Poyntingov teorem iz Hamiltonovog načela i prvog Noetherinog teorema

Šesnić, Anamarija

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet

Poyntingov teorem iz Hamiltonovog načela i prvog Noetherinog teorema

Diplomski rad

Anamarija Šesnić

Split, srpanj 2023.

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet
Odjel za fiziku
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Diplomski rad

Poyntingov teorem iz Hamiltonovog načela i prvog Noetherinog teorema

Anamarija Šesnić

Sveučilišni diplomski studij Fizika, smjer Računarska fizika

Sažetak:
Poyntingov teorem kao zakon očuvanja energije jedan je od osnovnih zakona u klasičnoj elektrodinamici. S druge strane, varijacijska načela postala su temeljni koncept za izgradnju modernih teorija u fizici. Stoga je zanimljivo istražiti kako Poyntingov teorem možemo izvesti iz prvih principa, točnije Hamiltonovog varijacijskog načela. Hamiltonovo načelo kaže da se fizički sustav ponaša tako da njegovo djelovanje bude stacionarno. Uvriježena je spoznaja u fizici da su zakoni očuvanja povezani sa simetrijama danog sustava. Tu vezu omogućuje prvi Noetherin teorem. Njegovu primjenu na klasičnu elektrodinamiku provodimo po Bessel-Hagenovoj metodi koja se u literaturi rijetko susreće. Posredovanjem prvog Noetherinog teorema i primjenom Hamiltonovog načela dosljedno stižemo do Poyntingovog teorema kada u prostoru nema naboja. Kod izvoda Poyntingovog teorema s izvorima pak uočavamo nedosljednosti koje upućuju na daljnje istraživanje problema, što ostavljamo za budući rad.

Ključne riječi:	klasična elektrodinamika, Poyntingov teorem, Hamiltonovo načelo, prvi Noetherin teorem, Bessel-Hagenova metoda, zakoni očuvanja, simetrije
Rad sadrži:	35 stranica, 1 sliku, 0 tablica, 27 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku.
Mentor:	prof. dr. sc. Dragan Poljak
Ocjenjivači:	prof. dr. sc. Dragan Poljak, izv. prof. dr. sc. Petar Stipanović, doc. dr. sc. Marko Kovač
Rad prihvaćen:	7. 7. 2023.

Rad je pohranjen u Knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

Basic documentation card

University of Split
Faculty of Science
Department of Physics
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Master thesis

Poynting's theorem from Hamilton's principle and Noether's first theorem

Anamarija Šesnić

University graduate study programme Physics, orientation Computational Physics

Abstract:
Poynting's theorem is one of the fundamental laws in the theory of classical electrodynamics as a law of conservation of energy. On the other hand, variational principles have become a cornerstone of modern physical theories. It is therefore interesting to consider how Poynting's theorem follows from first principles, Hamilton's variational principle in particular. Hamilton's principle states that a physical system behaves in such a way that makes action stationary. Furthermore, it is well established in physics that the conservation laws are related to the symmetries of a physical system, which is a consequence of Noether's first theorem. We apply it to classical electrodynamics using the Bessel-Hagen method, which is rarely found in the literature. We show that a conjunction of Noether's first theorem and Hamilton's principle paves a consistent way of obtaining Poynting's theorem in the case of no charge in the observed region. Derivation of Poynting's theorem with sources, however, contains inconsistencies that point to further investigation of the problem, which is left for the future work.

Keywords: classical electrodynamics, Poynting's theorem, Hamilton's principle, Noether's first theorem, Bessel-Hagen method, conservation laws, symmetries

Thesis consists of: 35 pages, 1 figure, 0 tables, 27 references. Original language: Croatian.

Supervisor: Prof. Dr. Dragan Poljak

Reviewers: Prof. Dr. Dragan Poljak,
Asoc. Prof. Dr. Petar Stipanović,
Assist. Prof. Dr. Marko Kovač

Thesis accepted: July 7, 2023

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

Sadržaj

1 Uvod

Područje fizike u koje ćemo se smjestiti na samom početku ovog rada je klasična elektrodinamika. Kao i svaka druga grana fizike, ona za cilj ima matematičkim jezikom opisati zakonitosti koje uočavamo u određenom dijelu fizičke stvarnosti. Danas možemo reći da ona obuhvaća čestice i tijela koja imaju posebno svojstvo — *električni naboj*. Međudjelovanje električki nabijenih čestica opisujemo konceptom polja: naboj u prostoru stvara tzv. *elektromagnetsko polje*, a druga nabijena čestica osjeća silu posredovanjem tog polja [1]. Zato kažemo da je klasična elektrodinamika klasična teorija polja i kao takva u svom središtu drži jednadžbe koje povezuju elektromagnetsko polje i naboje, izvore polja.

1.1 Maxwellove jednadžbe: nastanak

Povijesno se elektrodinamika razvijala na temelju neovisnih eksperimentalnih opažanja električnih i magnetskih fenomena. Iako su tijekom 18. stoljeća postojale slutnje o povezanosti elektriciteta i magnetizma, tek je 1820. godine Hans Christian Ørsted (1777. – 1851.) utvrdio njihovu vezu. Ørsted je u eksperimentu uočio da električna struja koja teče vodičem uzrokuje pomicanje magnetske igle kompasa. Iste godine André-Marie Ampère (1775. – 1836.) otkriva da postoji sila između dvaju paralelnih vodiča kojima teče struja i započinje svoje intenzivno istraživanje veze elektriciteta i magnetizma. Zanimljivo je da je naziv „elektrodinamika” koji danas koristimo uveo upravo Ampère kao ime za znanost koja istražuje međudjelovanje električnih struja. Počevši od matematičkog izraza za silu između paralelnih struja, Ampère je razvio teoriju istovjetnosti magnetskih učinaka kod magneta i strujnih krugova. Ampèreova uloga u razvoju elektromagnetizma toliko je značajna da mu Maxwell kasnije daje nadimak „Newton elektriciteta”. Nakon što je utvrđeno da električna struja proizvodi magnetske učinke, Michael Faraday (1791. – 1867.) 1831. godine otkriva i obrat. Provodi eksperimente u kojima uočava i dalje istražuje pojavu koju danas nazivamo elektromagnetskom indukcijom, tj. pojavu u kojoj promjenjivo magnetsko polje proizvodi električnu struju. Faraday u izričaju zakona indukcije nije koristio pojam magnetskog polja nego pojam magnetskih silnica (eng. *lines of magnetic force*) — predodžbu iz koje je isklijao sam koncept polja u fizici [2, 3].

Otkrićima Ørsteda, Ampèrea i Faradaya empirijski je uspostavljena čvrsta veza elektriciteta i magnetizma. Čovjek koji je dotad opažene zakone elektromagnetizma skupio i cjelovito izrekao jasnim simboličkim jezikom matematike bio je James Clerk Maxwell (1831. – 1879.). U razdoblju od 50-ih do 70-ih godina 19. stoljeća Maxwell objavljuje niz radova iz elektromagnetizma, a teoriju u dotad najrazvijenijem obliku iznosi 1864. godine u radu pod nazivom *Dinamička teorija elektromagnetskog polja* (eng. *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*) [4]. U trećem poglavlju tog članka okuplja sve zakone i izriče ih u dvadeset skalarnih jednadžbi grupiranih u osam značenjskih skupina. Uz to što je u svom radu sustavno objedinio zakone elektriciteta i magnetizma, Maxwell je pod kupolu elektromagnetzima uveo i optiku tvrdeći da „imamo valjani razlog zaključiti da je sama svjetlost [...] elektromagnetski poremećaj koji se u obliku valova širi elektromagnetskim poljem u skladu s elektromagnetskim zakonima” [4, str. 535]. Godine 1873. Maxwell objavljuje cjelovitu teoriju elektromagnetizma monumentalnim izdanjem dvaju svezaka pod imenom *Rasprava o elektricitetu i magnetizmu* (eng. *A Treatise on Electricity and Magnetism*) [2, 3].

Četiri poznate parcijalne diferencijalne jednadžbe koje tvore jezgru elektrodinamike i koje danas zovemo „Maxwellove jednadžbe” ne mogu se naći u njegovoj *Raspravi*. Od bogate gomile sirovog materijala koji je Maxwell iznio u svom traktatu, konciznu, koherentnu i dobro potvrđenu teoriju oblikovali su njegovi nasljednici. Njih su predvodili britanski fizičari George Francis FitzGerald (1851. – 1901.), Oliver Lodge (1851. – 1940.) i Oliver Heaviside (1850. – 1925.), uz ključan njemački doprinos Heinricha Hertza (1857. – 1894.), koji 1888. godine eksperimentalno potvrđuje postojanje elektromagnetskih valova. Maxwellova je teorija obučena u novo ruho 1880-ih kad su John Henry Poynting (1852. – 1914.) te ranije spomenuti FitzGerald i Heaviside proučavali tok energije u elektromagnetskom polju. Heaviside 1884. godine zapisuje jednadžbe iz Maxwellove *Rasprave* u obliku četiriju simetričnih vektorskih jednadžbi kakve danas poznajemo. Njegovom je zaslugom Maxwellova teorija postala moćan i učinkovit matematički alat za rješavanje postojećih problema, a novi oblik jednadžbi prepoznat kao fundamentalan. Od sredine 1890-ih teorija je ušla u optjecaj zapisana „novim” Maxwellovim jednadžbama i započela stjecati reputaciju jedne od najuspješnijih teorija u povijesti fizike [5].

1.2 Temeljne jednadžbe klasične elektrodinamike

Skup parcijalnih diferencijalnih jednadžbi

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \qquad \text{(Gaussov zakon)}, \tag{1.1}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \qquad \text{(nepostojanje magnetskih monopola)}, \tag{1.2}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0} \qquad \text{(Faradayev zakon)}, \tag{1.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \qquad \text{(poopćeni Ampèreov zakon)}, \tag{1.4}$$

danas poznajemo kao makroskopske Maxwellove jednadžbe[1]. Uz zadane rubne uvjete te konfiguraciju slobodnih naboja $\rho(\mathbf{r}, t)$ i struja $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ u promatranom dijelu prostora i vremena, jednadžbe (1.1) – (1.4) daju nam polja $\mathbf{E}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ u proizvoljnoj točki $(\mathbf{r}, t)$. Pritom je potrebno poznavati konstitucijske relacije koje daju vezu polja $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ s električnim poljem $\mathbf{E}$ i

[1] Jednadžbe su zapisane netradicionalno radi isticanja uloge i odnosa fizičkih veličina: svi članovi s poljima nalaze se lijevo, a naboji kao izvori polja desno.

magnetskim poljem $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{E}, \mathbf{B}), \tag{1.5}$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{E}, \mathbf{B}). \tag{1.6}$$

Polja $\mathbf{D}$ i $\mathbf{H}$ veličine su koje sadrže opis odziva tvari na prisutnost elektromagnetskog polja. Najznačajniji odzivi su pojava električnih i magnetskih dipola u materijalima, odnosno polarizacija i magnetizacija. Ovisnosti (1.5) – (1.6) općenito nisu trivijalne, a tek u posebnom slučaju linearnih i izotropnih materijala imaju jednostavan oblik $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ i $\mathbf{H} = \frac{1}{\mu}\mathbf{B}$, gdje su konstante ϵ električna permitivnost i μ magnetska permeabilnosti tvari [6].

Maxwellove jednadžbe opisuju kako naboj proizvodi elektromagnetsko polje. Kako bismo zaokružili teoriju klasične elektrodinamike, treba nam zakon kojim je opisan i obratan smjer: kako polje utječe na naboj. Dinamiku nabijene čestice u klasičnoj fizici određuje drugi Newtonov zakon u kojem na mjesto sile uzimamo izraz za Lorentzovu silu,

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \tag{1.7}$$

pri čemu je $\mathbf{p}$ zalet, a $\mathbf{v}$ brzina čestice naboja q. Činjenica da je q cjelobrojni višekratnik elementarnog naboja e utvrđena je posljednjih godina 19. stoljeća nakon eksperimentalnih mjerenja Josepha Johna Thomsona (1856. – 1940.). Spekulacije o prirodi električne struje pratile su razvoj elektromagnetizma od njegovih početaka. Dok je 18. stoljeće bilo prožeto nadmetanjem hipoteza o električnom fluidu jedne ili dviju vrsta, u narednom stoljeću razvijaju se i čestične teorije. One nastoje objasniti fenomene elektrodinamike gibanjem električnih naboja. Prvu takvu teoriju iznosi Wilhelm Eduard Weber (1804. – 1891.) sredinom 19. stoljeća. Njegova teorija o elektronu objašnjavala je međudjelovanje naboja djelovanjem na daljinu (eng. *action at a distance*). Takve su bile i ostale teorije o elektronu sve do Hendricka Lorentza (1853. – 1928.). On napušta princip djelovanja na daljinu i pretpostavlja da elektroni međudjeluju posredovanjem etera, medija u koji su uronjeni i u kojem su zadovoljene Maxwellove jednadžbe. Izraz s desne strane jednadžbe (1.7) koji predstavlja silu na naboj u elektromagnetskom polju Lorentz je izveo 1892. godine [2, 6].

