Dodatne teme za nastavu matematike u osnovnoj školi

Simić, Marina

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

MARINA SIMIĆ

DODATNE TEME ZA NASTAVU MATEMATIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI

DIPLOMSKI RAD

Split, listopad 2022.

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

DODATNE TEME ZA NASTAVU MATEMATIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI

DIPLOMSKI RAD

Studentica: Marina Simić

Mentor: Doc. dr. sc Snježana Braić

Split, listopad 2022.

Temeljna dokumentacijska kartica

Diplomski rad

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno-matematički fakultet
Odjel za Matematiku
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

DODATNE TEME ZA NASTAVU MATEMATIKE U OSNOVNOJ ŠKOLI

Marina Simić

SAŽETAK

Cilj ovog rada je obraditi i proučiti dodatne teme iz matematike koje se pojavljuju na matematičkim natjecanjima, ali se ne obrađuju na redovnoj nastavi. Rad je zamišljen kao radni priručnik za dodatnu nastavu. Svaka tema se prvo opisuje, potom se rješava nekoliko zadataka s primjenom teme te se potom obrađuju zadaci s natjecanja. Na početku ćemo reći ponešto o samoj pripremi i edukaciji učitelja za dodatnu nastavu. Predložit ćemo i mogućnosti poboljšanja pripreme učitelja. Potom ćemo se upoznati s metodom uzastopnih približavanja te Gaussovom dosjetkom. Naučit ćemo što je to Dirichletov princip, te kako ga primjenjujemo. Pojasnit ćemo i što su diofantske jednadžbe te gdje ih koristimo, a na kraju ćemo se upoznati s logičkim i kombinatornim zadacima te zadacima s prebrojavanjima.

Ključne riječi: natjecanja**,** metoda uzastopnih približavanja, Gaussova dosjetka, Dirichletov princip, diofantske jednadžbe, kombinatorika, prebrojavanja

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno-matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu

Rad sadrži: 65 stranica, 20 grafičkih prikaza, 40 tablica i 19 literaturnih navoda.

Izvornik je na hrvatskom jeziku.

Mentor: **Dr. sc Snježana Braić,** *docent*

Ocjenjivači: **Dr. sc Snježana Braić,** *docent*

Jelena Pleština, *asistent*

Željka Zorić, prof., *viši predavač*

Rad prihvaćen: **listopad 2022.**

Basic documentation card

Thesis

University of Split
Faculty of Science
Department of Mathematics
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

ADDITIONAL TOPICS FOR MATHEMATICS EDUCATION IN ELEMENTARY SCHOOL

Marina Simić

ABSTRACT

The goal of this master thesis is to interpret and study additional topics in mathematics that appear in mathematics competitions but are not covered in regular classes. A thesis is intended to serve as a teacher's handbook for advanced mathematics classes. Each topic is described, and the description is followed by several solved tasks with the application of the topic and eventually the tasks from the competitions are presented and solved.

At the beginning, we will say something about the preparation and education of teachers for teaching in advanced classes. We will also give suggestions on how to improve teacher training. Then we will learn about the method of successive approximations and Gauss's Trick. We will learn what the Dirichlet principle is, and how we apply it. We will also explain what Diophantine equations are and where we use them, and at the end we will get acquainted with logical and combinatorial tasks and tasks with counting.

Key words: competitions, method of successive approximations, Gauss's Trick, Dirichlet's principle, Diophantine equations, combinatorics, counting

Thesis deposited in library of Faculty of science, University of Split

Thesis consists of: 65 pages, 20 figures, 40 tables and 19 references

Original language: Croatian

Mentor: **Snježana Braić, Ph.D.** *Assistant Professor*

Reviewers: **Snježana Braić, Ph.D.** *Assistant Professor*

Jelena Pleština, *Instructor*

Željka Zorić, MSc. *Senior lecturer*

Thesis accepted: **October 2022.**

Zahvale

Zahvaljujem se svojoj mentorici doc.dr.sc. Snježani Braić na izboru savršene teme za moj diplomski rad. Zaista sam uživala radeći ga.

Neizmjerno hvala i "šefici" referade, gđi Vinki Ružić na brojnim savjetima svih ovih godina, a posebno na velikoj podršci na samom kraju.

Hvala mojim dragim kolegicama, prijateljicama i matematičarkama: Marijani Dodig, Maji Ervaćinović, Katici Tot, i Marini Crvelin koje su čitale rad za vrijeme njegova nastajanja i pomagale svojim savjetima i konstruktivnim kritikama.

Hvala Alenki Miljević i Mireli Carev Žnidarec na pomoći pri prijevodu i lektoriranju rada.

Hvala i mojoj dragoj Petri koja uvijek zna pronaći prave riječi.

I posljednje, ali ne manje važno, veliko hvala i mojim roditeljima što su unatoč svemu vjerovali u mene, a osobito i neizmjerno hvala mom voljenom sinu kojem posvećujem ovaj rad.

I za kraj dijelim s vama moj novi životni moto: NEVER GIVE UP!

Sadržaj

Uvod

Posljednjih godina dolazi do velikih promjena u obrazovanju. Sve je započelo projektom *Škola za život*, a razvija se i projekt cjelodnevne nastave u školama. Obrazovanje više teži prema razvoju kompetencija koje su djeci/učenicima potrebne za aktivno sudjelovanje i funkcioniranje u društvu. Svjedoci smo da svakodnevni rad zahtjeva sve više umnog napora, rasuđivanja i zaključivanja te rješavanja mnogobrojnih problema za koje nam treba dobra analiza dostupnih podataka. U svemu tome matematika nam može uvelike pomoći.

Zadaća nastave matematike, više od svih ostalih predmeta, je da kod učenika razvija kognitivne procese – analizu i sintezu te kroz njih potiče razvoj kritičkog i stvaralačkog razmišljanja. U redovnoj nastavi matematike koja je prilagođena svim učenicima postoje učenici koji mogu i žele znati više te imaju potrebu za dubljim razumijevanjem matematike. Njima je potrebno više različitih sadržaja kako bi u potpunosti iskoristili svoj potencijal te samim time ostvarili iznadprosječne rezultate. Obzirom da u redovnoj nastavi nema dovoljno vremena da se s takvim učenicima radi nameće se potreba za dodatnom nastavom matematike.

Kao posebna izborna aktivnost dodatna nastava matematike postoji već u prvom razredu osnovne škole, ali o tome hoće li učenici uopće imati izbornu nastavu iz matematike ili pak hrvatskog jezika ovisi isključivo o preferencijama pojedine razredne učiteljice/učitelja. Od petog razreda osnovne škole dodatna nastava matematike postoji u većini škola, jer tada izborna nastava ne ovisi isključivo o predmetnom učitelju već i o ravnatelju.

S obzirom da se na matematičkim natjecanjima uglavnom pojavljuju novi, dotad nepoznati zadaci i teme koje se ne rade na redovnoj nastavi važno je da se učenicima pruži mogućnost da isto gradivo i upoznaju prije samog natjecanja.

U ovom radu obradit ćemo dodatne teme koje se pojavljuju na matematičkim natjecanjima. Teme se uvode postupno uz pomoć raznih primjera, a potom se obrađuju zadaci s natjecanja.

Poglavlje 1.

Dodatna nastava matematike i uloga učitelja

Dodatna nastava matematike postavlja pred učitelja dva bitna izazova, a to su adekvatna priprema učitelja za takvu vrstu nastave te način razvijanja kritičkog mišljenja kod učenika kao i sama motivacija učenika za istim. Stoga učitelj ima iznimno važnu ulogu u dodatnoj nastavi matematike. On je tu da učenike motivira i usmjerava, da ih nauči odvojiti bitno od nebitnog, da ih potakne iskoristiti sve dostupne podatke na najbolji mogući način te kako da ih primjene u novim situacijama. Pitanje koje se ovdje nameće je kako osposobiti učitelja za takav način poučavanja?

Jedna od mogućnosti koja se prirodno nameće su stručni skupovi učitelja matematike s točno određenim temama. Prije nekoliko godina prisustvovala sam stručnom skupu kojeg je vodio gospodin Matija Bašić predsjednik državnog povjerenstva za natjecanje na kojem smo timski rješavali zadatke s natjecanja. Kroz timski rad i vođenje sam shvatila da uloga učitelja nije ta da učeniku riješi svaki mogući tip zadatka, već da ga vodi i usmjerava te da kao krajnji cilj učenik nadmaši svog učitelja u znanju. Samo na taj način će učenik postići izvrstan rezultat na natjecanjima. Kroz rad i sudjelovanje s učenicima na natjecanjima, također, sam primijetila činjenicu da su određeni učitelji kao mentori često na raznim natjecanjima dok su drugi pak iznimno rijetko ili nikada. Ovdje se ne radi o tome da su pojedini učitelji sposobniji od drugih, već o tome da dodatna nastava zahtjeva iznimno dobru pripremu učitelja i detaljno poznavanje dodatne materije. Dakle, na tematskim skupovima i radionicama bi učitelji koji do sada nisu imali iskustva s dodatnom nastavom i natjecanjima dobili uvid u način rada i pripremu učenika. Kroz njih bi učitelji stjecali nova iskustva, prvenstveno kroz aktivno sudjelovanje - svaki učitelj bi trebao sudjelovati u radu bez iznimke. Na pojedinom skupu bi se obrađivala samo jedna tema i to njena kompletna razrada do sitnih detalja. To se može postići grupnim radom i „okruglim stolom“ učitelja gdje se vrši razmjena iskustava i ideja. Učitelji slušaju, daju sugestije, govore o prednostima/manama koje su primijetili u svom radu te mogućim poboljšanjima. Na radionicama se učiteljima daju novi i nepoznati zadatci te ih se stavlja u ulogu učenika te traži da pronađu brza i optimalna rješenja. Na kraju radionice obavezna je zajednička analiza rješenja te je iznimno važna povratna informacija svim prisutnima.

Dobra priprema učitelja je iznimno bitna za dodatnu nastavu. Pod dobrom pripremom se podrazumijeva da učitelj dobro poznaje gradivo i dodatne teme koje se često pojavljuju u zadacima s natjecanja, te da učenicima pokaže različite metode rješavanja zadataka i to na različitim primjerima. Novi i nepoznati pojmovi se uvode postupno. Prvo se uspoređuju s već poznatim pojmovima i činjenicama, primjenjuju u već poznatim zadacima, a potom u novim i nepoznatim. Iznimno je važno da učitelj nakon toga vodi učenike kroz njihovo samostalno rješavanje zadataka. On ne rješava zadatke već daje određene smjernice kod rješavanja. Ukoliko je potrebno pita učenike sjećaju li se nekog sličnog zadatka kojeg su već ranije rješavali, na što ih dani zadatak podsjeća, mogu li ga nekako drugačije formulirati, postoje li jednostavniji slučajevi ne koje se može svesti taj zadatak i ne manje važno jesu li iskoristili sve dostupne podatke u zadatku. U ovom procesu rješavanja zadataka iznimno je važno da učenik ovlada određenim procesima. Prvi je analiza (što se traži u zadatku), potom slijedi rasuđivanje (baratanje činjenicama), potom logično zaključivanje (što se može napraviti s danim podacima) i samo rješavanje (najprihvatljiviji postupak i njegova primjena). I na kraju, samorefleksija tj. provjera vlastite ispravnosti rješenja kroz razgovor s učiteljem i drugim učenicima.

Prilikom rješavanja učitelj učenicima treba ukazati i na česte pogreške u postupku rješavanja problema (kada do istih dođe). One najčešće su: nedovoljno dobra analiza zadatka i nepravilno zaključivanje (obratiti im pažnju na odvajanje bitnijih pojmova), pogrešan redoslijed izvođenja radnji te ne manje važne pogreške zbog brzine rješavanja zadataka (pogrešno napisan broj ili računska radnja, neprecizan odgovor riječima). Učenicima treba skrenuti pozornost i na urednost kod pisanja i grafičkog prikaza podataka (pripaziti da su svi podaci prikazani).

Čestom i redovitom vježbom učenici stječu trajnija znanja, znaju prepoznati težinu zadatka te primijeniti prikladnu metodu za rješavanje zadatka. Učitelj na dodatnoj nastavi učenicima daje zadatke s natjecanja te više nestandardnih zadataka kako bi učenici razvijali kreativnost te uspješno izabrali prikladnu metodu za rješavanje novih zadataka. Iznimno je bitno učenicima pokazati što više različitih metoda i postupaka rješavanja zadataka kako bi se učenik kod razmišljanja o zadatku mogao dosjetiti ispravnog puta rješavanja.

Još jedna, ne manja važna stvar je motivacija učitelja. Motiviran učitelj svakodnevno radi na sebi, želi postići više i svoje znanje prenijeti učenicima te mu je njihov uspjeh dovoljna satisfakcija za daljnji rad.

Pitanje koje se nakon svega nameće je koji to učenici mogu pratiti dodatne sadržaje? Kako ih prepoznati? Daroviti učenici za pojedino područje pa tako i za matematiku su oni koji s lakoćom savladavaju redovno gradivo i to puno brže od ostalih učenika u razredu te im je na satu često dosadno. Za njih su i na redovnoj nastavi potrebni dodatni materijali tj. zadaci koji će poticati njihovu znatiželju. Kod ovakvih učenika jako je važno da ih učitelj na vrijeme prepozna, te da ih motivira za rad. Učenik koji voli matematiku i koji od učitelja dobije povratnu informaciju da je dobar u tome što radi s dodatnom motivacijom može imati iznimna postignuća. Kroz dodatnu nastavu učenika se priprema za sudjelovanje na natjecanjima, ali je bitno da ga se osim natjecateljskog dijela pripremi i emocionalno. Učitelj u svakom trenutku treba biti potpora učeniku i trebao bi biti u mogućnosti procijeniti učenikov način nošenja sa stresom odnosno poznavati način na koji učenik reagira na izazove (kroz teško rješive zadatke i samo natjecanje). Ukoliko učenik loše reagira na stresne situacije i ako ga one blokiraju te mu onemogućuju normalan rad na bilo koji način učitelj ne bi trebao forsirati učenika da ide na natjecanje. Svaki učenik sam treba donijeti odluku želi li sudjelovati na nekom natjecanju. Učitelj mu može pomoći samo s dobrom pripremom i razgovorom o očekivanjima. Učitelj učeniku detaljno mora pojasniti što se od njega očekuje na pojedinom natjecanju kao i o svim ostalim vanjskim pritiscima. U vanjske pritiske spada odnos i očekivanja roditelja učenika, kao i prijatelja iz razreda. Nadareni učenici su većinom svjesni svojih sposobnosti te ponekad pred sebe postavljaju nerealna očekivanja i zahtjeve.

Što se pak matematičkih natjecanja tiče, dosta su drugačija od onih kod ostalih nastavnih predmeta. Ne propituje se isključivo školsko gradivo već se učenicima daju potpuno novi, nestandardni i neviđeni zadaci te se od njih traži da se snađu i primjene svladana znanja. Natjecanja su izvrsna, jer šire interes za učenjem, obogaćuju znanje, a ujedno i služe kao provjera vlastitih sposobnosti te kao povratna informacija 'gdje je' učenik u odnosu na ostale učenike sličnih sposobnosti. Natjecanja su transparentna, pravedna i jednaka za sve sudionike zbog anonimnosti prilikom vrednovanja rezultata. Jedini nedostatak natjecanja je što ima mali broj razina – školsko, županijsko i državno natjecanje. Bilo bi dobro da se organizira natjecanje unutar razreda ili pak ono između susjednih škola sa ciljem popularizacije samih natjecanja i očekivanja učenika te kako bi učenici bili upoznati s tim što se od njih očekuje na 'pravom' natjecanju.

Na natjecanju školske godine 2021./2022. prvi puta su u potpunosti svi razredi na natjecanju sudjelovali po novom programu *Škole za život.*

1.1. Teme na natjecanjima

U nastavku se nalazi gradivo za pojedinu razinu natjecanja. Kao što se može primijetiti, na natjecanjima se često spominju teme koje se ne obrađuju na redovnoj nastavi pa ih treba obraditi na dodatnoj nastavi.

	ŠKOLSKO NATJECANJE	**ŽUPANIJSKO NATJECANJE**	**DRŽAVNO NATJECANJE**
4.r	*gradivo prethodnih razreda* Kut i trokut	*navedeno gradivo 4. razreda* Pravokutnik i kvadrat	
5.r	*gradivo prethodnih razreda* skupovi skup prirodnih brojeva	*navedeno gradivo 5. razreda* razlomci decimalni brojevi	*navedeno gradivo 5. razreda* geometrijski likovi
6.r	*gradivo prethodnih razreda* cijeli brojevi koordinatni sustav u ravnini (cjelobrojne koordinate) prikazivanje i analiza podataka	*navedeno gradivo 6. razreda* trokut i četverokut	*navedeno gradivo 6. razreda* nenegativni racionalni brojevi
7.r	*gradivo prethodnih razreda* racionalni brojevi koordinatni sustav u ravnini vektori translacija	*navedeno gradivo 7. razreda* proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost postotni račun	*navedeno gradivo 7. razreda* kružnica i krug
8.r	*gradivo prethodnih razreda* kvadriranje, potenciranje, korjenovanje	*navedeno gradivo 8. razreda* Pitagorin poučak	*navedeno gradivo 8. razreda* realni brojevi

Tablica 1.1: Teme za pojedine razine natjecanja za osnovnu školu po kategorijama školske godine 2020./2021.

Osim navedenih tema na natjecanju su se mogle očekivati i **dodatne teme:**

- **logički zadaci** – u svim razredima, na svim razinama
- **kombinatorni zadaci** – u svim razredima, od županijske razine
- **Dirichletov princip** – u svim razredima na državnoj razini
- **Diofantske jednadžbe** – u 7. i 8. razredu na državnoj razini

	ŠKOLSKO NATJECANJE	**ŽUPANIJSKO NATJECANJE**	**DRŽAVNO NATJECANJE**
4.r	*teme prethodnih razreda* Prirodni brojevi do milijun (A.4.1, A.4.2, A.4.4)	*navedene teme 4. razreda* Kut i trokut (C.4.1, C.4.2 i C.4.4) Prirodni brojevi do milijun (A.4.3 bez dijeljenja dvoznamenkastim brojem)	
5.r	*teme prethodnih razreda* Skup prirodnih brojeva (A.5.1) Skupovi (B.5.2) Linearne jednadžbe (B.5.1) Mjerenje i prikaz podataka (D.5.2, D.5.3, E.5.1)	*navedene teme 5. razreda* Djeljivost (A.5.2) Razlomci (A.5.3)	*navedene teme 5. razreda* Decimalni brojevi (A.5.4, A.5.5, A.5.6) Geometrija ravnine (C.5.1, C.5.2, C.5.3, D.5.1, D.5.4) Volumen (D.5.5)
6.r	*teme prethodnih razreda* Cijeli brojevi i koordinatni sustav u ravnini (A.6.6, A.6.7, A.6.8, D.6.4, D.6.5) Prikaz i analiza podataka (D.6.1, E.6.1)	*navedene teme 6. razreda* trokut i četverokut	*navedene teme 6. razreda* nenegativni racionalni brojevi
7.r	*teme prethodnih razreda* Racionalni brojevi (A.7.3, A.7.4, A.7.5, B.7.1, B.7.2) Postotni račun i prikaz podataka (A.7.1, D.7.5, D.7.6, E.7.1) Koordinatni sustav u ravnini (D.7.1, D.7.2, C.7.1, C.7.2, C.7.3)	*navedene teme 7. razreda* Proporcionalnost i obrnuta proporcionalnost (B.7.3, B.7.4)	*navedene teme 7. razreda* Mnogokuti (D.7.3) Kružnica i krug (D.7.4)
8.r	*teme prethodnih razreda* Potencije i korjenovanje (A.8.1, A.8.2) Kvadriranje i algebarski izrazi uključujući razliku kvadrata (B.8.1)	*navedene teme 8. razreda* Skup realnih brojeva (A.8.3) Pitagorin poučak (D.8.1) Jednadžbe (B.8.3, B.8.4, B.8.5, D.8.3)	*navedene teme 8. razreda* Primjena omjera i razmjera (B.8.2, C.8.3) Vjerojatnost (E.8.1) Geometrijska tijela (C.8.1, C.8.2, D.8.2, D.8.4)

Tablica 1.2 : Teme za pojedine razine natjecanja za osnovnu školu po kategorijama školske godine 2021./2022.

Osim navedenih tema na natjecanju se mogu očekivati i **dodatne teme**:

- **rješavanje problema linearnim jednadžbama** – u svim razredima na svim razinama

- **logičko – kombinatorni zadaci** - u svim razredima na svim razinama

- **djeljivost i diofantske jednadžbe** - u svim razredima na županijskoj i državnoj razini

- **sličnost trokuta** – u 7. razredu na državnoj, a u 8. razredu na županijskoj i državnoj razini

Poglavlje 2.

Metoda uzastopnih približavanja

Dodatna nastava matematike, kao izborni predmet u školama postoji već od prvog razreda osnovne škole, ali ovisi o dobroj volji i entuzijazmu učitelja razredne nastave koji ovisno o svojim preferencijama može birati želi li dodatnu nastavu matematike/hrvatskog jezika ili pak nekog drugog predmeta.

Matematička natjecanja za učenike započinju u četvrtom razredu osnovne škole. To je najniža razina natjecanja i postoji na školskoj/općinskoj te županijskoj razini. Učenici ove dobi nemaju nikakva iskustva s natjecanjima, a većina ni s dodatnim zadacima te treba paziti na pozitivan natjecateljski, kao i na psihološki utjecaj kod učenika. Učenicima treba dodatnu nastavu, kao i samo natjecanje predstaviti kao nešto novo, pozitivno, motivirajuće i izazovno.

Na koji način učenicima prezentirati natjecateljske zadatke? Koje metode rješavanja im pokazati i na koji način? Ova pitanja nemaju jednoznačan odgovor. Razloga je jako puno. Do četvrtog razreda učenici su učili samo osnovne računske operacije kao i rad sa zagradama. Ne poznaju pojam jednadžbe kojom se većina matematičkih problema može riješiti te im stoga treba pokazati način rješavanja primjeren njihovoj dobi. Jedna od metoda načina rješavanja problema koju učenici ove dobi lako savladavaju je metoda uzastopnih približavanja ili metoda pokušaja i pogrešaka. Ova metoda je vrlo jednostavna pa se često izbjegava. Međutim, važno je da se učenici s njom upoznaju u ranoj dobi, jer ona je uvod u sve složenije matematičke metode i postupke.

Metoda uzastopnih približavanja sastoji se od niza pokušaja da se dođe do rješenja postavljenog problema. Ukoliko prvi pokušaj rješavanja nije točan u svakom sljedećem pokušaju nastojimo ispraviti pogrešku koja je nastala u prethodnom pokušaju. Na taj način dolazimo sve bliže traženom rezultatu. Ovu metodu najčešće zorno prikazujemo pomoću tablice u koju unosimo naše pokušaje. Učenicima treba na primjerima pokazati kako imenovati stupce te odrediti nepoznanice. Važan dio rješavanja problema pomoću ove metode je procjena granica u kojima se nalazi traženo rješenje te kako mu se najbolje i najlakše približiti. Učenici aktivno razmišljaju, a s vremenom stječu iskustvo koje im omogućuje bolju procjenu te vrlo brzo i jednostavno dolaze do rješenja.

Primjer 1. Baka Luca ima koze i kokoši. U njenom dvorištu se trenutno nalazi 5 životinja koje ukupno imaju 16 nogu. Koliko je koza, a koliko kokoši u dvorištu?

Rješenje. U zadatku je rečeno da se u dvorištu nalazi 5 životinja, a da su životinje koze i kokoši. Stoga teoretski broj koza može biti od 0-5, a broj kokoši jednak je 5 - broj koza.

Ako zadatak rješavamo metodom uzastopnih približavanja definiramo sljedeće stupce: broj koza, broj kokoši, ukupan broj životinja kao i ukupan broj nogu.

broj koza	**broj kokoši**	**ukupan broj životinja**	**ukupan broj nogu**
5	0	5	$5 \cdot 4 + 0 = 20$
0	5	5	$0 \cdot 4 + 5 \cdot 2 = 10$
4	1	5	$4 \cdot 4 + 1 \cdot 2 = 18$
3	**2**	**5**	$\mathbf{3 \cdot 4 + 2 \cdot 2 = 16}$

Kao što vidimo iz tablice povoljan nam je posljednji slučaj. Dakle, u dvorištu bake Luce nalaze se 3 koze i 2 kokoši.

Primjer 2. U jednom hotelu su 24 sobe s ukupno 57 gostiju. Sobe su dvokrevetne i trokrevetne i svi kreveti su zauzeti. Koliko je dvokrevetnih, a koliko trokrevetnih soba u tom hotelu?

