + \Delta t \frac{k_{1vy}}{2}, v_{z,i} + \Delta t \frac{k_{1vz}}{2}\right), \quad (6.13)$$

$$k_{4vx} = a_x(t_i + \Delta t, v_{x,i} + \Delta t k_{3vx}, v_{y,i} + \Delta t k_{3vy}, v_{z,i} + \Delta t k_{3vz}), \quad (6.14)$$

gdje se koeficijenti nagiba k_{jvy} i k_{jvz} , $j = 1, 2, 3, 4$, dobiju potpuno analogno i istodobno s računanjem pripadnih koeficijenata za komponentu v_x . Konačno će komponenta brzine v_x u nekoj iteraciji $i + 1$ biti, prema (6.8):

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} + \frac{1}{6}(k_{1vx} + 2k_{2vx} + 2k_{3vx} + k_{4vx})\Delta t. \quad (6.15)$$

Numeričke metode funkcioniraju tako da daju vrijednost tražene funkcije u svakom vremenskom intervalu Δt . Ako postavimo $\Delta t = 0.01$ s, a let lopte traje otprilike $t = 5$ s, dobit ćemo 500 različitih iznosa komponenti brzine, po jedan za svaki korak iteracije. Skup svih iznosa komponente v_x predstavlja *numeričko rješenje jednadžbe* (6.9), tj. funkciju $v_x(t)$. Ovaj je postupak prilično nezahvalan za ručno računanje, tako da ćemo ovaj algoritam

¹⁶Funkcije komponenti brzine i koordinata položaja su funkcije vremena, pa bi ih bilo točnije pisati kao $v_x(t)$, no to u velikom dijelu ostatka teksta nećemo napisati zbog preglednosti.

implementirati u *Python*.

6.2.2 Rješenje za putanju lopte

S obzirom na to da smo gornjom metodom pronašli funkciju $v_x(t)$, istim pristupom možemo naći i funkciju $x(t)$ rješavanjem diferencijalne jednadžbe:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad (6.16)$$

odnosno u diskretiziranom obliku:

$$v_{x,i} = \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t}, \quad (6.17)$$

gdje su $v_{x,i}$ koeficijenti nagiba funkcije u i -tom vremenskom koraku. Potpuno analogno nalaženju koeficijenata nagiba za komponente brzine dobiju se četiri koeficijenta nagiba funkcije $x(t)$ u i -tom trenutku:

$$k_{1x} = v_x(t_i), \quad (6.18)$$

$$k_{2x} = v_x(t_i) + \Delta t \frac{k_{1x}}{2}, \quad (6.19)$$

$$k_{3x} = v_x(t_i) + \Delta t \frac{k_{2x}}{2}, \quad (6.20)$$

$$k_{4x} = v_x(t_i) + k_{3x} \Delta t, \quad (6.21)$$

s konačnim iteracijskim rješenjem:

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_{1x} + 2k_{2x} + 2k_{3x} + k_{4x})\Delta t. \quad (6.22)$$

Skup svih iteracija dobivenih jednadžbom (6.22) čini *numeričko rješenje jednadžbe* (6.16), odnosno funkciju $x(t)$. Nećemo raspisivati cijeli postupak za $y(t)$ i $z(t)$ jer se dobiju na potpuno analogan način kao i $x(t)$.

Konačno je rješenje za putanju lopte $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \hat{\mathbf{x}} + y(t) \hat{\mathbf{y}} + z(t) \hat{\mathbf{z}}. \quad (6.23)$$

Određivanjem funkcije (6.23) *ostvaren je cilj ovog rada*. Ona daje položaj nogometne lopte u svakom trenutku nakon izvođenja slobodnog udarca. Naravno, najbolju predodžbu kvalitete rješenja dobit ćemo grafičkim prikazom putanje $\mathbf{r}(t)$.

6.3 Princip računalnog rješavanja jednadžbi gibanja

Dobivene jednadžbe gibanja rješavat ćemo numerički metodom RK4 u *Pythonu*, te potom nacrtati rješenja modulom *Matplotlib* [27]. Cijeli kôd nalazi se u *Dodatku A*.

Najprije se unose koordinate lopte u odnosu na gol s_x i s_y , te dimenzije obrambenog zida H i L . Udaljenost obrambenog zida je za svaki položaj lopte jednaka propisanoj minimalnoj udaljenosti od mjesta izvođenja slobodnog udarca, $D = 9.15$ m [29]. Zatim u program unosimo ranije opisane ulazne parametre $v_0, \vartheta, \vartheta', \varphi$ i φ' . Iz tih parametara program pomoću izraza (3.7) i (3.10) računa početnu translacijsku i kutne brzine. Translacijsku brzinu rastavlja na komponente. U programu se zatim definiraju funkcije ubrzanja a_x, a_y i a_z , a početna je brzina rastavljena na komponente upravo zato da bi program izračunao ubrzanje u sva tri smjera u početnom trenutku. Posljednja stvar koju određujemo je vremenski interval Δt , koji bi za kvalitetnije rezultate trebao biti vrlo mali broj (postaviti ćemo $\Delta t = 0.001$ s)

Potom kreće iteracijsko rješavanje jednadžbi za komponente brzine po receptu danom u izrazima (6.11)-(6.15). Program istovremeno, čim izračuna komponente brzine nakon vremenskog intervala Δt , računa koordinate položaja u sva tri smjera po izrazima (6.18)-(6.22), te iznose komponenti brzine i koordinata položaja sprema po redu u zasebne liste. Poslije svake odrađene iteracije program provjerava iduće:

1. uvjete prebacivanja obrambenog zida koji su postavljeni u drugom poglavlju; ako nijedan od navedenih uvjeta nije ispunjen, program prekida rješavanje jednadžbi — lopta je udarila u zid,
2. uvjet $z(t) > 0$; u trenutku kada lopta pada na pod, njena z koordinata je jednaka nuli. Kako se lopta ne bi spustila ispod razine $z = 0$, program u tom trenutku mijenja predznak trenutne komponente brzine u z smjeru, odnosno imitira odbijanje lopte o teren¹⁷,
3. uvjet $y(t) > s_y$; jednom kada se y komponenta putanje izjednači sa s_y , program prekida rješavanje jednadžbi jer u tom trenutku lopta napušta igralište ili, u idealnom slučaju, ulazi u branku.