1.3 Tema i motivacija rada

Među zakonima u fizici posebnu ulogu imaju zakoni očuvanja. Njima iskazujemo tvrdnju da se u promatranom sustavu određene fizičke veličine ne mijenjaju tijekom vremena. Neke od tih veličina su energija, zalet i zamah. Zakon očuvanja energije u elektrodinamici poznat je pod imenom *Poyntingov teorem*. U integralnom obliku taj zakon zapisuje se jednadžbom

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_V u\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} + \oint_{\partial V}\mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = -\int_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}. \tag{1.8}$$

U slučaju makroskopskih polja i linearnih medija sa zanemarivim gubitcima[2] gustoća energije elektromagnetskog polja u SI sustavu jedinica dana je izrazom $u = \frac{1}{2}(\mathbf{E}\cdot\mathbf{D} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{H})$, a $\mathbf{S} = \mathbf{E}\times\mathbf{H}$ je Poyntingov vektor koji predstavlja gustoću toka energije. Skalarni produkt $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$ je rad koji polje izvrši nad nabojem u jedinici vremena po jedinici volumena. Jednadžba (1.8) kazuje da se energija elektromagnetskog polja u volumenu V može mijenjati tako da teče kroz rub tog volumena ∂V i/ili se pretvara u mehaničku ili toplinsku energiju vršenjem rada nad nabojima unutar V [6].

Poyntingov teorem standardno se u udžbenicima iz elektrodinamike izvodi iz Maxwellovih jednadžbi. U ovom radu želimo doći do Poyntingovog teorema na drugi način — polazeći od prvih principa. Jedan od takvih principa je načelo najmanjeg djelovanja (eng. *principle of least action*), također poznato pod nazivom *Hamiltonovo načelo*. Za nerelativistički mehanički sustav čestica ono glasi[3]:

> Gibanje sustava od trenutka t_1 do trenutka t_2 takvo je da integral
>
> $$I = \int_{t_1}^{t_2} L\,\mathrm{d}t, \tag{1.9}$$
>
> gdje je $L = T - V$ razlika kinetičke i potencijalne energije, poprima stacionarnu vrijednost [7].

Integral I zove se *djelovanje* (eng. *action*), a podintegralna funkcija L Lagrangeova funkcija ili *lagranžijan*. Iz ovog načela moguće je izvesti jednadžbe gibanja za dani sustav onda kad je određen njegov lagranžijan. Hamiltonovim načelom prirodni se fenomeni prikazuju kao procesi optimizacije: sustav se ponaša tako da djelovanje bude najmanje[4] moguće [8]. Iako je ovo načelo formulirano u kontekstu razvoja klasične mehanike, njegovo mjesto u fizici ostalo je netaknuto i nakon modernih revolucija 20. stoljeća [9]. Štoviše, fundamentalne teorije današnjice poput standardnog modela elementarnih čestica i opće teorije relativnosti utemeljene se na načelu najmanjeg djelovanja. Hamiltonovo načelo i varijacijski račun, koji predstavlja alat

[2]Ovo je idealizacija. U realnim medijima, pa i linearnim, javlja se disperzija koju prate gubitci. Zbog toga je primjena Poyntingovog teorema u obliku (1.8) ograničena na polja i naboje u vakuumu [6].

[3]Hamiltonovo načelo vrijedi za holonomne sustave u kojima se sile mogu prikazati pomoću skalarnog potencijala koji može biti funkcija prostornih koordinata, brzina i vremena (eng. *monogenic systems*) [7].

[4]Točnije, djelovanje postiže *stacionarnu* vrijednost, a u nekim slučajevima ujedno i minimum. Naziv „načelo *najmanjeg* djelovanja" kao istoznačnica za Hamiltonovo načelo povijesni je rudiment [9], a koristit ćemo ga ovdje u širem smislu zbog učestalosti tog oblika u literaturi.

za njegovu primjenu, postali su temeljna paradigma u teorijskoj fizici [10]. Cilj ovog rada je istražiti kako nas ta paradigma dovodi do zakona očuvanja energije u elektromagnetizmu.

Struktura rada izvedena je tako da u sljedećim dvama poglavljima pojedinačno razmatramo dva glavna elementa zadanog problema, dok u zadnjem poglavlju uvodimo treći element koji omogućuje njihovu sintezu. Drugo poglavlje pregled je poznatog o Poyntingovom teoremu i priprema notacije za nastavak. U trećem poglavlju iskazuje se Hamiltonovo načelo i provodi standardni varijacijski postupak za klasičnu elektrodinamiku. U četvrtom i najvažnijem poglavlju upoznajemo se s izvornim Noetherinim teoremima. Prvi od njih poslužit će nam kao posrednik između Hamiltonovog načela i zakona očuvanja energije. U zaključku dajemo osvrt na postignuti rezultat i mogućnosti za daljnje istraživanje problema.

2 Poyntingov teorem

2.1 Povijesni kontekst otkrića

Kao što je već u Uvodu spomenuto, današnji oblik Maxwellovih jednadžbi plod je istraživanja upravo toka energije u elektromagnetskom polju u razdoblju nakon 1880. godine. Ideja da bi elektromagnetsko polje moglo pohranjivati i prenositi energiju činila je važan dio teorije polja još od Faradaya. Sredinom 19. stoljeća tu ideju detaljno su istraživali Hermann von Helmholtz (1821. – 1894.) i William Thomson (Lord Kelvin) (1824. – 1907.). Dok je Helmholtz dobro odredio elektrostatsku energiju, za cjelovitu teoriju energije magnetskog polja zaslužan je Thomson [2].

Maxwell kasnije u svojoj *Raspravi* sažima poznate rezultate i zapisuje dva izraza za izračun energije pridružene električnoj struji. Jedan od njih danas odgovara integralu izraza $\frac{1}{2}\mathbf{A}\cdot\mathbf{J}$, tj. umnoška vektorskog potencijala i gustoće struje. Ovime se energija smješta unutar vodiča kojim teče struja. S druge strane, izrazom $\frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2$ energija se pridruživala polju koje okružuje vodič. Pritom je $\mathbf{H}$ magnetsko polje[1], a veličina μ zvala se permeabilnost. Analogna situacija vrijedila je za elektrostatsku gustoću energije izraženu preko skalarnog potencijala i naboja, $\frac{1}{2}\rho V$, odnosno preko permitivnosti i električnog polja, $\frac{1}{2}\epsilon\mathbf{E}^2$. Unatoč uvjerenju da su polja fundamentalne veličine Maxwell je u *Raspravi* teoriju ipak gradio na potencijalima. Takav pristup njegovim je nasljednicima otežao uočavanje važnih posljedica teorije, pogotovo onih koje se tiču položaja i rasprostiranja energije u prostoru [5].

Početkom 80-ih godina istog stoljeća energiju u elektromagnetskom polju počinje pobliže proučavati Poynting. On nastoji odgovoriti na pitanje kojim putevima i po kojem zakonu energija prolazi od jednog mjesta do drugog. Poynting polazi od Maxwellovog izraza $\frac{1}{2}\epsilon\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2$ za gustoću električne i magnetske energije te računa kako se ona mijenja unutar zadanog volumena. Usprkos složenom računu koji je, prateći Maxwellovu formulaciju teorije, vodio preko skalarnog i vektorskog potencijala, Poynting uspijeva doći do vrlo jednostavnog rezultata. Godine 1883. usmeno predstavlja, a 1884. u tiskanom obliku objavljuje svoj zaključak: promjena energije unutar zatvorene površine zajedno s proizvedenom toplinom jednaka je veličini koja ovisi o vrijednostima električnog i magnetskog polja na samoj površini. O toj veličini dalje zaključuje da se radi o toku energije kroz površinu čiji je (1) smjer okomit na električno i magnetsko polje, (2) iznos proporcionalan umnošku iznosa električnog polja, magnetskog polja i sinusa kuta među njima i (3) orijentacija zadana tako da električno polje, magnetsko polje i tok poštuju pravilo desne ruke [11]. Veličina o kojoj Poynting govori kasnije je prozvana Poyntingovim vektorom, a u suvremenom matematičkom zapisu vektorski je umnožak električnog i magnetskog polja[2], $\mathbf{E}\times\mathbf{H}$.

[1] U to vrijeme za veličinu koja odgovara simbolu $\mathbf{H}$ koristio se naziv magnetska sila (eng. *magnetic force*). Ona po značenju odgovara današnjem pojmu magnetskog polja.

[2] Poynting u svom radu nije zapisao gustoću toka energije u ovoj notaciji.

Poynting je rezultatom i primjenama koje je naveo u svom radu jasno sugerirao da se dotadašnje mišljenje o struji kao prijenosniku energije treba napustiti, a tu ulogu ustupiti okolnom mediju. Ova hipoteza poljuljala je postojeće predodžbe i mnogi su je odbili proglasivši je besmislenom. Drugi su pak u njoj pronašli suglasje s Faradayevim i Maxwellovim poimanjem da su polja glavni koncept u elektromagnetizmu [5].

2.2 Izvod Poyntingovog teorema iz Maxwellovih jednadžbi

Pogledamo li danas Poyntingov originalni izvod teorema o toku elektromagnetske energije, uočit ćemo koliko je teško u oznakama i jednadžbama prepoznati teoriju elektromagnetizma. Zato ćemo ovdje pokazati kako Poyntingov rezultat proizlazi iz Maxwellovih jednadžbi kakve danas poznajemo slijedeći standardni postupak [1, 6, 13].

Definirajmo fizički sustav koji ćemo promatrati do kraja ovog rada. Neka se u inače praznom dijelu prostora V nalazi električni naboj koji možemo prikazati raspodjelom $\rho(\mathbf{r}, t)$, tj. ukupan naboj u tom području jednak je

$$Q_V = \int\limits_V \rho(\mathbf{r}, t)\, \mathrm{d}^3\mathbf{r}. \tag{2.1}$$

Naboj u gibanju opisujemo gustoćom struje $\mathbf{J}(\mathbf{r}, t)$ čiji se iznos mjeri u jedinici pozitivnog naboja koji prolazi kroz jediničnu površinu u jedinici vremena, a smjer je određen smjerom gibanja naboja. Za naboj koji se giba brzinom $\mathbf{v}$ gustoća struje[3] dana je s $\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}$. Vektorskim poljima $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ i $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$ označimo elektromagnetsko polje u tom prostoru. Jednadžbe koje opisuju ovaj sustav su Maxwellove jednadžbe za polja i naboje u vakuumu[4] (uz odgovarajuće rubne uvjete),

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0}\rho, \tag{2.2}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{2.3}$$

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}, \tag{2.4}$$

$$\nabla \times \mathbf{B} - \mu_0\epsilon_0\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0\mathbf{J}, \tag{2.5}$$

i Lorentzov zakon sile (1.7). Izrazimo li točkasti naboj kao umnožak gustoće naboja i infinitezimalnog dijela volumena, $q \to \rho\, \mathrm{d}^3\mathbf{r}$, Lorentzova sila može se prikazati preko gustoća naboja i struje,

$$\mathbf{F} = \int\limits_V (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\, \rho\, \mathrm{d}^3\mathbf{r} = \int\limits_V (\rho\mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B})\, \mathrm{d}^3\mathbf{r}. \tag{2.6}$$

[3] Pritom pretpostavljamo da je sav naboj unutar V istog predznaka i da se giba istom brzinom.

[4] Fundamentalne konstante ϵ_0 i μ_0 zovu se permitivnost i permeabilnost vakuuma, redom. One iznose $\mu_0 = 1.256\,637\,062\,12(19) \cdot 10^{-6}$ N A^{-2} i $\epsilon_0 = 8.854\,187\,8128(13) \cdot 10^{-12}$ F m^{-1} [12].