Rješenje. Ovaj zadatak je sličan prethodnom samo što umjesto koza i kokoši imamo dvokrevetne i trokrevetne sobe. Najveći broj dvokrevetnih soba je 24, ali tada nema trokrevetnih i postoje gosti koju nemaju svoj krevet $24 \cdot 2 = 48$, a gostiju je 57. Najveći mogući broj trokrevetnih soba je 24, a tada pak nema dvokrevetnih i ima slobodnih kreveta.

Idući korak je da uzmemo da je broj dvokrevetnih i trokrevetnih soba jednak tj. da ih je 12. Tada je ukupan broj gostiju na svim ležajevima 60. To je previše.

Sada počinjemo približavanje povećavanjem broja dvokrevetnih soba za dva. Tada se broj trokrevetnih soba smanjuje za 2 te ukupan broj dvokrevetnih soba 14, trokrevetnih 10, a broj gostiju iznosi 58.

Povećajmo još jednom broj dvokrevetnih soba za 2. Sada ih imamo 16 pa je broj trokrevetnih soba 8, a ukupan broj gostiju 56 što nam je premalo.

Što sada možemo zaključiti? Da se broj soba nalazi između posljednja dva slučaja. Dakle, broj dvokrevetnih soba je 15, trokrevetnih 9 te je ukupan broj gostiju 57.

Kako smo si mogli olakšati postupak pronalaska rješenja? Pomoću tablice. Stupci su: broj dvokrevetnih soba, broj trokrevetnih soba, ukupan broj soba te broj gostiju.

broj dvokrevetnih soba	**broj trokrevetnih soba**	**ukupan broj soba**	**ukupan broj gostiju**
24	0	24	$24 \cdot 2 + 0 \cdot 3 = 48$
0	24	24	$0 \cdot 2 + 24 \cdot 3 = 72$
12	12	24	$12 \cdot 2 + 12 \cdot 3 = 60$
14	10	24	$14 \cdot 2 + 10 \cdot 3 = 58$
16	8	24	$16 \cdot 2 + 8 \cdot 3 = 56$
15	**9**	**24**	$\mathbf{15 \cdot 2 + 9 \cdot 3 = 57}$

U hotelu koji ima 24 sobe i 57 gostiju i kreveta ukupno je 15 dvokrevetnih i 9 trokrevetnih soba.

Primjer 3. Umnožak triju prirodnih brojeva je 216. Koji su to brojevi ako je umnožak prvog i drugog broja 24, a umnožak drugog i trećeg broja 54?

Rješenje. Ovakva vrsta zadataka učenicima nije lagana. Prvo trebaju promisliti o svim međukoracima koji će ih dovesti do konačnog rješenja. Treba ih navesti na zaključak da svako pitanje posebno promatraju, a potom zajedno kao cjelinu.

Umnožak triju brojeva je 216.
Umnožak prvog i drugog broja je 24.
Umnožak drugog i trećeg broja je 54.
Koliki je prvi broj?

Dovoljno je odgovoriti na posljednje pitanje. Ukoliko dobijemo prvi broj, drugi dobivamo dijeljenjem broja 24 s prvim brojem.

Ako je umnožak prvog i drugog broja 24, prvi broj može biti bilo koji od brojeva 1,2,3,4,6,8,12 ili 24. Dalje nam je najlakše riješiti pomoću tablice. Stupci su nam: prvi broj, drugi broj (kojeg dobijemo dijeljenjem broja 24 s prvim brojem), treći broj (kojeg dobijemo dijeljenjem broja 54 drugim brojem) te umnožak (sva tri broja). U tablicu unosimo poznate veličine te pomoću uvjeta računamo drugi i treći broj.

prvi broj	**drugi broj**	**treći broj**	**umnožak**
1	24	54 : 24 *nije prirodan broj*	
2	12	54 : 12 *nije prirodan broj*	
3	8	54 : 8 *nije prirodan broj*	
4	**6**	**9**	**216**
6	4	54 : 4 *nije prirodan broj*	
8	3	18	432
12	2	27	648
24	1	*54*	1296

U ovom primjeru tablicu smo radili od manjeg prema većem broju, ali jednako se može napraviti i obratno.

2.1. Zadaci s natjecanja

Zadatak 1. Na koliko načina možemo iznos od 20 kuna platiti kovanicama od 5 kn, 2 kn i 1 kn, tako da svaku vrstu kovanica iskoristimo barem jednom? *(Općinsko natjecanje 2020.g., 4 razred)*

R j e š e n j e.

1. način. Ako svaku kovanicu iskoristimo samo jednom platili smo iznos od 8 kuna (5+2+1), pa nam preostaje za platiti još 12 kuna koristeći bilo koje kovanice. Sve mogućnosti plaćanja prikažimo tablicom.

5 kn	2	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0
2 kn	1	0	3	2	1	0	6	5	4	3	2	1	0
1 kn	0	2	1	3	5	7	0	2	4	6	8	10	12

Sada vidimo da se traženi iznos može platiti na 13 načina.

2.način. Trebamo prikazati sve mogućnosti na koje možemo platiti iznos od 20 kuna, s barem jednom kovanicom od 5 kn, 2 kn i 1 kn. Možemo ih prikazati nabrajanjem ili tablicom što nam je znatno jednostavnije.

5 kn	3	3	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1
2 kn	2	1	4	3	2	1	7	6	5	4	3	2	1
1 kn	1	3	2	4	6	8	1	3	5	7	9	11	13

Iznos od 20 kuna možemo platiti kovanicama od 5 kn, 2 kn i 1 kn na 13 načina.

Zadatak 2. Frane u svojoj štednoj kasici ima ukupno 108 kn u kovanicama od 5 kn, 2 kn i 1 kn. Vrijednost novca u kovanicama od 5 kn i 2 kn je jednaka. Broj kovanica od 1 kn jednak je broju kovanica od 5 kn i 2 kn zajedno. Koliko se kovanica pojedine vrste nalazi u kasici? (Županijsko natjecanje 2022.g., 4. razred)

R j e š e n j e. Budući da je vrijednost novca u kovanicama od 5 i 2 kune jednaka to znači da broj kovanica od 2 kune mora biti višekratnik broja 5. Zašto? Ako u kasici imamo pet kovanica od 2 kn, onda imamo dvije kovanice od 5 kuna jer je tada vrijednost i jednih i drugih jednaka 10. Kako je broj kovanica od 1 kune jednak broju kovanica od 5 kn i 2 kn zajedno u ovom slučaju je broj kovanica od 1 kune jednak 7 pa Frane u kasici ukupno ima $5{\cdot}2 + 2 \cdot 5 + 7 = 27$ kn što nije istina.

Radi jednostavnosti prikažimo ostale slučajeve tablicom.

Broj kovanica od 2 kn	Broj kovanica od 5 kn	Broj kovanica od 1 kn	Ukupna vrijednost kovanica
10	4	14	$10 \cdot 2 + 4 \cdot 5 + 14 = 54$
15	6	21	$15 \cdot 2 + 6 \cdot 5 + 21 = 81$
20	**8**	**28**	$\mathbf{20 \cdot 2 + 8 \cdot 5 + 28 = 108}$
25	10	35	$25 \cdot 2 + 10 \cdot 5 + 35 = 135$

Kao što vidimo iz tablice, ako broj kovanica od 2 kune povećamo na 25 povećat će se i ukupan iznos pa se prema tome u Franinoj kasici nalazi 20 kovanica od dvije kune, 8 kovanica od 5 kuna i 28 kovanica od jedne kune.

2.način „Pogađanjem rješenja“

Ako u kasici ima 8 kovanica od 5 kn, 20 kovanica od 2 kn i 28 kovanica od 1 kn, tada u kasici ima točno $8 \cdot 5 + 20 \cdot 2 + 28 = 108$ kuna.

Ako smanjimo broj kovanica od 5 kn, moramo smanjiti i broj kovanica od 2 kn (i obrnuto) jer su njihovi iznosi jednaki. Isto tako ako povećamo jednu vrstu kovanica, moramo povećati i drugu. Ako bismo smanjili broj kovanica od 5 kn i 2 kn, morali bismo smanjiti broj kovanica od 1 kn (jer njih ima kao od 5 kn i 2 kn zajedno), pa bi ukupan iznos bio manji od 108.

Analogno, ako povećamo broj kovanica od 5 kn i 2 kn, morali bismo povećati broj kovanica od 1 kn i iznos bi bio veći od 108. Prema tome, postoji samo jedno rješenje, i to ono koje smo naveli na početku.

Zadatak 3. Dora će cijeli mjesec srpanj provesti kod bake. Planira neke od tih dana provesti čitajući, a neke vozeći bicikl. Nakon što je napravila plan primijetila je sljedeće: kada bi utrostručila broj dana koje će provesti čitajući, a udvostručila broj dana koje će provesti vozeći bicikl zbroj tih brojeva bio bi jednak broju dana u mjesecu koji će provesti kod bake. Na koliko je različitih načina Dora mogla isplanirati broj dana čitanja i broj dana vožnje bicikla? (*Županijsko natjecanje 2019.g., 4. razred*)

Rješenje. Srpanj ima 31 dan pa će Dora kod bake provesti 31 dan.

Kako broj 31 nije niti dvokratnik niti trokratnik nekog prirodnog broja, Dora ne može sve dane čitati niti sve dane voziti bicikl. (Ukoliko ova rečenica nije napisana u tablici treba započeti planiranje s brojem čitanja 0.)

Zbog jednostavnosti prikažimo podatke u tablici.

Broj dana čitanja	Broj dana vožnje bicikla	Trokratnik broja dana čitanja	Dvokratnik broja dana čitanja	Ukupno dana
1	30	3	60	$3 + 60 = 63$
1	15	3	30	$3 + 30 = 33$
1	**14**	**3**	**28**	$\mathbf{3 + 28 = 31}$
3	13	9	26	$9 + 26 = 35$
3	**11**	**9**	**22**	$\mathbf{9 + 22 = 31}$
5	10	15	20	$15 + 20 = 35$
5	**8**	**15**	**16**	$\mathbf{15 + 16 = 31}$
7	6	21	12	$21 + 12 = 33$
7	**5**	**21**	**10**	$\mathbf{21 + 10 = 31}$
9	**2**	**27**	**4**	$\mathbf{27 + 4 = 31}$
11	1	33	2	$33 + 2 = 35$

Ukoliko je broj dana čitanja paran i njegov trokratnik je paran. Dvokratnik bilo kojeg broja je paran broj pa će u tom slučaju zbroj dva parna broja biti paran i nije moguće kao zbroj dobiti broj 31. Stoga u tablici prikazujemo samo neparan broj dana čitanja.

Ukoliko je broj dana čitanja veći od 9, tada je sam trokratnik veći od broja dana u srpnju.

Dora je na pet različitih načina mogla isplanirati broj dana čitanja i vožnje bicikla.

Zadaci za vježbu:

Zadatak 4. Ivan skuplja kovanice od 2 kune i od 5 kuna. Skupio je 39 kovanica i sada ima 144 kune. Koliko ima kovanica od 2 kune, a koliko od 5 kuna? (*Općinsko natjecanje 2017.g., 4. razred*)

Zadatak 5. Roko i Marko imaju jednako duge korake. Međusobno su udaljeni 1 600 koraka. U jednoj minuti Roko napravi 80 koraka, a Marko 60 koraka. Tko od njih dvojice treba krenuti ranije i koliko ranije da bi se hodajući jedan prema drugom sreli točno na pola puta? Rješenje izrazi u minutama i sekundama. (*Županijsko natjecanje 2021.g., 4. razred*)

Zadatak 6. Klokan Skočko trenira skakanje. Skače uzduž ravne ceste na sljedeći način: napravi 100 skokova naprijed, zatim 100 skokova natrag, pa ponovno 100 naprijed i 100 natrag i tako dalje na isti način. Svaki skok naprijed ima duljinu 3 metra, a svaki skok natrag 2 metra. Krenuo je iz mjesta A i napravio 1574 skoka. Na kojoj udaljenosti od mjesta A se nalazi Skočko? (*Županijsko natjecanje 2017.g., 4. razred*)

Poglavlje 3.

Gaussova dosjetka

Carl Friedrich Gauss je njemački matematičar o čijoj važnosti dovoljno govori činjenica kako su ga nazvali matematičari - *princeps mathematicorum* (princ matematike). Gauss je bio sin siromašnih roditelja, a njegovu genijalnost je otkrio ujak koji se pobrinuo za njegovo školovanje. Još kao dječak bio je vrlo bistar i oštrouman. U školi je često ometao nastavu, jer su svi zadaci koje je učitelj zadavao za njega bili prejednostavni pa se dosađivao. Jednom mu je učitelj, nadajući se da će se Gauss zabaviti neko vrijeme, zadao zadatak da zbroji prvih sto prirodnih brojeva.

Gauss je vrlo brzo riješio zadatak na vrlo jednostavan i efikasan način. Tim je rješenjem na učitelja ostavio poseban dojam i od tada je u njemu stekao prijatelja. Kako mu je uspjelo tako brzo doći do rješenja? Odgovor na ovo pitanje kao i na to kako se koristiti Gaussovom dosjetkom u zadacima s konačnim sumama pokazat ćemo u ovom poglavlju.

Gaussova dosjetka jedna je od nastavnih tema na dodatnoj nastavi matematike u petom razredu osnovne škole. Učenicima se jako sviđa ovakav način razmišljanja i s lakoćom rješavaju zadatke.

Kroz zadatke učenicima pojasnimo što je to točno Gauss uočio na koji način je riješio zadatak te kako njegov postupak primjenjujemo u zadacima.

Primjer 1. Zbroji prvih sto prirodnih brojeva.

Rješenje. Gauss je zadatak riješio na sljedeći način. Brojeve je združivao u parove: prvi broj s posljednjim, drugi s pretposljednjim i tako dalje redom. Takvih je parova ukupno 50:

$1 + 2 + 3 + 4 + \ldots + 97 + 98 + 99 + 100 = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + ... + (49 + 52) + (50 + 51)$.

Budući da je zbroj svakih dvaju članova u paru 101, konačan je rezultat jednak $50 \cdot 101$. Djeluje vrlo jednostavno, zar ne?!

Zadatak možemo riješiti i na sljedeći način. U prvom retku napišemo redom zbroj prvih sto prirodnih brojeva $1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$,a nakon toga u drugom redu ispod njih napišemo tu istu sumu brojeva, ali u obrnutom redoslijedu $100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1$.

Odnosno,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 98 + 99 + 100$$
$$100 + 99 + 98 + \cdots + 3 + 2 + 1$$

Zbrojimo li svaka dva broja zapisana jedan ispod drugog $1+100, 2+99, 3+98, \ldots, 99+2, 100+1$ zbroj će uvijek biti 101.

Jedini problem koji nam je preostao za riješiti je koliko ima takvih parova brojeva kojima je zbroj 101? Međutim, to ne bi trebao biti problem, jer smo na početku krenuli sa sto prirodnih brojeva pa onda imamo 100 parova brojeva čiji je zbroj 101. Zbroj svih tih parova (zbog jednostavnosti zapisan pomoću umnoška) iznosi $100 \cdot 101 = 10100$.

Dobili smo zbroj dvaju redaka pa je taj zbroj dvostruko veći od onoga koji smo trebali izračunati, zato ga još moramo podijeliti s 2 i tada dobivamo traženi rezultat 5050.

Primjer 2. Izračunaj zbroj prvih 67 prirodnih brojeva.

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti koristeći se Gaussovom dosjetkom. U prvom retku zapišemo zbroj prvih 67 brojeva od 1 do 67, a u drugom retku ćemo zapisati taj isti zbroj, ali od 67 do 1:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 66 + 67$$
$$67 + 66 + 65 + \ldots + 2 + 1.$$

Zbrojimo li svaka dva broja zapisana jedan ispod drugog: $1 + 67, 2 + 66, \ldots, 66 + 2, 67 + 1$, zbroj nam je uvijek isti i iznosi 68.

Takvih parova ima 67, pa zbroj $68+68+\ldots+68$ iznosi $67 \cdot 68 = 4556$. Sada nam još preostaje taj rezultat podijeliti s brojem 2, jer smo svaki broj u zbroju računali dvaput. Dakle, zbroj prvih 67 prirodnih brojeva iznosi 2278.

Primjer 3. Izračunaj zbroj svih prirodnih brojeva od 23 do 107.

Rješenje. Zadatak možemo riješiti na dva načina koristeći u oba Gaussovu dosjetku.

1. način. Koristimo Gaussovu dosjetku na do sada pokazani način. U prvom retku ispišemo zbroj prirodnih brojeva od 23 do 107, a u drugom retku zbroj od 107 do 23:

$$23 + 24 + 25 + \cdots + 106 + 107$$
$$107 + 106 + 105 + \cdots + 24 + 23.$$

Prvo izračunamo koliko ima brojeva od 23 do 107. Kada bismo imali sve brojeve od 1 do 107, bilo bi ih 107. Međutim, nemamo prva 22 broja, jer počinjemo od broja 23. Dakle, imamo $107 - 22 = 85$ brojeva.

Zbrojimo li svaka dva broja zapisana jedan ispod drugog $23 + 107$, $24 + 106$, $\ldots$, $106 + 24$, $107 + 23$ zbroj nam je uvijek isti i iznosi 130.

Dakle, $(85 \cdot 130) : 2 = 11050 : 2 = 5525$ pa zbroj brojeva od 23 do 107 iznosi 5525.

2. način. U ovom slučaju najprije izračunamo zbroj $1+2+3+...+106+107$, pa od tog zbroja oduzmemo zbroj $1+2+3+...+21+22$. U ovakvom načinu rješavanja zadatka Gaussovu dosjetku koristimo dva puta. Za zbroj prvih 107 prirodnih brojeva u prvom retku napišemo zbroj brojeva od 1 do 107, a u drugom retku isti taj zbroj obrnutim redoslijedom. Imamo:

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 106 + 107$$
$$107 + 106 + 105 + \cdots + 2 + 1.$$

Zbrojimo li svaka dva broja zapisana jedan ispod drugog, 1+107, 2+106, ...,106+2, 107+1 zbroj nam je uvijek isti i iznosi 108. Takvih parova brojeva ima ukupno 107.

Dakle, $(107 \cdot 108) : 2 = 11556 : 2 = 5778$.

Sada računamo zbroj $1 + 2 + 3 + ... + 21 + 22$. U prvom retku napišemo zbroj brojeva od 1 do 22, a u drugom retku isti taj zbroj, ali u obrnutom poretku.

$$1 + 2 + 3 + \cdots + 21 + 22$$
$$22 + 21 + \cdots + 3 + 2 + 1.$$

Zbrojimo li svaka dva broja zapisana jedan ispod drugog, 1+22, 2+21, ..., 22+1 zbroj nam je uvijek isti i iznosi 23.Takvih parova brojeva ukupno ima 22.

Dakle, suma prvih 22 prirodna broja iznosi $(23 \cdot 22) : 2 = 506 : 2 = 253$.

Konačno rješenje zadatka dobijemo kada oduzmemo te dvije sume tj. $5778 - 253 = 5525$

3.1. Poopćenje Gaussove dosjetke i primjena

Pokušajmo izračunati sumu prvih n prirodnih brojeva. Pogledajmo što smo imali do sada.

Prvo smo računali za $n = 100$, zbroj prvih 100 prirodnih brojeva i dobili dmo da iznosi $(100 \cdot 1001) : 2$.

Zatim smo za $n = 67$ dobili $(67 \cdot 68) : 2$.

Stoga, čini se da bi izračunali sumu prvih n prirodnih brojeva, da broj n moramo pomnožiti s njegovim sljedbenikom i dobiveni umnožak podijeliti s 2. Dakle, imamo:

Tvrdnja 3.1. *Zbroj S prvih n prirodnih brojeva iznosi $S = \frac{n(n+1)}{2}$.*

Ovdje treba istaknuti da učenici u petom razredu nisu učili razlomke na ovakvoj razini, pa im formulu treba zapisati na sljedeći način: $S = n(n + 1) : 2$.

Dokaz. Neka je n bilo koji prirodan broj. Označimo sa S zbroj svih brojeva od 1 do n. Dakle, $S = 1 + 2 + 3 + ... + (n - 1) + n$.

Koristeći do sada pokazanu Gaussovu metodu, u prvom retku napišimo zbroj brojeva od 1 do n, a u drugom retku isti taj zbroj samo u obrnutom poretku.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 3 + \ldots + n \\ S &= n + (n - 1) + (n - 2) + \ldots + 1 \end{aligned}$$

Istaknimo da je broj $n - 1$ za 1 manji od broja n, a $n - 2$ za 1 manji od $n - 1$, itd.

Zbrojimo ova dva retka i dobijemo

$$2S = (n + 1) + (n + 1) + \ldots + (n + 1).$$

$n + 1$ nam se u zbroju ukupno pojavljuje n puta pa imamo $2S = n\,(n + 1)$ i slijedi $S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$. ■

Naime, zbroj prvih n prirodnih brojeva dobit ćemo tako da posljednji broj pomnožimo s brojem koji je od njega veći za 1, te dobiveni umnožak podijelimo s 2.

Primjer 4. Izračunaj zbroj svih parnih brojeva do 68.

Rješenje. Zadatak možemo riješiti na više načina.

1. način. Koristimo do sada opisanu metodu. U prvom retku napišemo zbroj brojeva od 2 do 68, a u drugom retku isti taj zbroj obrnutim redoslijedom.

$$2+4+6+\ldots+66+68$$
$$68+66+64+\ldots+4+2$$

Koristeći do sada opisani račun, primjećujemo da je zbroj svaka dva broja zapisanih jedan ispod drugog uvijek 70. Pitanje na koje nam još preostaje odgovoriti je koliko tih zbrojeva imamo. Prirodnih brojeva od 1 do 68 ima 68. Parnih brojeva među njima je dvostruko manje, $68 : 2 = 34$, jer je svaki drugi broj paran. Tada vrijedi, $(70 \cdot 34) : 2 = 2380 : 2 = 1190$.

Dakle, $2+4+6+\ldots+68 = 1190$.

2. način. Primijetimo da je svaki od pribrojnika djeljiv brojem 2 pa tada zbroj možemo napisati na sljedeći način

$$2+4+6+\cdots+66+68 = 2(1+2+3+\cdots+33+34).$$

Zbroj u zagradama riješimo na do sada pokazani način. U prvom retku napišemo zbroj brojeva od 1 do 34, a u drugom retku napišemo isti taj zbroj, ali obrnutim redoslijedom.

$$1+2+3+\ldots+33+34$$
$$34+33+32+\ldots+2+1$$

Zbrojimo li svaka dva broja napisana jedan ispod drugog; $1+34, 2+33, \ldots, 34+1$, dobijemo uvijek isti zbroj koji iznosi 35. Takvih parova ukupno ima 34 pa zbroj svih parnih brojeva do 68 iznosi $2 \cdot \frac{34 \cdot 35}{2} = 34 \cdot 35 = 1190$.

Zbroj u zagradama možemo riješiti i primjenom formule $S = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$ za $n = 34$.

Sada učenicima za samostalnu vježbu zadamo sljedeći zadatak.

Primjer 5. Izračunaj zbroj prvih 30 neparnih brojeva.

Rješenje. Zadatak rješavamo potpuno analogno kao u prethodnom primjeru.

Primjer 6. Izračunaj zbroj $1+4+7+\cdots+82+85+88$.

Rješenje. Uočimo da se u traženom zbroju traži svaki treći broj od 1 do 88. Isto tako uočimo da svaki pribrojnik u danoj sumi podijeljen brojem 3 daje ostatak 1.

Ako svaki od danih pribrojnika uvećamo za 2 ($1+2=3, 4+2=6, 7+2=9, \ldots, 88+2=90$) dobit ćemo zbroj $3+6+9+\cdots+87+90$. Na ovaj način dobijemo zbroj u kojem je svaki pribrojnik djeljiv brojem 3, a ima jednako mnogo pribrojnika kao i zbroj $1+4+7+\cdots+82+85+88$. U zbroju $3+6+9+\cdots+87+90$ lako odredimo broj pribrojnika i to na sljedeći način: $90 : 3 = 30$. Zaključujemo da i u zbroju $1+4+7+\cdots+82+85+88$ ima 30 pribrojnika, pa Gaussovim postupkom dobivamo rješenje zadatka $30 \cdot 89 : 2 = 1335$ (30 parova čiji je zbroj 89).

Postoje li formule kojima na brži i jednostavniji način možemo izračunati zbroj n parnih te n neparnih prirodnih brojeva? Postoje! Pokažimo ih.