Nakon što se iz bilo kojeg od navedenih razloga prekida praćenje gibanja lopte, program vraća 4 liste, od kojih 3 sadrže koordinate položaja u svim prostornim smjerovima u svakom trenutku (do na Δt), i jedna je vremenska lista koja računa vrijeme koje prolazi dok se lopta giba. Program također vraća koordinatu posljednje točke putanje, da bismo lakše vidjeli gdje je lopta završila. Ove liste su tražena *numerička rješenja jednadžbi gibanja* (5.16)-(5.18).

S obzirom na to da su liste komponenti brzine bile samo međukorak pomoću kojeg smo tražili putanju lopte, one nam na kraju nisu ni potrebne, jer nas je zanimala isključivo putanja lopte

¹⁷Ako se mijenja samo predznak, ali ne i iznos, podrazumijeva se elastični sudar lopte u teren, što, naravno, nije slučaj u stvarnosti, ali za potrebe ovog rada zanemarit ćemo gubitak kinetičke energije pri udaru lopte u teren.

(iako se od programa mogu zatražiti i te liste ako su od interesa).

Kako bismo stekli vizualni dojam rješenja, pomoću dobivenih listi nacrtat ćemo putanju lopte na nogometnom terenu napravljenom u modulu *Matplotlib*. Za dani početni položaj lopte možemo zadati programu da nasumično bira početne uvjete (uz ograničenja — sigurno nas ne zanima slučaj kad je početna brzina u smjeru vlastite branke) ili ih možemo po osjećaju prilagođavati da bismo dobili putanju čija je krajnja točka u protivničkoj branici. Postoji bezbroj načina kako se možemo igrati s opisanim programom, simuliranje izvođenja slobodnog udarca van stadiona, traženje početnih uvjeta uz pomoć kojih ćemo pucanjem prema naprijed zakrenuti loptu prema vlastitoj branici, mijenjanje gravitacijskog polja u kojem se odvija gibanje, dodavanje proizvoljnog električnog i magnetskog polja i računanje njihovih efekata u jednadžbe gibanja, računanje inercijskih sila ako ubrzamo rotaciju Zemlje, *sve to pretvarajući se da se pritom ne mijenjaju svojstva zraka*. Međutim, *igru* na stranu, glavni je cilj bio kvalitativno i kvantitativno opisati *realno* gibanje nogometne lopte pri slobodnom udarcu. U idućem odjeljku ćemo priložiti grafička rješenja za nekoliko različitih slučajeva i diskutirati rješenja.

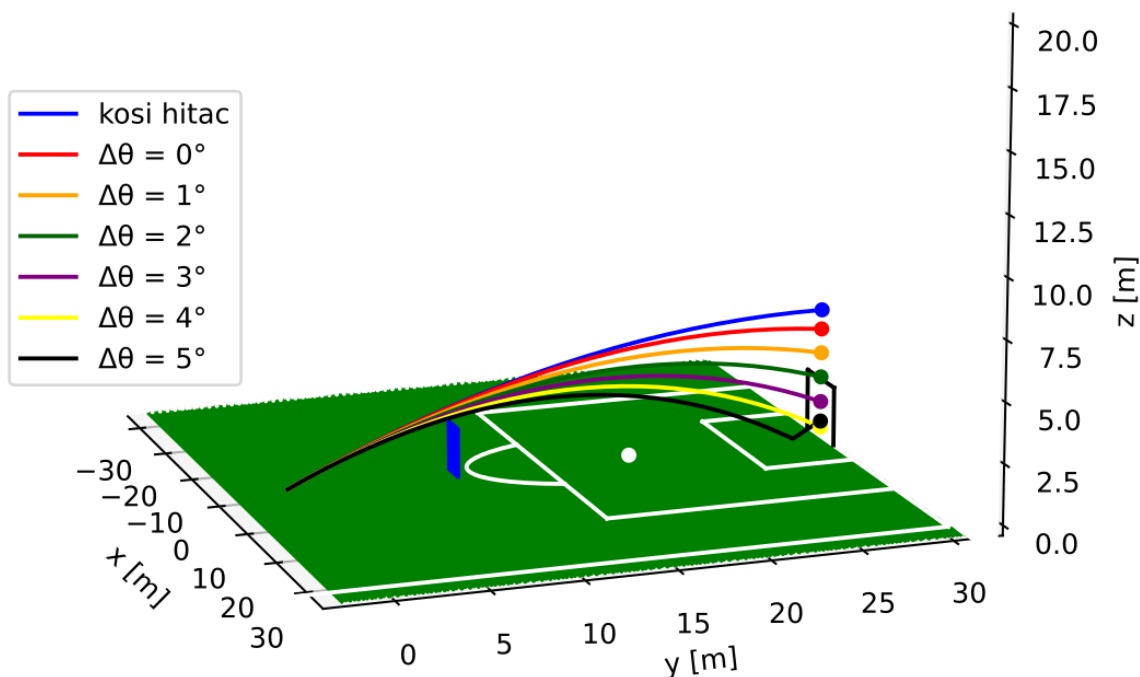
6.4 Grafički prikaz rješenja

Na Slici 8 prikazano je nekoliko putanja za različite intenzitete *topspina*, i usporedba s kosim hitcem. Očekivano je da jednostavni kosi hitac ima najveći domet, tj. imao bi najveći domet da pustimo gibanje da traje do trenutka kada putanje prvi put udare u tlo. To se može i vidjeti na Slici 8. Putanje se gotovo savršeno podudaraju na početku gibanja, a onda sve više počinju odudarati od kosog hitca, i brže se zakreću prema dolje, što je i očekivano s obzirom na prisutnost sile otpora zraka.