Izvod započinjemo računanjem rada koji elektromagnetska sila izvrši nad nabojem u danom području. Prema definiciji, rad koji Lorentzova sila izvrši nad jediničnim nabojem q tijekom njegovog pomaka $\mathrm{d}\mathbf{l}$ jednak je

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{l} &= q\left(\mathbf{E}+\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right)\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}t\\ &= q\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}t\\ &= \rho\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathrm{d}t\\ &= \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}\,\mathrm{d}t,\end{aligned} \tag{2.7}$$

pri čemu smo iskoristili zamjenu $q\to\rho\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}$ i gustoću struje $\mathbf{J}=\rho\mathbf{v}$. Iz toga slijedi da je rad izvršen u jedinici vremena nad svim nabojima u području V dan izrazom

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t}=\int\limits_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}. \tag{2.8}$$

Izvod se dalje svodi na raščlambu umnoška $\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}$. Gustoću struje $\mathbf{J}$ raspisujemo pomoću četvrte Maxwellove jednadžbe (2.5), a zatim koristimo sljedeći vektorski identitet:

$$\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)=\mathbf{B}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)-\mathbf{E}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{B}\right). \tag{2.9}$$

Nakon prethodnih radnji imamo jednakost

$$\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}=\frac{1}{\mu_0}\mathbf{B}\cdot\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)-\epsilon_0\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}. \tag{2.10}$$

Nastavljamo uvrštavajući treću Maxwellovu jednadžbu (2.4) u prvi izraz s desne strane gornje jednadžbe. U posljednjem koraku pretvaramo sljedeća dva izraza

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{E}^2\right),\qquad\qquad \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\mathbf{B}^2\right), \tag{2.11}$$

da bismo konačno dobili

$$-\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\epsilon_0}{2}\mathbf{E}^2+\frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}^2\right)+\nabla\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right). \tag{2.12}$$

Označimo li izraze u zagradama redom s u i $\mathbf{S}$ pa vratimo dobiveni izraz u integral iz (2.8), dobit ćemo:

$$\int\limits_V\frac{\partial u}{\partial t}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}+\int\limits_V\nabla\cdot\mathbf{S}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}=-\int\limits_V\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}. \tag{2.13}$$

Na prvi integral u jednadžbi (2.13) primjenjujemo poopćeno Leibnizovo pravilo koje dopušta zamjenu integrala i derivacije, a na drugi integral primijenimo Gaussov teorem o divergenciji.

Tada stižemo do konačnog oblika Poyntingovog teorema:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_V u\,\mathrm{d}^3\mathbf{r} + \oint\limits_{\partial V} \mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a} = -\int\limits_V \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}\,\mathrm{d}^3\mathbf{r}, \tag{2.14}$$

gdje su[5]

$$u = \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} + \mathbf{B}^2\right), \tag{2.15}$$

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}\mathbf{E}\times\mathbf{B}. \tag{2.16}$$

Prema poznatoj dimenziji izraza na desnoj strani jednadžbe (2.14) zaključujemo da prvi član s lijeve strane predstavlja promjenu ukupne energije pohranjene u elektromagnetskom polju u promatranom području (E_{em}), a drugi integral predstavlja mjeru energije koju polja prenesu kroz rub tog područja u jedinici vremena. Dakle, u je gustoća elektromagnetske energije, a $\mathbf{S}$ ima dimenzije energije po jedinici vremena po jedinici površine, tj. označava gustoću toka energije i nosi ime Poyntingov vektor. Riječima izrečen, Poyntingov teorem glasi: *vremenska promjena elektromagnetske energije u danom području zbrojena s energijom koja u jedinici vremena izađe kroz rub područja jednaka je negativnom radu koji polja izvrše u jedinici vremena nad nabojem u tom području.*

Iz integralnog oblika Poyntingovog teorema možemo dobiti i diferencijalni zapis. Vratimo li se do izraza (2.13) i iskoristimo činjenicu da je područje V proizvoljno, Poyntingov teorem možemo prikazati jednadžbom kontinuiteta:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = -\mathbf{J}\cdot\mathbf{E}. \tag{2.17}$$

Ako u promatranom području nema naboja, vrijedi $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ i imamo lokalni zakon očuvanja elektromagnetske energije,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = 0. \tag{2.18}$$

Pretpostavimo li da naboji ne izlaze iz područja V, izraz (2.8) možemo uzeti kao brzinu povećanja ukupne mehaničke energije naboja (E_{meh}) unutar V. Tada Poyntigov teorem (2.14) izriče zakon očuvanja energije za cjelokupni sustav polja i naboja:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E_{\text{em}} + E_{\text{meh}}\right) = -\oint\limits_{\partial V}\mathbf{S}\cdot\mathrm{d}\mathbf{a}. \tag{2.19}$$

Ako u obzir uzmemo čitavi prostor, onda $\partial V \to \infty$ i desna strana jednadžbe postaje jednaka

[5] U izrazu (2.15) uveli smo fundamentalnu konstantu c koja označava brzinu svjetlosti u vakuumu. Njezina vrijednost u SI sustavu jedinica definirana je točnim iznosom $c = 299\ 792\ 458\ \mathrm{m\ s^{-1}}$ [12]. Permitivnost i permeabilnost vakuuma povezane su s brzinom svjetlosti u vakuumu relacijom $c = (\epsilon_0\mu_0)^{-1/2}$.

nuli jer polja u beskonačnosti iščezavaju. Tada se jednadžba (2.19) pretvara u globalni zakon očuvanja energije koju izmjenjuju elektromagnetsko polje i električni naboj.

Zakoni očuvanja u danom fizičkom sustavu na univerzalan su način povezani s njegovim simetrijama. Ova tvrdnja, koja je dio uvriježene spoznaje u fizici[6] i sažeto izriče rezultat Noetherinog (prvog) teorema, postaje nit vodilja za naše daljnje izlaganje. Kako bismo pripremili teren za iskaz i primjenu Noetherinog teorema, moramo pokazati da dotična teorija počiva na varijacijskom principu. To ćemo u sljedećem poglavlju i učiniti. No prije toga zakone elektrodinamike zapisat ćemo u drugom obliku koji ćemo koristiti u nastavku rada.

2.3 Kovarijantni zapis

Klasična elektrodinamika konzistentna je sa specijalnom teorijom relativnosti (STR). Štoviše, Albert Einstein (1879. – 1955.) pri oblikovanju STR u poznatom članku iz 1905. godine razmatrao je upravo relativno gibanje tijela u fenomenima elektromagnetizma [14]. Svoju je teoriju utemeljio na dvama postulatima: (1) principu relativnosti po kojem zakoni fizike jednako vrijede u svim inercijskim referentnim sustavima (IRS) i (2) principu da je brzina svjetlosti u vakuumu c jednaka u svakom IRS, tj. neovisna o gibanju izvora.

Iz ovih postulata proizlazi posebna veza dvaju IRS između kojih postoji relativno translacijsko gibanje. Uzmimo dva IRS, S i S' čije su prostorne koordinatne osi paralelne i koji se gibaju jedan u odnosu na drugi brzinom iznosa v u smjeru x-osi[7]. Koordinate točke, odnosno *događaja* u prostorvremenu označavamo kontravarijantnim četverovektorom položaja[8]

$$\{x^\mu\} = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z). \tag{2.20}$$

Koordinate istog događaja bilježene u S i u S' povezane su Lorentzovim tranformacijama

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \tag{2.21}$$

gdje je Λ matrica Lorentzovih transformacija

$$\{\Lambda^\mu{}_\nu\} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}. \tag{2.22}$$

[6]Većina udžbenika iz klasične fizike koji obrađuju varijacijske principe sadrži određeni oblik ove tvrdnje. Neki od njih su [7, 8, 9, 10, 13].

[7]Ovako postavljamo translacijsko gibanje radi jednostavnosti, a bez gubitka općenitosti — sloboda u odabiru referentnog sustava pri opisu gibanja nam to omogućava.

[8]Indeksi označeni grčkim slovima poprimaju vrijednosti $0, 1, 2, 3$, dok latinične koristimo za prostorne komponente $1, 2, 3$.

U zapisu izraza (2.21), a i ubuduće, koristimo Einsteinovu konvenciju o zbrajanju po kojoj se u slučaju ponavljanja nekog indeksa podrazumijeva suma po svim njegovim mogućim vrijednostima. Geometriju prostorvremena u STR definira invarijantni interval koji u diferencijalnoj formi glasi

$$(\mathrm{d}s)^2 = (\mathrm{d}x^0)^2 - (\mathrm{d}x^1)^2 - (\mathrm{d}x^2)^2 - (\mathrm{d}x^3)^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu, \tag{2.23}$$

gdje je $\eta_{\mu\nu}$ metrički tenzor Minkowskog

$$\{\eta_{\mu\nu}\} = \{\eta^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.24}$$

Četverovektorom u STR općenito nazivamo objekt sastavljen od četiriju komponenti koje se transformiraju kao (2.21). Razlikujemo kovarijantne (indeks dolje) i kontravarijantne (indeks gore) četverovektore sukladno definicijama u tenzorskoj analizi. Oni su povezani metričkim tenzorom, kao primjerice

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu}x^\nu \quad \Rightarrow \quad \{x_\mu\} = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3). \tag{2.25}$$

Skalarni produkt dvaju četverovektora a^μ i b^μ, koji je invarijantan na Lorentzove transformacije, definiramo kao umnožak kovarijantnog i kontravarijantnog vektora

$$a_\mu b^\mu = \eta_{\mu\nu}a^\nu b^\mu = a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3. \tag{2.26}$$

Navedimo još kako se operator parcijalne derivacije s obzirom na kontravarijantnu komponentu x^μ transformira kao kovarijantni četverovektor:

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad \Rightarrow \quad \{\partial_\mu\} = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, \nabla\right), \tag{2.27}$$

i analogno vrijedi

$$\partial^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} \quad \Rightarrow \quad \{\partial^\mu\} = \left(\frac{\partial}{\partial(ct)}, -\nabla\right). \tag{2.28}$$

Time zaključujemo pregled osnova relativističke notacije [1, 6, 10].

Prvi postulat STR nalaže da jednadžbe koje izriču zakone fizike budu *kovarijantne*, tj. oblikom invarijantne na Lorentzove tranformacije. To znači da jednadžbe moraju sadržavati skalare, četverovektore, odnosno tenzore različitih redova koji se pod Lorentzovim transformacijama mijenjaju na dobro definiran način. Ovdje navodimo fizičke veličine i jednadžbe elektrodinamike upravo tako oblikovane.

Izvori elektromagnetskog polja tvore kontravarijantni četverovektor gustoće struje J^μ,

$$\{J^\mu\} = (c\rho, \mathbf{J}). \tag{2.29}$$

Skalarni i vektorski potencijal, V i $\mathbf{A}$, preko kojih se mogu izraziti električno i magnetsko polje

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \tag{2.30}$$

također tvore kontravarijantni četverovektor A^μ,

$$\{A^\mu\} = \left(\frac{V}{c}, \mathbf{A}\right). \tag{2.31}$$

Komponente električnog i magnetskog polja smještene su u antisimetrični tenzor drugog reda, tzv. tenzor elektromagnetskog polja[9] $F^{\mu\nu}$,

$$\{F^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.32}$$

On je pak definiran pomoću četveropotencijala A^μ,

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu. \tag{2.33}$$

Definirajmo i njemu dualni tenzor

$$\mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}, \tag{2.34}$$

$$\{\mathcal{F}^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & E_z/c & -E_y/c \\ B_y & -E_z/c & 0 & E_x/c \\ B_z & E_y/c & -E_x/c & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.35}$$

Simbol $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ označuje potpuno antisimetrični Levi-Civita tenzor četvrtog reda[10]. Uočimo da relativistička notacija na osobit način predočuje ujedinjenje koje je Ørsted započeo, stavljajući električno i magnetsko polje u jedan objekt, $F^{\mu\nu}$ [1].

[9] Javljaju se i nazivi Faradayev tenzor, Maxwellov tenzor ili tenzor jakosti polja (eng. *field-strength tensor*).

[10] Njegovi elementi su $\varepsilon^{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{ako je } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ parna permutacija od } (0,1,2,3), \\ -1 & \text{ako je } (\mu,\nu,\rho,\sigma) \text{ neparna permutacija od } (0,1,2,3), \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$

Uz tako definirane veličine, Maxwellove jednadžbe poprimaju kovarijantni oblik

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = \mu_0 J^\nu, \tag{2.36}$$

$$\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = 0. \tag{2.37}$$

Pritom prva jednadžba[11] sadrži Maxwellove jednadžbe s izvorima (2.2) i (2.5), a u drugoj su zapisane homogene Maxwellove jednadžbe (2.3) i (2.4). Često se u literaturi jednadžba (2.37) zapisuje pomoću tenzora $F^{\mu\nu}$ i naziva se Bianchijevim identitetom[12]:

$$\partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} + \partial_\mu F_{\alpha\beta} = 0. \tag{2.38}$$

Tenzor elektromagnetske energije i zaleta[13] (eng. *energy-momentum tensor*) dan je izrazom [15]

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} F^{\mu\rho} F^{\nu}_{\ \rho} - \frac{1}{4\mu_0} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma}. \tag{2.39}$$

Raspišemo li eksplicitno elemente ovog simetričnog tenzora, u matričnom obliku dobijemo

$$\{T^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} -u & -S_x/c & -S_y/c & -S_z/c \\ -S_x/c & \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ -S_y/c & \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ -S_z/c & \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}, \tag{2.40}$$

pri čemu je u gustoća elektromagnetske energije (2.15), S_i komponente Poyntingovog vektora (2.16), a σ označava Maxwellov tenzor naprezanja s elementima

$$\sigma_{ij} = \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{E_i E_j}{c^2} + B_i B_j\right) - \frac{1}{2\mu_0}\left(\frac{\mathbf{E}^2}{c^2} + \mathbf{B}^2\right)\delta_{ij}. \tag{2.41}$$

Element σ_{ij} ima dimenziju sile po jedinici površine, a predstavlja silu u i smjeru koja djeluje na element površine orijentiran u j smjeru (i, j označuju komponente u pravokutnom Kartezijevom koordinatnom sustavu). Poyntingov teorem u diferencijalnom obliku (2.17) sadržan je u vremenskoj komponenti ($\nu = 0$) jednadžbe

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = J^\rho F^{\nu}_{\ \rho}, \tag{2.42}$$

dok prostorne komponente ($\nu = i$) izriču zakon očuvanja zaleta [1, 6, 10, 15].