Zbroj prvih n parnih prirodnih brojeva možemo izračunati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}2+4+6+\cdots+2n &= 2\cdot(1+2+\cdots+n)\\ &= 2\cdot n\cdot(n+1):2 = n\cdot(n+1)\end{aligned}$$

Zbroj prvih n neparnih prirodnih brojeva možemo napisati na sljedeći način:

$$\begin{aligned}1+3+5+\cdots+(2n-1) &= (2\cdot1-1)+(2\cdot2-1)+(2\cdot3-1)+\cdots+(2\cdot n-1)\\ &= (2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+\cdots+2\cdot n)-(1+1+1+\cdots+1)\\ &= 2\cdot(1+2+3+\cdots+n)-n\\ &= n(n+1)-n = n\cdot n = n^2\end{aligned}$$

Primjer 7. Koliki je zbroj svih brojeva u tablici množenja 10×10 prvih 10 prirodnih brojeva ?

Rješenje. Razmotrimo tablicu množenja 5×5 prvih 5 prirodnih brojeva pa onda taj rezultat proširimo na bilo koju tablicu množenja u sustavu brojeva s bazom 10.

X	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
1	1	2	3	4	5
2	2	4	6	8	10
3	3	6	9	12	15
4	4	8	12	16	20
5	5	10	15	20	25

Lako uočimo da je:

$$\begin{aligned}S_n &= (1+2+3+4+5)+2(1+2+3+4+5)+3(1+2+3+4+5)+\\ &\quad 4(1+2+3+4+5)+5(1+2+3+4+5)\\ &= (1+2+3+4+5)(1+2+3+4+5) = (1+2+3+4+5)^2 = 225.\end{aligned}$$

Potpuno analogno naći ćemo da je zbroj svih brojeva u tablici množenja 10×10 jednak $(1+2+3+\cdots+9+10)^2 = 3025$.

3.2. Zadaci s natjecanja

Zadatak 1. Zbroj nekih 20 uzastopnih prirodnih brojeva je 2590. Koji su to brojevi? (*Općinsko natjecanje 2008. g., 5. razred*)

R j e š e n j e. 20 uzastopnih brojeva možemo definirati na sljedeći način: $x, x+1, x+2, \ldots, x+19$. Tada njihov zbroj možemo zapisati kao $x+(x+1)+(x+2)+\cdots+(x+19) = 2590$. Odavde slijedi, $20x+(1+2+\cdots+18+19) = 2590$.

Zbroj u zagradama izračunamo pomoću Gaussove dosjetke:

$$\begin{array}{c}1+2+3+\ldots+18+19\\ 19+18+17+\ldots+2+1\end{array}$$

U prvom retku napišemo zbroj od 1 do 19, a u drugom isti taj zbroj samo u obrnutom poretku. Zbroj dvaju brojeva zapisanih jedan ispod drugog je uvijek 20. Takvih parova brojeva ima 19, a svaki broj u zbroju smo računali dvaput.

$$\begin{aligned}20x + (19 \cdot 20 \div 2) &= 2590\\ 20x + (380 \div 2) &= 2590\\ 20x + 190 &= 2590\\ 20x &= 2400\\ x &= 120\end{aligned}$$

Traženi brojevi su $120, 121, 122, \ldots, 138$ i 139.

Zadatak 2: Odredi zbroj $5 + 10 + 15 + \cdots + 2000 + 2005$. (*Općinsko natjecanje 2005. g.,5.razred*)

R j e š e n j e. Zbroj napišimo ovako:

$$5 + 10 + 15 + \cdots + 2000 + 2005 = 5(1 + 2 + 3 + \cdots + 400 + 401)$$

Zbroj u zagradi riješimo Gaussovom dosjetkom tako da ispišemo u prvi redak zbroj brojeva od 1 do 401, a u drugi redak isti zbroj, ali od 401 do 1. Zbrojimo ta dva retka. Ukupno imamo 401 par brojeva čiji je zbroj 402. Svaki broj u zbroju smo računali dvaput pa moramo i podijeliti s 2.

Zadatak možemo riješiti i na način da na zbroj u zagradama primijenimo formulu za zbroj prvih 401 prirodnih brojeva, tj. $S_{401} = (401 \cdot 402) : 2 = 161202 : 2 = 80601$.

Slijedi: $5 + 10 + 15 + \cdots + 2000 + 2005 = 5 \cdot (401 \cdot 402) : 2 = 403005$.

Zadatak 3. Ako je p prost broj, onda je $p + (p + 1) + (p + 2) + \cdots + (p + 2012) + (p + 2013)$ složen broj. Dokaži. (*Županijsko natjecanje 2013.g., 5. razred*)

R j e š e n j e. Vrijedi:

$$p + (p + 1) + (p + 2) + \cdots + (p + 2012) + (p + 2013) =$$

$$= (p + \cdots + p) + (1 + 2 + \cdots + 2013)$$

p nam se u prvoj zagradi pojavljuje 2014 puta. Drugu zagradu riješimo pomoću Gaussove dosjetke tako da navedeni zbroj napišemo u dva retka. U prvome zbrojimo brojeve od 1 do 2013, a u drugom retku zbrojimo iste brojeve samo od 2013 do 1 dobijemo 2013 parova čiji je zbroj 2014. Svaki broj u navedenom zbroju smo računali dvaput pa moramo podijeliti s 2.

Sada iz navedenog slijedi:

$$\begin{aligned}(p + \ldots + p) + (1 + 2 + \ldots + 2013) &= 2014 \cdot p + (2013 \cdot 2014) \div 2\\ &= 1007 \cdot 2p + 2013 \cdot 1007\\ &= 1007 \cdot (2p + 2013)\end{aligned}$$

Naime, zbroj $p + (p + 1) + (p + 2) + \cdots + (p + 2012) + (p + 2013)$ je djeljiv sa 1007 pa je složen.

Zadatak 4. Ivica stanuje u Dugoj ulici 36. U školu ide Dugom ulicom onom stranom na kojoj su kuće označene parnim brojevima. Škola ima kućni broj 168. Na putu do škole Ivica se zabavlja zbrajajući kućne brojeve. Koliki je ukupan zbroj svih kućnih brojeva na parnoj strani od kuće do škole (Ivica je pribrojio i kućni broj svoje kuće i škole)? (*Županijsko natjecanje 2012.g., 5. razred*)

R j e š e n j e. Zbroj svih kućnih brojeva na parnoj strani od kuće do škole je:

$$36 + 38 + 40 + \cdots + 166 + 168 = 2(18 + 19 + \cdots + 83 + 84).$$

Ispišimo u prvi redak zbroj brojeva od 18 do 84, a u drugi redak isti zbroj, ali od 84 do 18.

$$\begin{gathered} 18 + 19 + 20 + \ldots + 83 + 84 \\ 84 + 83 + 82 + \ldots + 19 + 18 \end{gathered}$$

Zbrojimo oba retka i dobijemo:

$$102 + 102 + \cdots + 102 = 102(84 - 17) = 102 \cdot 67 = 6834$$

Parova ukupno ima $84 - 17 = 67$, a zbroj članova u svakom paru iznosi 102.

Dakle, $36 + 38 + 40 + \cdots + 166 + 168 = 6834$.

Ukupan zbroj svih kućnih brojeva na parnoj strani od kuće do škole je 6834.

Zadatak 5. Za koliko je zbroj $100 + 101 + 102 + \cdots + 299$ manji od zbroja $300 + 301 + 302 + \cdots + 499$? (*Županijsko natjecanje 2003. g., 5. razred*)

R j e š e n j e. Sume izračunamo pomoću Gaussove dosjetke.

Kod prve sume, u prvi redak napišemo zbroj brojeva od 100 do 299, a u drugi redak isti zbroj samo od 299 do 100. Ukupno imamo 200 parova čiji je zbroj 399, a svaki broj se u sumi pojavljuje dva puta. Kod druge sume u prvi redak napišemo zbroj brojeva od 300 do 499, a u drugi isti zbroj, ali od 499 do 300. Ukupno opet imamo 200 parova čiji je zbroj 799, a svaki broj se pojavljuje dva puta pa ukupan zbroj moramo još podijeliti s dva.

Sada je konačno rješenje,

$$799 \cdot 200 : 2 - 399 \cdot 200 \div 2 = (799 - 399) \cdot 200 \div 2 = 400 \cdot 200 \div 2 = 40000.$$

Prvi zbroj je za 40000 manji od drugoga.

Zadatak 6. Koliki je zbroj svih brojeva manjih od 1000 koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 4? (*Regionalno natjecanje 2008.g., 5. razred*)

R j e š e n j e. Traženi brojevi su $4, 9, 14, 19, 24, \ldots, 994, 999$.

Kako je $4 = 5 \cdot 0 + 4, 9 = 5 \cdot 1 + 4, 14 = 5 \cdot 2 + 4, 19 = 5 \cdot 3 + 4, \ldots, 999 = 5 \cdot 199 + 4$, vrijedi

$$\begin{aligned} 4 + 9 + 14 + \ldots + 999 &= (5 \cdot 0 + 4) + (5 \cdot 1 + 4) + (5 \cdot 2 + 4) + \ldots + (5 \cdot 199 + 4) \\ &= 5 \cdot (0 + 1 + 2 + \ldots + 199) + (4 + 4 + \ldots + 4). \end{aligned}$$

Sada vrijedi:

$$\begin{aligned} 4 + 9 + 14 + \ldots + 999 &= 5 \cdot 199 \cdot 200 : 2 + 200 \cdot 4 \\ &= 99500 + 800 = 100300. \end{aligned}$$

Zbroj svih brojeva manjih od 1000 koji pri dijeljenju s 5 daju ostatak 4 je 100300.

Zadatak 7. Odredi zbroj svih troznamenkastih brojeva koji pri dijeljenju s 3 daju ostatak 2, pri dijeljenju s 4 ostatak 3, a pri dijeljenju s 5 ostatak 4. (*Regionalno natjecanje 2003.g., 5. razred*)

R j e š e n j e. Sljedbenik troznamenkastog broja koji zadovoljava uvjete zadatka djeljiv je s 3,4 i 5 tj. višekratnik je broja 60.

Troznamenkasti višekratnici broja 60 su $120, 180, \ldots 960$.

Njihovi prethodnici su $119, 179, \ldots, 959$. Vrijedi:

$$\begin{aligned} 119 + 179 + \ldots + 959 &= (2 \cdot 60 - 1) + (3 \cdot 60 - 1) + \ldots + (16 \cdot 60 - 1) \\ &= 60 \cdot (2 + 3 + \ldots \ + 16) - (1 + 1 + \ldots \ + 1) \end{aligned}$$

Zbroj unutar prve zagrade rješavamo Gaussovom metodom. U prvom retku napišemo zbroj brojeva od 2 do 16, a u drugom retku isti taj zbroj samo u obrnutom poretku

$$\begin{aligned} &2 + 3 + 4 + \ldots + 15 + 16 \\ &16 + 15 + 14 + \ldots + 3 + 2. \end{aligned}$$

Zbroj svaka dva broja zapisanih jedan ispod drugog iznosi 18. Broj 1 nam nije član zbroja pa ukupno takvih parova imamo $16 - 1 = 15$. Svaki broj u zbroju smo računali dvaput. U drugoj zagradi nam se broj 1 pojavljuje 15 puta.

Sada imamo:

$$\begin{aligned} 119 + 179 + \ldots + 959 &= 60 \cdot (18 \cdot 15 \div 2) - 15 \\ &= 60 \cdot (270 \div 2) - 15 \\ &= 60 \cdot 135 - 15 \\ &= 8100 - 15 = 8085. \end{aligned}$$

Još nekoliko zadataka za vježbu:

Zadatak 8. Gea je zamislila broj. Kad bi oblikovala niz koji ima 2021 član tako da je prvi član zamišljeni broj, a svaki je sljedeći član veći za 20.21 od prethodnog, zbroj svih brojeva tog niza bio bi 11.1 puta veći od $2021 \cdot 2021$.

Koji je broj zamislila Gea? (*Državno natjecanje 2021.g., 5. razred*)

Zadatak 9. Zbrojimo li sve prirodne brojeve koji su veći od 55 i manji od 107, dobit ćemo isto kao da nepoznatom broju dodamo 2 112. Odredimo nepoznati broj. (*Školsko natjecanje 2019.g., 5. razred*)

Zadatak 10. Na slici je tablica množenja 12×12.

	1	2	...	10	11	12
1	1	2	...	10	11	12
2	2	4	...	20	22	24
...						
10	10	20	...	100	110	120
11	11	22	...	110	121	132
12	12	24	...	120	132	144

Koliki je zbroj svih 144 umnožaka iz tablice? (*Županijsko natjecanje 2018.g., 5. razred*)

Poglavlje 4.

Dirichletov princip

Dirichletov princip jedan je od najjednostavnijih elementarnih kombinatornih problema. Formulirao ga je i prvi koristio sam Dirichlet otprilike 1834. godine. Koristimo ga za rješavanje najraznovrsnijih zadataka s kojima se susrećemo u svakodnevnom životu, npr. postoji li u Hrvatskoj barem dvoje ljudi s istim brojem vlasi na glavi, postoji li u razredu barem dvoje učenika koji su rođeni u istom mjesecu, ako imamo 4 kuglice i 3 posude postoji li barem jedna posuda u kojoj se nalaze dvije kuglice, ... Vrlo često iz samog zadatka možemo zaključiti da se zadatak može riješiti pomoću ove metode. Pri donošenju zaključka pomažu nam riječi barem, najmanje, postoji.

Dirichleov princip pogoduje logičkom mišljenju i još je poznat kao „princip pretinaca (kutija)“ ili kao „princip golubinjaka“. Kao takav vrlo je jednostavan za primjenu u svakodnevnom životu, kao i onom matematičkom. Jedino što je važno je definirati što su golubovi odnosno golubinjaci te koje je pravilo pridruživanja. Važno je primijetiti da golubova uvijek mora biti više nego golubinjaka. Isto vrijedi za pretince i stvari koje u njih stavljamo. Stvari uvijek mora biti više od broja pretinaca. Kada jednom odredimo što je što direktnom primjenom Dirichletova principa dolazimo do vrlo elegantnog rješenja.

Zadaci s Dirichleovim principom se pojavljuju u petom i šestom razredu na državnom natjecanju, a u sedmom i osmom razredu već na županijskoj razini natjecanja.

4.1. Slaba forma Dirichletova principa

Teorem 4.1. *(slaba forma) Ako n+1 predmeta bilo kako rasporedimo u n kutija (pretinaca), onda postoji barem jedna kutija koja sadrži barem dva predmeta.*
Dokaz. *Tvrdnju dokazujemo kontradikcijom.*

Dakle, pretpostavimo da svaka kutija sadrži najviše jedan predmet. To znači da svaka kutija sadrži nijedan ili jedan predmet. Ako sa m *označimo broj praznih kutija vrijedi da je* $m \geq 0$*. Tada je broj kutija koje sadrže točno jedan predmet* $n - m$*. To znači da je ukupan broj predmeta, koji je* $n - m$*, smješten u* n *kutija, što je u kontradikciji s pretpostavkom da želimo smjestiti* $n + 1$ *predmet u* n *kutija, jer* $n - m \leq n < n + 1$*. Dakle, pretpostavka da svaka kutija sadrži najviše jedan predmet je bila pogrešna.* ∎

Važno je primijetiti da nam Dirichletov princip ne daje algoritam kako pronaći kutiju s barem dva predmeta. On nam samo garantira da takva kutija postoji.

Zapisan strogo matematički taj princip glasi:

Teorem 4.2. *Neka su S i T konačni skupovi, takvi da je $|S| > |T|$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada f nije injekcija, tj. postoje $x, x\prime \in S, x \neq x\prime$, tako da je $f(x) = f(x\prime)$.*
Dokaz. *Tvrdnju dokazujemo kontradikcijom.*

Pretpostavimo da je $f : S \to T$ injekcija. To znači da vrijedi $|S| \leq |T|$ što je u kontradikciji s tvrdnjom da je $|S| > |T|$. ■

Propozicija 4.1. *Neka su S i T konačni skupovi i $|S| = |T| = n$, a $f : S \to T$ neko preslikavanje. Tada je f injekcija $\Longleftrightarrow f$ surjekcija.*
Dokaz. $\Rightarrow$ *Ako je f injekcija, onda je je $|S| = |f(S)|$. Po pretpostavci je $|S| = |T|$, a kako je $f(S) \subseteq T$, te zbog $|f(S)| = |T|$ slijedi da je $f(S) = T$, jer je T konačan skup. Dakle, f je surjekcija.*

$\Leftarrow$ *Neka je f surjekcija. Za svako preslikavanje $g : X \to Y$ među konačnim skupovima je $|g(X)| \leq |X|$.Neka su $x, x\prime \in S, x \neq x\prime$. Pretpostavimo da je $f(x) = f(x\prime)$. Promotrimo restrikciju $g : S \backslash \{x\} \to T$ od f, tj. $g = f|_{S\backslash\{x\}}$. Očito je tada i z surjekcija, pa je zbog gornje napomene tada $n = |g(S\backslash\{x\})| \leq |S\backslash\{x\}| = n - 1$, što je nemoguće.* ■

Kako navedene teoreme koristimo u osnovnoj školi?

U osnovnoj školi ne koristimo pojam teorema kao ni dokaza pa samim time ne možemo učenicima ni pokazati ove teoreme i dokaze, ali možemo ih pokazati na vrlo jednostavan i logičan način. Koristimo se prvim navedenim teoremom.

Dakle, ako imamo n kutija i $n + 1$ predmet tada postoji kutija u kojoj su barem dva predmeta.

Umjesto predmeta i kutija možemo koristiti pojmove kuglica i pretinaca, zečeva i kaveza, ...

Evo i nekoliko primjera koje radimo u učionici i pomoću njih pojašnjavamo Dirichletov princip.

Primjer 1. Među 13 učenika najmanje dvoje učenika je rođeno u istom mjesecu.

Rješenje.

Prvi način. Odredimo što su nam predmeti, a što kutije. Predmeta uvijek mora biti više.

Učenici predstavljaju predmete, a mjeseci u godini kutije. Ako imamo 13 učenika (predmeta), a 12 mjeseci (kutija), onda mora postojati mjesec u kojem je rođeno barem dvoje učenika (kutija sa barem dva predmeta).

Drugi način. $13 = 12 \cdot 1 + 1$, gdje je 12 broj mjeseci. Po Dirichletovu principu u barem jednom mjesecu je rođeno barem dvoje učenika.

Treći način. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoje dva učenika koji su rođeni u istom mjesecu. Budući da je broj mjeseci u godini 12, ukupan broj učenika ne može biti veći od 12 što je u suprotnosti s uvjetom zadatka.

Primjer 2. Jednu školu pohađa 905 učenika. Dokažite da postoje barem dva učenika koji imaju iste inicijale.

Rješenje. Pretpostavimo suprotno, tj. da u školi ne postoje dva učenika s istim inicijalima. Kako je ukupan broj slova naše abecede 30, a treba nam inicijal i za ime i za prezime to je ukupan broj različitih inicijala $30 \cdot 30 = 900$. Iz ovoga slijedi da je u školi najviše 900 učenika što nije točno, jer u uvjetu zadatka piše da školu pohađa 905 učenika. Dakle, u danoj školi postoji barem dvoje učenika koji imaju iste inicijale.

Primjer 3. Unutar jediničnog kvadrata dano je pet točaka. Dokažite da postoje barem dvije točke čija je udaljenost manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Rješenje. Spojimo polovišta nasuprotnih stranica i tako podijelimo jedinični kvadrat na 4 kvadrata čije su stranice duljine $\frac{1}{2} = 0.5$. Po Dirichletovom principu će se u barem jednom "malom" kvadratu nalaziti barem dvije točke (kvadrati – kutije, točke – predmeti). Kako je dijagonala "malog" kvadrata duljine $\frac{\sqrt{2}}{2}$, možemo zaključiti da postoje barem dvije točke čija je udaljenost manja od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Primjer 4. Dano je 15 prirodnih brojeva. Dokažite da među njima postoje barem 2 broja čija je razlika djeljiva s 14.

Rješenje. U ovom zadatku koristimo se Propozicijom 4.1. tj. koristimo se Dirichletovim principom u kojem se govori o konačnim skupovima. Trebamo odrediti koja dva skupa imamo. Skup P očito tvore dani prirodni brojevi. Što se onda nalazi u drugom skupu R? U skupu R se nalaze svi ostatci pri dijeljenju s brojem 14. Dakle, skup $R = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$.

Budući da imamo 15 brojeva u skupu P, a 14 brojeva u skupu R (ostatci) postoje barem dva prirodna broja među početnih 15 koji daju isti ostatak pri dijeljenju sa 14. Njihova je razlika djeljiva sa 14.

4.2. Jaka forma Dirichletova principa

Dirichletov princip možemo i poopćiti. Primijetimo da ako $2n + 1$ predmeta treba rasporediti u n kutija, tada će u barem jednoj kutiji biti najmanje 3 predmeta. Nadalje, ako $3n + 1$ predmeta trebamo rasporediti u n kutija, tada će u barem jednoj kutiji biti najmanje 4 predmeta. Općenito, ako je $n(r - 1) + 1$ predmeta razmješteno u n kutija, tada će u bar jednoj kutiji biti najmanje r predmeta.

Dakle, vrijedi sljedeći teorem:

Teorem 4.3. *Ako je m predmeta razmješteno u n kutija, onda barem jedna kutija sadrži $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1$ predmet.*

Dokaz. *Najveći višekratnik broja n, koji je manji od m nađemo tako da n redom množimo s $1, 2, 3, ...,$ sve dok ne dođemo do $m - 1$. Ostatak odbacimo. Najveći takav višekratnik koji nije veći od $m - 1$ je $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor$. Kada bi bilo točno $n \cdot \lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor + 1 \leq m - 1 < m$ predmeta, stavili bismo $\lfloor \frac{m-1}{n} \rfloor$ njih u svaku kutiju, ali kako imamo m predmeta u najmanje jednoj kutiji bit će bar jedan predmet više.* ■

Primjer 5. Među 55 ljudi barem je 5 ljudi rođeno u istom mjesecu.

Rješenje. Koristeći se jakom formom Dirichletova principa vrijedi:

$$\left\lfloor \frac{55-1}{12} \right\rfloor + 1 = \lfloor 4.5 \rfloor + 1 = 5.$$

Dakle, barem 5 ljudi rođeno je u istom mjesecu.

Školski način rješavanja. 55 ljudi (predmeta) stavljamo u 12 mjeseci (kutija).

Vrijedi: $55 = 4 \cdot 12 + 7$. Prema Dirichletovom principu barem 1 kutija (mjesec) sadrži barem 5 predmeta (ljudi) tj. među 55 ljudi barem je 5 ljudi rođeno u istom mjesecu.

Važno je napomenuti da je dovoljno imati 49 ljudi jer je $49 = 4 \cdot 12 + 1$.

Dirichleov princip možemo još poopćiti.

Teorem 4.4. *Neka je $n \in N$ i $r_1, r_2, \ldots, r_n \in N$. Ako je $r_1 + r_2 + \cdots + r_n - n + 1$ predmeta razmješteno u n kutija $K_1, K_2, \ldots, K_n$, tada barem jedna kutija K_i sadrži najmanje r_i predmeta ($\geq r_i$), tj. ili K_1 sadrži najmanje r_1 predmeta ili K_2 sadrži najmanje r_2 predmeta,..., ili K_n sadrži najmanje r_n predmeta.*

Dokaz. *Dokazujemo kontradikcijom.*

Pretpostavimo da svaka kutija K_i sadrži manje od r_i predmeta. Tada bi ukupan broj predmeta bio najviše

$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + ... + (r_n - 1) = r_1 + ... + r_n - n$, *što ne može biti.* ■

Treba napomenuti da je je $r_1 + r_2 + \cdots + r_n - n$ predmeta moguće rasporediti u n kutija tako da svaka kutija K_i sadrži manje od r_i predmeta: $r_1 - 1$ u $K_1, r_2 - 1$ u $K_2, ..., r_n - 1$ u K_n.

Primijetimo da za $r_1 = r_2 = \cdots = r_n = r$ dobivamo jaku formu Dirichletova principa, a ako je još i $r = 2$, dobivamo slabu formu Dirichletova principa.

Primjer 6. U košari se nalaze naranče, mandarine i limuni. Valja odrediti minimalni broj agruma u košari tako da u njoj bude ili najmanje 5 naranči ili najmanje 6 mandarina ili najmanje 4 limuna.

Rješenje. Direktnom primjenom općeg Dirichletova principa dobivamo $5 + 6 + 4 - 3 + 1 = 13$.

Dirichletov princip se može poopćiti do neslućenih razmjera. Prvi je to učinio Frank P. Ramsey pa se po njemu osnovni teorem koji je dokazao zove *Ramseyev teorem*, a cijela teorija koja se time bavi *Ramseyeva teorija.*

Teorem 4.5. *Za sve $r, m \in N$ i sve prirodne brojeve $r_1, r_2, \ldots, r_m \geq r$ postoji najmanji prirodni broj $N = R(r_1, r_2, \ldots, r_m; r)$ tako velik da ako imamo skup od $n \geq N$ elemenata i ako u tom skupu razvrstamo sve r-podskupove u m klasa $K_1, K_2, ..., K_m$, onda postoji*

ili r_1 elemenata čiji su svi r-podskupovi u klasi K_1,

ili r_2 elemenata čiji su svi r-podskupovi u klasi K_2

...

ili r_m elemenata čiji su svi r-podskupovi u klasi K_m.