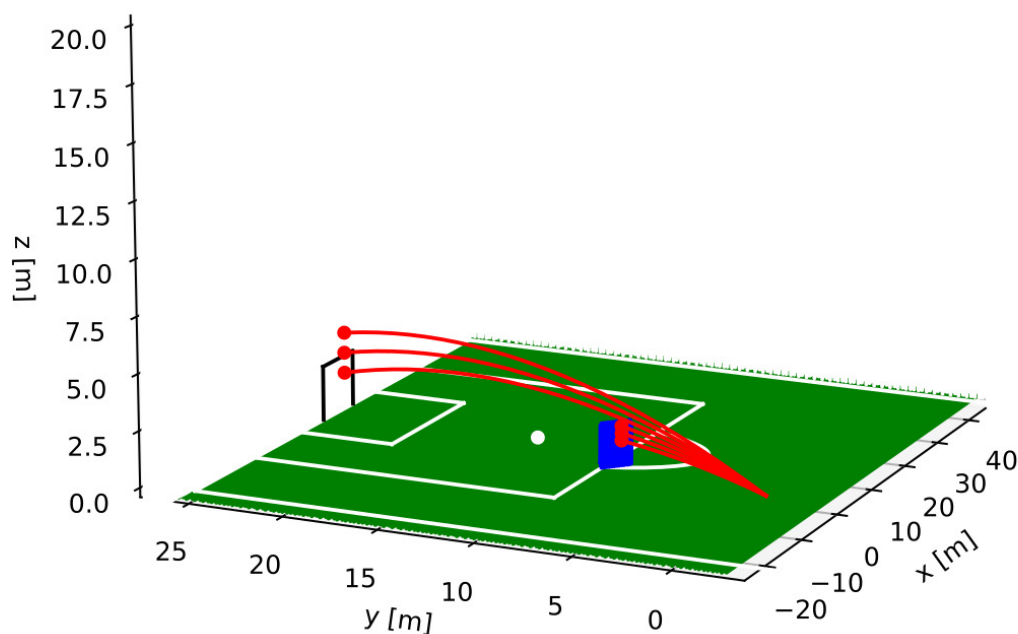
Najvažniji rezultat na Slici 8 je upravo taj da se putanja brže spušta prema terenu povećanjem $\Delta\vartheta$. To je glavna karakteristika *topspina*, i upravo se tako lopta i ponaša u stvarnosti. Što je veći $\Delta\vartheta$, to će *topspin* biti intenzivniji i putanja će se sve brže spuštati prema terenu. Možemo vidjeti da je već posljednja nacrtana putanja udarila u teren pred brankom (što vrataru zna biti jako teško za obraniti), te bismo daljnjim povećavanjem $\Delta\vartheta$ došli u situaciju da bi lopta pala prije nego što bi preletjela zid.

Na Slici 9 provjeravana je i učinkovitost obrambenog zida modeliranog u poglavlju 2. Putanja lopte u rasponu definiranom u (2.7) treba ispuniti ili uvjet $z > H$ ili uvjet dan izrazom (2.9). Program je napravljen tako da prekida putanju lopte ako nijedan od uvjeta za zaobilazak zida nije ispunjen. Može se jako dobro vidjeti da je svaka lopta koja se nalazi ispod plavog pravokutnika zaustavljena u trenutku kad je lopta udarila u zid, a sve ostale putanje, one koje su ispunile uvjete, su neometano prošle dalje prema branici. Ovime je potvrđena kvaliteta modeliranog obrambenog zida.

Na Slikama 10 i 11 prikazano je nekoliko različitih putanja lopte projiciranih u x, y -ravninu

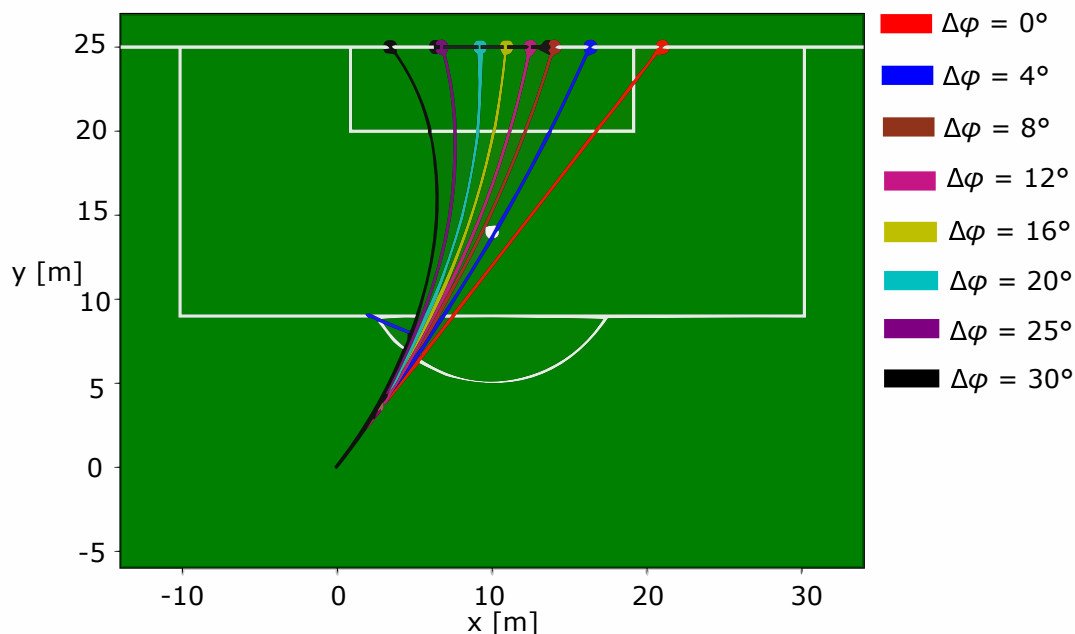


Slika 8: Usporedba putanja različitih topspinova i kosog hitca. U ovom je kontekstu $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta'$. Vektor udaljenosti od branke je $\mathbf{s} = (0 \text{ m}, 30 \text{ m})$. Za sve putanje je $v_0 = 30 \text{ ms}^{-1}$, $\vartheta = 70^\circ$ i $\varphi = \varphi' = 90^\circ$.