[11] Budući da smo ostali u SI sustavu jedinica, javlja se djelomični sukob oznaka za grčko slovo μ. Ono je najčešći indeks u tenzorskom zapisu, a koristimo ga i za konstantu permeabilnost vakuuma, μ_0. Razlika bi ipak trebala biti jasna pa nećemo raditi intervencije, nauštrb estetskog dojma.

[12] Može se pokazati da vrijedi $\partial_\mu \mathcal{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{6}\varepsilon^{\alpha\beta\mu\nu}\left(\partial_\alpha F_{\beta\mu} + \partial_\beta F_{\mu\alpha} + \partial_\mu F_{\alpha\beta}\right)$.

[13] U literaturi postoje neznatne razlike u definiciji ovog tenzora. Osim razlika u konstantnim faktorima zbog sustava jedinica, javlja se i razlika u predznaku, npr. u usporedbi s [6]. Međutim, glavni kriterij ostaje zadovoljen — tenzor daje točne izraze zakona očuvanja energije i zaleta u standardnom 3D vektorskom zapisu.

Tenzor energije i zaleta $T^{\mu\nu}$ kasnije će zauzeti središnje mjesto u našoj raspravi. Ovdje smo taj objekt i jednadžbu zakona očuvanja uveli *ad hoc* pod opravdanjem da iz njih uistinu slijede poznate jednadžbe u standardnoj vektorskoj notaciji. U zadnjem poglavlju pokazat ćemo odakle potječu, a sada se uvjerimo da Maxwellove jednadžbe slijede iz varijacijskog načela.

3 Hamiltonovo načelo

3.1 Iskaz Hamiltonovog načela za sustav čestica

Budući da su se varijacijski principi razvili u kontekstu klasične mehanike, Hamiltonovo načelo u literaturi se najpreciznije izriče upravo za mehanički sustav od N čestica [7, 9, 16]. Pretpostavimo da je sustav holonoman, tj. da se veze u sustavu mogu zapisati u obliku

$$f_i(\mathbf{r}_1, \ldots, \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad i = 1, \ldots, K,$$

gdje $\mathbf{r}_j$ označava vektor položaja j-te čestice, a t vrijeme. Tada je za potpuni opis gibanja sustava moguće odrediti $n = 3N - K$ međusobno neovisnih funkcija koje nazivamo poopćenim koordinatama

$$q_1(t), \ldots, q_n(t)$$

i kažemo da sustav ima n stupnjeva slobode. Pretpostavimo također da su sile u sustavu monogene (eng. *monogenic forces*), tj. mogu se prikazati preko jedinstvene skalarne funkcije. Neka je zadana konfiguracija sustava u početnom i konačnom trenutku,

$$q_i(t_1) = a_i, \quad q_i(t_2) = b_i, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.1}$$

U tom slučaju *djelovanje* I funkcional je poopćenih koordinata definiran s[1]

$$I[q_1, \ldots, q_n] = \int_{t_1}^{t_2} L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) \mathrm{d}t. \tag{3.2}$$

Podintegralna funkcija L zove se *lagranžijan* i za promatrani mehanički sustav jednaka je razlici kinetičke i potencijalne energije,

$$L(t, q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) = T(\dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n) - V(t, q_1, \ldots, q_n). \tag{3.3}$$

Hamiltonovo načelo kaže da je stvarno gibanje sustava tijekom vremenskog intervala $[t_1, t_2]$ *ono za koje je djelovanje* (3.2) *stacionarno, tj. njegova prva varijacija*[2] *iščezava*,

$$\delta I = 0. \tag{3.4}$$

[1] Oznaka $\dot{q}_i$ predstavlja vremensku derivaciju poopćene koordinate i naziva se poopćena brzina.

[2] Prvu varijaciju funkcionala definirat ćemo kasnije u formulaciji Hamiltonovog načela za polja.

Primjenom varijacijskog računa[3] iz uvjeta (3.4) dobiju se diferencijalne jednadžbe drugog reda za funkcije $q_i(t)$ koje zovemo *Euler-Lagrangeove jednadžbe*,

$$\frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.5}$$

One predstavljaju jednadžbe gibanja za promatrani sustav.

Hamiltonovo načelo potragu za funkcijama koje opisuju gibanje izriče kao potragu za ekstremom funkcionala. Takve probleme zovemo varijacijskim, a grana matematike koja ih proučava zove se varijacijski račun. Osnovni postupak rješavanja varijacijskog problema koji vodi do Euler-Lagrangeovih jednadžbi prikazat ćemo kasnije na primjeru iz teorije polja.

3.2 Hamiltonovo načelo u teoriji polja

U prethodnom odjeljku predstavili smo Hamiltonovo načelo za sustave s konačno ili prebrojivo mnogo stupnjeva slobode. To načelo može se poopćiti i za kontinuirane mehaničke sustave u kojima je broj stupnjeva slobode neprebrojivo beskonačan [7, 16, 17]. Takve sustave opisujemo *teorijom polja* u kojoj mjesto poopćenih koordinata $q_i(t)$ preuzimaju funkcije vremenskih i prostornih nezavisnih varijabli, tzv. klasična polja

$$\varphi_1(t, \mathbf{r}), \ldots, \varphi_m(t, \mathbf{r}).$$

Broj m ovisit će o vrsti polja koje može biti skalarno, vektorsko, tenzorsko i sl. Ove funkcije potpuno kinematički opisuju dani sustav: svaka mjerljiva veličina trebala bi se moći prikazati pomoću polja, iako samo polje ne mora nužno biti opservabla [10].

Radi kraćeg zapisa uvedimo oznake

$$\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_m), \quad \partial = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right),$$

pri čemu će $\partial\varphi$ označavati sve moguće kombinacije od $\partial_i\varphi_j$. Djelovanje I u teoriji polja definiramo kao funkcional polja

$$I[\varphi] = \int\limits_{t_1}^{t_2} \mathrm{d}t \iiint\limits_V \mathcal{L}(t, \mathbf{r}, \varphi, \partial\varphi)\, \mathrm{d}^3\mathbf{r}. \tag{3.6}$$

Podintegralnu funkciju $\mathcal{L}$, koja općenito ovisi o polju, njegovim prvim derivacijama, prostornim

[3]Pritom se zbog rubnih uvjeta (3.1) ne vrši varijacija staze $q_i(t)$ na rubovima, odnosno

$$q_i^*(t) = q_i(t) + \varepsilon h_i(t), \quad \text{pri čemu je} \quad h_i(t_1) = h_i(t_2) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n).$$

koordinatama i vremenu, zovemo *gustoća lagranžijana*. Pritom je lagranžijan L dan kao

$$L(t) = \iiint\limits_V \mathcal{L}(t, \mathbf{r}, \varphi, \partial\varphi)\, \mathrm{d}^3\mathbf{r}. \tag{3.7}$$

Hamiltonovo načelo poopćeno za polja tumačimo kao zahtjev da sustav opisuju funkcije polja φ za koje je djelovanje (3.6) stacionarno,

$$\delta I = 0. \tag{3.8}$$

Radi kratkoće gustoću lagranžijana $\mathcal{L}$ u teoriji polja zvat ćemo lagranžijanom.

Usporedimo li ovaj iskaz Hamiltonovog načela s onim za sustav čestica, uočit ćemo da ovdje (1) lagranžijan nije unaprijed definiran i (2) ništa nije rečeno o rubnim uvjetima za polje φ. U definiciji djelovanja (3.6) područje integracije je cilindar u $\mathbb{R}^4$ određen Kartezijevim produktom $\Omega = [t_1, t_2] \times V$. Možemo se zapitati moraju li i ovdje biti zadane vrijednosti polja na rubu $\partial\Omega$,

$$\varphi_i(t, \mathbf{r}) = a_i(t, \mathbf{r}), \quad (t, \mathbf{r}) \in \partial\Omega, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{3.9}$$

U nastavku ćemo pokazati kako iz uvjeta $\delta I = 0$ proizlazi da polja moraju zadovoljavati Euler--Lagrangeove jednadžbe bez obzira na to postoje li nametnuti rubni uvjeti ili ne[4].

3.2.1 Primjena na klasičnu elektrodinamiku

Prijeđimo iz općenite teorije polja na klasičnu elektrodinamiku. Ulogu polja sada preuzima četveropotencijal[5] A_μ koji ovisi o prostorvremenskim koordinatama x^μ. Korištene oznake zamjenjujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned}
\varphi_i &\longrightarrow A_\mu \\
i = 1, \ldots, m &\longrightarrow \mu = 0, 1, 2, 3 \\
(t, \mathbf{r}) &\longrightarrow x^\mu = (ct, x, y, z) \\
\mathrm{d}t\, \mathrm{d}^3\mathbf{r} &\longrightarrow \mathrm{d}^4x = \mathrm{d}x^0 \mathrm{d}x^1 \mathrm{d}x^2 \mathrm{d}x^3 \\
\partial &\longrightarrow \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, \frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}, \frac{\partial}{\partial x^3} \right).
\end{aligned}$$

[4] Ista tvrdnja vrijedi i za diskretne sustave. Dok za sustav čestica u literaturi postoji konsenzus oko iskaza Hamiltonovog načela, za općenitu teoriju polja ono se iskazuje u neujednačenim oblicima. Primjerice, djelovanje se negdje definira integralom po čitavom prostoru [10, 17, 18], a ne po ograničenom području [7, 16, 19]; rubni uvjeti gdjegod se uopće ne spominju [9, 18], dok se drugdje ili zahtijeva da se polje ne varira na rubu [7, 19] ili se rubni uvjeti postavljaju na rubovima promatranog vremenskog intervala [10, 17]. Gelfand i Fomin [16] jasno pokazuju da Euler-Lagrangeove jednadžbe slijede iz uvjeta stacionarnosti funkcionala neovisno o rubnim uvjetima.

[5] Možemo uzeti i kontravarijantni četverovektor A^μ, svi rezultati jednako vrijede.

Djelovanje I u ovoj notaciji je

$$I[A_\mu] = \int\limits_\Omega \mathcal{L}(x^\nu, A_\mu, \partial_\nu A_\mu)\, \mathrm{d}^4x, \tag{3.10}$$

gdje je područje integracije $\Omega = [(x^0)_1, (x^0)_2] \times V,\ V \subseteq \mathbb{R}^3$, cilindar u prostoru Minkowskog. *Euler-Lagrangeove jednadžbe za polje* A_μ koje očekujemo imaju oblik

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)} = 0, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, \tag{3.11}$$

a njihov izvod koji slijedi analogan je onome za opće polje φ kod Gelfanda i Fomina [16].

Prvi korak. Izračunajmo (prvu) varijaciju funkcionala I pod pretpostavkom da je područje Ω fiksno[6]. Neka su funkcije polja A_μ transformirane na način

$$A^*_\mu(x^\nu) = A_\mu(x^\nu) + \varepsilon\, \Psi_\mu(x^\nu) + \ldots \tag{3.12}$$

gdje trotočka predstavlja članove reda većeg od 1 po parametru ε. *Varijacija* δI funkcionala (3.10) s obzirom na transformaciju (3.12) definirana je kao glavni linearni dio (eng. *principal linear part*) po ε razlike

$$\begin{aligned} \Delta I &= I[A^*_\mu] - I[A_\mu] \\ &= \int\limits_\Omega \left[\mathcal{L}(x^\nu, A^*_\mu, \partial_\nu A^*_\mu) - \mathcal{L}(x^\nu, A_\mu, \partial_\nu A_\mu)\right] \mathrm{d}^4x. \end{aligned} \tag{3.13}$$

Prvi lagranžijan pod integralom promatrat ćemo kao funkciju više varijabli na koju ćemo primijeniti Taylorov teorem. Razvijamo, dakle, funkciju $\mathcal{L}(x^\nu, A^*_\mu, \partial_\nu A^*_\mu)$ oko točke $T_0 = (x^\nu, A_\mu, \partial_\nu A_\mu)$ i pišemo članove do uključivo linearnih po ε:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x^\nu, A^*_\mu, \partial_\nu A^*_\mu) = \ & \mathcal{L}(x^\nu, A_\mu, \partial_\nu A_\mu) + (x^\nu - x^\nu)\, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\nu}\,(T_0) \\ & + \left(A^*_\mu - A_\mu\right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^*_\mu}\,(T_0) \\ & + \left(\partial_\nu A^*_\mu - \partial_\nu A_\mu\right) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A^*_\mu)}\,(T_0) + \ldots \end{aligned} \tag{3.14}$$