Broj $R(r_1, r_2, \ldots, r_m; r)$ zove se (opći) Ramseyev broj.

Dokaz zbog složenosti i duljine nećemo ovdje navoditi. Provodi se indukcijom po r (za $r = 1$ to je opći Dirichletov princip), pa onda indukcijom po m (i po svim brojevima $r_1, r_2, \ldots, r_m \geq r$) se dokažu izvjesne nejednakosti koje induktivno osiguravaju egzistenciju Ramseyevih brojeva.

Ako bismo stavili $r = 1$, tada je $N = R(r_1, r_2, \ldots, r_m; r)$najmanji broj sa svojstvom da ako imamo npr. n kuglica, $n \geq N$ koje trebamo staviti u m kutija $K_1, K_2, ..., K_m$ onda je ili u kutiji K_1 barem r_1 kuglica, ili je u kutiji K_2 barem r_2 kuglica, ..., ili je u kutiji K_m barem r_m kuglica. Vidimo, dakle, da je Dirichletov princip jedan poseban slučaj Ramseyeva teorema.

Primjer 7. U skupini od 6 ljudi postoje ili tri međusobna poznanika, ili postoji troje ljudi od kojih se nijedna dva čovjeka međusobno ne poznaju.

Pomoću Ramseyeva teorema bi to napisali ovako: $R(3, 3; 2) = 6$.

Rješenje. Ljude označimo brojevima od $1-6$ (zbog lakšeg snalaženja). Obzirom na prvog čovjeka (1) ostale podijelimo u dvije skupine $P = \{\text{poznanici od } 1\}$, $N = \{\text{nepoznati od } 1\}$. Vrijedi $P \cup N = \{2, 3, 4, 5, 6\}$. Tih pet osoba raspoređeno je u dvije skupine (poznanici i nepoznanici) pa po jakoj formi Dirichletova principa barem jedna skupina sadrži $\lfloor \frac{5-1}{2} \rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$ ljudi. Ako P sadrži troje ljudi, onda su oni svi međusobno neznanci ili postoji par poznanika. Ako postoji par poznanika, njih dvoje zajedno s osobom 1 daju troje poznanika.

Ako N sadrži troje ljudi, onda su oni ili poznanici, ili među njima postoji par neznanaca. Međutim, u tom slučaju njih dvoje s osobom 1 daju 3 neznanca.

4.3. Zadaci s natjecanja

Zadatak 1. Tri međusobno paralelna pravca sijeku se sa sedam na njih okomitih pravaca u 21 točki. Sjecišta tih pravaca nalaze se u tri reda i sedam stupaca. Neke od tih točaka su obojane crveno, a neke plavo. Dokaži da se uvijek mogu odabrati četiri točke iste boje koje su vrhovi pravokutnika. (*Državno natjecanje 2019. g., 7. razred*)

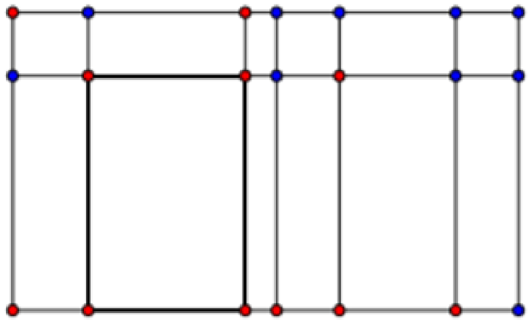
R j e š e n j e. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je više crvenih točaka. Dakle, među 21 točkom, barem ih je 11 crvenih.

Razlikujemo dva slučaja:

1) Postoji stupac s 3 crvene točke.

Kako preostalih 8 crvenih točaka treba rasporediti u 6 stupaca, postoji barem jedan stupac u kojemu su dvije crvene točke. Te su dvije crvene točke, zajedno s crvenim točkama na odgovarajućim pozicijama iz stupca s 3 crvene točke, vrhovi pravokutnika.

Na primjer:

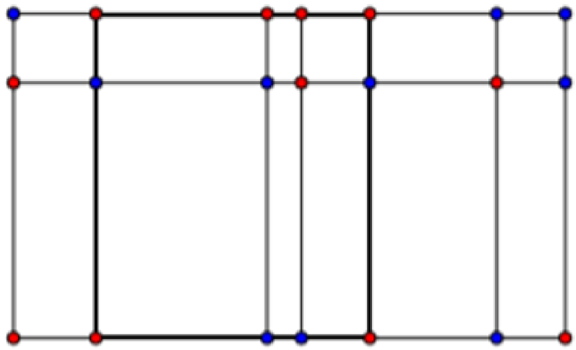


Slika 4.1: Mogući raspored točaka sa 3 crvene točke u stupcu

2) Ne postoji stupac s 3 crvene točke.

To znači da 11 crvenih točaka treba rasporediti u 7 stupaca s maksimalno dvije crvene točke pa zaključujemo da postoje barem 4 stupca s po dvije crvene točke. U svakom od ta 4 stupca dvije crvene točke mogu zauzeti 3 različite pozicije (prvi i drugi redak, prvi i treći redak ili drugi i treći redak), stoga postoji barem jedan raspored s odgovarajućim pozicijama crvenih točaka koje su vrhovi pravokutnika.

Na primjer:



Slika 4.2: Mogući raspored točaka bez 3 crvene točke u stupcu

Zadatak 2. Na županijskom natjecanju iz matematike od 4. do 8. razreda sudjelovalo je 2018 učenika. Svaki je natjecatelj rođen jedne od ovih godina: 2007., 2006., 2005., 2004. i 2003. (2004. godina je bila prijestupna.)

a) Dokaži da postoje barem dva natjecatelja rođena iste godine, istog mjeseca u toj godini i istog dana u tom mjesecu.

b) Dokaži da postoji najmanje 6 natjecatelja koji su rođeni istog mjeseca i istog dana u tom mjesecu. (*Državno natjecanje 2018. g., 6. razred*)

R j e š e n j e.

a) Od navedenih godina sve su imale 365 dana osim 2004. godine koja je imala 366 dana. To je ukupno $365 \cdot 4 + 366 = 1460 + 366 = 1826$ dana. Imamo 2018 natjecatelja i 1826 mogućih datuma rođenja što znači da je barem dvoje učenika rođeno istog dana, mjeseca i godine.

b) U jednoj godini postoji (najviše) 366 mogućih datuma rođenja. Stoga prema danu i mjesecu rođenja natjecatelje možemo razvrstati u 366 grupa. Kako je $2018 = 5 \cdot 366 + 188$, postoji barem jedna grupa u kojoj je najmanje 6 natjecatelja. (Obrazloženje: U najgorem slučaju, ako u svakoj od 366 grupa ima po 5 natjecatelja, bilo koji od preostalih 188 natjecatelja je rođen istog dana i mjeseca kao i netko iz tih 366 grupa.)

Zadatak 3. Na nekom Državnom natjecanju sudjelovalo je 290 učenika. Dokaži da se može odabrati 18 učenika među njima koji žive u istom naselju ili žive u 18 različitih naselja. (*Državno natjecanje 2016. g., 6. razred*)

R j e š e n j e.

Prvi način. U prvom mogućem slučaju natjecatelji žive u 18 ili više različitih naselja. Tada iz nekih 18 različitih naselja u kojima žive odaberemo po 1 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U drugom mogućem slučaju natjecatelji žive u 17 različitih naselja. U tom slučaju nije moguće odabrati 18 učenika koji žive u 18 različitih naselja. Kada bi u svakom od tih naselja bilo najviše po 17 učenika, tada bi u tih 17 naselja bilo najviše $17 \cdot 17 = 289$učenika. Kako je ukupan broj učenika 290, u nekom od tih 17 naselja živi barem 18 učenika. Iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i time smo izvršili traženi odabir.

U trećem mogućem slučaju natjecatelji žive u 16 ili manje različitih naselja. U tom slučaju (analogno kao u drugom slučaju) u nekom od tih naselja živi barem 18 učenika pa iz takvog naselja odaberemo 18 učenika i imamo traženi odabir.

Drugi način. Pretpostavimo da se ne može odabrati 18 učenika koji žive u istom naselju niti 18 učenika koji dolaze iz 18 različitih naselja. To znači da svi učenici dolaze iz najviše 17 naselja i iz svakog naselja dolazi najviše 17 učenika. U tom slučaju bi najveći mogući broj učenika bio $17 \cdot 17 = 289$, a na natjecanju je 290 učenika (jedan više). Dakle, pretpostavka je bila netočna pa iz jednog naselja dolazi (barem) 18 učenika ili se može odabrati 18 učenika iz 18 različitih naselja, što je i trebalo dokazati.

Zadatak 4. Dokaži da među bilo koja 502 prirodna broja postoje dva čiji su ili zbroj ili razlika djeljivi s 1000. (*Državno natjecanje 2013. g., 7. razred*)

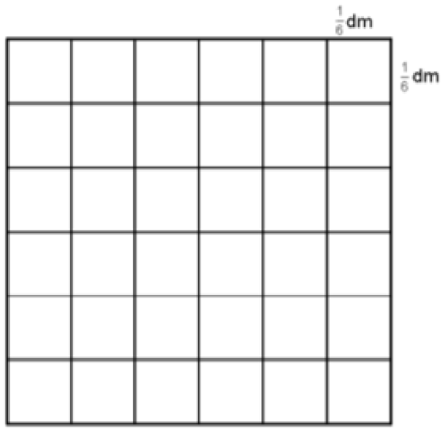
R j e š e n j e. Broj je djeljiv s 1000 ako je njegov troznamenkasti završetak 000.

U prvom mogućem slučaju među ova 502 broja postoje dva s jednakim troznamenkastim završetkom. Tada je njihova razlika djeljiva s 1000 i time smo utvrdili postojanje traženih brojeva.

U drugom mogućem slučaju među ova 502 broja ne postoje dva s jednakim troznamenkastim završetkom. Primijetimo da ima 499 parova troznamenkastih završetaka čiji je zbroj 1000 i to su $(001, 999), (002, 998), (003, 997), \ldots, (498, 502), (499, 501)$ i postoje još 2 troznamenkasta završetka: 000 i 500. Ako je među ova 502 broja jedan broj sa završetkom 000 i jedan broj sa završetkom 500, preostane još 500 brojeva s nekim drugačijim završetkom. Tada postoje dva broja koji pripadaju istom paru čiji je zbroj 1000 te smo time utvrdili postojanje traženih brojeva. Ako među ova 502 broja samo jedan broj ima završetak ili 000 ili 500 ili niti jedan, analogno slijedi da postoje dva broja koji pripadaju istom paru čiji je zbroj 1000 te smo time utvrdili postojanje traženih brojeva.

Zadatak 5. Unutar kvadrata čija je stranica duljine 1 dm nalazi se 110 točaka. Dokaži da postoji krug polumjera $\frac{1}{8}$ dm unutar kojeg se nalaze barem 4 zadane točke. (*Državno natjecanje 2013. g., 8. razred*)

R j e š e n j e. Razdijelimo kvadrat na sljedeći način:



Slika 4.3: Grafički prikaz podijeljenog kvadrata

Tako se dobije 36 kvadrata sa stranicama duljine $\frac{1}{6}$ dm.

Kako je $110 = 36 \cdot 3 + 2$, onda postoji kvadrat stranice duljine $\frac{1}{6}$ dm unutar kojeg se nalaze barem 4 točke.

Neka je d duljina dijagonale kvadrata unutar kojeg se nalaze barem 4 točke.

Tada $d^2 = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2$ odnosno $d = \frac{\sqrt{2}}{6}$ dm.

To znači da opisana kružnica kvadrata unutar kojeg se nalaze barem 4 točke ima polumjer $r = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{12}$ dm.

Obzirom da je $\frac{\sqrt{2}}{12} < \frac{1}{8}$, jer je $\frac{2}{144} < \frac{1}{64}$, onda koncentrična kružnica s opisanom kružnicom, a čiji je polumjer $\frac{1}{8}$ dm, omeđuje krug u kojem se nalaze barem 4 točke.

Zadaci za vježbu:

Zadatak 6. Nađite najmanji prirodan broj n takav da za svaki skup od n točaka s cjelobrojnim koordinatama, od kojih nikoje tri ne leže na istom pravcu, postoji trokut s vrhovima iz tog skupa za kojeg vrijedi da polovišta njegovih stranica također imaju cjelobrojne koordinate. (*Državno natjecanje 2021. g., 7. razred*)

Zadatak 7. Dan je prirodni broj n i konveksan mnogokut s n vrhova. Svaka od stranica i dijagonala tog mnogokuta obojana je plavom ili crvenom bojom. Odredite najmanji n takav da, za svako takvo bojanje, postoje tri vrha promatranog mnogokuta koja su međusobno spojena dužinama iste boje. (*Državno natjecanje 2020. g., 8. razred*)

Poglavlje 5.

Diofantske jednadžbe

Gledajući teme koje se pojavljuju na natjecanjima vidljivo je da su Diofantske jednadžbe jedna od nezaobilaznih. U redovnoj nastavi matematike se kao takve ne spominju, pa je to jedna od tema za obradu na dodatnoj nastavi matematike. Što su to diofantske jednadžbe?

Diofantska jednadžba je polinomna jednadžba s dvije ili više nepoznanica s cjelobrojnim koeficijentima za koje se traže cjelobrojna rješenja. Postoje linearne i nelinearne diofantske jednadžbe.

Nekoliko primjera diofantskih jednadžbi:

∘ $2x+3y=0, 5x-3y-8=5$ (linearne diofantske jednadžbe s dvije nepoznanice x i y)

∘ $x+y=2z, 3x-5y+7z=5$ (linearne diofantske jednadžbe s tri nepoznanice x, y i z)

∘ $2x^2-y^2=1, 2xy-5x+y=4$ (diofantske jednadžbe drugog stupnja s dvije nepoznanice x i y)

Često se kod rješavanja matematičkih zadataka rješenje svodi na rješavanje diofantskih jednadžbi. Međutim, da bi ih mogli ispravno rješavati učenici bi trebali koristiti razne činjenice o brojevima. Većina tih činjenica učenicima je poznata iz redovne nastave, ali nije naodmet prisjetiti ih se. Evo nekih od njih:

∘ Paran prirodan broj je oblika $2k$, a neparan oblika $2k-1$, za $k \in N$.

∘ Prirodan broj je djeljiv s 3 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 3.

∘ Prirodan broj je djeljiv s 9 ako mu je zbroj znamenki djeljiv s 9.

∘ Ako je svaki pribrojnik u zbroju djeljiv s nekim brojem, onda je i zbroj djeljiv s tim brojem. (Isto vrijedi i za razliku.)

∘ Umnožak tri uzastopna prirodna broja djeljiv je s 6.

∘ Umnožak dva uzastopna parna prirodna broja djeljiv je s 8.

∘ Kvadrati prirodnih brojeva ne mogu završavati s 2, 3, 7 i 8.

∘ Kvadrat svakog parnog prirodnog broja oblika je $4m$, za $m \in N$.

∘ Kvadrat svakog neparnog prirodnog broja je oblika $8m+1$, za $m \in N$.

∘ Svaki prost broj veći od 3 je oblika $6m-1$ ili $6m+1$, za $m \in N$.

∘ Kvadrat svakog prostog broja većeg od 3 je oblika $12m+1$, za $m \in N$.

∘ Ako je n^2 paran broj, onda je i n paran broj, za $n \in N$.

∘ Ako je n^2 neparan broj onda je i n neparan broj, za $n \in N$.

∘ Zbroj i razlika dvaju cijelih brojeva iste je parnosti.

Svaku od navedenih tvrdnji možemo i dokazati sa učenicima, ali većinu toga tek u osmom razredu kada učenici uče kvadriranje racionalnih brojeva.

Tvrdnja 5.1. *Dokažimo tvrdnju da je kvadrat svakog parnog prirodnog broja oblika* $4m$, *za* $m \in N$.
Dokaz. *Svaki paran prirodan broj* a *je oblika* $a = 2k, k \in N$. *Njegov kvadrat je onda oblika* $a^2 = (2k)^2 = 4k^2$. *Odavde slijedi da je kvadrat parnog broja oblika* $4m$, *pri čemu je* $m = k^2, m \in N$. ■

Tvrdnja 5.2. *Dokažimo da je svaki prost broj veći od 3 oblika* $6m - 1$ *ili* $6m + 1$ *za* $m \in N$
Dokaz. *Prirodan broj pri dijeljenju sa 6 daje jedan od ostataka* $0, 1, 2, 3, 4, 5$. *Brojevi oblika* $6k, 6k+2, 6k+3, 6k+4$ *su složeni pa su nam jedine preostale mogućnosti za proste brojeve veće od 3 brojevi oblika* $6k + 1$ *i* $6k + 5$. *Primijetimo da broj oblika* $6k + 5$ *možemo zapisati i kao* $6k + 5 = 6k + 6 - 1 = 6(k + 1) - 1$, *pa je on oblika* $6m - 1$ *(pri čemu je* $k + 1 = m$*).* ■

S obzirom da se na natjecanjima često pojavljuju zadaci koji se rješavaju pomoću diofantskih jednadžbi bilo bi dobro da se učenicima pokaže svaka pojedina metoda rješavanja budući da se na natjecanju susreću s potpuno nepoznatim zadacima i poznavanje različitih načina rješavanja im može pomoći u pronalaženju ideje za rješavanje zadatka.

U nastavku ćemo pojasniti različite metode rješavanja te ćemo kod svake metode pokazati i nekoliko primjera za obradu na dodatnoj nastavi.

5.1. Metoda umnoška (faktorizacije)

Ova metoda se može primijeniti kod diofantskih jednadžbi najmanje drugog stupnja. Onu stranu jednadžbe (najčešće lijevu) u kojoj se nalaze nepoznanice najprije nizom transformacija svedemo na oblik umnoška, dok se na drugoj strani (najčešće desnoj) nalazi samo broj. Nakon što dobijemo takav oblik jednadžbe promatramo sve moguće slučajeve.

Kod razlikovanja slučajeva stranu jednadžbe na kojoj se nalazi samo broj zapišemo u obliku umnoška tog broja i broja 1.

Kako ćemo transformirati jednadžbu $x^2 - 2xy = 5$ u traženi oblik, tj. u oblik u kojem možemo primijeniti danu metodu? Pogledamo lijevu stranu jednadžbe i pitamo se kako ćemo je zapisati u obliku umnoška. Očito je da x^2 i $2xy$ sadrže nepoznanicu x, pa im je ona zajednički faktor. Primijenimo li distributivnost množenja prema zbrajanju („izlučimo" zajednički faktor x) dobit ćemo $x(x - 2y) = 5$ te sada možemo primijeniti danu metodu.

Riješimo nekoliko zadataka danom metodom.

Primjer 1. Riješimo u skupu cijelih brojeva gornju jednadžbu $x^2 - 2xy = 5$.

Rješenje. Kada lijevu stranu zapišemo u obliku umnoška dobijemo jednadžbu oblika $x(x - 2y) = 5$. Sada se pitamo kada je umnožak dva cjelobrojna izraza x i $x - 2y$ jednak 5.

Sve moguće slučajeve nam je najlakše prikazati pomoću tablice.

x	1	5	-1	-5
$x-2y$	5	1	-5	-1

Još nam preostaje odrediti koliki su x i y.

x	1	5	-1	-5
y	-2	2	2	-2

Rješenja možemo zapisati i u obliku uređenih parova:

$$(x, y) \in \{(1,-2),(5,2),(-1,2),(-5,-2)\}$$

Primjer 2. Riješimo jednadžbu $xy + x - 3y - 6 = 0$ u skupu cijelih brojeva.

Rješenje. Lijevu stranu trebamo napisati u obliku umnoška pa je prvo rastavimo na faktore

$$\begin{aligned} (xy + x) + (-3y - 3) - 3 &= 0 \\ x(y + 1) - 3(y + 1) &= 3 \\ (y + 1)(x - 3) &= 3 \end{aligned}$$

Sada se pitamo kada je umnožak dva cjelobrojna izraza $y + 1$ i $x - 3$ jednak 3.

Znamo da su $y+1$ i $x-3$ istog predznaka (umnožak pozitivan), pa razlikujemo sljedeće slučajeve (ovog puta prikažimo bez tablice):

1. $x - 3 = 1$, $y + 1 = 3$ iz čega slijedi da je $x = 4$, a $y = 2$.
2. $x - 3 = 3$, $y + 1 = 1$ iz čega slijedi da je $x = 6$, a $y = 0$.
3. $x - 3 = -1$, $y + 1 = -3$ iz čega slijedi da je $x = 2$, a $y = -4$.
4. $x - 3 = -3$, $y + 1 = -1$ iz čega slijedi da je $x = 0$, a $y = -2$.

Rješenje zapišimo u obliku uređenih parova: $(x, y) \in \{(4,2),(6,0),(2,-4),(0,-2)\}$.

Primjer 3. Riješimo u skupu cijelih brojeva jednadžbu $x^2 - y^2 = 997$.

Rješenje. Faktorizacijom lijeve strane jednadžbe (razlika kvadrata) dobijemo umnožak $(x - y)(x + y) = 997$.

Ono što sada trebamo primijetiti je to da je broj 997 prost broj. Također, umnožak dva cijela broja mora biti 997 (ili su oba pozitivna ili su oba negativna).

Sve moguće slučajeve prikažimo pomoću tablice.

$x-y$	1	-1	997	-997
$x+y$	997	-997	1	-1

Još nam preostaje odrediti koliki su x i y.

U osmom razredu učenici uče sustave jednadžbi, pa ostatak zadatka možemo riješiti na taj način. Pogledajmo prvi stupac u tablici. Matematički zapisano su to dvije jednadžbe s dvije nepoznanice:

$$\begin{aligned} x - y &= 1 \\ x + y &= 997 \end{aligned}$$

Rješavajući ih metodom suprotnih koeficijenata dobijemo: $2x = 998$, pa je $x = 499$, odnosno $y = 498$. Tako napravimo za sve preostale slučajeve.

Rješavajući drugi stupac pomoću danih jednadžbi $x - y = -1$ i $x + y = -997$, dobijemo $2x = -998$, pa je $x = -499$, odnosno $y = -498$.

Analogno, iz trećeg stupca proizlazi da je $2x = 998$, tj. $x = 499$,i $y = -498$.

I iz posljednjeg stupca slijedi da je $2x = -998$, pa je $x = -499$, odnosno $y = 498$.

Rješenje zapišimo u obliku uređenih parova:

$$(x, y) \in \{(499, 498), (-499, -498), (499, -498), (-499, 498)\}.$$

Primjer 4. Koliko ima pravokutnih trokuta čije su sve stranice cjelobrojne, a jedna kateta je 6 *cm*?

Rješenje. U ovom zadatku trebamo primijeniti Pitagorin poučak $a^2 + b^2 = c^2$, pri čemu su a i b katete te c hipotenuza pravokutnog trokuta. Označimo s a zadanu duljinu katete tj. neka je $a = 6$ *cm*.

Iz Pitagorina poučka vrijedi da je $c^2 - b^2 = a^2$ tj. da je $c^2 - b^2 = 36$ te nakon faktorizacije lijeve strane dobijemo $(c - b)(c + b) = 36$.

Ovdje trebamo uočiti i da je duljina hipotenuze veća od duljine katete te ne moramo razmatrati sve moguće slučajeve već samo one gdje je $c - b < c + b$. Isto tako u obzir dolaze samo pozitivni cijeli brojevi (jer duljina stranice ne može biti negativna).

Prikažimo moguće slučajeve pomoću tablice:

$c - b$	$c + b$	$2c$ *(kao pomoć)*	c	b
1	36	37	nije cijeli broj	
2	**18**	**20**	**10**	**8**
3	12	15	nije cijeli broj	
4	9	13	nije cijeli broj	

Napomena: $2c$ dobijemo kada riješimo sustav jednadžbi $c - b = 1$ i $c + b = 36$, kao što smo pokazali u gornjem primjeru. (Umjesto 1 i 36 može stajati bilo koja druga kombinacija brojeva iz prvog i drugog stupca).

Kao što vidimo iz tablice postoji samo jedan pravokutan trokut s katetom duljine 6 *cm* čije su sve stranice cjelobrojne. Duljine stranica tog pravokutnog trokuta iznose: 6 *cm*, 8 *cm* i 10 *cm*.

5.2. Metoda dijeljenja (kvocijenta)

Metoda se sastoji u tome da se jednadžba transformira tako da se jedna nepoznanica prikaže kao racionalna funkcija druge nepoznanice. Potom se prikaže u obliku zbroja cijele i racionalne funkcije druge nepoznanice (ukoliko je to moguće) te se potom gledaju svi mogući slučajevi analizom druge funkcije.