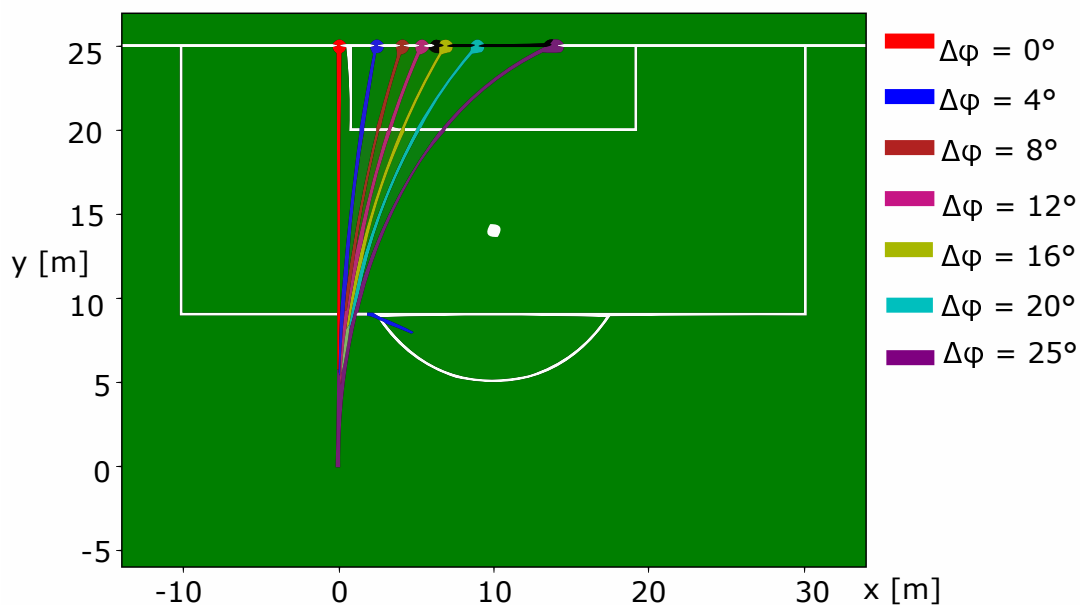


Slika 9: Učinkovitost obrambenog zida ($H = 2 \text{ m}$, $L = 3 \text{ m}$) testirana je ispaljivanjem lopte s položaja koji odgovara $\mathbf{s} = (10 \text{ m}, 25 \text{ m})$. Ispaljivane su lopte pod različitim kutevima ϑ , svaka s topspinom koji odgovara $\Delta\vartheta = 2^\circ$. Za sve putanje vrijedi $\varphi = 60^\circ$, $\Delta\varphi = 0^\circ$

za različite intenzitete *sidespina*. Ovdje su komponente terena u realnom mjerilu. Lako se primjeti da je jači “felš” što je veći $\Delta\varphi$, što je i očekivano. Iz slike se može iščitati još jedna



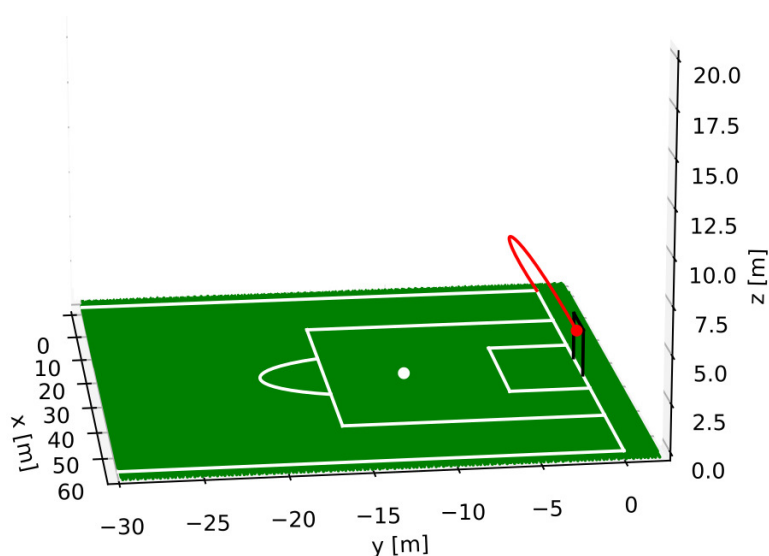
Slika 10: Prikazano je nekoliko putanja sa različitim sidespinom, da bi se usporedio intenzitet zakretanja smjera lopte. Položaj lopte odgovara $s = (10 \text{ m}, 25 \text{ m})$. Za sve putanje vrijedi $v_0 = 30 \text{ ms}^{-1}$, $\vartheta = \vartheta'$, te $\varphi = 50^\circ$. Vrijednost $\Delta\varphi$ prikaza je u legendi.