Podrazumijevaju se sume po ponavljajućim indeksima μ i ν. Razlika lagranžijana pod integralom (3.13) sada je jednaka

$$\mathcal{L}(x^\nu, A^*_\mu, \partial_\nu A^*_\mu) - \mathcal{L}(x^\nu, A_\mu, \partial_\nu A_\mu) = \varepsilon\, \Psi_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} + \varepsilon\, \partial_\nu \Psi_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} + \ldots \tag{3.15}$$

[6] Upravo ovdje nalazimo bitnu razliku u odnosu na Noetherin postupak. Kasnije ćemo vidjeti da ona istovremeno promatra transformacije nezavisnih koordinata i funkcija polja.

pa razlika ΔI postaje

$$\Delta I = \varepsilon \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \, \Psi_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \partial_\nu \Psi_\mu \right] \mathrm{d}^4 x + \ldots \tag{3.16}$$

gdje trotočka opet predstavlja članove reda većeg od 1 po ε. Po definiciji varijacije slijedi da je prvi član gornjeg izraza upravo varijacija djelovanja:

$$\delta I = \varepsilon \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \, \Psi_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \partial_\nu \Psi_\mu \right] \mathrm{d}^4 x. \tag{3.17}$$

Drugi korak. Preoblikujmo podintegralni izraz iz (3.17) u oblik

$$[\cdots] \, \Psi_\mu + \partial_\rho \, (\cdots)^\rho \, ,$$

tj. zapišimo ga tako da se derivacije polja Ψ_μ pojavljuju samo pod divergencijom nekog četverovektora. Da bismo to postigli, iskoristit ćemo pravilo za derivaciju umnoška

$$\partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \Psi_\mu \right] = \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \Psi_\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \partial_\nu \Psi_\mu \tag{3.18}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \partial_\nu \Psi_\mu = \partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \Psi_\mu \right] - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \Psi_\mu. \tag{3.19}$$

Varijacija δI sada postaje

$$\delta I = \varepsilon \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] \Psi_\mu \mathrm{d}^4 x + \varepsilon \int\limits_{\Omega} \partial_\nu G^\nu \mathrm{d}^4 x, \tag{3.20}$$

pri čemu smo uveli oznaku

$$G^\nu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \Psi_\mu.$$

Drugi integral u izrazu za varijaciju δI integral je divergencije vektorskog polja po području Ω. Njega možemo pretvoriti u integral po rubu $\partial\Omega$ tog područja. To nam omogućava poopćeni Stokesov teorem o integraciji na topološkim mnogostrukostima koji se može, uz danu metriku, prikazati u obliku Gauss-Ostrogradskyjevog teorema [19, 20]. Primjenom tog rezultata na četverodimenzijski prostor Minkowskog s metrikom (2.24) izraz (3.20) postaje

$$\delta I = \varepsilon \int\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] \Psi_\mu \mathrm{d}^4 x + \varepsilon \int\limits_{\partial\Omega} n_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \Psi_\mu \mathrm{d}S, \tag{3.21}$$

gdje je n_ν jedinični vektor normale na rub[7] $\partial\Omega$, a $\mathrm{d}S$ odgovarajući element površine.

[7]Zbog činjenice da skalarni umnožak u prostoru Minkowskog nije definiran kao nenegativan, normala nije nužno orijentirana „prema van” u odnosu na površinu $\partial\Omega$ kako bismo mogli očekivati. Detalji koji se toga tiču

Treći korak. Hamiltonovo načelo zahtijeva

$$\delta I = 0 \tag{3.22}$$

za sve moguće vektore $\Psi_\mu(x^\nu)$, što je ujedno i nužan uvjet za ekstrem funkcionala I. Razmotrimo najprije one Ψ_μ koje iščezavaju na rubu $\partial\Omega$,

$$\Psi_\mu(x^\nu) = 0, \quad x^\nu \in \partial\Omega, \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \tag{3.23}$$

Ovaj uvjet postavili bismo kod transformacije (3.12) da postoje nametnuti rubni uvjeti za polje A_μ. Za takve Ψ_μ drugi integral u jednadžbi (3.21) jednak je nuli, a zatim iz $\delta I = 0$ slijedi

$$\int\limits_\Omega \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \right] \Psi_\mu \mathrm{d}^4 x = 0. \tag{3.24}$$

Fundamentalna lema varijacijskog računa nalaže: kako bi ovaj integral iščezavao za proizvoljne vektore Ψ_μ unutar Ω, izraz u uglatim zagradama mora biti jednak nuli u svakoj točki unutar Ω. Time smo došli do Euler-Lagrangeovih jednadžbi za polje A_μ (3.11).

Promotrimo sada što ako Ψ_μ ne zadovoljavaju uvjet (3.23). Čak i tada Euler-Lagrangeove jednadžbe moraju vrijediti[8]. Uvrstimo li ih u jednadžbu (3.20) ili (3.21), iz $\delta I = 0$ slijede jednadžbe koje sadržavaju tzv. prirodne rubne uvjete za polje A_μ. Dakle, u izrazima (3.20) i (3.21) oba integrala moraju iščezavati da bi varijacija djelovanja bila jednaka nuli za proizvoljni Ψ_μ.

Da bismo dovršili primjenu Hamiltonovog načela na klasičnu elektrodinamiku, preostaje nam uvesti lagranžijan $\mathcal{L}$ za fizički sustav koji promatramo[9]. Taj lagranžijan konstruira se heuristički: traži se Lorentzov skalar koji uvrštavanjem u Euler-Lagrangeove jednadžbe daje upravo Maxwellove jednadžbe [6, 10, 18]. Lagranžijan elektromagnetskog polja uz vezanje s izvorima u SI sustavu jedinica dan je izrazom

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_\rho J^\rho. \tag{3.25}$$

Pažljivim računom pokaže se da su derivacije koje se javljaju u Euler-Lagrangeovim

izlaze iz okvira ovog rada, a mogu se naći npr. u [19, 20].

[8]Radi jasnoće proširimo argumentaciju. Ponovimo: zahtijevamo $\delta I = 0$ za svaki mogući vektor Ψ_μ. Pretpostavimo da Euler-Lagrangeove jednadžbe nisu zadovoljene na Ω,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)} \neq 0.$$

Tada za one Ψ_μ koje iščezavaju na rubu $\partial\Omega$ ne bi moglo biti zadovoljeno $\delta I = 0$. Tražimo, dakle, uniju uvjeta pod kojima vrijedi $\delta I = 0$ za različite Ψ_μ.

[9]Fizički sustav definirali smo na početku potpoglavlja 2.2.

jednadžbama (3.11) za ovaj lagranžijan jednake

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} = -J^\mu, \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu A_\mu\right)} = -\frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu}. \tag{3.26}$$

Uvrštavanjem u (3.11) dobijemo dinamičke Maxwellove jednadžbe u kovarijantnom obliku,

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} = \mu_0 J^\mu, \tag{3.27}$$

dok je druga skupina Maxwellovih jednadžbi, onih homogenih (2.37), zadovoljena automatski relacijom (2.33).

Pomoću sljedećeg prikaza osvrnimo se na glavne rezultate iznesene u ovom poglavlju.

Hamiltonovo načelo u klasičnoj elektrodinamici
↙ ↘
Euler-Lagrangeove jednadžbe za polje A_μ | integral divergencije (integral po rubu)
↓
dinamičke Maxwellove jednadžbe

Slika 1: *Shematski prikaz primjene Hamiltonovog načela u klasičnoj elektrodinamici.*

U literaturi se lijeva strana gornje skice predstavlja kao rezultat direktne primjene Hamiltonovog načela na elektrodinamiku. Integral po rubu promatranog područja iz jednadžbe (3.21) najčešće se zanemaruje zbog zahtjeva da se polje ne varira na rubu — zahtjeva koji mi pak nismo nametnuli. Svejedno, vidimo da nas ovaj put ne može dovesti do željenog cilja, Poyntingovog teorema. Emmy Noether je prije nešto više od stotinu godina pokazala da se iz varijacijskog načela ipak može doći do zakona očuvanja. Upoznajmo se sada s proslavljenim teoremima *madam* Noether.

4 Prvi Noetherin teorem

4.1 *Invarijantni varijacijski problemi* iz 1918.

Njemačka matematičarka Amalie Emmy Noether (1882. – 1935.) 1918. je godine u članku pod naslovom *Invarijantni varijacijski problemi* (njem. *Invariante Variationsprobleme*) povezala zakone očuvanja i simetrije u varijacijskim problemima. Ta veza postala je kamen temeljac za izgradnju modernih teorija u fizici. Njezin članak sadrži iskaz i dokaze dvaju teorema i njihovih obrata. Oni su proizašli, kako kaže, iz „kombinacije metoda formalnog varijacijskog računa i Liejeve teorije grupa" [21].

Noetherino istraživanje koje je rezultiralo ovim člankom potakli su matematičari Felix Klein (1849. – 1925.) i David Hilbert (1862. – 1943.). Oni su 1915. godine pozvali Noether u Göttingen da pomogne razjasniti pitanja o zakonu očuvanja energije koja su se pojavila u tada novoj Einsteinovoj općoj teoriji relativnosti. Noether u svom članku tvrdi da metode koje koristi nisu potpuno nove. Već su njezini prethodnici u klasičnoj i relativističkoj mehanici proučavali vezu invarijantnosti i očuvanih veličina, što Noether na početku članka uredno priznaje. Ono što je pak Noetherine teoreme činilo originalnima jest općenitost prvog teorema i njegovog obrata, dok je drugi teorem s obratom bio potpuno nov rezultat [22].

Povijest prepoznavanja i razumijevanja koju su Noetherini teoremi proživjeli tijekom 20. stoljeća pomalo je neočekivana s obzirom na njihovu današnju slavu. Osim nekoliko referenci početkom 20-ih godina, znanstvena je literatura do 50-ih o njima većinom šutjela. Između 50-ih i 80-ih godina Noetherin rezultat iskazivao se gotovo uvijek necjelovito i manjkavo, nauštrb njegove visoke općenitosti. Yvette Kosmann-Schwarzbach, jedna od vodećih povjesničarki Noetherinog rada, u svojoj knjizi [23] navodi velik broj primjera u kojima zaključuje da autori koji citiraju Noether uopće nisu pročitali originalni članak. Ona identificira „krivca s dobrom namjerom" za tu pojavu među fizičarima. U nastojanju da studentima matematičke fizike olakša pristup Noetherinom radu, Edward Lee Hill (1904. – 1974.) u članku [24] iz 1951. godine krnje iskazuje njene rezultate: potpuno ignorira drugi teorem, a prvi izriče samo u najjednostavnijem posebnom slučaju. Hillov rad sljedećih tridesetak godina ostaje posrednikom između Noether i zajednice fizičara. Valjano razmijevanje Noetherinih teorema naznačila je tek pojava pravih poopćenja i novih primjena 70-ih godina prošlog stoljeća. Noether se nakon dovršenja *Invarijantnih varijacijskih problema* nije vraćala u područje kojem članak pripada niti se zadržavala na primjenama u fizici. Taj je rad smatrala odmakom od svog glavnog matematičkog poziva — izgradnje opće, apstraktne algebre [23].

Često se danas ovo Noetherino postignuće spominje kao „Noetherin teorem" (u jednini), dok se pritom najčešće misli na prvi iskazani teorem [23]. Iako mu je ime danas proslavljeno, postoji literatura pisana unutar posljednjih nekoliko desetljeća u kojoj se iz nevaljale primjene prvog Noetherinog teorema još uvijek nazire nepotpuno razumijevanje ili poznavanje istog [15].

4.2 Iskazi dvaju teorema i Noetherin identitet

U prvom poglavlju svog članka Noether definira pojmove koje koristi, a zatim formulira dva teorema[1]. Prisjetimo se najprije da *grupom* nazivamo uređeni par $(G, \circ)$ nepraznog skupa G i binarne operacije $\circ : G \times G \to G$ za koji vrijede tri aksioma[2]: (1) asocijativnost, (2) postojanje neutralnog elementa i (3) invertibilnost svakog elementa [25]. Noether govori o *grupi transformacija* u kojoj ulogu binarne operacije ima kompozicija dviju transformacija. Takvu grupu naziva *konačnom kontinuiranom* i označava s G_ρ ako njezini elementi ovise o ρ realnih parametara ε. U slučaju da transformacije ovise o ρ proizvoljnih realnih funkcija $p(x)$ i njihovim derivacijama, grupu naziva *beskonačnom kontinuiranom* i koristi oznaku $G_{\infty\rho}$. Ako pak transformacije ovise ne samo o realnim parametrima nego i o proizvoljnim funkcijama, tada se grupa naziva *miješanom*.