Kod linearnih diofantskih jednadžbi metodu kvocijenta možemo primijeniti bez poteškoća. Međutim kod onih višeg stupnja to neće uvijek biti moguće.

Primjer 5. Riješimo jednadžbu $2x + 7y = 0$.

Rješenje. Prikažimo jednu nepoznanicu pomoću druge: $x = \frac{-7}{2}y$. Budući da je x cijeli broj, y mora biti djeljiv s 2, tj. y mora biti oblika $y = 2b$, gdje je b neki cijeli broj. Odatle slijedi da je $x = -7b$. Prema tome, dobili smo da su rješenja početne jednadžbe svi uređeni parovi oblika $(-7b, 2b), b \in \mathbb{Z}$.

Primjer 6. Riješimo jednadžbu $xy + 2y = x$ u skupu cijelih brojeva.

Rješenje. Prvo transformiramo jednadžbu: $y(x+2) = x$, pa je $y = \frac{x}{x+2} = \frac{x+2-2}{x+2}$, odnosno $y = 1 - \frac{2}{x+2}$.

Budući da nam x i y moraju biti cijeli brojevi, pitamo se u kojim slučajevima to vrijedi. Vrijedit će samo onda kada je izraz $\frac{2}{x+2}$ cijeli broj, tj. samo onda kada je izraz $x + 2$ djelitelj broja 2. To će vrijediti samo za $x + 2 \in \{-2, -1, 1, 2\}$, a odatle slijedi da je $x \in \{-4, -3, -1, 0\}$.

Prikažimo tablično dane mogućnosti:

$x + 2$	x	$\frac{2}{x+2}$	$y = 1 - \frac{2}{x+2}$
-2	**-4**	-1	**2**
-1	**-3**	-2	**3**
1	**-1**	2	**-1**
2	**0**	1	**0**

Dakle, $(x, y) \in \{(-4, 2), (-3, 3), (-1, -1), (0, 0)\}$.

Primjer 7. Riješimo jednadžbu $xy + 3y^2 = 11$ u skupu cijelih brojeva.

Rješenje. Budući da u zadatku imamo kvadratnu diofantsku jednadžbu transformiramo onu nepoznanicu koja nam je linearna tj. u ovom slučaju ćemo nepoznanicu x prikazati kao racionalnu funkciju nepoznanice y.

$xy = -3y^2 + 11$ pa je $x = \frac{-3y^2+11}{y}$, odnosno $x = -3y + \frac{11}{y}$.

Kada nam je x cijeli broj? Samo onda kada je razlomak $\frac{11}{y}$ cijeli broj, a to vrijedi u slučajevima kada je $y \in \{-11, -1, 1, 11\}$.

Prikažimo podatke tablično:

y	$\frac{11}{y}$	$-3y$	$x = -3y + \frac{11}{y}$
-11	-1	33	**32**
-1	-11	3	**-8**
1	11	-3	**8**
11	1	-33	**-32**

Dakle, $(x, y) \in \{(32, -11), (-8, -1), (8, 1), (-32, 11)\}$.

Primjer 8. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y čiji je umnožak pet puta veći od njihova zbroja.

Rješenje. Zapišimo tekstualni zadatak matematički: $xy = 5(x+y)$. Sada vidimo da imamo diofantsku jednadžbu – jednu jednadžbu s dvije nepoznanice i primijenimo metodu kvocijenta za njeno rješavanje. Izrazimo transformacijama y pomoću racionalne funkcije koja sadrži x.

$xy - 5y = 5x$, tj. $y(x - 5) = 5x$, odnosno $y = \frac{5x}{x-5}$.

Sredimo i zapišimo desnu stranu jednakosti u obliku zbroja cijele i racionalne funkcije druge nepoznanice. $y = \frac{5x-25+25}{x-5}$ pa je $y = 5 + \frac{25}{x-5}$.

Kada je $\frac{25}{x-5}$ djeljivo s 25? U slučajevima kada nam je $x-5 \in \{1, -1, 5, -5, 25, -25\}$. Riješimo zadatak bez tablice, razlikovanjem slučajeva:

1. Za $x - 5 = 1$, $\mathbf{x = 6}$, pa je $\frac{25}{x-5} = 25$ i $y = 5 + \frac{25}{x-5} = 5 + 25$ tj. $\mathbf{y = 30}$.
2. Za $x - 5 = -1$, $\mathbf{x = 4}$, pa je $\frac{25}{x-5} = -25$ i $y = 5 + \frac{25}{x-5} = 5 - 25$ tj. $\mathbf{y = -20}$.
3. Za $x - 5 = 5$, $\mathbf{x = 10}$, pa je $\frac{25}{x-5} = 5$ i $y = 5 + \frac{25}{x-5} = 5 + 5$ tj. $\mathbf{y = 10}$.
4. Za $x - 5 = -5$, $\mathbf{x = 0}$, pa je $\frac{25}{x-5} = -5$ i $y = 5 + \frac{25}{x-5} = 5 - 5$ tj. $\mathbf{y = 0}$.
5. Za $x - 5 = 25$, $\mathbf{x = 30}$, pa je $\frac{25}{x-5} = 1$ i $y = 5 + \frac{25}{x-5} = 5 + 1$ tj. $\mathbf{y = 6}$.
6. Za $x - 5 = -25$, $\mathbf{x = -20}$, pa je $\frac{25}{x-5} = -1$ i $y = 5 + \frac{25}{x-5} = 5 - 1$ tj. $\mathbf{y = 4}$.

Dakle, $(x, y) \in \{(6, 30), (4, -20), (10, 10), (0, 0), (30, 6), (-20, 4)\}$.

5.3. Metoda posljednje znamenke

Metoda posljednje znamenke je vrlo jednostavna ukoliko se poznaju osnovna pravila o brojevima koja su među ostalim navedena na početku ovog poglavlja.

Metoda se sastoji u tome da se odrede posljednje znamenke brojeva na lijevoj i desnoj strani jednadžbe te da se onda na temelju toga zaključuje ima li jednadžba cjelobrojno rješenje ili ne. Znamenka jedinica zbroja dva broja jednaka je zbroju znamenki jedinica tih brojeva. Slično vrijedi i za umnožak, tj. znamenka jedinica umnoška dva broja jednaka je umnošku znamenki jedinica tih brojeva.

Ukoliko je zbroj (umnožak) zadnjih znamenki brojeva na lijevoj i desnoj strani jednadžbe jednak, jednadžba će imati cjelobrojno rješenje.

Primjer 9. Dokaži da jednadžba $20x + 30y = 10009$ nema rješenje u skupu cijelih brojeva.

Rješenje. Znamo da su brojevi $20x$ i $30y$ djeljivi s deset pa im je posljednja znamenka 0. Njihov zbroj će također završavati s 0 (ako su dva broja djeljiva nekim brojem onda je i njihov zbroj djeljiv tim istim brojem). Na desnoj strani imamo broj 10009 koji nije djeljiv s 10 jer završava sa znamenkom 9, a ne 0. Prema tome jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Primjer 10. Dokaži da jednadžba $y(y+3) = 2023$ nema rješenje u skupu cijelih brojeva.

Rješenje. Pogledajmo sve mogućnosti zadnje znamenke umnoška $y(y + 3)$.

Zbog jednostavnosti prikažimo ih tablično (pišemo samo posljednju znamenku zbroja odnosno umnoška u tablicu).

$\mathbf{y}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$\mathbf{y+3}$	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2
$\mathbf{y(y+3)}$	0	4	0	8	8	0	4	0	8	8

Možemo vidjeti da na lijevoj strani jednakosti brojevi završavaju znamenkom 0, 4 ili 8, dok na desnoj strani imamo broj 2023 koji završava znamenkom 3, pa dana jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Primjer 11. Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbu $5x + y^2 = 9876543$.

Rješenje. Pogledajmo koju sve posljednju znamenku mogu imati kvadrati cijelih brojeva.

y	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y^2	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1

Iz tablice vidimo da kvadrat cijelog broja može završavati jednom od znamenki 0, 1, 4, 5, 6 ili 9. S obzirom da je broj $5x$ djeljiv brojem 5 može završavati samo znamenkom 0 ili 5. Pogledajmo sada koje su sve mogućnosti koje možemo dobiti zbrajanjem posljednje dvije znamenke brojeva na lijevoj strani jednakosti.

Ako broj $5x$ završava znamenkom 0 zbrajanjem tog broja (nule) s posljednjom znamenkom kvadrata cijelog broja y^2 (pročitamo ih iz tablice) dobit ćemo 0, 1, 4, 5, 6 ili 9 kao moguću posljednju znamenku.

Ukoliko pak broj $5x$ završava znamenkom 5 zbrajanjem tog broja (broja 5) s posljednjom znamenkom kvadrata cijelog broja y^2 dobit ćemo 5, 6, 9, 0,1 ili 4 kao moguću posljednju znamenku (prvi broj završava znamenkom 5, drugi znamenkom 0 – njihov zbroj završava znamenkom 5 i tako za svaki slučaj).

Kako broj s desne strane jednakosti završava znamenkom 3, a izraz na lijevoj strani završava jednom od znamenki 0, 1, 4, 5, 6, 9 zaključujemo da jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Što da nam je zadatak bio zadan na sljedeći način:

Riješi u skupu cijelih brojeva jednadžbu $5x + 10y^2 = 9876543$? Do rješenja dođemo vrlo jednostavno. Izraz $10y^2$ je djeljiv brojem 10 pa mu je posljednja znamenka uvijek nula i zbrojena s bilo kojom drugom znamenkom ne mijenja rezultat. Stoga gledamo samo izraz $5x$ koji je djeljiv brojem 5 pa može završavati samo znamenkom 0 ili 5. Budući da na desnoj strani broj završava znamenkom 3 jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

5.4. Metoda parnosti

Metoda parnosti se svodi na to da se u danoj diofantskoj jednadžbi odredi parnost jedne od nepoznanica i na temelju toga se zaključuje ima li jednadžba cjelobrojno rješenje ili ne. Ako je parnost na obje strane ista onda ga ima.

Primjer 12. Postoje li cjelobrojna rješenja jednadžbe $x^2 + 16y = 1373$?

Rješenje. Razlikujemo dva slučaja.

1. Ako pretpostavimo da je x paran broj onda je cijela lijeva strana jednakosti parna, pa u tom slučaju rješenje ne postoji (jer je desna strana jednakosti neparna).

2. Pretpostavimo da je x neparan, odnosno da je oblika $x = 2k+1$. Primijenimo to u jednadžbi. Sada je

$$\begin{aligned}
(2k+1)^2 + 16y &= 1373 \\
4k^2 + 4k + 1 + 16y &= 1373 \\
4k^2 + 4k + 16y &= 1372 \\
4(k^2 + k + 4y) &= 1372 \\
k^2 + k + 4y &= 343 \\
k(k+1) + 4y &= 343
\end{aligned}$$

Pogledajmo sada što imamo na lijevoj strani jednadžbe. Broj $k(k+1)$ kao umnožak dva uzastopna cijela broja je uvijek paran broj, a i $4y$ je paran broj pa iz toga slijedi da je lijeva strana jednadžbe uvijek paran broj i nikada ne može biti jednaka 1373. Iz ovoga slijedi da jednadžba nema cjelobrojna rješenja.

Primjer 13. Dokažite da jednadžba $(n^2+n+2)x+2y=1$ nema cjelobrojno rješenje (x,y) ni za jedan cijeli broj n.

Rješenje. Pretpostavimo da je n paran broj i zapišimo ga u obliku $n=2m$, pri čemu je m cijeli broj. Tada vrijedi $((2m)^2+2m+2)x+2y=1$ tj. $(4m^2+2m+2)x+2y=1$.

Odavde vidimo da je cijeli izraz $4m^2+2m+2$ djeljiv s 2, što je paran broj kao i $2y$ pa je cijela lijeva strana jednadžbe paran broj. Međutim, kako je desna strana jednadžbe jednaka 1, što je neparan broj ne postoji cjelobrojno rješenje dane jednadžbe.

Ako pak pretpostavimo da je n neparan broj tj. da je n oblika $n=2m+1$, pri čemu je m cijeli broj dobijemo $((2m+1)^2+2m+1+2)x+2y=1$, odnosno $(4m^2+4m+1+2m+1+2)x+2y=1$ pa je $(4m^2+6m+4)x+2y=1$.

Na lijevoj strani jednadžbe imamo izraze $4m^2+6m+4$ i $2y$ koji su oba djeljivi s 2. Prema tome, ni ako je n neparan broj jednadžba nema rješenje u skupu cijelih brojeva.

5.5. Metoda zbroja kvadrata

Metoda zbroja kvadrata se sastoji u tome da se dana diofantska jednadžba svede na zbroj kvadrata na jednoj strani te da se ispitaju sve mogućnosti zbroja kvadrata i na temelju toga donese zaključak ima li jednadžba cjelobrojno rješenje i koliko njih.

Primjer 14. Koliko rješenja u skupu cijelih brojeva ima jednadžba $x^2+y^2=5$?

Rješenje. Pitamo se kada je zbroj kvadrata dva cijela broja jednak 5? Zbroj dva kvadrata jednak je 5 samo ako su to brojevi 1 i 4.

Prikažimo mogućnosti pomoću tablice.

x^2	y^2	x	y
1	4	**1**	**2**
1	4	**1**	**-2**
1	4	**-1**	**2**
1	4	**-1**	**-2**
4	1	**2**	**1**
4	1	**2**	**-1**
4	1	**-2**	**1**
4	1	**-2**	**-1**

Jednadžba ima 8 rješenja u skupu cijelih brojeva:

$$(x,y)\in\{(1,2),(1,-2),(-1,2),(-1,-2),(2,1),(2,-1),(-2,1),(-2,-1)\}.$$

Primjer 15. Riješimo u skupu cijelih brojeva jednadžbu: $n^2 - 4n + 3 + m^2 = 0$.

Rješenje. U ovom primjeru prvo izraz na lijevoj strani zapišimo u obliku zbroja dva kvadrata. Vrijedi: $n^2 - 4n + 4 - 1 + m^2 = 0$.

Budući da je $n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2$ dobijemo jednadžbu $(n-2)^2 + m^2 = 1$.

Zbroj dva kvadrata je 1 samo u slučaju kada su ti kvadrati 0 i 1.

Riješimo jednadžbu pomoću tablice.

m^2	$(n-2)^2$	m	$n-2$	n
0	1	**0**	1	**3**
0	1	**0**	-1	**1**
1	0	**1**	0	**2**
1	0	**-1**	0	**2**

Rješenje zadatka: $(m, n) \in \{(0,3), (0,1), (1,2), (-1,2)\}$.

5.6. Zadaci s natjecanja

Zadatak 1. Odredite sve točke s cjelobrojnim koordinatama (x, y) za koje vrijedi $x \cdot (y-1) = 8$. Točke nacrtajte u koordinatnom sustavu u ravnini. (*Županijsko natjecanje 2021.g., 6. razred*)

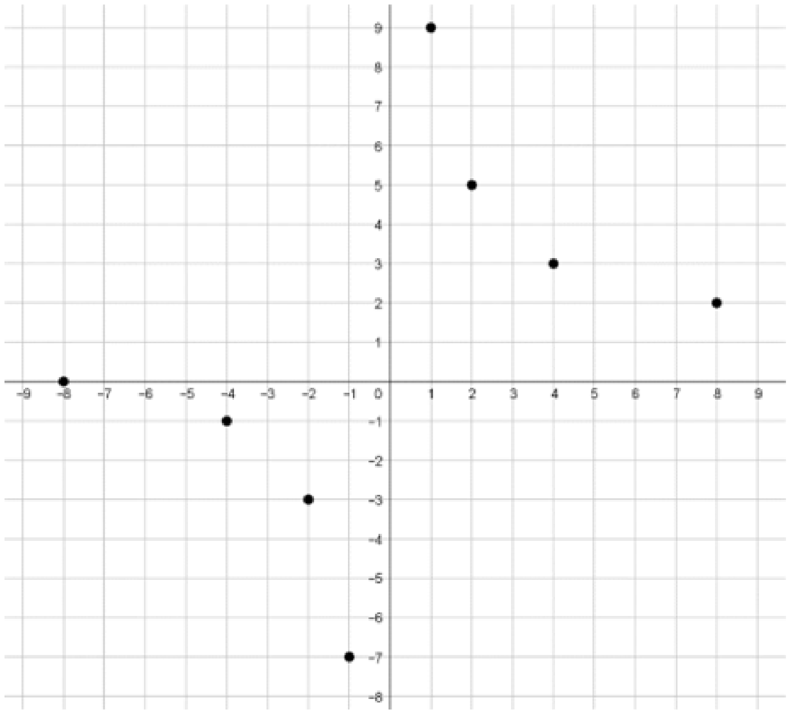
R j e š e n j e. Zadatak najjednostavnije riješimo pomoću diofantske jednadžbe metodom umnoška. Pitamo se kada je umnožak dva broja jednak 8? S obzirom da se radi o cijelim brojevima, a ne samo o prirodnim trebamo u obzir uzeti i negativne brojeve. Pogledajmo sve mogućnosti.

x	$y-1$	y
1	8	**9**
2	4	**5**
4	2	**3**
8	1	**2**
-1	-8	**-7**
-2	-4	**-3**
-4	-2	**-1**
-8	-1	**0**

Sve točke za koje vrijedi uvjet zadatka su:

$$(x, y) \in \{(1,9), (2,5), (4,3), (8,2), (-1,-7), (-2,-3), (-4,-1), (-8,0)\}.$$

Prikažimo točke u koordinatnom sustavu:



Slika 5.1: Grafički prikaz točaka u koordinatnom sustavu

Zadatak 2. Odredite sve prirodne brojeve a takve da je broj $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$ također prirodan broj (*Županijsko natjecanje 2018.g., 8. razred*)

R j e š e n j e. Gledajući zadatak na prvi pogled nam možda neće pasti ideja da ga riješimo pomoću diofantskih jednadžbi. Ono što je ključno je to da se sjetimo da ako je korijen prirodan broj i broj pod korijenom također mora biti prirodan broj. Prema tome vrijedi:

$$\frac{a+64}{a-64} = \frac{a-64+128}{a-64} = 1 + \frac{128}{a-64}$$

Sada se pitamo kada je izraz $a - 64$ djelitelj broja 128. Negativne djelitelje ne trebamo gledati jer će za njih dani broj biti negativan ili jednak nuli, pa je onda i korijen negativan ili jednak nuli što nije prirodan broj (uvjet zadatka).

Rastavimo broj 128 na proste faktore, $128 = 2^6$ pa su djelitelji broja 128 : $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128$.

Prikažimo podatke pomoću tablice:

$a-64$	a	$\frac{128}{a-64}$	$1+\frac{128}{a-64}$
1	65	128	$1+128=129$
2	66	64	$1+64=65$
4	68	32	$1+32=33$
8	72	16	$1+16=17$
16	**80**	**8**	$\mathbf{1+8=9}$
32	96	4	$1+4=5$
64	128	2	$1+2=3$
128	192	1	$1+1=2$

Što mi tražimo? Tražimo kvadrat nekog prirodnog broja, jer će samo takav broj kad se korjenuje imati kao rješenje prirodan broj. Jedini kvadrat prirodnog broja ovdje je broj 9, pa će samo za $a=80$ izraz $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$ biti prirodan broj.

Zadatak 3. Dokažite da jednadžba $n(n-5)=408408408$ nema rješenje u skupu cijelih brojeva. (*Županijsko natjecanje 2013.g., 7. razred*)

R j e š e n j e. Zadatak rješavamo metodom posljednje znamenke. Znamenka jedinica umnoška dva broja jednaka je umnošku znamenki tih brojeva pa primjenjujući to pravilo pitamo se je li umnožak znamenki jedinica brojeva na lijevoj strani jednadžbe jednak 8 (znamenka jedinica na desnoj strani jednadžbe).

Pogledajmo mogućnosti.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$n-5$	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4
$n(n-5)$	0	6	4	4	6	0	6	4	4	6

Budući da broj na desnoj strani jednadžbe završava znamenkom 8 (znamenka jedinica), a izraz na lijevoj strani završava jednom od znamenki 0, 4 ili 6 zaključujemo da jednadžba nema cjelobrojnih rješenja.

Zadatak 4. Umnožak dva različita prirodna broja je 15 puta veći od njihova zbroja. Koje sve vrijednosti može poprimiti razlika većeg i manjeg broja? (*Državno natjecanje 2021.g., 7. razred*)

R j e š e n j e. Označimo tražene brojeve s m i n i neka je $m>n$. Zapišimo traženu tvrdnju pomoću jednadžbe, $mn=15(m+n)$. Prikažimo danu jednadžbu u obliku umnoška dva broja na lijevoj strani te broja na desnoj (rješavamo metodom umnoška).

$$\begin{aligned} mn-15m-15n+225-225 &= 0 \\ m(n-15)-15(n-15) &= 225 \\ (m-15)(n-15) &= 225 \end{aligned}$$

Pitamo se kada je umnožak dva broja jednak 225? Mogući slučajevi su: 1 i 225, 15 i 15, 9 i 25, 3 i 75 te 5 i 45. (Dobijemo ih rastavom broja 225 na proste faktore).

S obzirom da po uvjetu zadatka mora vrijediti da je $m > n$, slučaj kada su oba broja jednaka ni ne promatramo. Prikažimo tablično dane mogućnosti.

$m-15$	m	$n-15$	n	$m-n$
225	**240**	1	**16**	224
75	**90**	3	**18**	72
45	**60**	5	**20**	40
25	**40**	9	**24**	16

Dakle vrijednosti koje može poprimiti razlika dva broja (od kojih je prvi veći od drugog) i čiji je umnožak 15 puta veći od njihova zbroja su: 224, 72, 40 i 16.

Ovdje treba napomenuti da se zadatak mogao riješiti i *metodom kvocijenta* pri čemu vrijedi:

$mn - 15m = 15n$, tj. $m(n-15) = 15n$ pa je $m = \frac{15n}{n-15}$. Još trebamo zapisati desnu stranu jednadžbe u obliku zbroja broja i prave racionalne funkcije druge nepoznanice pa vrijedi

$$m = \frac{15(n-15)+225}{n-15} = 15 + \frac{225}{n-15}.$$

Jednadžbu $m = 15 + \frac{225}{n-15}$ rješavamo pomoću tablice i pitamo se kada je sve 225 djeljiv s razlikom $(n-15)$ pri čemu mora vrijediti $m > n$.

Zadatak 5. Nađite sve parove prirodnih brojeva (m, n) koji zadovoljavaju jednadžbu $2mn - 5m + 3n = 130$. (*Državno natjecanje 2018.g., 7. razred*)

R j e š e n j e. Danu jednadžbu ćemo ponovno riješiti na dva načina. Prvo koristimo metodu umnoška pa transformirajmo lijevu stranu jednadžbe tako da je zapišemo kao umnožak dva broja. Prvo pomnožimo cijelu jednadžbu brojem 2 (da bi imali zajednički faktor na lijevoj strani) pa dobijemo $4mn - 10m + 6n = 260$. Zatim oduzmemo 15 na obje strane jednadžbe pa imamo

$$4mn - 10m + 6n - 15 = 245.$$

Uočimo zajedničke faktore $2m$ i 3 Vrijedi $2m(2n-5) + 3(2n-5) = 245$.

I konačno $(2m+3)(2n-5) = 245$. Sada se pitamo umnožak koja dva broja je 245? Rješenje najlakše dobijemo tako da broj 245 rastavimo na proste faktore i pogledamo sve moguće kombinacije: $245 = 5 \cdot 7^2$. Prema tome djelitelji broja 245 su: 1, 5, 7, 35, 49 i 245.

Budući da je $2m + 3 \geqslant 5$ (jer rješenje mora biti prirodan broj, a za $m = 1$ je $2 \cdot 1 + 3 = 5$) prvi je slučaj nemoguć.

Pogledajmo ostale mogućnosti.

$2m+3$	m	$2n-5$	n
5	**1**	49	**27**
7	**2**	35	**20**
35	**16**	7	**6**
49	**23**	5	**5**
245	**121**	1	**3**

Parovi prirodnih brojeva koji zadovoljavaju početnu jednadžbu su:

$$(m, n) \in \{(1, 27), (2, 20), (16, 6), (23, 5), (121, 3)\}.$$

Početnu jednadžbu smo mogli transformirati i na način da jednu nepoznanicu napišemo pomoću druge. Prikažimo m kao zbroj prirodnog broja i prave racionalne funkcije druge nepoznanice n.

$2mn + 3n = 130 + 5m$ pa je $n(2m + 3) = 130 + 5m$ iz čega slijedi $n = \frac{130+5m}{2m+3}$.