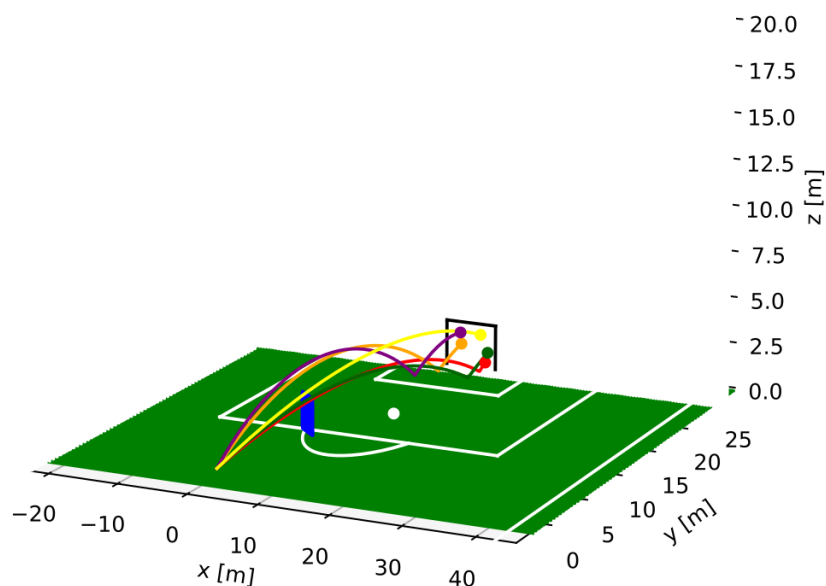
Slika 11: Nekoliko putanja za koje vrijede skoro svi isti parametri kao i za one na Slici 13, razlika je što je ovdje $\varphi = 90^\circ$.

zanimljivost: putanja se počinje naglije kriviti što je bliže branci, baš kao što se i ona slavna Carlosova lopta u zadnji tren zakrenila u branku. Ako pogledamo izraz (4.12), lako uočimo da je C_S veći što je brzina lopte manja, odakle možemo zaključiti da će se putanja lopte početi intenzivnije zakretati smanjenjem brzine.

Rezultati na Slikama 8, 9 i 10 se u potpunosti slažu s onim što bismo očekivali kod realnog slobodnog udarca. Dakle, jednačbe gibanja (5.16)-(5.18) s vrlo zadovoljavajućom točnošću doista opisuju kako se giba nogometna lopta pri slobodnom udarcu. Mogli bismo nacrtati na desetke različitih scenarija koje ove jednačbe mogu prikazati, ali prikazat ćemo samo dvije zanimljive stvari koje se mogu dobiti uz pomoć danih jednačbi i računalnog programa. Prva je putanja lopte nakon izvođenja kornera, a druga je prikaz nekoliko različitih putanja dobivenih nasumičnim odabirom ulaznih parametara. Detalji vezani uz oba problema nalaze se u opisima pripadnih slika, na Slici 13 i 14.



Slika 12: Rješenje putanje poslije izvođenja kornera. Položaj lopte odgovara $\mathbf{s} = (34 \text{ m}, 0 \text{ m})$, početna brzina je $v_0 = 30 \text{ ms}^{-1}$, $\vartheta = \vartheta' = 65^\circ$, $\varphi = -20^\circ$, $\varphi' = -35^\circ$. Lopta je završila u branci. Pogodak iz kornera jedna je od najsenzacionalnijih pojava na nogometnim terenima, čak daleko impresivnija od bilo kakvog gola iz slobodnog udarca, a za uspješnu putanju i ovdje je zaslužan sidespin.



Slika 13: Pet različitih putanja čija je završna točka u branci, dobivenih pomoću biblioteke NumPy i funkcije `random` koja generira nasumične ulazne parametre nakon što unesemo početni položaj [31]. Međutim, nije pametno postaviti proizvoljan raspon vrijednosti koje ulazni parametri mogu nasumično poprimiti. Tako su za dani položaj lopte na slici, $s = (10 \text{ m}, 25 \text{ m})$, rasponi nasumičnih vrijednosti bili $v_0 \in [25 \text{ ms}^{-1}, 35 \text{ ms}^{-1}]$, $\vartheta \in [65^\circ, 75^\circ]$, $\vartheta' \in [\vartheta - 5^\circ, \vartheta]$. Za φ je postavljeno alterniranje raspona između $\varphi \in [30^\circ, 70^\circ]$ i $\varphi \in [90^\circ, 110^\circ]$, kojima je redom odgovaralo $\varphi' \in [\varphi - 20^\circ, \varphi]$ i $[\varphi, \varphi + 30^\circ]$. U ovoj simulaciji su osim uvjeta za prelazak obrambenog zida iskorišteni uvjeti postavljeni izrazima (2.3) i (2.4). Program ide u petlju gdje se nasumično i opetovano zadaju početni uvjeti, a staje s radom kada su ispunjeni uvjeti ulaska lopte u branku, te vraća potrebne liste za crtanje putanje. Ovo je ponovljeno 5 puta, i tako je dobiveno gornjih 5 putanja. Cilj je pokazati da ne postoji samo jedan način da postići gol iz dane pozicije — opcije su gotovo neograničene.

7 Zaključak

Glavna motivacija ovog rada bila je na teorijski način opisati gibanje nogometne lopte pri slobodnom udarcu. Dobivena rješenja se odlično podudaraju s onim što bismo očekivali u stvarnosti. Od najvećeg interesa bilo je pokazati utjecaj Magnusove sile na putanju lopte, odnosno pokazati da kad lopta u letu rotira, njena putanja biva zakrivljena pod utjecajem te sile, što se i vidi iz priloženih grafičkih rješenja. Računalni program koji je napravljen u sklopu rada može poslužiti za proučavanje gibanja nogometne lopte i u ostalim segmentima igre (ispucavanje vratara, jedanaesterci, korneri, *centaršuti*¹⁸). Uz određene preinake može se koristiti i za opisivanje bilo koje druge sferne igraće lopte. Naravno, ovaj model ne može savršeno opisati gibanje lopte zbog uvedenih pojednostavljenja, koja uključuju zanemarivanje elastičnosti same lopte, pretpostavljanje idealno glatke lopte, promatranje početnog zaleta na loptu kao da je koncentriran u jednoj točki, aproksimiranje iznosa aerodinamičkih koeficijenata otpora i uzgona, uvjet okomitosti translacijske i kutne brzine tijekom cijelog leta lopte itd. Da bi se sve navedeno moglo uzeti u obzir potrebna je eksperimentalna analiza koja