Noether promatra višestruki integral

$$I = \int \cdots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) \mathrm{d}x \tag{4.1}$$

gdje podintegralna funkcija f ovisi o n nezavisnih varijabli $x_1, \dots, x_n$ te μ funkcija $u_1(x), \dots, u_\mu(x)$ i njihovih derivacija do proizvoljnog, ali konačnog reda[3]. Izložimo li ovaj integral općim transformacijama grupe, zavisne i nezavisne varijable mijenjaju se na način[4]

$$\begin{aligned} y_i &= A_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right), \quad i = 1, \dots, n, \\ v_i(y) &= B_i\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots\right), \quad i = 1, \dots, \mu. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Noether definira da je integral I *invarijanta grupe* ako vrijedi

$$\begin{aligned} I &= \int \cdots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) \mathrm{d}x \\ &= \int \cdots \int f\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \dots\right) \mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{4.3}$$

pri čemu se integrira po proizvoljnom realnom području, odnosno onome koje nakon transformacije njemu odgovara. Noether ne koristi moderni pojam „simetrija" ili „transformacija simetrije", nego pojmove „invarijanta [grupe]" ili „invarijantan [s obzirom na

[1] Koristili smo engleski prijevod Noetherinog članka [21] koji se nalazi u prvom dijelu knjige Yvette Kosmann-Schwarzbach [23].

[2] Ponekad se govori o četiri aksioma grupe pri čemu se dodaje uvjet zatvorenosti. On je, međutim, uključen po definiciji binarne operacije.

[3] Slično kao ranije, koristi se pokrata $\mathrm{d}x = \mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_n$, a oznaka $\frac{\partial u}{\partial x}$ predstavlja sve kombinacije $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$. Analogno vrijedi za derivacije višeg reda.

[4] Iako nije eksplicitno naznačena, ovisnost transformacija o parametrima ε odnosno funkcijama $p(x)$ se podrazumijeva.

grupu transformacija]". Danas su tvrdnje „transformacija T je simetrija integrala I" i „integral I invarijantan je na transformaciju T" istoznačne[5] [23].

U pripremi za iskaz teorema preostalo nam je još uvesti pojam *Lagrangeovih izraza*. U Noetherinom tekstu oni se odnose na lijevu stranu Euler-Lagrangeovih jednadžbi koje proizlaze iz varijacijskog problema $\delta I = 0$ za promatrani integral[6]. Sada možemo citirati dva Noetherina teorema:

> **I.** *Ako je integral I invarijantan s obzirom na grupu G_ρ, onda postoji ρ linearno nezavisnih kombinacija Lagrangeovih izraza koje postaju divergencije*[7] *— i obratno, to implicira invarijantnost integrala I s obzirom na G_ρ. Teorem vrijedi i u graničnom slučaju beskonačnog broja parametara.*
>
> **II.** *Ako je integral I invarijantan s obzirom na grupu $G_{\infty\rho}$ koja ovisi o proizvoljnim funkcijama i njihovim derivacijama do reda σ, onda postoji ρ identiteta s Lagrangeovim izrazima i njihovim derivacijama do reda σ. I ovdje vrijedi obrat.*
>
> *Za miješane grupe ove tvrdnje također vrijede; tada se identiteti dobivaju neovisno o relacijama s divergencijama*[8].

Treba istaknuti da je početna pretpostavka u ovim tvrdnjama *egzaktna* invarijantnost integrala I, tj. uvjet (4.3). Noether u sljedećim poglavljima iznosi dokaz teorema i njihovih obrata. Uočimo da u iskazima nema spomena zakona očuvanja. Tek u nastavku ona smješta rezultat u kontekst varijacijskog problema $\delta I = 0$. Dakle, razmatra dodatnu pretpostavku: *ako uzmemo da vrijede Euler-Lagrangeove jednadžbe (Lagrangeovi izrazi postaju jednaki nuli), onda iz Teorema I slijede jednadžbe u kojima je divergencija određene veličine jednaka nuli.* Te jednadžbe u fizici zovemo zakonima očuvanja.

Dokaz prvog smjera obaju teorema počinje na isti način. Noether kreće s infinitezimalnim transformacijama iz grupe G

$$
\begin{aligned}
y_i &= x_i + \delta x_i, \\
v_i(y) &= u_i + \delta u_i,
\end{aligned}
\tag{4.4}
$$

gdje su δx_i i δu_i linearni po ε, odnosno $p(x)$ i njihovim derivacijama[9]. Bitno je pritom naglasiti

[5]Pojam simetrije u fizici koristi se, kako u pisanom tako i u usmenom izražavanju, u više srodnih značenja i rijetko se precizno definira. U najširem smislu simetrija je sinonim za invarijantnost, tj. svojstvo da prilikom neke promjene nešto ostaje nepromijenjeno. Kako sužavamo značenje, tako se ona počinju razilaziti pa se simetrijom zna nazivati i transformacija koja neku veličinu ostavlja nepromijenjenom i veličina koja prilikom dane transformacije ostaje nepromijenjena.

[6]Noether u uvodnom dijelu članka iznosi glavne korake i rezultate standardnog varijacijskog postupka. Njezina jednadžba (5) ekvivalentna je našoj jednadžbi (3.20).

[7]Ovdje je divergencija neke vektorske veličine $A = (A_1, \ldots, A_n)$ definirana kao $\mathrm{Div}A = \dfrac{\partial A_1}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial A_n}{\partial x_n}$.

[8]Vidi original [21], str. 238–239 ili engleski prijevod u [23], str. 6.

[9]Pretpostavimo da transformacija identitete, koja predstavlja neutralni element grupe, odgovara vrijednosti

da Noether razlikuje dva tipa inkrementa zavisne varijable,

$$\delta u_i = v_i(y) - u_i(x), \tag{4.5}$$

$$\bar{\delta} u_i = v_i(x) - u_i(x) = \delta u_i - \sum_{k=1}^{\mu} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\, \delta x_k. \tag{4.6}$$

Prvi izraz potječe iz transformacije (4.4), a drugi označava varijaciju zavisne varijable s obzirom na početne koordinate, tj. promjenu u odnosu na istu točku u promatranom realnom području[10]. Dio dokaza koji je zajednički obama teoremima završava ključnom relacijom označenom brojem (12) koja se često naziva *Noetherinim identitetom.* Ovdje ćemo samo naznačiti njegov oblik:

$$\sum \underbrace{[\ldots]}_{\text{Lagrangeovi izrazi}} \bar{\delta} u_i = \mathrm{Div}\underbrace{[\ldots]}_{\text{određena veličina}}. \tag{4.7}$$

Veličina čija divergencija stoji u Noetherinom identitetu naziva se *Noetherinom strujom.* U nastavku ćemo iskazati ovaj identitet primijenjen na klasičnu elektrodinamiku. On predstavlja polazište za pronalazak zakona očuvanja koji nas zanima.

4.3 Primjena u klasičnoj elektrodinamici bez izvora

Ponovimo da je cilj ovog rada pokazati kako Poyntingov teorem proizlazi iz varijacijskog načela kao što je Hamiltonovo. U tome će nam kao posrednik pomoći prvi Noetherin teorem. Njegovu primjenu na klasičnu elektrodinamiku izvršit ćemo u dva dijela. U ovom potpoglavlju, koje čini prvi dio, ograničit ćemo se na sustav elektromagnetskih polja u prostoru bez naboja. Nakon što smjestimo Noetherine veličine u kontekst elektrodinamike, provest ćemo dva koraka: prvo ćemo dobiti izraz za tenzor energije i zaleta $T^{\mu\nu}$ (2.39), a zatim doći do Poyntingovog teorema u slučaju bez naboja (2.18).

Ulogu Noetherinog integrala I u klasičnoj elektrodinamici preuzima funkcional djelovanja (3.10). Zamjenom

$$f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \ldots\right) \longrightarrow \mathcal{L}(x^\nu, A_\mu, \partial_\nu A_\mu)$$

parametara $\varepsilon = 0$, odnosno funkcija $p(x) = 0$, $\frac{\partial p(x)}{\partial x} = 0, \ldots$ Tada je moguće razviti u Taylorov red funkcije A_i i B_i iz (4.2) oko tih vrijednosti. Zadržimo li članove do uključivo linearnih po parametrima, odnosno funkcijama, dobit ćemo transformacije koje zovemo infinitezimalnima. Noetherine originalne oznake Δx i Δu zamijenili smo oznakama δx i δu. Spomenimo kako pretpostavka da funkcije $p(x)$ ne ovise o zavisnim varijablama u_i i njihovim derivacijama ne predstavlja restrikciju. Noether to pokazuje u dokazu obrata drugog teorema.

[10]Prvi dio jednadžbe (4.6) definicija je varijacije $\bar{\delta} u_i$ dok je drugi dio relacija koja ju povezuje s δu_i. Tu relaciju možemo izvesti tako da krenemo od definicije δu_i, u izraz dodamo nulu, razvijemo $v_i(y)$ u Taylorov red oko $y = x$ i cijelim postupkom zadržavamo samo članove linearne po parametrima transformacije (vidi [16], str. 170):

$$\delta u_i = v_i(y) - u_i(x) = [v_i(y) - v_i(x)] + [v_i(x) - u_i(x)] = \sum_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(y_k - x_k) + \bar{\delta} u_i = \sum_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\delta x_k + \bar{\delta} u_i.$$

smještamo se u poseban slučaj kada podintegralna funkcija f (lagranžijan) ovisi o derivacijama zavisne varijable do uključivo prvog reda. Elektrodinamiku u prostoru bez izvora opisuje lagranžijan

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \tag{4.8}$$

Za transformacije koordinata i polja koristimo analogne oznake:

$$\delta x_\nu = x^*_\nu - x_\nu, \tag{4.9}$$

$$\delta A_\mu = A^*_\mu(x^*) - A_\mu(x), \tag{4.10}$$

$$\bar{\delta} A_\mu = A^*_\mu(x) - A_\mu(x) = \delta A_\mu - \delta x_\rho \, \partial^\rho A_\mu. \tag{4.11}$$

Konačno, Noetherin identitet u ovoj teoriji glasi [26]

$$\left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\right] \bar{\delta} A_\mu + \partial_\nu \left[\eta^{\nu\rho} \mathcal{L} \, \delta x_\rho + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)} \, \bar{\delta} A_\mu\right] = 0. \tag{4.12}$$

U prvim uglatim zagradama prepoznajemo lijevu stranu Euler-Lagrangeovih jednadžbi (3.11), tj. Lagrangeove izraze za koje uvodimo pokratu $\mathcal{E}^\mu$. Druga uglata zagrada nosi Noetherinu struju $\mathcal{N}^\nu$ iz koje će proizaći tenzor energije i zaleta $T^{\mu\nu}$ (2.39). S tim oznakama Noetherin identitet (4.12) poprima kraći oblik:

$$\mathcal{E}^\mu \, \bar{\delta} A_\mu + \partial_\nu \mathcal{N}^\nu = 0. \tag{4.13}$$

4.3.1 Tenzor energije i zaleta

U ovom odjeljku predstavit ćemo rezultat koji su nedavno objavili Baker i dr. [26]. Oni su na primjeru elektrodinamike bez izvora suprotstavili dvije metode za izvod tenzora energije i zaleta iz Noetherinog teorema. Prva metoda u literaturi se češće susreće. U njoj se koriste translacijske simetrije koje vode do tzv. kanonskog tenzora. Taj tenzor pak po svojim svojstvima nije fizički prihvatljivo rješenje pa nužno podliježe *ad hoc* popravcima koji vode do valjanog tenzora (2.39). Ova metoda ostavlja dojam da slavni Noetherin teorem zakazuje — i to ni manje ni više nego u primjeni na teoriju koja predstavlja prototip za sve teorije u fizici.

Srećom, druga metoda, znatno manje česta u literaturi i stara čak stotinu godina, to demantira. Baker i dr. u svom su članku oživjeli postupak koji je prvi proveo njemački matematičar Erich Bessel-Hagen (1898. – 1946.) još 1921. godine [27]. Osim što je proširio iskaz Noetherinog teorema tako da vrijedi za invarijantnost *do na divergenciju*[11], Bessel-Hagen je proveo primjenu Noetherinog rezultata na Maxwellovu teoriju. Ovom metodom direktno se dobije poznati prihvaćeni tenzor energije i zaleta. Ključ je u tome da treba uzeti širu klasu simetrija u odnosu na prvu metodu: treba uključiti i baždarne transformacije polja.