$2n = \frac{10m+260}{2m+3} = \frac{10m+15+245}{2m+3} = \frac{5(2m+3)+245}{2m+3} = 5 + \frac{245}{2m+3}$

Sada se pitamo kada je broj 245 djeljiv izrazom $2m + 3$?

Rastavimo broj 245 na proste faktore i dobijemo da su djelitelji broja 245: 1, 5, 7, 35, 49 i 245.

Pogledajmo sve mogućnosti.

$2m + 3$	m	$\frac{245}{2m+3}$	$2n = 5 + \frac{245}{2m+3}$	n
1	-1 što	ne može biti	rješenje jer m nije	prirodan broj
5	**1**	49	$5 + 49 = 54$	**27**
7	**2**	35	$5 + 35 = 40$	**20**
35	**16**	7	$5 + 7 = 12$	**6**
49	**23**	5	$5 + 5 = 10$	**5**
245	**121**	1	$5 + 1 = 6$	**3**

I ponovno dobivamo rješenja: $(m, n) \in \{(1, 27), (2, 20), (16, 6), (23, 5), (121, 3)\}$.

Zadatak 6. Odredi sve parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi $x^2 - 2x + y^2 = 0$. (*Županijsko natjecanje 1994.g., 8 razred*)

R j e š e n j e. Transformirajmo lijevu stranu jednadžbe tako da dobijemo zbroj dva kvadrata.

Dodamo 1 na lijevu i desnu stranu pa imamo $x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1$, odnosno $(x - 1)^2 + y^2 = 1$.

Sada primijenimo metodu zbroja kvadrata pa se pitamo kada zbroj dva kvadrata iznosi 1? Znamo da je jedini mogući slučaj kada su ti kvadrati 0 i 1.

Pogledajmo mogućnosti:

$(x-1)^2$	$x-1$	x	y^2	y
1	1	**2**	0	**0**
1	-1	**0**	0	**0**
0	0	**1**	1	**1**
0	0	**1**	1	**-1**

Rješenje jednadžbe: $(x, y) \in \{(2, 0), (1, 1), (1, -1), (0, 0)\}$.

Još zadataka s natjecanja:

Zadatak 7. Odredite sve parove prirodnih brojeva (a, b) takve da je $(a+6)(b+5) = 3ab$. (*Županijsko natjecanje 2022.g., 7. razred*)

Zadatak 8. Koliko ima uređenih parova (m, n) prirodnih brojeva za koje je $mn + 2m - 2n = 2020$? (*Županijsko natjecanje 2020.g., 8. razred*)

Zadatak 9. Odredite sve cijele brojeve n za koje je razlomak $\frac{5n^2-9}{2n+6}$ cijeli broj. (*Županijsko natjecanje 2016.g., 8. razred*)

Zadatak 10. U skupu cijelih brojeva riješite jednadžbu $xy - 3x + y = 5$ (*Županijsko natjecanje 2014.g., 7. razred*)

Zadatak 11. Odredite sve parove cijelih brojeva (x, y) koji zadovoljavaju jednadžbu: $xy + 3y = x^2 + 6x + 12$. (*Državno natjecanje 2012.g., 8. razred*)

Poglavlje 6.

Logičko-kombinatorni zadaci

Logičko-kombinatorni zadaci pojavljuju se u svim razredima na svim razinama natjecanja. Takvi zadaci spadaju među najteže i najslabije riješene zadatke na natjecanjima. Budući da je za njihovo rješavanje potrebno minimalno poznavanje gradiva postavlja nam se pitanje zašto je onda takvim tipovima zadataka jako loša riješenost. Odgovor je zapravo prilično jednostavan. Učenici su navikli na „poznate" metode i tehnike rješavanja zadataka odnosno problema koje ovdje ne mogu primijeniti, a isto tako jedna od poteškoća je velika količina teksta u takvim zadacima. To je problem sam po sebi u svim predmetima budući da učenici sve manje čitaju i sve manje razumiju što se od njih traži. Stoga, iako naizgled jednostavni, ovakvi zadaci zahtijevaju dodatan rad s učenicima, posebno zbog toga što se u redovnoj nastavi ne rade.

6.1. Logički zadaci

Logički zadaci su oni zadaci u kojima prevladava logički element. Oni se ne mogu riješiti samo pomoću brojeva i računskih radnji ili pak pomoću geometrijskih likova već zahtijevaju malo promišljanja. To su oni zadaci u kojima nalazimo priče iz svakodnevnog života sa osobinama živih bića te odnosima među njima. Često se radi o njihovim poznanstvima, rasporedima, igrama, natjecanjima,... Logički zadaci pridonose prije svega razvoju logičkog mišljenja, ali osim toga, zbog matematičkih elemenata u njemu, učenicima mogu pomoći u razvoju interesa za matematiku. Razne su metode i načini rješavanja takvih zadataka. Ponekad do rješenja dođemo samo promišljanjem. Nekada nam treba neka dodatna pomoćna pretpostavka ili grafički prikaz – tablica ili slika, a može nam pomoći i metoda isključivanja onoga što sigurno znamo da nije rješenje. Pogledajmo kako to izgleda na nekoliko primjera.

Primjer 1. Tri prijateljice Doris, Petra i Marina su otišle u slastičarnicu na kolače i odlučile su probati svaka jedan od tri različita kolača: bijelu pitu, krempitu ili baklavu. Koja prijateljica je pojela koji kolač ako je samo jedna od navedenih tvrdnji istinita:

a) Doris je pojela baklavu, b) Petra nije pojela baklavu, c) Marina nije pojela bijelu pitu?

Rješenje. Kada bi bila istinita prva tvrdnja, tj. da je Doris pojela baklavu, tada bi druga tvrdnja bila neistinita, što je suprotno tvrdnji da su sve prijateljice pojele različiti kolač (jer je onda i Petra pojela baklavu).

Kada bi bila istinita druga izjava da Petra nije pojela baklavu, tada bi bila neistinita prva i treća tvrdnja – Doris nije pojela baklavu, a Marina je pojela bijelu pitu, pa onda nijedna prijateljica nije pojela baklavu što je u suprotnosti s polaznom pretpostavkom.

I u posljednjem slučaju ako je istinita treća tvrdnja tj. da Marina nije pojela bijelu pitu, druge dvije tvrdnje su neistinite, pa je Petra pojela baklavu, a Doris je nije pojela. Iz ovoga proizlazi da je Doris pojela krempitu pa su sve tri prijateljice pojele različite kolače.

Primjer 2. U jednom društvu bilo je dvadeset ljudi koji su završili osnovnu školu, 16 je završilo srednju a 5 fakultet. Imali su 20 čokolada i svatko od njih je pojeo po jednu. Kako je to moguće?

Rješenje. Osoba koja je završila fakultet sigurno je završila i osnovnu i srednju školu (preduvjet upisa), a ona koja je završila srednju je završila i osnovnu školu. Prema tome vrijedi:

5 osoba je završilo fakultet, 11 osoba je završilo srednju školu (16-5 onih koji su završili fakultet) i 4 osobe su završile samo osnovnu školu (20-5-11).

Prema tome, ukupno je bilo 20 ljudi i svatko od njih je dobio jednu čokoladu.

Primjer 3. Na ulici su se srela dva poznanika i budući da se dugo nisu vidjeli jedan pita drugoga koliko ima djece. „Imam kćer i dva sina i danas im je rođendan. Zajedno imaju devet godina.“ Drugi poznanik malo razmišlja i kaže: „Ali to mi nije dovoljno da zaključim tko je stariji i koliko imaju godina.“. „U pravu si“, kaže poznanik“, „kćer je najmlađa, a sinovi su blizanci“. Koliko godina ima koje dijete?

Rješenje. Budući da je djeci danas rođendan, radi se o cijelim brojevima i pitamo se koja tri prirodna broja (jer djeca ne mogu imati negativan broj godina) daju zbroj 9, pri čemu su dva broja jednaka (uvjet blizanaca). Jedini mogući zbroj je: 1+4+4=9 jer u slučaju 3+3+3=9 djeca bi bila trojke. Prema tome, kćer ima jednu godinu, a sinovi četiri.

Primjer 4. Tri učiteljice – Jelena, Ivana i Marijana predaju tri različita premeta – hrvatski jezik, matematiku i informatiku i to u tri različita odjeljenja – 7.a,5.b i 8.c.

(1) Učiteljica Jelena ne predaje 7.a, a učiteljica Ivana ne predaje 5.b

(2) Učiteljica koja predaje 7.a ne predaje informatiku

(3) Učiteljica koja predaje 5.b predaje hrvatski jezik

(4) Učiteljica Ivana ne predaje matematiku

Što i u kojem razredu predaje učiteljica Marijana?

Rješenje. Ovakvu vrstu zadatka najlakše nam je riješiti pomoću tablice.

Iz prvog uvjeta znamo da učiteljica Jelena ne predaje 7.a pa u tablici na tom mjestu stavimo x, isto kao i za učiteljicu Ivanu i 5.b. Jedino što još sigurno znamo je da učiteljica Ivana ne predaje matematiku pa i tu stavimo x.

	7. a	5. b	8. c
Jelena	x		
Ivana		x	
Marijana			

	hrvatski jezik	matematika	informatika
Jelena			
Ivana		x	
Marijana			

Nakon toga iz (3) slijedi da učiteljica Ivana ne predaje hrvatski jezik, jer ne predaje 5.b pa prema tome **učiteljica Ivana predaje informatiku**. Sada iz (2) slijedi da **učiteljica Ivana predaje 8.c**.

	7. a	5. b	8. c
Jelena	✗		
Ivana	✗	✗	★
Marijana			

	hrvatski jezik	matematika	informatika
Jelena			
Ivana	✗	✗	★
Marijana			

U tablicu stavimo x kod učiteljice Jelene i Marijane i 8.c (jer im predaje učiteljica Ivana) kao i kod informatike i navedenih učiteljica.

Sada iz tablice možemo zaključiti da **učiteljica Marijana predaje 7.a** budući da tom razredu ne predaju ni učiteljica Jelena ni učiteljica Ivana. (Stavimo x kod učiteljice Marijane i 5.b)

	7. a	5. b	8. c
Jelena	✗		✗
Ivana	✗	✗	★
Marijana	★		✗

	hrvatski jezik	matematika	informatika
Jelena			✗
Ivana	✗	✗	★
Marijana			✗

Iz (3) i do sada poznatih podataka u tablici slijedi da **učiteljica Jelena predaje 5.b** i da im predaje **hrvatski jezik.**

	7. a	5. b	8. c
Jelena	✗	★	✗
Ivana	✗	✗	★
Marijana	★	✗	✗

	hrvatski jezik	matematika	informatika
Jelena	★		✗
Ivana	✗	✗	★
Marijana			✗

Još nam je jedino preostalo otkriti što predaje učiteljica Marijana (znamo već da predaje 7.a). Budući da učiteljica Jelena predaje hrvatski jezik, a učiteljica Ivana informatiku **učiteljica Marijana predaje matematiku**.

	7. a	5. b	8. c
Jelena	✗	★	✗
Ivana	✗	✗	★
Marijana	★	✗	✗

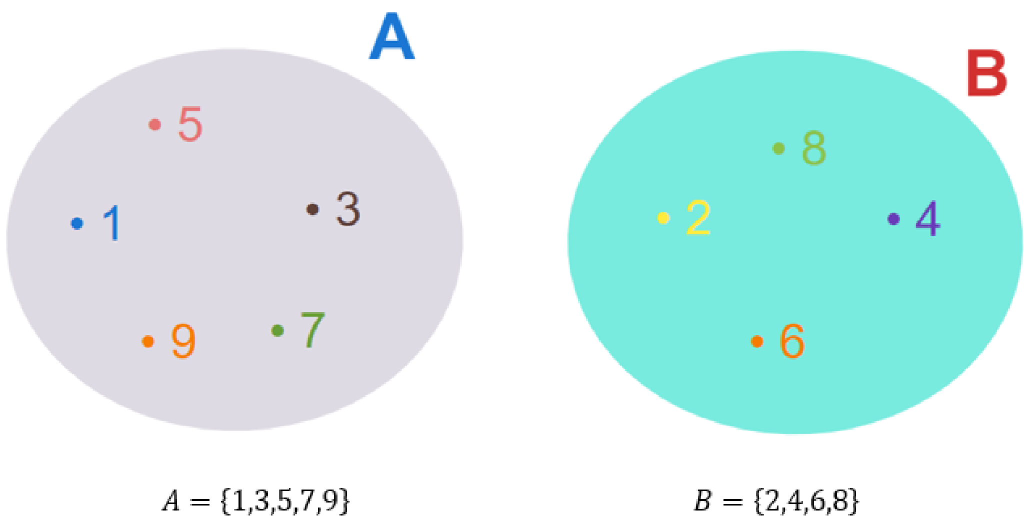
	hrvatski jezik	matematika	informatika
Jelena	★	✗	✗
Ivana	✗	✗	★
Marijana	✗	★	✗

6.2. Kombinatorni zadaci

Kombinatorika je grana matematike koja se bavi određivanjem broja elemenata konačnog skupa. Sam pojam kombinatorike se učenicima u osnovnoj školi ne spominje, ali kombinatorni zadaci se pojavljuju na natjecanjima već u petom razredu. Tada se na redovnoj nastavi matematike rade skupovi, pa o njima ovdje nećemo pobliže pisati, međutim unija i presjek skupova se prikazuju grafički tj. slikovnim prikazom, a pojam komplementa se ne spominje.

S kombinatorikom se često susrećemo u svakodnevnom životu iako možda toga nismo ni svjesni. Pitanja poput: Koliko ima mogućih šifri za otvaranje lokota na bicikli ako šifra ima 3 znamenke, koliko ima različitih registarskih tablica u Hrvatskoj ako svaka ima 3 brojke i 2 slova, kako od 11 ljudi izabrati trojicu, samo su neka od kombinatornih pitanja na kojem ćemo u ovom dijelu dati odgovor. Zadaci su učenicima svakodnevni, zanimljivi i rado ih rješavaju.

Na redovnoj nastavi učenici su naučili da je skup cjelina sastavljena od dijelova (elemenata). Skupove označavamo velikim latiničnim slovima, a njihove elemente navodimo unutar vitičastih zagrada i pišemo ih malim slovima.



Skup A čine svi neparni prirodni brojevi od 1 do 10, a skup B svi parni.

Broj elemenata skupa S označavamo s $|S|$ ili *card* S i nazivamo ga *kardinalnim brojem* skupa S.

U našem primjeru, $|A| = 5$,$|B| = 4$, odnosno skup A ima 5 elemenata, a skup B četiri.

Učenicima treba pokazati i pojam produžene nejednakosti pri zapisu skupova.

Kako ćemo pomoću skupova zapisati skup D čiji su elementi svi prirodni brojevi veći od 2, a manji od 10? $D = \{x \in \mathbb{N} : 2 < x < 10\}$.

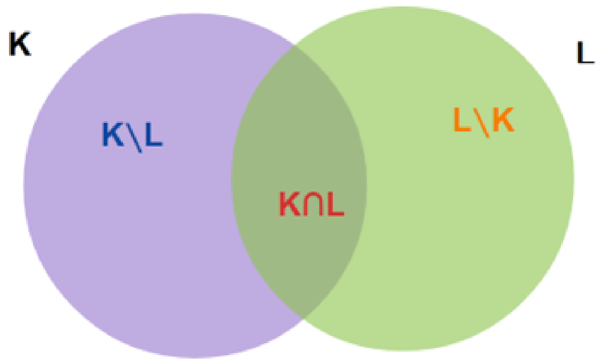
A kako ćemo zapisati skup E čiji su elementi svi prirodni brojevi koji su veći ili jednaki 2, a manji od 10? $E = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x < 10\}$.

Primjer 5. Neka su zadani skup K čiji su elementi brojevi 1, 2, 3, 4 i 5 te skup L s elementima 4, 6, 7 i 8. Zapišimo matematički elemente svakog skupa te odredimo uniju i presjek skupova te njihovu razliku. Odredimo i broj elemenata skupova K i L i njihovu uniju.

Rješenje.

$$\begin{aligned} K &= \{1,2,3,4,5\} \text{ i } L = \{4,6,7,8\} \\ K \cup L &= \{1,2,3,4,5,6,7,8\} \text{ i } K \cap L = \{4\} \\ K \setminus L &= \{1,2,3,5\} \text{ i } L \setminus K = \{6,7,8\} \end{aligned}$$

Dakle, **razlika dva skupa** je skup kojeg čine oni elementi koji se nalaze u prvom skupu i ne nalaze se u drugom skupu.



Sada si postavimo pitanje koliko elemenata ima u skupu $K \cup L$ ili pak u skupu $K \cap L$? S obzirom da imamo grafički prikaz elemente možemo jednostavno prebrojiti.

Možemo li to i izračunati? Čemu je jednako $K \cup L$? Znamo da je unija zbroj svih elemenata u oba skupa, pa zbrojimo elemente skupa K i elemente skupa L. Ukupno ćemo dobiti 9 elemenata. Međutim, je li nam to konačno rješenje? Nije, iz razloga što smo jedan element brojili dvaput i to broj 4 iz razloga što se on nalazi i u skupu K i u skupu L, pa ukupnom zbroju elemenata svakog skupa moramo oduzeti element(e) koji se nalazi u oba skupa, u ovom slučaju samo jedan element (broj 4), pa vrijedi $|K \cup L| = 8$.

Prikažimo to matematički: $|K \cup L| = |K| + |L| - |K \cap L| = 5 + 4 - 1 = 8$.

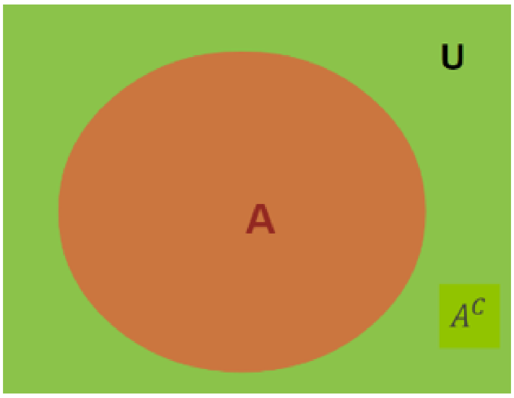
Primjer 6. U 7.b razredu su 24 učenika od kojih 20 učenika trenira neki sport. Koliko učenika ne trenira nijedan sport?

Rješenje. Odgovor na ovo pitanje dobit ćemo tako da od ukupnog broja učenika oduzmemo broj onih koji treniraju pa dobijemo $24-20=4$ tj. 4 učenika ne treniraju nijedan sport.

Kako bi ovo matematički interpretirali? Ako nam je broj učenika 7.b razreda neki univerzalni skup (označimo ga sa U), a skup učenika koji treniraju neki sport njegov podskup (označimo ga sa A), onda je skup učenika također podskup univerzalnog skupa jer se i ti učenici nalaze u 7.b razredu (označimo ga sa A^c).

Vrijedi: $A^c = U \setminus A$, pri čemu A^c nazivamo komplementom skupa A. Komplement skupa možemo označiti i $\overline{A}$.

Grafički prikaz:



Primjer 7. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100 koji nisu djeljivi s 5?

Rješenje. Zadatak rješavamo pomoću komplementa skupa jer nam je puno jednostavnije izračunati broj elemenata skupa u kojem su brojevi koji su djeljivi brojem 5. Označimo sa U skup svih prirodnih brojeva manjih od 100. Vrijedi $|U| = 99$.

Sa A označimo sve one elemente skupa U koji su djeljivi brojem 5. Tada skup A^c čine svi oni elementi skupa U koji se ne nalaze u A, tj. to su svi prirodni brojevi manji od 100 koji nisu djeljivi s 5. U skupu U ukupno ima 19 brojeva koji su djeljivi s 5,

$A = \{5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95\}$ pa je $|A| = 19$ i vrijedi $|A^c| = |U| - |A| = 99 - 19 = 80$.

Dakle, ima 80 prirodnih brojeva manjih od 100 koji nisu djeljivi s 5.

Primjer 8. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 100 koji nisu djeljivi ni sa 3 ni sa 10?

Rješenje. Zadatak rješavamo pomoću komplementa skupa. Označimo sa U skup svih prirodnih brojeva manjih od 100. Vrijedi $|U| = 99$.

Sa A označimo sve one elemente skupa U koji su djeljivi brojem 10. U skupu U ukupno ima 9 brojeva koji su djeljivi s 10 pa je $|A| = 9$.

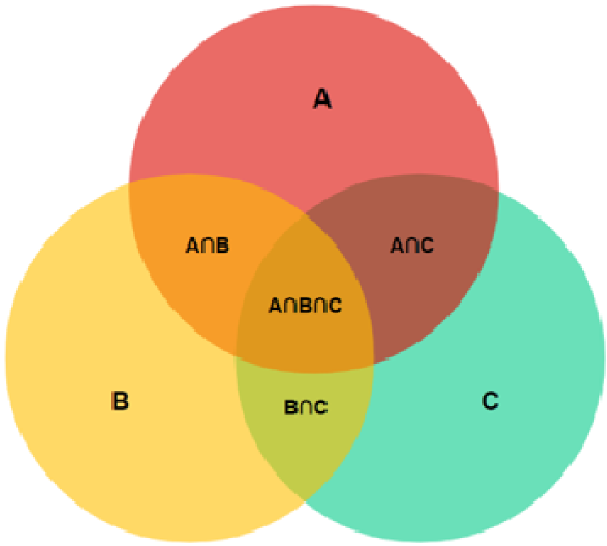
Sa B označimo sve one elemente skupa U koji su djeljivi brojem 3. Takvih brojeva je 33. Međutim, postoje i elementi koji se nalaze i u skupu A i u skupu B. To su brojevi koji su djeljivi i sa 3 i sa 10 (30, 60 i 90) pa je $|A \cap B| = 3$.

Sada vrijedi:

$$|A^c \cap B^c| = |U| - (|A| + |B| - |A \cap B|) = 99 - (9 + 33 - 3) = 60$$

U prvih sto prirodnih brojeva nalazi se 60 brojeva koji nisu djeljivi ni sa 3 ni sa 10.

Što ako imamo tri skupa A, B i C? Što se nalazi u njihovom presjeku?



Pogledajmo na jednom primjeru.

Primjer 9. U nekom razredu 12 učenika voli matematiku, 13 hrvatski jezik, 10 engleski jezik, 5 učenika voli matematiku i hrvatski jezik, 4 učenika voli engleski i hrvatski jezik, 4 učenika matematiku i engleski jezik, a 1 učenik voli sva tri predmeta. Koliko je ukupno učenika u tom razredu?

Rješenje. Označimo sa M, H i E skupove učenika u razredu koji vole matematiku, hrvatski i engleski jezik. Pogledajmo koliko je elemenata u svakom skupu.

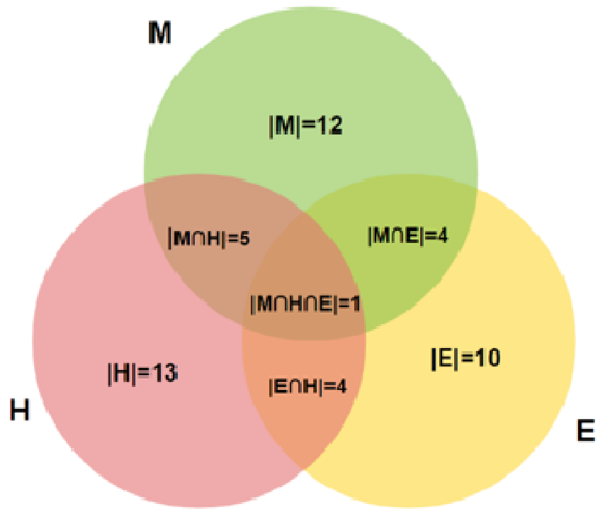
$|M| = 12, |H| = 13, |E| = 10$

Kada kažemo da učenik voli i matematiku i hrvatski jezik to znači da se taj učenik nalazi i u skupu učenika koji vole matematiku i u skupu učenika koji vole hrvatski jezik tj. u presjeku ta dva skupa.

Matematički zapišemo: $|M \cap H| = 5$ i za preostale slučajeve analogno dobijemo: $|E \cap H| = 4$, $|M \cap E| = 4$.

Preostaje nam još slučaj 1 učenika koji voli sva tri predmeta – nalazi se u sva tri skupa pa je $|M \cap H \cap E| = 1$.

Grafički riješimo zadatak pomoću Vennovog dijagrama.



Prema prethodnom primjeru (za dva skupa), ukupan broj učenika tog razreda dobit ćemo kao zbroj elemenata sva tri skupa od kojeg moramo oduzeti elemente u svakom pojedinom presjeku od dva skupa, ali na kraju tom broju moramo dodati broj elemenata koji se nalaze u sva tri skupa. Razlog je jednostavan – oduzimanjem pojedinih elemenata presjeka oduzeli smo tri puta i ono što se nalazi u sva tri skupa.