¹⁸*Centaršut* je u nogometu visoko ubacivanje lopte u kazneni prostor.

izlazi izvan okvira ovoga rada. No, bez obzira na relativno jednostavnu prirodu modela, dobiveni rezultati su i više nego zadovoljavajući, a posebno koristan i zabavan može biti program koji omogućuje nasumično traženje ulaznih parametara koji zadovoljavaju uvjete postignutog pogotka, primjerice za analiziranje na koje se sve načine može postići pogodak iz bilo koje pozicije. Mnogo je još neistraženih načina na koje možemo prilagoditi napravljeni program, ali i u trenutnom stanju bit će, skupa s cijelom uključenom fizikom, izrazito koristan svima koji su zainteresirani za proučavanje gibanja nogometne lopte pri slobodnom udarcu.

8 Literatura

- [1] KonanTheBarbarian, *Roberto Carlos Incredible Free Kick (France 1997) (Sky Sports English Commentary) [HD]*, URL: <https://www.youtube.com/watch?v=crKwlbwvr88&pp=ygUYcm9iZXJ0byBjYXJsb3MgZnJlZSBraWNr>, (9. 7. 2023.) .
- [2] Chalkdust magazine, *Football free kicks... taken by Newton*, URL: <https://chalkdustmagazine.com/blog/free-kicks/> (15. 6. 2023.).
- [3] T. G. Myers, S. L. Mitchell. 2013. *A mathematical analysis of the motion of an in-flight soccer ball*. Članak. Sports Engineering.
- [4] T. K. Sengupta, S. B. Talla. 2004. *Robins-Magnus Effect: A Continuing Saga*. Članak. Dept. of Aerospace Engineering. poglavlje 1.
- [5] J. D. Anderson, Jr. 2017. *Fundamentals of aerodynamics, 6th Edition*. McGraw Hill Education. 2 Penn Plaza, New York.
- [6] Glenn Research Center, *Drag equation*, URL: <https://www1.grc.nasa.gov/beginners-guide-to-aeronautics/drag-equation/> (6. 6. 2023.)
- [7] J. R. Taylor. 2005. *Classical Mechanics*. University Science Books. Mill Valley, California.
- [8] R. D. Mehta, J. M. Pallis. 2001. *Sports ball aerodynamics: Effect of velocity, spin, surface and roughness*. Članak. University of Bridgeport, Connecticut.
- [9] Y. Nakayama. 2018. *Introduction to Fluid Mechanics, 2nd Edition*. Yokendo Co. Ltd. Tokyo.
- [10] *Ball (association football)*, URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Ball_\(association_football\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Ball_(association_football)) (20. 6. 2023.).
- [11] *FIFA Laws of the Game*, URL: <https://www.itsagoal.net/fifa-laws-of-the-game/> (17. 6. 2023.).
- [12] J. Webber, *How Backspin and Sidespin Affect a Golf Ball*, URL: <https://outofboundsgolf.com/how-backspin-and-sidespin-affect-a-golf-ball/> (21. 6. 2023.).
- [13] Hrvatski jezični Portal, URL: https://hjp.znanje.hr/index.php?show=search_by_id&id=e15IWRE%3D (16. 6. 2023.).
- [14] G. Rubiono, I. Kiram. *The Effect of Foot Angle in Soccer Ball Kick Due to Ball Trajectory*. Članak. Journal of Physical Education, Health and Sport. Izdanje 5., Broj 2. (2018).

- [15] S. Hong i dr. 2013. *Characteristics of ball impact of curve shot in soccer*. Članak. Elsevier. University of Tsukuba. Tsukuba.
- [16] Leksikografski Zavod Miroslav Krleža, *Viskoznost, definicija*, URL: <https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=64830> (20. 6. 2023.).
- [17] S. Hörzer i dr. 2010. *Simulation of spinning soccer ball trajectories influenced by latitude*. Članak. Elsevier. Vienna.
- [18] J. Wesson. 2002. *The Science of Soccer*. Institute of Physics, Dirac House, Temple Back, Bristol.
- [19] J. E. Goff, M. J. Carre. 2012. *Investigations into soccer aerodynamics via trajectory analysis and dust experiments*. Članak. Elsevier. University of Massachusetts. Lowell.
- [20] Magnus effect, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Magnus_effect, (20. 6. 2023.).
- [21] I. Griffiths, C. Evans, N. Griffiths. 2005. *Tracking the flight of a spinning football in three dimensions*. Članak. Measurement Science and Technology. University of Wales Swansea. Swansea.
- [22] D. Beck. 2018. *Magnus force acting upon a rotating sphere passing in an incompressible viscous flow*. Završni rad. Charles University Prague. Prag.
- [23] A. Volkov. 2009. *Numerical Modelling of the Magnus Force and the Aerodynamic Torque on a Spinning Sphere in Transitional Flow*. Članak. Material science and engineering department, University of Virginia. Charlottesville.
- [24] Glenn Research Center, *Forces on a Soccer Ball*, URL: <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/socforce.html> (20. 6. 2023.)
- [25] V. Pezelj. 2022. *Razvoj jednostavnog algoritma za rekonstrukciju putanje elektrona u dvije dimenzije*. Završni rad. Prirodoslovno-matematički fakultet u Splitu. Split. 5 str.
- [26] Runge-Kutta methods, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Runge%E2%80%93Kutta_methods, (21. 6. 2023)
- [27] Modul Matplotlib, URL: <https://matplotlib.org/> (21. 6. 2023.).
- [28] T. Asai i dr. 2007. *Fundamental aerodynamics of the soccer ball*. Članak. Institute of Health & Sports Science, University of Tsukuba. Tsukuba.
- [29] Unisport Football Dictionary, *Free Kick Wall*, URL: <https://www.unisportstore.com/faq/wiki/free-kick-wall/> (21. 6. 2023.).
- [30] Football pitch, URL: https://en.wikipedia.org/wiki/Football_pitch (22. 6. 2023.).