[11] Bessel-Hagen tvrdi da ovo poopćenje duguje konzultacijama s Emmy Noether osobno [27]. Ostaje upitno u

Noetherina struja u identitetu (4.12) ovisi o koordinatnim transformacijama δx_ν i transformacijama polja $\bar{\delta} A_\mu$. Pokazalo se da potpun skup simetrija za primjenu Noetherinog rezultata čine tri vrste transformacija polja:

$$\begin{aligned}\bar{\delta} A_\mu &= \delta_{\mathrm{C}} A_\mu + \delta_{\mathrm{T}} A_\mu + \delta_{\mathrm{G}} A_\mu \\ &= -\delta x_\rho\, \partial^\rho A_\mu - A_\rho\, \partial_\mu \delta x^\rho + \partial_\mu \phi. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Prva dva doprinosa odražavaju utjecaj koordinatnih transformacija δx_ν na promjenu polja. *Kanonske* transformacije $\delta_{\mathrm{C}} A_\mu = -\delta x_\rho\, \partial^\rho A_\mu$ susreli smo već u izrazu (4.11), odnosno (4.6). *Kontragredijentne*[12] transformacije $\delta_{\mathrm{T}} A_\mu = -A_\rho \partial_\mu \delta x^\rho$ proizlaze iz definicijskih svojstava kontravarijantnih i kovarijantnih tenzora. Njihov doprinos u slučaju izvoda tenzora energije i zaleta iščezava jer ćemo promatrati četveroparametarsku Poincaréovu translaciju $\delta x^\rho = a^\rho$. Uzmemo li u obzir samo kanonski doprinos i uvrstimo $\bar{\delta} A_\mu = \delta_{\mathrm{C}} A_\mu$ u Noetherin identitet (4.12), za Noetherinu struju dobivamo

$$\mathcal{N}^\nu = \left[\eta^{\nu\rho}\mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\nu A_\mu)}\partial^\rho A_\mu\right]\delta x_\rho = T_{\mathrm{C}}^{\nu\rho}\, \delta x_\rho. \tag{4.15}$$

$T_{\mathrm{C}}^{\nu\rho}$ označuje *kanonski* tenzor energije i zaleta koji nakon uvrštavanja izraza za lagranžijan (4.8) i njegove derivacije[13] glasi:

$$T_{\mathrm{C}}^{\nu\rho} = \frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} \partial^\rho A_\mu - \frac{1}{4\mu_0} \eta^{\nu\rho} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{4.16}$$

Ovom tenzoru nedostaju nužna svojstva: nije simetričan, nije baždarno invarijantan te mu trag ne iščezava[14]. Zbog toga mu se naknadno dodaju članovi koji ne utječu na njegovu divergenciju, tj. zakon očuvanja, a koji vode do željenih svojstava. Ovakvi postupci simetrizacije[15] kao cilj postižu tenzor $T^{\mu\nu}$ (2.39), ali u trenutku umetanja dodatnih članova prekidaju izravnu vezu s Noetherinim teoremom. Kanonska procedura s popravcima koju smo upravo opisali jest prva, češća metoda izvoda tenzora $T^{\mu\nu}$ na temelju Noetherinog rada.

Treći doprinos u (4.14) odnosi se na *baždarne* transformacije polja $A^*_\mu = A_\mu + \partial_\mu \phi$ koje

kojoj bi mjeri trebalo zadužiti Noether za taj rezultat [23]. Ovom poopćenju vratit ćemo se kasnije.

[12] Bessel-Hagen ove transformacije izvorno tako naziva (njem. *kontragredient*), a zapisane su u njegovom članku [27] u jednadžbi (18). One se mogu izvesti na sljedeći način. Prvo izračunamo δA_μ koristeći definiciju kovarijantnog tenzora te infinitezimalne transformacije koordinata $x^{*\nu} = x^\nu + \delta x^\nu$:

$$\delta A_\mu = A^*_\mu(x^*) - A_\mu(x) = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{*\mu}} A_\nu(x) - A_\mu(x) = \left[\delta^\nu_\mu - \partial^*_\mu(\delta x^\nu)\right] A_\nu(x) - A_\mu(x) = -A_\nu \partial^*_\mu(\delta x^\nu).$$

Lako se pokaže da vrijedi $\partial_\mu = \partial^*_\mu + \partial_\mu(\delta x^\nu)\partial^*_\nu$. Budući da od početka pretpostavljamo da je δA_μ linearan po parametrima transformacije, ostavljamo samo članove linearne po δx^ν pa imamo $\delta A_\mu = -A_\nu \partial_\mu(\delta x^\nu)$.

[13] I u ovom slučaju vrijedi desna jednadžba u (3.26).

[14] Tenzor energije i zaleta mora biti simetričan na zamjenu indeksa radi zakona očuvanja zamaha; baždarno invarijantan mora biti kao fizička opservabla, dok je svojstvo traga jednakog nuli povezano sa zahtjevom da je masa fotona jednaka nuli [6].

[15] Primjeri takvih postupaka mogu se naći u [6, 10, 26].

također spadaju u simetrije lagranžijana (4.8). Budući da ovdje inkrement polja $\delta_{\mathrm{G}} A_\mu = \partial_\mu \phi$ ovisi o derivaciji proizvoljne funkcije, ove transformacije ukazuju na beskonačnu kontinuiranu grupu i primjenu drugog Noetherinog teorema. Međutim, Bessel-Hagen je pokazao da je uključivanje baždarnih transformacija ključno za izvod pogodnog tenzora energije i zaleta te potpunog skupa zakona očuvanja iz prvog Noetherinog teorema. Njegova metoda počiva na činjenici da je iz beskonačne kontinuirane grupe moguće izdvojiti konačnu grupu tako da se odabere funkcija ϕ koja ovisi o konačnom broju parametara [27]. Ovim trikom ostajemo unutar okvira prvog Noetherinog teorema.

Bessel-Hagen je primjenu prvog Noetherinog teorema na elektrodinamiku započeo s kanonskim i kontragredijentnim transformacijama. Zatim je uočio glavni problem: izraz za Noetherinu struju eksplicitno je sadržavao četveropotencijal. Rješenju je pristupio na način da je uključio baždarne transformacije polja, a zatim baždarnu funkciju odredio tako da Noetherina struja bude baždarno invarijantna, tj. da se četveropotencijal javlja samo unutar tenzora elektromagnetskog polja $F^{\mu\nu}$. Prema tome, raspišemo li Noetherinu struju $\mathcal{N}^\nu$ iz (4.12) koristeći (4.14) za $\bar{\delta} A_\mu$, lako uočimo da baždarnu invarijantnost postižemo izborom

$$\phi = A_\rho \delta x^\rho. \tag{4.17}$$

Vraćanje gornjeg izraza u potpun skup transformacija (4.14) daje:

$$\begin{aligned}
\bar{\delta} A_\mu &= -\delta x_\rho \, \partial^\rho A_\mu - A_\rho \, \partial_\mu \delta x^\rho + \partial_\mu \left(A_\rho \delta x^\rho \right) \\
&= -\delta x_\rho \, \partial^\rho A_\mu - A_\rho \, \partial_\mu \delta x^\rho + A_\rho \, \partial_\mu \delta x^\rho + \delta x^\rho \, \partial_\mu A_\rho \\
&= -\left(\partial^\rho A_\mu - \partial_\mu A^\rho \right) \delta x_\rho \\
&= -F^\rho_{\ \mu} \, \delta x_\rho.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

Konačno, uvrstimo li dobivene transformacije (4.18) i lagranžijan za elektrodinamiku bez izvora (4.8) u (4.12), za Noetherinu struju direktno dobivamo

$$\mathcal{N}^\nu = T^{\nu\rho} \, \delta x_\rho, \tag{4.19}$$

gdje je $T^{\nu\rho}$ pravi, fizički prihvatljiv tenzor energije i zaleta,

$$T^{\nu\rho} = \frac{1}{\mu_0} F^{\nu\mu} F^\rho_{\ \mu} - \frac{1}{4\mu_0} \eta^{\nu\rho} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}. \tag{4.20}$$

Ovime je završen pregled druge metode kojom se ovaj tenzor izvodi iz Noetherinog teorema. Glavnu ulogu odigrale su prave transformacije (4.18). One su rezultat miješanja koordinatnih i baždarnih simetrija lagranžijana (4.8). Uz to što metoda direktno vodi do pravog tenzora, Baker i dr. [26] njezinu ispravnost dodatno potkrepljuju: krenemo li s poznatim tenzorom (4.20) putem obrata prvog Noetherinog teorema, dobiju se upravo transformacije (4.18).

4.3.2 Zakon očuvanja energije

Noetherin identitet (4.13) s uvrštenom transformacijom (4.18) i Noetherinom strujom (4.19) sada glasi

$$\mathcal{E}^\mu(-F^\rho_{\ \mu}\,\delta x_\rho) + \partial_\nu(T^{\nu\rho}\,\delta x_\rho) = 0. \tag{4.21}$$

Ovaj rezultat Bessel-Hagenove metode omogućava nam da potpuno iscrpimo simetrije sustava kojeg promatramo. Jedino što nam preostaje jest odabrati koordinatne transformacije. Za potrebe ovog rada uzmimo samo četveroparametarsku Poincaréovu translaciju[16],

$$\delta x_\rho = a_\rho, \tag{4.22}$$

gdje proizvoljna realna konstanta a_ρ preuzima ulogu Noetherinih parametara ε. Jednadžba (4.21) prelazi u

$$\begin{aligned} &a_\rho\left(-\mathcal{E}^\mu F^\rho_{\ \mu} + \partial_\nu T^{\nu\rho}\right) = 0 \\ &\Rightarrow \qquad \mathcal{E}^\mu F^\rho_{\ \mu} = \partial_\nu T^{\nu\rho}, \qquad \rho = 0,1,2,3 \end{aligned} \tag{4.23}$$

zbog linearne nezavisnosti parametara a_ρ. Jednadžba (4.23) sadrži četiri *linearno nezavisne kombinacije Lagrangeovih izraza koje su postale [jednake] divergencijama*, kako stoji u iskazu prvog Noetherinog teorema. Ovom relacijom završava njegova primjena na elektrodinamiku bez izvora.

Dosad smo se bavili — kako Bessel-Hagen sam kaže — „čisto formalnim identitetima", a sada preko Lagrangeovih izraza uvodimo fiziku. Funkcional djelovanja koji je dosad stajao u ulozi Noetherinog integrala I,

$$I[A_\mu] = \int\limits_\Omega \mathcal{L}(x^\nu, A_\mu, \partial_\nu A_\mu)\,\mathrm{d}^4x = \int\limits_\Omega -\frac{1}{4\mu_0}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,\mathrm{d}^4x, \tag{4.24}$$

gdje je

$$\Omega = [(x^0)_1, (x^0)_2] \times V, \quad V \subseteq \mathbb{R}^3, \tag{4.25}$$

stavljamo u kontekst standardnog varijacijskog problema $\delta I = 0$. Drugim riječima, integral ćemo podvrgnuti Hamiltonovom načelu: želimo li da polje A_μ opisuje fizički sustav, varijacija djelovanja (4.24) s obzirom na A_μ mora iščezavati. Već smo se uvjerili da iz tog zahtjeva proizlazi da A_μ mora zadovoljavati Euler-Lagrangeove jednadžbe (3.11). Uvrštavanjem lagranžijana iz (4.24) one glase

$$\mathcal{E}^\mu = \frac{1}{\mu_0}\partial_\nu F^{\nu\mu} = 0, \quad \mu = 0,1,2,3, \tag{4.26}$$

[16]Primjenom Noetherinog teorema na elektrodinamiku Bessel-Hagen je pronašao 15 zakona očuvanja koji se pridružuju 15-parametarskoj *konformnoj* (eng. *conformal*) grupi [26, 27].

što odgovara Maxwellovim jednadžbama (2.36) uz $J^\nu = 0$. Sada jednadžba (4.23) postaje zakon očuvanja energije i zaleta za sustav elektromagnetskih polja u prostoru bez naboja,

$$\partial_\nu T^{\nu\rho} = 0, \quad \rho = 0, 1, 2, 3. \tag{4.27}$$

Promotrimo li samo vremensku komponentu $\rho = 0$ te iskoristimo eksplicitno izračunate elemente tenzora $T^{\nu\rho}$ iz (2.40), na lijevoj strani dobivamo

$$\begin{aligned}\partial_\nu T^{\nu 0} &= \partial_0 T^{00} + \partial_1 T^{10} + \partial_2 T^{20} + \partial_3 T^{30} \\ &= -\frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{S_x}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{S_y}{c}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{S_z}{c}\right) \\ &= -\frac{1}{c}\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S}\right),\end{aligned} \tag{4.28}$$

gdje je u gustoća energije (2.15), a $\mathbf{S}$ Poyntingov vektor (2.16). Konačni rezultat možemo sažeti ovako: ***invarijantnost*** *na vremensku translaciju* ***i stacionarnost*** *djelovanja* (4.24) *vode do lokalnog zakona očuvanja energije za sustav elektromagnetskih polja u prostoru bez naboja*,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = 0. \tag{4.29}$$

Imajmo na umu da pritom presudnu ulogu ima i baždarna invarijantnost djelovanja (4.24)!

4.4 Primjena u klasičnoj elektrodinamici s izvorima

Prelazimo na drugi dio primjene prvog Noetherinog teorema na klasičnu elektrodinamiku. U sustav koji promatramo sada želimo uvesti naboj. Za slobodno elektromagnetsko polje Bessel--Hagen izjednačuje Lagrangeove izraze $\mathcal{E}^\mu$ s nulom kao u (4.26). Međutim, u slučaju kada promatrano područje sadrži naboje, izjednačuje ih s gustoćom struje J^μ,

$$\mathcal{E}^\mu = J^\mu. \tag{4.30}$$

Na taj korak upućuje i Noether u svom članku[17]. Postupimo li tako, jednadžba (4.23) daje

$$\partial_\nu T^{\nu\rho} = J^\mu F^\rho_{\ \mu}, \quad \rho = 0, 1, 2, 3, \tag{4.31}$$

što jest zakon očuvanja energije i zaleta za sustav elektromagnetskih polja u prostoru s nabojima (2.42). Za $\rho = 0$ na desnoj strani gornje jednadžbe imamo

$$J^\mu F^0_{\ \mu} = \frac{1}{c}\,\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}, \tag{4.32}$$

[17] Doduše usputno, u fusnoti 15 na 12. stranici prijevoda [23].