Zapisano matematički:

$$\begin{aligned}|M \cup H \cup E| &= |M| + |H| + |E| - (|M \cap H| + |E \cap H| + |M \cap E|) + |M \cap H \cap E| \\ &= 12 + 13 + 10 - (5 + 4 + 4) + 1 \\ &= 35 - 13 + 1 = 22 + 1 = 23.\end{aligned}$$

U tom razredu je ukupno 23 učenika.

Pogledajmo još jednu varijantu danog zadatka.

Primjer 10. U nekom razredu od 27 učenika, 12 učenika voli matematiku, 13 hrvatski jezik, 10 engleski jezik, 5 učenika voli matematiku i hrvatski jezik, 4 učenika voli engleski i hrvatski jezik, 4 učenika matematiku i engleski jezik. Koliko učenika ne voli niti jedan od navedenih predmeta?

Rješenje. Ukupan broj učenika tog razreda nam je univerzalni skup. Označimo ga sa U. Vrijedi $|U| = 27$.

Označimo sa M, H i E skupove učenika u razredu koji vole matematiku, hrvatski i engleski jezik. Pogledajmo koliko je elemenata u svakom skupu: $|M| = 12, |H| = 13, |E| = 10$.

Kada kažemo da učenik voli i matematiku i hrvatski jezik to znači da se taj učenik nalazi i u skupu učenika koji vole matematiku i u skupu onih učenika koji vole hrvatski jezik tj. u presjeku ta dva skupa.

Matematički zapišemo: $|M \cap H| = 5$ i analogno računamo za preostale slučajeve: $|E \cap H| = 4$, $|M \cap E| = 4$.

Trebamo izračunati $|M^c \cap H^c \cap E^c|$odnosno po svojstvu komplementa vrijedi da je

$$\begin{aligned}
|M^c \cap H^c \cap E^c| &= U - |M \cup H \cup E| \\
&= U - (|M| + |H| + |E| - (|M \cap H| + |E \cap H| + |M \cap E|) \\
&\quad +|M \cap H \cap E|) \\
&= 27 - (12 + 13 + 10) + (5 + 4 + 4) - 1 \\
&= 27 - 35 + 13 - 1 = 4
\end{aligned}$$

4 učenika tog razreda ne voli niti jedan od navedenih predmeta.

Navedeni postupak vrijedi i za više skupova (ali konačno mnogo njih) te vrijedi općenita formula:

Teorem 6.1. *(Formula uključivanja-isključivanja) Neka je S konačan skup, a $A_1, A_2, \ldots, An \subseteq S$. Tada vrijede formule:*

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| &= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| + \\
&+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap ... \cap A_n|
\end{aligned}$$

i

$$\begin{aligned}
|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| &= |S| - \sum_{i=1}^{n} |A_i| + \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| - \\
&- \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| + ... + (-1)^{n+1} |A_1 \cap ... \cap A_n|
\end{aligned}$$

U osnovnoj školi nam navedena formula ne treba jer se rješavaju zadaci sa najviše tri skupa.

6.3. Pravila prebrojavanja

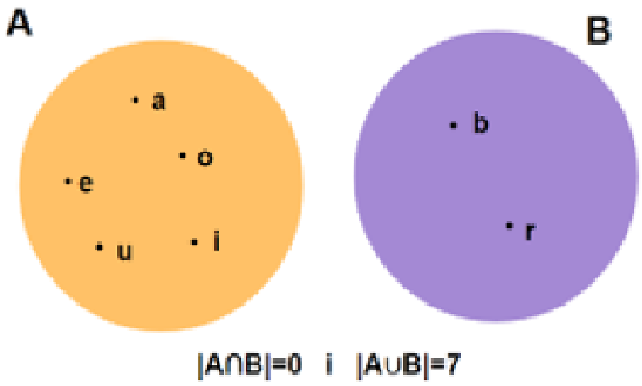
Sada spomenimo neka osnovna pravila prebrojavanja.

• **Pravilo zbroja** – Kod dvaju (ili više) disjunktnih skupova ukupan broj elemenata u njihovoj uniji jednak je zbroju elemenata u svakom pojedinom skupu.

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

Npr. $A = \{a, e, i, o, u\}$, $B = \{b, r\}$,

$$|A| = 5, |B| = 2 \text{ i } |A \cup B| = |A| + |B| = 5 + 2 = 7$$



• **Pravilo množenja (umnoška)** – Ako imamo konačno mnogo skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$ tada je njihov umnožak $S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ konačan skup i vrijedi

$$|S_1 \times S_2 \times ... \times S_n| = |S_1| \cdot |S_2| \cdot ... |S_n|$$

$S_1 \times S_2 \times ... \times S_n$ naziva se Kartezijev produkt skupova $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Za Kartezijev umnožak skupova A i B vrijedi $AxB = \{(a, b) : a \in A, b \in B\}$ i $|A \times B| = |A||B|$.

Kako bi ovo pravilo mogli jednostavnije izreći? Ako imamo dva skupa ($n = 2$), od kojih prvi ima m elemenata, a drugi n, onda je broj svih mogućih izbora dva elementa jednak $m \cdot n$.

Navedeno pravilo možemo poopćiti pa vrijedi:

Teorem 6.2. *Teorem o uzastopnom prebrojavanju: Neka je* $T \subseteq |S_1 \times S_2 \times ... \times S_n|$ *skup uređenih n-torki* $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ *pri čemu prvu komponentu* a_1 *možemo izabrati na* p_1 *različitih načina, drugu komponentu* a_2 *možemo izabrati na* p_2 *različitih načina,* $\ldots$ *, n-tu komponentu* a_n *možemo izabrati na* p_n *različitih načina. Tada* T *ima* $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ *elemenata, tj.* $|T| = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$.

Primjer 11. Na koliko se načina između 5 pasa, 7 mačaka, 3 papige i 6 ribica može izabrati:

a) jedna životinja?

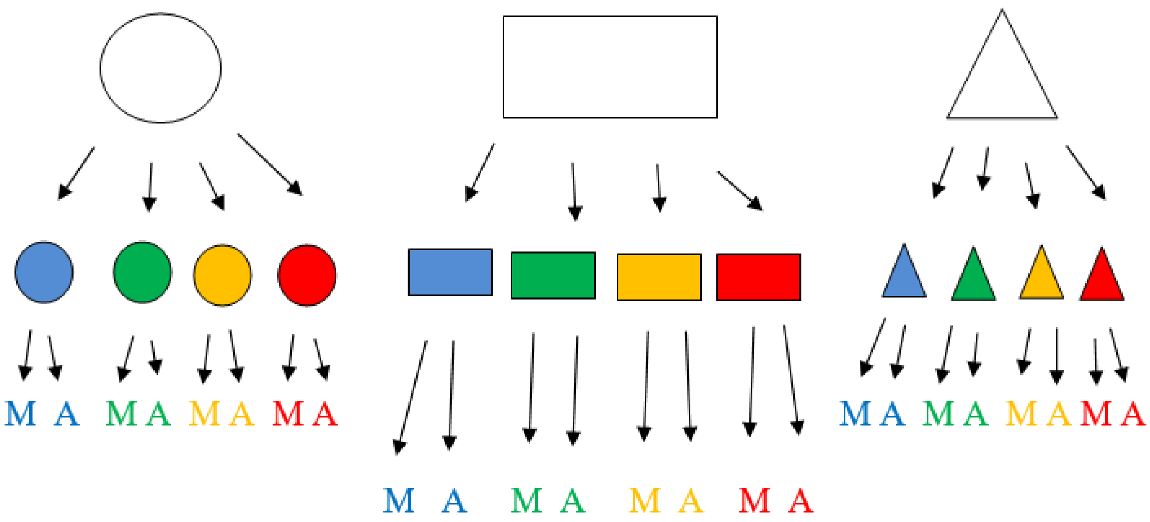
b) po jednog psa, jednu mačku, jednu papigu i jednu ribicu?

Rješenje. a) S obzirom da svi navedeni skupovi nemaju zajedničke elemente (gledamo skup pasa, skup mačaka, skup papiga i skup ribica) primijenimo pravilo zbroja, tj. jednu životinju možemo izabrati na $5 + 7 + 3 + 6 = 21$ način.

b) Kako od svake životinje moramo izabrati po jednu primijenimo pravilo umnoška tj. po 1 psa, 1 mačku, 1 papigu i 1 ribicu možemo izabrati na $5 \cdot 7 \cdot 3 \cdot 6 = 630$ načina.

Primjer 12. U prvom razredu Luka je dobio krug, pravokutnik i trokut te ih treba obojiti jednom od 4 boje: plavom, zelenom, narančastom i crvenom. Nakon što ih oboji u svaki lik treba napisati slovo M ili A. Na koliko različitih načina to Luka može napraviti?

Rješenje. Prikažimo zadatak grafički:



I sada prebrojimo sve moguće kombinacije.

Puno jednostavniji i brži je matematički zapis. Geometrijski lik možemo izabrati iz tročlanog skupa $\{krug, pravokutnik, trokut\}$. Boju biramo iz četveročlanog skupa $\{plava, zelena, narančasta, crvena\}$, a slovo iz dvočlanog skupa $\{M, A\}$. Ukupan broj načina na koje Luka može obojati likove i u lik napisati slovo jednak je $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24$.

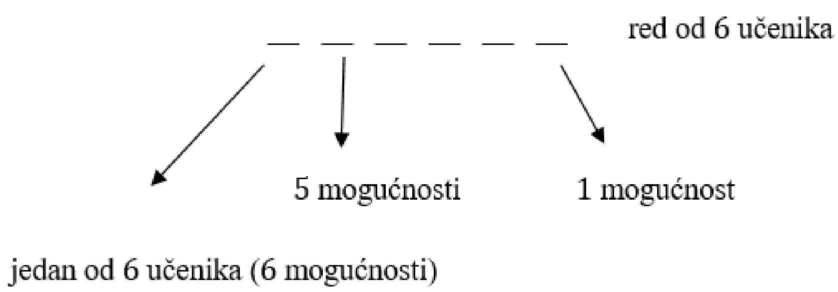
Primjer 13. Marija želi svakoj od svoje četiri prijateljice kupiti po jedan od 10 različitih magneta kao uspomenu s putovanja u Italiju. Na koliko to načina može napraviti?

Rješenje. Za svaku prijateljicu Marija može izabrati jedan od deset magneta. Marija može za sve prijateljice kupiti isti magnet, ali i ne mora, odnosno izbor jednog magneta (i za jednu prijateljicu) ne utječe na izbor drugih. Stoga prema pravilu množenja vrijedi da je taj broj jednak $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4 = 10000$.

Primjer 14. Na koliko načina šest učenika može stajati u redu u pekari?

Rješenje. Na prvom mjestu može stajati bilo koji učenik, pa učenika koji je prvi u redu možemo izabrati na 6 načina. Nakon što smo izabrali prvog učenika, ostalo je njih 5, i bilo koji od njih 5 može biti na drugom mjestu u redu, pa njega možemo izabrati na 5 načina. Na trećem mjestu može biti jedan od preostala 4 učenika, na četvrtom mjestu jedan od preostala 3, na petom jedan od preostala 2, te na posljednjem šestom mjestu jedan jedini preostali učenik. Stoga je ukupan broj načina na koji šest učenika može stajati u redu u pekari jednak $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Pogledajmo kako smo to grafički mogli prikazati.



Broj poredaka jednak je: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Primjer 15. Na koliko načina šest učenika i šest učenica može sjesti u klupe po dvoje, ako u svakoj klupi mora biti jedan učenik i jedna učenica i nije važno tko u kojoj klupi sjedi nego samo s kim sjedi (ne razlikujemo klupe)?

Rješenje. Zadatak je vrlo sličan prethodnom. Prvog učenika možemo izabrati na jedan od šest načina, a učenicu koja sjedi pored njega također na jedan od šest načina. Sljedećeg učenika biramo između pet preostalih, a isto vrijedi i za učenice. Tako nastavljamo postupak dok ne dođemo do jednog učenika i jedne učenice. Prema tome, šest učenika i šest učenica u klupe može sjesti na $6 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 518400$ načina.

Zadatak smo mogli riješiti i na jednostavniji način. Prvo poredamo sve dječake i to po prethodnom primjeru možemo napraviti na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ načina. Potom poredamo djevojčice koje možemo poredati na isti broj načina, pa je ukupan broj načina u kojem dječak sjedi pored djevojčice u klupi jednak $720 \cdot 720 = 518400$.

Primjer 16. Koliko ima različitih registarskih tablica u Hrvatskoj ako svaka ima 3 brojke i 2 slova?

Rješenje. Ono što moramo znati da bi riješili zadatak je da ukupno imamo 10 znamenki te 30 slova u hrvatskoj abecedi.

Na prvom mjestu može biti bilo koja od 10 znamenki (čak i nula) pa je možemo izabrati na 10 različitih načina. Isto vrijedi i za drugo i za treće mjesto pa brojeve na registraciji možemo izabrati na $10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ načina. Na posljednja dva mjesta može doći bilo koje slovo abecede (mogu se i ponavljati) pa je ukupan broj mogućnosti za izbor slova na registraciji jednak $30 \cdot 30 = 900$. Stoga je ukupan broj registarskih tablica u Hrvatskoj $1000 \cdot 900 = 900000$.

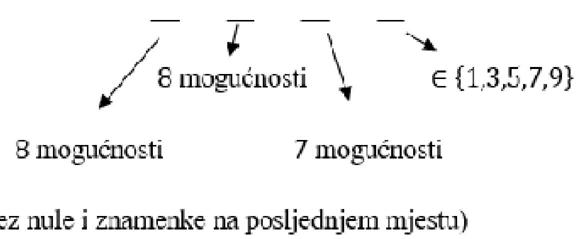
Mogli smo to jednostavnije napisati kao umnožak broja mogućnosti na svakom mjestu na registraciji, pa imamo: $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 30 \cdot 30 = 900000$.

Kod ovog zadatka možemo povesti i diskusiju s učenicima. Možemo ih pitati nalaze li se zaista sva slova hrvatske abecede na registarskim tablicama? Ako se ne pojavljuju slova iz skupa $\{$Č, Ć, Đ, Dž, Ž$\}$ koliko postoji registarskih tablica u Hrvatskoj? Ako nula ne smije biti na prvom mjestu koliko onda ima tablica?

Primjer 17. Koliko ima neparnih četveroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite?

Rješenje. Budući da broj mora biti neparan znamo da mu je posljednja znamenka iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ pa imamo 5 mogućnosti za njen izbor. Kada smo izabrali zadnju znamenku za prvu imamo jednu od osam mogućnosti (ne može biti 0, jer tada ne bi imali četveroznamenkasti broj, kao ni znamenka koja se nalazi na posljednjem mjestu). Kako smo već izabrali dvije znamenke, za izbor znamenke na drugom mjestu imamo 8 mogućnosti, te za znamenku na trećem mjestu imamo još preostalih sedam mogućnosti. Prema tome, ukupan broj neparnih četveroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite je $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$.

Grafički prikazano:



Ukupno: $5 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 = 2240$ neparnih četveroznamenkastih brojeva sa različitim znamenkama.

Pogledajmo malo drugačije formuliran zadatak.

Primjer 18. Koliko ima parnih četveroznamenkastih brojeva?

Rješenje. U ovom zadatku je bitno uočiti da znamenke ne moraju biti različite te da se mogu ponavljati.

Budući da broj mora biti paran znamo da mu je posljednja znamenka iz skupa $\{0, 2, 4, 6, 8\}$ pa imamo 5 mogućnosti za njen izbor. Kada smo izabrali zadnju znamenku za prvu imamo jednu od devet mogućnosti (ne smije biti nula jer onda imamo troznamenkasti broj) tj. prva znamenka je element skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Druga i treća znamenka može biti bilo koji broj iz skupa $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Stoga je ukupan broj parnih četveroznamenkastih brojeva jednak: $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 5 = 4500$.

Primjer 19. Na koliko načina možemo odabrati predsjednika, zamjenika predsjednika i blagajnika u razredu od 24 učenika, ako učenik može obavljati samo jednu od navedenih dužnosti?

Rješenje. Svejedno je što ćemo prvo birati pa recimo da biramo predsjednika. Predsjednik može biti bilo koji od 24 učenika, pa ga možemo izabrati na 24 načina. Nakon što smo izabrali predsjednika preostalo nam je 23 učenika (jer jedan učenik ne može obavljati više dužnosti) pa zamjenika predsjednika možemo odabrati na 23 načina, a blagajnika onda na 22. Ukupan broj načina za izbor učenika za jednu od navedenih dužnosti je: $24 \cdot 23 \cdot 22 = 12144$.

Dva su tipa prebrojavanja koja se ovdje spominju:

Poredak elemenata **je važan** **PERMUTACIJE** ili **VARIJACIJE**	Permutacije **BEZ** ponavljanja	Koliko se troznamenkastih brojeva (s različitim znamenkama) može napisati od znamenki $\{1,2,3\}$? Znamo da je odgovor $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ odnosno, kraće zapisano 3!
	Permutacije S ponavljanjem	Koliko se troslovnih šifri s različitim slovima može napisati od slova $\{a, e, i, o, u\}$? Na prvom mjestu šifre može biti bilo koje od 5 ponuđenih slova, a isto vrijedi i za drugo i treće mjesto pa je prema tome ukupan broj šifri jednak $5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^3$=125

Poredak elemenata **nije važan** **KOMBINACIJE**	Kombinacije **BEZ** ponavljanja	Na koliko načina se može izvući 7 brojeva u igri LOTO 7 od 39? Prvi broj možemo izvući na 39 načina, drugi na 38, treći na 37, četvrti na 36, peti na 35, šesti na 34 i sedmi na 33 načina, pa je ukupan broj načina na koje možemo izvući 7 brojeva jednak $39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33$. Međutim, budući da nam nije važan poredak izvlačenja kuglice taj broj trebamo podijeliti sa brojem različitih rasporeda tih sedam brojeva. 7 brojeva možemo rasporediti na $7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$ načina. Stoga je ukupan broj načina na koje možemo izvući 7 od 39 brojeva jednak $\frac{39 \cdot 38 \cdot 37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15\,380\,937$. Kratiti!!
	Kombinacije S ponavljanjem	U trgovini se mogu kupiti jagode, kupine i maline. Na koliko načina možemo kupiti kilogram voća, ako se navedeno voće prodaje u pakiranju po pola kilograma? U ovom zadatku moramo pripaziti – možemo uzeti po kg istog voća, a i razne kombinacije. Kilogram od svakog voća – jagoda, kupina, malina (3 mogućnosti). Po pola kilograma – jagoda + kupina, jagoda + malina, malina + kupina (3 mogućnosti). Kilogram od navedenog voća možemo kupiti na šest načina (3 + 3 mogućnosti).

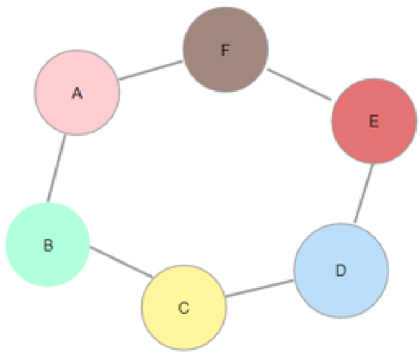
Postoje matematički pojmovi koji nam mogu puno pojednostavniti neke od gornjih zapisa, međutim ne koriste se u osnovnoj školi. Učenicima ih možemo pokazati, ukoliko žele, ali ne bi trebali od njih očekivati da ih i zapamte. Na natjecanjima se zadaci rješavaju isključivo bez formula.

Skraćeni zapis umnoška brojeva u silaznom redoslijedu tj. jedan od umnožaka iz gornjeg primjera $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ možemo zapisati $6!$. Taj broj čitamo šest faktorijela.
Općenito vrijedi: $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

Broj svih **r-permutacija** nekog skupa jednak je $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ pri čemu je n broj elemenata skupa, a r broj permutacija. Broj svih r-permutacija s ponavljanjem jednak je $\overline{P}_r^n = n!$

Broj svih **r-kombinacija** nekog skupa jednak je $K_r^n = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ pri čemu je n broj elemenata skupa, a r broj kombinacija.

Primjer 20. Na nekom sastanku svaki sudionik se rukovao sa svakim od preostalih sudionika. Ukupno je bilo 78 rukovanja. Koliko je bilo sudionika na sastanku?
Rješenje. Pogledajmo na pojednostavljenom primjeru što to zapravo znači. Neka je na sastanku bilo 6 osoba. Označimo ih osobama A, B, C, D, E, F.



Osoba A se rukovala sa još 5 osoba, osoba B isto tako, kao i sve preostale osobe. Odnosno, svaka osoba je obavila 5 rukovanja. Međutim, osoba A se rukovala s osobom C, ali se isto tako osoba C rukovala s osobom A, pa smo to rukovanje, kao i svako ostalo brojali dvaput. Prema tome ukupan broj rukovanja trebamo podijeliti s 2. Za ovaj slučaj imamo $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ rukovanja (6 osoba, svaka se rukovala sa 5 preostalih, i svako rukovanje smo brojali dvaput).

Vratimo se sada na naš zadatak. Označimo sa n broj ljudi koji su prisustvovali sastanku. Rukovanja je ukupno $n-1$ i svako smo brojali dvaput pa moramo podijeliti s 2.
Imamo: $78 = \frac{n(n-1)}{2}$ pa je $156 = n(n-1)$ i nakon rastava broja 156 na proste faktore dobijemo $156 = 12 \cdot 13$ pa zaključujemo da je na sastanku bilo 13 sudionika.
Koristeći formulu za broj kombinacija ($r = 2$) vrijedi $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} = 78$.

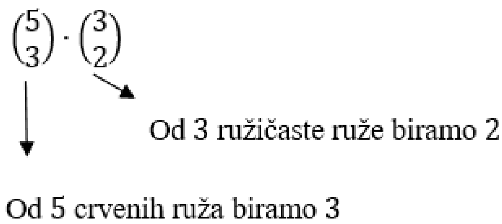
Primjer 21. Na koliko načina od 5 crvenih i 3 ružičaste ruže možemo složiti buket koji se sastoji od tri crvene i dvije ružičaste ruže?
Rješenje. Od pet crvenih ruža moramo izabrati 3 ruže. Prvu možemo izabrati na pet načina, drugu na četiri, a treću na tri. Ukupan broj mogućnosti za izbor crvene

ruže je $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Međutim, važno nam je samo koje smo crvene ruže izabrali, ali ne i po kojem redoslijedu pa broj mogućih izbora crvene ruže treba podijeliti sa brojem različitih redoslijeda tih ruža. Tri crvene ruže možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. Dakle, tri crvene ruže možemo izabrati na $60 : 6 = 10$ načina.

Analogno računamo izbor 2 ružičaste ruže od njih 3. Prvu ružičastu ružu možemo izabrati na tri načina, a drugu na dva, pa je ukupan broj mogućnosti za izbor ružičaste ruže jednak $3 \cdot 2 = 6$. S obzirom da nam redoslijed izbora ružičaste ruže nije bitan, taj broj trebamo podijeliti s brojem različitih redoslijeda koji je u ovom slučaju $2 = 2 \cdot 1$, pa dvije ružičaste ruže možemo izabrati na $6 : 2 = 3$ načina.

I na kraju, bilo koji izbor crvene ruže se može kombinirati s bilo kojim izborom ružičaste ruže pa je ukupan broj načina na koje možemo složiti buket jednak $10 \cdot 3 = 30$.

Koristeći se gore spomenutim matematičkim oznakama zadatak je puno jednostavnije napisati na način:



Primjer 22. Trener Hajduka mora za utakmicu od 22 nogometaša koji su mu trenutno na raspolaganju izabrati njih 11, ali već zna koja petorica sigurno igraju (L. Kalinić, Krovinović, Melnjak, Biuk i Livaja). Na koliko načina trener može izabrati preostale igrače?

Rješenje. Ovdje je važno uočiti da trener već zna kojih 5 igrača igra. To znači da mora izabrati još samo 6 igrača za početnu jedanaestoricu ($11 - 5 = 6$), od njih 17 (izabrao je 5 od ukupnog broja igrača pa mu je ostalo $22 - 5 = 17$ igrača).

Prvog igrača može izabrati na 17 načina, drugog na 16, trećeg na 15, četvrtog na 14, petog na 13 i posljednjeg šestog igrača na 12 načina, pa je ukupan broj načina na koje trener može izabrati 6 igrača jednak $17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12$. S obzirom da nije važno kojim redoslijedom je birao svakog od šest igrača, ukupan broj načina treba podijeliti sa različitim rasporedom izbora igrača. Rasporeda ukupno ima $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$.

Dakle, ukupan broj načina da trener Hajduka izabere momčad za utakmicu jednak je $\frac{17 \cdot 16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 12376$.