[31] Modul Numpy, URL: <https://numpy.org/> (23. 6. 2023.).

A Kod korištenog računalnog programa

```

import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
def rk4(sx,sy,v0,theta1,fi1,theta_1,fi_1, -
D=9.15,H=2,L=3,N=5000,t0=0,tN=5):
    m = 0.45
    R = 0.11
    ro = 1.25
    g = -9.81
    theta = theta1*np.pi/180
    fi = fi1*np.pi/180
    theta_ = theta_1*np.pi/180
    fi_ = fi_1*np.pi/180
    v0T = v0*np.sin(theta_)*np.cos(fi_)*np.sin(theta)*np.cos(fi) -
+v0*np.sin(theta_)*np.sin(fi_)*np.sin(theta)*np.sin(fi) -
+v0*np.cos(theta_)*np.cos(theta)
    v0Tx = v0T*np.sin(theta)*np.cos(fi)
    v0Ty = v0T*np.sin(theta)*np.sin(fi)
    v0Tz = v0T*np.cos(theta)
    v0R_theta = v0*np.sin(theta_)*np.cos(fi_)*np.cos(theta)*np.cos(fi) -
+v0*np.sin(theta_)*np.sin(fi_)*np.cos(theta)*np.sin(fi) -
-v0*np.cos(theta_)*np.sin(theta)
    v0R_fi = -v0*np.sin(theta_)*np.cos(fi_)*np.sin(fi) -
+ v0*np.sin(theta_)*np.sin(fi_)*np.cos(fi)
    w0_TS = v0R_theta/R
    w0_SS = v0R_fi/R
    dt = (tN-t0)/N
    x = [0]
    y = [0]
    z = [0]
    vx = [v0Tx]
    vy = [v0Ty]
    vz = [v0Tz]
    t = [t0]
    C = ro*R**2*np.pi/(2*m)
    SpM1 = abs(R*w0_TS/v0T)
    SpM2 = abs(R*w0_SS/v0T)
    Dmax = np.sqrt(D**2 + (L/2)**2)
    alfa = np.arctan(abs(L/(2*D)))
    beta = np.arctan(abs(sy/sx))
    abpos = alfa + beta
    abneg = beta - alfa
    def ax(vx,vy,vz,t):
        if SpM1 >= 0.1 and SpM2 >= 0.1:
            O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---

```

```

np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vx
M1 = -C*(0.77*R*abs(w0_TS)/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
*vz*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2)) ---
*(w0_TS/abs(w0_TS))
M2 = C*(0.77*R*abs(w0_SS)/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
*vy*(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2)) ---
*(w0_SS/abs(w0_SS))
elif SpM1 >= 0.1 and SpM2 < 0.1:
O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vx
M1 = -C*(0.77*R*abs(w0_TS)/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
*vz*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2)) ---
*(w0_TS/abs(w0_TS))
M2 = C*(1.93*R*w0_SS/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
*vy*(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2))
elif SpM1 < 0.1 and SpM2 >= 0.1:
O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vx
M1 = -C*(1.93*R*w0_TS/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
*vz*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2))
M2 = C*(0.77*R*abs(w0_SS)/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
*vy*(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2)) ---
*(w0_SS/abs(w0_SS))
elif SpM1 < 0.1 and SpM2 < 0.1:
O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vx
M1 = -C*(1.93*R*w0_TS/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
*vz*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2))
M2 = C*(1.93*R*w0_SS/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
*vy*(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2))
return O+M1+M2
def ay(vx,vy,vz,t):
if SpM1 >= 0.1 and SpM2 >= 0.1:
O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vy
M1 = -C*(0.77*R*abs(w0_TS)/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
*vz*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2)) ---
*(w0_TS/abs(w0_TS))
M2 = -C*(0.77*R*abs(w0_SS)/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
*vz*(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2)) ---
*(w0_SS/abs(w0_SS))
elif SpM1 >= 0.1 and SpM2 < 0.1:
O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vy
M1 = -C*(0.77*R*abs(w0_TS)/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
*vy*vz*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2)) ---
*(w0_TS/abs(w0_TS))

```

```

M2 = -C*(1.93*R*w0_SS/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
      *vx*(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2))
elif SpM1 < 0.1 and SpM2 >= 0.1:
    O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
        np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vy
    M1 = -C*(1.93*R*w0_TS/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
        *vy*vz*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2))
    M2 = -C*(0.77*R*abs(w0_SS)/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
        *vx*(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2)) ---
        *(w0_SS/abs(w0_SS))
elif SpM1 < 0.1 and SpM2 < 0.1:
    O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
        np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vy
    M1 = -C*(1.93*R*w0_TS/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
        *vy*vz*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2))
    M2 = -C*(1.93*R*w0_SS/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
        *vx*(vx**2+vy**2+vz**2)/(np.sqrt(vx**2+vy**2))
return O+M1+M2
def az(vx,vy,vz,t):
    if SpM1 >= 0.1 and SpM2 >= 0.1:
        O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
            np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vz
        M1 = C*(0.77*abs(w0_TS)*R/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
            *np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*np.sqrt(vx**2+vy**2) ---
            *(w0_TS/abs(w0_TS))
    elif SpM1 >= 0.1 and SpM2 < 0.1:
        O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
            np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vz
        M1 = C*(0.77*abs(w0_TS)*R/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12) ---
            *np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*np.sqrt(vx**2+vy**2) ---
            *(w0_TS/abs(w0_TS))
    elif SpM1 < 0.1 and SpM2 >= 0.1:
        O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
            np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vz
        M1 = C*(1.93*w0_TS*R/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
            *np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*np.sqrt(vx**2+vy**2)
    elif SpM1 < 0.1 and SpM2 < 0.1:
        O = -C*(0.8*R*np.sqrt(w0_TS**2+w0_SS**2)/ ---
            np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)+0.12)*np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*vz
        M1 = C*(1.93*w0_TS*R/np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)) ---
            *np.sqrt(vx**2+vy**2+vz**2)*np.sqrt(vx**2+vy**2)
    return g+O+M1
for i in range(1,N):
    t.append(t[i-1]+dt)
    kvx1 = ax(vx[i-1],vy[i-1],vz[i-1],t[i-1])
    kvy1 = ay(vx[i-1],vy[i-1],vz[i-1],t[i-1])
    kvz1 = az(vx[i-1],vy[i-1],vz[i-1],t[i-1])