što uz (4.28) daje Poyntingov teorem s izvorima u diferencijalnom obliku,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{S} = -\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}. \tag{4.33}$$

Stigli smo do željenog rezultata, ali preostaje nam opravdati način na koji smo uveli izvore. Budući da su Lagrangeovi izrazi $\mathcal{E}^{\mu}$ u (4.26) izračunati na temelju lagranžijana *bez izvora*,

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \tag{4.34}$$

Bessel-Hagenova jednakost $\mathcal{E}^{\mu} = J^{\mu}$ zapravo predstavlja jednadžbe gibanja *s izvorima* — Maxwellove jednadžbe (2.36),

$$\partial_{\nu} F^{\nu\mu} = \mu_0 J^{\mu}. \tag{4.35}$$

Poyntingov teorem s izvorima možemo izvesti i na nešto drugačiji način: raspišemo li derivaciju tenzora $\partial_{\nu} T^{\nu\rho}$ koja se nalazi s desne strane jednadžbe (4.23) i potom iskoristimo Maxwellove jednadžbe s izvorima (2.36) i (2.38), dobit ćemo zakon očuvanja (4.31) [6, 15, 17]. Sličnost obaju postupaka je u tome da se izvori uvode pomoću jednadžbi gibanja koje ih sadrže.

Teško je zanemariti nedosljednost u ovom računu: primjenu prvog Noetherinog teorema od početka temeljimo na simetrijama lagranžijana (4.34), a na kraju koristimo jednadžbe gibanja koje ne proizlaze iz stacionarnosti djelovanja s tim lagranžijanom, nego s onim koji sadrži i vezanje polja s nabojima,

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4\mu_0} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - A_{\rho} J^{\rho}. \tag{4.36}$$

Nameće se pitanje: kako na izravniji, potpuno konzistentan način iz prvog Noetherinog teorema doći do Poyntingovog teorema s izvorima?

Ako pak krenemo s lagranžijanom (4.36), Noetherin teorem ne možemo primijeniti koristeći Bessel-Hagenovu metodu jer taj lagranžijan nije potpuno invarijantan na baždarne transformacije. Izvršimo li transformaciju $A^{*}_{\mu} = A_{\mu} + \partial_{\mu}\phi$, lagranžijan (4.36) prelazi u

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{*} &= \mathcal{L} - J^{\rho}\, \partial_{\rho}\phi \\ &= \mathcal{L} - \partial_{\rho}\left(\phi J^{\rho}\right) + \phi\, \partial_{\rho} J^{\rho}. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Ako vrijedi jednadžba kontinuiteta za naboj, $\partial_{\rho} J^{\rho} = 0$, onda je lagranžijan (4.36) invarijantan *do na divergenciju* s obzirom na baždarne transformacije.

Već smo ranije spomenuli da je Bessel-Hagen u svom članku iz 1921. godine iskazao Noetherine teoreme u nešto općenitijem obliku. Vratimo se na trenutak originalnoj Noetherinoj notaciji. Podintegralnu funkciju f u integralu I (4.1) nakon transformacije varijabli označimo s f^{*}. Bessel-Hagen za taj integral kaže da je *invarijantan do na* *divergenciju* s obzirom na infinitezimalne transformacije[18] (4.4) ako vrijedi

$$f^* = f + \mathrm{Div}\, C + \dots, \tag{4.38}$$

gdje je C izraz linearan po parametrima transformacije ε (odnosno funkcijama p i njihovim derivacijama), a trotočka označava članove višeg reda. Zatim daje izmijenjeni iskaz Noetherinih teorema:

> **I.** *Ako je integral I invarijantan do na divergenciju s obzirom na infinitezimalne transformacije konačne grupe G_ρ, onda postoji ρ linearno nezavisnih kombinacija Lagrangeovih izraza koje postaju divergencije.*
> **II.** *Invarijantnost integrala I do na divergenciju s obzirom na infinitezimalne transformacije grupe $G_{\infty\rho}$ daje ρ linearno nezavisnih identiteta s Lagrangeovim izrazima i njihovim totalnim derivacijama po x.*[19]

Bessel-Hagen je ovo poopćenje iskoristio da bi izveo zakone očuvanja za mehanički problem n tijela. Budući da je krenuo s lagranžijanom bez izvora (4.34), poopćenje nije primijenio i na elektrodinamiku. Mogućnost primjene poopćenog prvog Noetherinog teorema na lagranžijan s izvorima (4.36) potrebno je podrobnije istražiti. Do tada pitanje najizravnijeg mogućeg izvoda Poyntingovog teorema s izvorima iz prvog Noetherinog teorema ostaje otvoreno.

[18] Bessel-Hagen napominje da je ovaj tip invarijantnosti nužno povezati isključivo s infinitezimalnim transformacijama. Za razliku od egzaktne invarijantnosti, invarijantnost do na divergenciju s obzirom na infinitezimalne transformacije općenito ne povlači invarijantnost na grupu koju te transformacije generiraju.

[19] U članku je navedeno da vrijede i obrati ovih tvrdnji. Vidi [27], str. 261–263.

5 Zaključak

Hamiltonovo načelo u klasičnoj elektrodinamici ne vodi izravno do Poyntingovog teorema. Primjena tog načela provodi se standardnim varijacijskim postupkom u kojem se transformaciji izlaže samo polje A_μ. Iz nužnog uvjeta za ekstrem djelovanja proizlaze Euler-Lagrangeove jednadžbe, odnosno dinamičke Maxwellove jednadžbe. S druge strane, Noetherin postupak uz transformacije polja uključuje i transformacije prostorvremenskih koordinata x^ν. Njezini teoremi kažu što vrijedi ako je djelovanje invarijantno na takve transformacije. Tek spoj prvog Noetherinog teorema i Hamiltonovog načela daje zakone očuvanja.

Prvi Noetherin teorem primijenili smo na klasičnu elektrodinamiku u prostoru bez naboja slijedeći Bessel-Hagenovu metodu. Njezina bit sadržana je u dvama koracima: uključivanju baždarnih transformacija u potpun skup simetrija promatranog lagranžijana i izboru baždarne funkcije iz zahtjeva da Noetherina struja bude baždarno invarijantna. Na ovaj se način u Noetherinoj struji umjesto kanonskog, koji treba naknadno popravljati, pojavio pravi tenzor energije i zaleta $T^{\mu\nu}$. Nametnuvši uvjet da djelovanje koje promatramo bude stacionarno, iz invarijantnosti istog na Poincaréove translacije proizašao je zakon očuvanja energije i zaleta. U slučaju vremenskih translacija taj zakon poprima oblik Poyntingovog teorema bez izvora.

Poyntingov teorem s izvorima dobili smo izmjenom prethodnog postupka u zadnjem dijelu. Umjesto jednadžbi gibanja bez izvora, umetnuli smo Maxwellove jednadžbe s izvorima. Za razliku od izvoda Poyntingovog teorema bez izvora, ovaj izvod smatramo nekonzistentnim jer u pozadini stoje dva različita lagranžijana — u početku onaj za slobodno elektromagnetsko polje, a na kraju lagranžijan za elektromagnetsko polje vezano s izvorima.

Daljnji rad na temi uključivao bi prije svega traženje izravnijeg i potpuno dosljednog izvoda Poyntingovog teorema s izvorima iz prvog Noetherinog teorema i Hamiltonovog načela. Bessel-Hagenovo poopćenje Noetherinih teorema izgleda kao jedan mogući smjer koji bi vrijedilo ispitati. Uz to, može se daljnjom nadogradnjom modela dopustiti da se naboj umjesto u vakuumu nalazi u sredstvu s određenim svojstvima. Tada bi cilj bio dobiti Poyntingov teorem u tvarima kakav smo iskazali u Uvodu. Naravno, problematiku je moguće proširiti obuhvaćanjem i ostalih zakona očuvanja u elektromagnetizmu.

Nadamo se da ovim radom između ostalog doprinosimo širenju svijesti o originalnim iskazima Noetherinih teorema, a zatim i o Bessel-Hagenovoj metodi primjene istih na klasičnu elektrodinamiku koja je dostojna njihove slave i moći.

6 Literatura

[1] D. J. Griffiths, *Introduction to electrodynamics*, Pearson, Boston, 2013.

[2] E. T. Whittaker, *A History of the Theories of Aether and Electricity, from the age of Descartes to the close of the nineteenth century*, Longmans, Green, and Co., London, 1910.

[3] D. Poljak, *Teorija elektromagnetskih polja s primjenama u inženjerstvu*, Školska knjiga, Zagreb, 2014.

[4] J. C. Maxwell, „A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field" U: W. D. Niven (ur.), *The Scientific Papers of James Clerk Maxwell*, vol. 1, Cambridge University Press, Cambridge, 2010., str. 526–597

[5] B. J. Hunt, *The Maxwellians*, Cornell University Press, Ithaca, 2005.

[6] J. D. Jackson, *Classical electrodynamics*, Wiley, New York, 1999.

[7] H. Goldstein, C. Poole, J. Safko, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, San Francisco, 2002.

[8] J.-L. Basdevant, *Variational Principles in Physics*, Springer, Cham, 2023.

[9] C. Lanczos, *The variational principles of mechanics: Fourth edition*, Dover, New York, 1986.

[10] K. Lechner, *Classical electrodynamics: A modern perspective*, Springer, Cham, 2018.

[11] J. H. Poynting, *XV. On the Transfer of Energy in the Electromagnetic Field*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 175, 343–361, 1884.

[12] E. Tiesinga, P. J. Mohr, D. B. Newell, B. N. Taylor, *The 2018 CODATA Recommended Values of the Fundamental Physical Constants* (Web Version 8.1). Bazu podataka izradili J. Baker, M. Douma, S. Kotochigova. National Institute of Standards and Technology, Gaithersburg, MD 20899, 2019. URL: http://physics.nist.gov/constants (28. 3. 2023.)

[13] J. Schwinger, L. L. DeRaad Jr., K. A. Milton, W. Tsai, *Classical Electrodynamics*, Perseus Books, Reading, Massachusetts, 1998.

[14] A. Einstein, *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Ann. Phys., 322, 891–921, 1905.

[15] M. R. Baker, *Field theories from physical requirements: Noether's first theorem, energy-momentum tensors and the question of uniqueness*, Electronic Thesis and Dissertation Repository, 7802, 2021. URL: https://ir.lib.uwo.ca/etd/7802

[16] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice Hall, New Jersey, 1963.

[17] F. Scheck, *Classical Field Theory: On Electrodynamics, Non-Abelian Gauge Theories and Gravitation*, Springer Berlin, Heidelberg, 2012.

[18] L. D. Landau, E. M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields, Fourth Revised English Edition*, Butterworth-Heinemann, Amsterdam, 1980.

[19] É. Gourgoulhon, *Special Relativity in General Frames: From Particles to Astrophysics*, Springer Berlin, Heidelberg, 2013.

[20] R. M. Wald, *General Relativity*, The University of Chicago Press, Chicago, 1984., str. 432–434

[21] E. Noether, *Invariante Variationsprobleme*, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-physikalische Klasse, 235–257, 1918.

[22] Y. Kosmann-Schwarzbach, „The Noether Theorems in Context" U: J. Read, N. J. Teh (ur.), *The Philosophy and Physics of Noether's Theorems: A Centenary Volume*, Cambridge University Press, Cambridge, 2022., str. 4–24

[23] Y. Kosmann-Schwarzbach, *The Noether Theorems, Invariance and Conservation Laws in the Twentieth Century*, Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, preveo Bertram E. Schwarzbach, Springer, New York, 2011.

[24] E. L. Hill, *Hamilton's Principle and the Conservation Theorems of Mathematical Physics*, Reviews of Modern Physics, 23, 253–260, 1951.

[25] S. Krešić-Jurić, *Algebarske strukture*, skripta, Odjel za matematiku, Prirodoslovno-matematički fakultet Split, URL: https://mapmf.pmfst.unist.hr/~skresic/Algebra/Skripta/Algebarske_strukture_v6.pdf (9. 6. 2023.)

[26] M. R. Baker, N. Linnemann, C. Smeenk, „Noether's First Theorem and the Energy-Momentum Tensor Ambiguity Problem" U: J. Read, N. J. Teh (ur.), *The Philosophy and Physics of Noether's Theorems: A Centenary Volume*, Cambridge University Press, Cambridge, 2022., str. 169–196

[27] E. Bessel-Hagen, *Über die Erhaltungssätze der Elektrodynamik*, Mathematische Annalen, 84, 258–276, 1921.