```

```

kx1 = vx[i-1]
ky1 = vy[i-1]
kz1 = vz[i-1]
kvx2 = ax(vx[i-1]+kvx1*dt/2,vy[i-1]+kvy1*dt/2, ---
vz[i-1]+kvz1*dt/2,t[i-1]+dt/2)
kvy2 = ay(vx[i-1]+kvx1*dt/2,vy[i-1]+kvy1*dt/2, ---
vz[i-1]+kvz1*dt/2,t[i-1]+dt/2)
kvz2 = az(vx[i-1]+kvx1*dt/2,vy[i-1]+kvy1*dt/2, ---
vz[i-1]+kvz1*dt/2,t[i-1]+dt/2)
kx2 = (vx[i-1]+kvx1*dt/2)
ky2 = (vy[i-1]+kvy1*dt/2)
kz2 = (vz[i-1]+kvz1*dt/2)
kvx3 = ax(vx[i-1]+kvx2*dt/2,vy[i-1]+kvy2*dt/2, ---
vz[i-1]+kvz2*dt/2,t[i-1]+dt/2)
kvy3 = ay(vx[i-1]+kvx2*dt/2,vy[i-1]+kvy2*dt/2, ---
vz[i-1]+kvz2*dt/2,t[i-1]+dt/2)
kvz3 = az(vx[i-1]+kvx2*dt/2,vy[i-1]+kvy2*dt/2, ---
vz[i-1]+kvz2*dt/2,t[i-1]+dt/2)
kx3 = (vx[i-1]+kvx2*dt/2)
ky3 = (vy[i-1]+kvy2*dt/2)
kz3 = (vz[i-1]+kvz2*dt/2)
kvx4 = ax(vx[i-1]+kvx3*dt,vy[i-1]+kvy3*dt, ---
vz[i-1]+kvz3*dt,t[i-1]+dt)
kvy4 = ay(vx[i-1]+kvx3*dt,vy[i-1]+kvy3*dt, ---
vz[i-1]+kvz3*dt,t[i-1]+dt)
kvz4 = az(vx[i-1]+kvx3*dt,vy[i-1]+kvy3*dt, ---
vz[i-1]+kvz3*dt,t[i-1]+dt)
kx4 = (vx[i-1]+kvx3*dt)
ky4 = (vy[i-1]+kvy3*dt)
kz4 = (vz[i-1]+kvz3*dt)
vx.append(vx[i-1]+dt*(kvx1+2*kvx2+2*kvx3+kvx4)/6)
vy.append(vy[i-1]+dt*(kvy1+2*kvy2+2*kvy3+kvy4)/6)
vz.append(vz[i-1]+dt*(kvz1+2*kvz2+2*kvz3+kvz4)/6)
x.append(x[i-1]+dt*(kx1+2*kx2+2*kx3+kx4)/6)
y.append(y[i-1]+dt*(ky1+2*ky2+2*ky3+ky4)/6)
z.append(z[i-1]+dt*(kz1+2*kz2+2*kz3+kz4)/6)
X = x[i-1]+dt*(kx1+2*kx2+2*kx3+kx4)/6
Y = y[i-1]+dt*(ky1+2*ky2+2*ky3+ky4)/6
Z = z[i-1]+dt*(kz1+2*kz2+2*kz3+kz4)/6
r = np.sqrt(X**2 + Y**2)
psi = np.arctan(Y/X)
if r > D and r < Dmax and Z < H and psi ---
< abpos and psi > abneg:
    break
if Z < -0.01:
    okret = vz[i]
    vz.pop()

```

```
        vz.append(-okret)
    if Y > (sy+0.02):
        break
    X0 = x[-1]
    Y0 = y[-1]
    Z0 = z[-1]
    return x,y,z,X0,Y0,Z0,t
def random(sx,sy,vlim1,vlim2,thlim1,thlim2,filim1,filim2):
    x0 = 7.32
    z0 = 2.44
    XLIM1 = sx - x0/2
    XLIM2 = sx + x0/2
    for i in range(100):
        v0 = np.random.uniform(vlim1,vlim2)
        theta = np.random.uniform(thlim1,thlim2)
        thetac = np.random.uniform(theta-5,theta)
        fi = np.random.uniform(filim1,filim2)
        if fi < 90:
            fic = np.random.uniform(fi-20,fi)
        else:
            fic = np.random.uniform(fi,fi+30)
        x,y,z,X,Y,Z,t = rk4(sx,sy,v0,theta,fi,thetac,fi)
        if X > XLIM1 and X < XLIM2 and Z < z0 and Y > sy:
            print("GOAL!")
            break
    return x,y,z,X,Y,Z,v0,theta,thetac,fi,fi
```