Ovaj zadatak je jako zgodan za raspravu s učenicima i postavljanje više potpitanja. Možemo ih pitati ako je trener već izabrao golmana (L. Kalinić), što ćemo napraviti ako je među 17 igrača još jedan golman? A što ako uz Livaju trener želi samo još jednog napadača, a u onih 17 igrača ih ima 3? Ili pak, što sa obrambenim igračima ako nam trebaju 3, a ima ih 5?

6.4. Zadaci s natjecanja

Zadatak 1. Koliko ima peteroznamenkastih brojeva kojima su sve znamenke različite, a zbroj znamenaka jedinice i desetice jednak 5? (*Školsko natjecanje 2022.g., 7. razred*)

R j e š e n j e. Neka je $\overline{abcde}$ peteroznamenkasti broj sa znamenkama a, b, c, d i e.

Kako zbroj znamenaka desetice i jedinice mora biti jednak 5 (posljednja dva mjesta peteroznamenkastog broja) to za d i e imamo mogućnosti: 5 i 0, 0 i 5, 4 i 1, 1 i 4, 3 i 2 te 2 i 3 što je ukupno 6 načina.

Sada razlikujemo slučajeve:

a) broj je oblika $\overline{abc05}$ ili $\overline{abc50}$

Znamenku a možemo izabrati na jedan od 8 načina (Ukupno deset znamenki, sve moraju biti različite, a znamenka ne može biti ni 0 ni 5), znamenku b na 7, a znamenku c na 6 načina pa je ukupan broj peteroznamenkastih brojeva ovog oblika jednak $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 = 672$.

b) broj je oblika $\overline{abc14}$ ili $\overline{abc41}$

Znamenku a možemo izabrati na jedan od 7 načina (Ukupno deset znamenki, sve moraju biti različite, ali prva znamenka ne smije biti nula, jer bi broj bio četveroznamenkast, a ne može biti ni 1 ni 4), znamenku b na 7 načina (ne može biti ona znamenka koja se nalazi na prvom mjestu (a), kao ni 1 ni 4), a znamenku c analogno na 6 načina pa je ukupan broj peteroznamenkastih brojeva ovog oblika jednak $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 = 588$.

c) broj je oblika $\overline{abc23}$ ili $\overline{abc32}$

Postupak je analogan onom u b) dijelu zadatka. Znamenku a možemo izabrati na jedan od 7 načina (Ukupno deset znamenki, sve moraju biti različite, ali prva znamenka ne smije biti nula, jer bi broj bio četveroznamenkast, a ne može biti ni 2 ni 3), znamenku b na 7 načina (ne može biti znamenka koja se nalazi na prvom mjestu (a), kao ni 2 ni 3), a znamenku c analogno na 6 načina pa je ukupan broj peteroznamenkastih brojeva ovog oblika jednak $7 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 2 = 588$.

Ukupan broj peteroznamenkastih brojeva s traženim svojstvom jednak je:

$$672 + 588 + 588 = 1848.$$

Zadatak 2. Ante, Bruno, Ciprijan, Davor, Emanuel i Franko se trebaju poredati u vrstu.

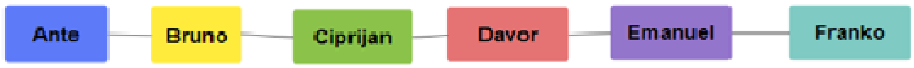
1. Na koliko se različitih načina dječaci mogu poredati ako Bruno stoji lijevo od Emanuela?

2. Na koliko se različitih načina dječaci mogu poredati ako između Ciprijana i Davora ne stoji niti jedan drugi dječak? (*Županijsko natjecanje 2022.g., 5. razred*)

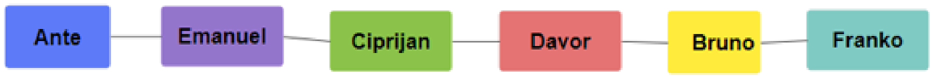
R *j e š e n j e.*

1.) Ako bismo šest dječaka poredali bilo kakvim redom, prvog dječaka u redu možemo izabrati na 6 načina, drugog dječaka možemo izabrati između njih 5, trećeg dječaka u redu između preostalih 4 i tako redom. Stoga je ukupan broj načina na koje možemo poredati dječake jednak: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$.

Sada uočimo da svakom rasporedu u kojem je Bruno lijevo od Emanuela



odgovara raspored u kojem je Emanuel lijevo od Bruna, a da nijedan drugi dječak ne zamijeni svoje mjesto.



Stoga je ukupan broj načina na koji šest dječaka može stati u red, a da je pri tome Bruno lijevo od Emanuela jednak: $720 : 2 = 360$.

2.) Po uvjetu zadatka između Ciprijana i Davora ne može biti niti jedan drugi dječak u redu pa zadatak možemo pojednostavniti tako da njih dvojicu računamo kao jednu cjelinu pri čemu nam je svejedno je li Ciprijan Davoru slijeva ili je pak Davor Ciprijanu. Sada za razmještaj imamo četiri dječaka – Antu, Bruna, Emanuela i Franka te njih dvojicu zajedno. U slučaju da je Ciprijan lijevo od Davora dječake možemo poredati u red na $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ načina, a imamo isto toliko načina u slučaju da je Davor lijevo od Ciprijana. Stoga je ukupan broj načina na koji se dječaci mogu poredati u vrstu, a da između Ciprijana i Davora nema nijednog drugog dječaka jednak $120 + 120 = 240$.

Zadatak 3. Koliki je zbroj svih četveroznamenkastih prirodnih brojeva kojima su sve znamenke neparne? (*Državno natjecanje 2022.g., 5. razred*)

R j e š e n j e. Kako se radi o četveroznamenkastom broju znamo da on ima 4 dekadska mjesta i da se na svakom mjestu po uvjetu zadatka može nalaziti jedan broj iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$.

Ako na mjestu tisućice stavimo broj 1, na preostala tri mjesta možemo staviti bilo koju od navedenih pet znamenki (jer nije rečeno da moraju biti različite, pa se 1 može i ponoviti) pa imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ takvih brojeva. Analogno nam vrijedi i za slučajeve kada je na mjestu tisućice broj 3, 5, 7 ili 9, pa imamo 125 brojeva kojima je na mjestu tisućica jedna od navedenih znamenki. Stoga nam je zbroj svih tisućica jednak

$$125 \cdot 1 \cdot 1000 + 125 \cdot 3 \cdot 1000 + 125 \cdot 5 \cdot 1000 + 125 \cdot 7 \cdot 1000 + 125 \cdot 9 \cdot 1000 =$$

$$= 125 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 1000 = 125 \cdot 25 \cdot 1000 = 3125 \cdot 1000 = 3125000$$

Isto će nam se ponavljati i na svakom sljedećem dekadskom mjestu, tj. ako nam je na mjestu stotica jedna od znamenki iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$, na bilo kojem od preostala tri dekadska mjesta možemo staviti bilo koju od navedenih znamenki pa imamo $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$ takvih brojeva. Stoga nam je vrijednost svih stotica jednaka

$$125 \cdot (1 + 3 + 5 + 7 + 9) \cdot 100 = 125 \cdot 25 \cdot 100 = 3125 \cdot 100 = 312500.$$

Analogno dobijemo da je zbroj svih desetica jednak $125 \cdot 25 \cdot 10 = 3125 \cdot 10 = 31250$ i svih jedinica $125 \cdot 25 \cdot 1 = 3125 \cdot 1 = 3125$.

Sada je zbroj svih četveroznamenkastih brojeva s neparnim znamenkama jednak

$$125 \cdot 25 \cdot 1000 + 125 \cdot 25 \cdot 100 + 125 \cdot 25 \cdot 10 + 125 \cdot 25 \cdot 1 =$$

$$= 125 \cdot 25 \cdot (1000 + 100 + 10 + 1) = 3125 \cdot 1111 = 3471875.$$

2. način na koji smo to mogli riješiti je koristeći se uz kombinatoriku i Gaussovom dosjetkom. Po uvjetu zadatka na svakom dekadskom mjestu – a imamo ih četiri može se naći jedna od znamenki iz skupa $\{1, 3, 5, 7, 9\}$. Tih brojeva ima $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625$ (može se pojaviti bilo koja od 5 znamenki, na bilo kojem od četiri mjesta) i to su brojevi:

$$1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1121, \ldots, 9991, 9993, 9995, 9997, 9999.$$

Sada uočimo da se određeni brojevi mogu upariti (prvi i posljednji, drugi i pretposljednji,...) te da im je zbroj jednak pa primijenimo Gausssovu dosjetku: $1111 + 9999 = 11110$, $1113+9997 = 11110$, $1115+9995 = 11110$,.... Kako znamo da takvih brojeva ima 625, parova je 312, a 5555 je jedini broj koji nema para. Sada je zbroj tih brojeva lagano izračunati i iznosi: $312 \cdot 11110+5555 = 3466320+5555 = 3471875$.

Zadatak 4. Na koliko načina Iva, Ana i Tea mogu podijeliti 6 različitih nagrada tako da svaka od njih dobije barem jednu nagradu? (*Županijsko natjecanje 2022.g., 6. razred*)

R j e š e n j e. Iz uvjeta zadatka vidimo da svaka učenica mora dobiti nagradu, ali ne i da sve djevojčice moraju dobiti jednak broj nagrada.

Razlikujemo tri slučaja. U svakom slučaju trebamo odrediti na koliko načina možemo odabrati koja djevojčica će dobiti koliko nagrada te koje će nagrade dobiti.

1. Dvije učenice su dobile po jednu nagradu, a jedna je dobila preostale četiri

Recimo da Iva i Ana dobiju po jednu nagradu, a Tea četiri nagrade. Ivinu nagradu možemo izabrati na 6 načina (jer ih je ukupno šest), Aninu na 5 (jer je preostalo pet nagrada), a Tei tada preostaju 4 nagrade koje ne možemo odabrati, tj. može ih dobiti na jedan jedini način (sve četiri). Stoga je ukupan broja načina $6 \cdot 5 \cdot 1 = 30$. Analogno moramo pogledati i za preostala dva slučaja – kada Iva i Tea dobiju po jednu nagradu, a Ana četiri te slučaj kada Ana i Tea dobiju po jednu, a Iva četiri nagrade. Stoga je ukupan broj načina u ovom slučaju jednak $30 \cdot 3 = 90$.

2. Svaka djevojčica je dobila po dvije nagrade

Recimo da prvo biramo nagrade koje je dobila Iva. Njih možemo odabrati na $(6 \cdot 5) \div 2 = 15$ načina (prvu nagradu biramo na 6 načina, drugu na 5, a s obzirom da nam nije bitno koja je prva, a koja druga nagrada izabrana ukupan broj mogućih izbora podijelimo s 2). Anine nagrade možemo odabrati na $(4 \cdot 3) \div 2 = 6$ načina (analognim postupkom) i na kraju za Teu su nam ostale dvije preostale nagrade te nemamo što odabrati. Ukupan broj načina podijele nagrada u ovom slučaju je $15 \cdot 6 = 90$. S obzirom da sve djevojčice dobivaju po dvije nagrade ne moramo birati koja dobiva koliko.

3. Jedna djevojčica dobiva jednu, jedna djevojčica dvije, a jedna tri nagrade

Neka Iva dobije jednu, Ana dvije, a Tea tri nagrade. Ivinu nagradu možemo izabrati na 6 načina (jer ih ima šest), a tada za Anu biramo dvije nagrade od preostalih 5, pa ih možemo izabrati na $(5 \cdot 4) \div 2 = 10$ načina, a za Teu će nam onda preostati tri nagrade i možemo joj ih dodijeliti na jedan jedini način. Broj načina u kojima će Iva dobiti jednu, Ana dvije, a Tea tri nagrade jednak je $6 \cdot 10 = 60$. Ukupan broj načina podjele nagrada u ovom slučaju je $60 \cdot 6 = 360$.

I na kraju, 6 različitih nagrada možemo Ivi, Ani i Tei podijeliti na $90+90+360 = 540$ načina, a da pri tom svaka djevojčica dobije barem jednu nagradu.

2. način Odredimo ukupan broj svih rasporeda podijele nagrada i od njega oduzmimo broj rasporeda u kojima neka od djevojčica neće dobiti nagradu.

Svaku od 6 nagrada možemo dati bilo kojoj od tri djevojčice. Po teoremu o uzastopnom prebrojavanju, nagrade možemo raspodijeliti na $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 27 \cdot 27 = 729$ načina. Znamo da smo tu ubrojili i načine u kojima jedna ili dvije djevojčice neće dobiti niti jednu nagradu pa taj broj trebamo oduzeti od 729.

Recimo da Iva nije dobila niti jednu nagradu, onda svih 6 nagrada dijelimo Ani i Tei. To možemo napraviti na $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^6 = 8 \cdot 8 = 64$ načina. Analogno, ako Ana neće dobiti nijednu nagradu Ivi i Tei ih možemo podijeliti na 64 načina, a isto tako vrijedi i za slučaj da Tea ne dobije niti jednu nagradu. Stoga je ukupan broj načina u kojem jedna od djevojčica ne dobije nagradu jednak $3 \cdot 64 = 192$. Ovdje trebamo uočiti da smo dvaput prebrojali slučajeve u kojima po dvije djevojčice neće dobiti niti jednu nagradu. To se može dogoditi na 3 načina – da Iva dobije sve nagrade, da Ana dobije sve ili pak Tea. Dakle, broj načina u kojima jedna ili dvije djevojčice neće dobiti niti jednu nagradu jednak je $192 - 3 = 189$.

I na kraju, ukupan broj načina na koji možemo podijeliti 6 nagrada Ivi, Ani i Tei, a da svaka dobije barem jednu jednak je $729 - 189 = 540$.

Zadatak 5. U uži izbor za državno natjecanje iz matematike Povjerenstvo je predložilo 7 računskih i 5 geometrijskih zadataka. Na koliko se načina od tih predloženih zadataka može izabrati 5 zadataka za natjecanje, ako među njima moraju biti 3 računska i 2 geometrijska zadatka? (Napomena: Poredak izabranih zadataka nije bitan.) (*Državno natjecanje 2018.g., 7. razred*)

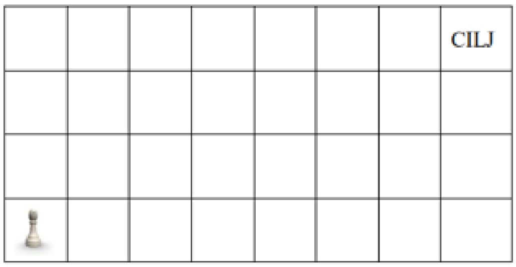
R j e š e n j e. Od sedam računskih zadataka biraju se tri zadatka. Prvi se zadatak može izabrati na 7 načina, drugi na 6, a treći na 5. To je ukupno $7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ mogućnosti.

Budući da je važno samo koji su zadaci izabrani, ali ne i njihov raspored, broj mogućnosti za odabir zadataka treba podijeliti s brojem različitih rasporeda tih triju zadataka. Tri izabrana zadatka mogu se rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ načina. Dakle, 3 računska zadatka se mogu izabrati na $210 : 6 = 35$ načina.

Analogno se računa i za geometrijske zadatke. Od mogućih 5 zadataka trebaju se izabrati dva. Prvi zadatak se može izabrati na 5 načina, a drugi na 4 pa je to ukupno $5 \cdot 4 = 20$ mogućnosti. Ponovno taj broj treba podijeliti s brojem različitih rasporeda dvaju zadataka, a to je 2 (samo dva zadatka – prvi se može izabrati na 2 načina, a drugi samo na 1). Prema tome, dva zadatka za geometrijski dio se mogu izabrati na $20 : 2 = 10$ načina.

I na kraju, bilo koji izbor računskih zadataka se može kombinirati s bilo kojim izborom geometrijskih zadataka pa je ukupan broj načina na koje možemo izabrati zadatke za državno natjecanje $35 \cdot 10 = 350$ načina.

Zadatak 6. Figuricu treba pomicati od polja na kojem se nalazi do cilja u više koraka. U svakom koraku figurica se smije pomaknuti na susjedno polje (polje sa zajedničkom stranicom), i to ili u desno ili prema gore. Na koliko različitih načina figurica može biti pomaknuta do cilja? (*Državno natjecanje 2018.g., 8. razred*)



R j e š e n j e. Od početnog polja do cilja figuricu je ukupno potrebno pomaknuti deset puta od kojih se 7 puta treba pomaknuti desno, a 3 puta prema gore. Radi jednostavnosti možemo označiti pomak desno sa D, a pomak prema gore sa G.

Sada put od početka do cilja možemo shvatiti kao uređenu desetorku u kojoj imamo 7 pomaka desno (D-ova) i 3 pomaka gore (G-ova). Pitanje je koliko ima različitih desetorki sa tim svojstvom? To prebrojavanje možemo napraviti na dva načina.

Prvi način. Biramo prvo položaje G-ova (jer ih je manje pa je jednostavnije). Položaj prvog G (pomaka gore) možemo izabrati na 10 načina, drugog na 9 i trećeg na 8 načina, pa položaj G-ova možemo izabrati na $10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$ načina. Kako nam nije važno koji G je prvi izabran, koji drugi, a koji treći, ukupan broj načina treba podijeliti sa 6 (jer tri pomaka možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1$ načina). I konačno, do cilja figurica može biti pomaknuta na $720 \div 6 = 120$ načina.

Drugi način. Budući da imamo deset pomaka sjetimo se da deset različitih slova možemo poredati na $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1$ načina. U našem primjeru nemamo sva različita slova, već 3 G i 7 D, pa G-ove možemo rasporediti na $3 \cdot 2 \cdot 1$ načina (nije nam važno koji je raspored G-ova, već samo da imamo pomak prema gore), a D-ove na $7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1$ načina. Stoga je ukupan broj načina na koje figurica može biti pomaknuta do cilja jednak $\frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 1} = 120$.

Zadatak 7. Na proslavu mature stigli su bivši učenici jednog razreda. Svi su se muškarci međusobno rukovali, dame su se međusobno poljubile (jedna drugu u obraz), a svaki je muškarac jedanput poljubio svaku damu u ruku. Koliko je osoba stiglo na večeru ako je ukupno bilo 288 poljubaca i 78 rukovanja? (*Državno natjecanje 2016.g., 8. razred*)

R j e š e n j e. Iz uvjeta zadatka vidimo da nam je lakše odrediti broj muškaraca jer su se samo oni rukovali. Označimo broj muškaraca sa m. Budući da se svaki muškarac rukovao sa svima ostalima obavio je $m - 1$ rukovanje. Međutim broj rukovanja treba podijeliti s 2 (jer smo računali da se prvi muškarac rukovao s drugim, ali smo to isto rukovanje računali i kod tog drugog muškarca). Stoga je ukupan broj rukovanja muškaraca jednak $\frac{m(m-1)}{2} = 78$ pa je $m(m-1) = 156$. Rastavom broja 156 na proste faktore dobijemo $m(m-1) = 13 \cdot 12$ pa je broj muškaraca na večeri 13.

Označimo sa n broj dama na večeri. Budući da je svaki muškarac poljubio svaku damu broj poljubaca muškaraca i dama je $13n$, a međusobni broj poljubaca dama je $n(n-1)$. Sada vrijedi $13n + n(n-1) = 288$ pa je $(13 + n - 1)n = 288$. Sada imamo

$$\begin{aligned}
(12+n)n &= 288 \text{ i rastavom broja 288 na proste faktore dobijemo} \\
(12+n)n &= 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \\
(12+n)n &= 12 \cdot 24 \text{ pa je broj dama na večeri 12.}
\end{aligned}$$

Na večeri je ukupno bilo 25 osoba.

Zadaci za vježbu:

Zadatak 8. Kažemo da je prirodni broj palindrom ako se jednako čita slijeva nadesno i zdesna nalijevo.

a) Koliko ima peteroznamenkastih palindroma djeljivih s 5?

b) Koliko ima peteroznamenkastih palindroma djeljivih s 3? (*Školsko natjecanje 2021.g., 8. razred*)

Zadatak 9. Ispišite sve peteroznamenkaste brojeve oblika ($\overline{abcda}$) djeljive brojem 18, pri čemu je znamenka na mjestu stotica najmanji prosti broj. (Različita slova predstavljaju različite znamenke.) (*Županijsko natjecanje 2019.g., 6. razred*)

Zadatak 10. Koliko ima peteroznamenkastih prirodnih brojeva većih od 88888 kojima je zbroj znamenaka 42? Ispišite ih. (*Županijsko natjecanje 2016.g., 7. razred*)

Zadatak 11. Zbroj prve i zadnje znamenke peteroznamenkastog broja s međusobno različitim znamenkama jednak je umnošku preostale tri znamenke. Koliko ima takvih brojeva? (*Državno natjecanje 2022.g., 6. razred*)

Zadatak 12. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 2016 koji su djeljivi brojem 2 ili brojem 3, a nisu djeljivi brojem 5? (*Državno natjecanje 2016.g., 5. razred*)

Zadatak 13. Koliki je zbroj svih četveroznamenkastih brojeva napisanih pomoću znamenki 1,2,3,4,5,6,7,8 i 9 tako da se znamenke ne ponavljaju? (*Državno natjecanje 2016.g., 6. razred*)

Poglavlje 7.

Zaključak

Učitelj matematike je iznimno važna karika u razvoju kreativnog i stvaralačkog mišljenja kod svakog pojedinog učenika. Njegov zadatak je da među njima prepozna one koji žele i trebaju veće izazove od onih na koje nailaze u redovnoj nastavi matematike te da im iste i pruži. Način na koji će to postići ovisi o učitelju, a i učeniku jer ne odgovaraju svim učenicima isti postupci i metode.

U ovom radu smo mogli vidjeti na koje sve poteškoće učitelji, a i učenici nailaze zbog razlike između sadržaja obrađenih na redovnoj nastavi i onih koji se pojavljuju na natjecanjima. Međutim, prikazan je i način na koji pomoći učenicima da savladaju dodatno gradivo. Važno je da učenicima pokažemo što više tehnika, metoda, pravila, uputa kako bi se jednog dana na natjecanju, a i u životu općenito mogli snaći u novoj i nepoznatoj situaciji te primijeniti poznato znanje.

Ono što na kraju još jednom treba istaknuti je to da je nužna bolja edukacija učitelja za rad s darovitim/talentiranim učenicima, tj. onima koji žele više jer većina učitelja nažalost za to nema motivacije, a i nije adekvatno educirana.

Bibliografija

[1] Glasnović Gracin, D., (2014). *Matematika 5 plus.* Zagreb: Element

[2] Kurnik. Z. (2010). *Posebne metode rješavanja matematičkih problema.* Zagreb: Element

[3] Pavković, B., Dakić B., Hanjš, Ž., Mladinić, P. (1994). *Male teme iz matematike.* Zagreb: Element

[4] Veljan, D. (2001). *Kombinatorna i diskretna matematika.* Zagreb: Algoritam

[5] Dakić, B. (2009). Suma $S_N = 1 + 2 + \cdots + N$, *Matematika i škola, 39*, 170–174

[6] Dakić, B. (2005). Carl Friedrich Gauss, *Matematika i škola, 28*, 105-111

[7] Kurnik, Z. (2002). Metodička radionica, *Matematika i škola, 6*, 4-11

[8] Kurnik, Z. (2009). Priprema nastavnika i učenika za matematička natjecanja, *Matematika i škola, 50*, 195 – 199

[9] Šarić, M. (1991). *Najljepši logički zadaci – gimnastika uma.* Beli Manastir: Pitagora. Preuzeto 12. srpnja 2022., s internetske stranice: http://www.antonija-horvatek.from.hr/igrice/Najljepsi-logicki-zadaci-Gimnastika-uma-Milan-Saric.pdf

[10] Dakić, B. *Gaussova dosjetka.* Preuzeto 27. prosinca 2017., s internetske stranice: http://ss-delnice.skole.hr/upload/ss-delnice/images/static3/681/attachment/Gaussova_dosjetka_-_Clanak.pdf

[11] Bašić, M. *Kako unaprijediti natjecanja (i nastavu) iz matematike?* Preuzeto 20. srpnja 2020., s internetske stranice: https://web.math.pmf.unizg.hr/~mbasic/mentori.pdf

[12] Nepoznati autor. *Gauss' Trick – A Staff Seminar*, Preuzeto 27. prosinca 2017., s internetske stranice: https://nzmaths.co.nz/gauss-trick-staff-seminar

[13] Dakić, B. *Gaussova dosjetka.* Preuzeto 27. prosinca 2017., s internetske stranice: http://ss-delnice.skole.hr/upload/ss-delnice/images/static3/681/attachment/Gaussova_dosjetka_-_Clanak.pdf

[14] Horvatek, A. *Natjecanja iz matematike u RH.* Preuzeto 10. srpnja 2020., s internetske stranice: http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/zadaci-OS.htm

[15] Zelčić, M. *Diofantske jednadžbe na natjecanjima u osnovnim školama.* Preuzeto 10. srpnja 2020. s internetske stranice: http://www.antonija-horvatek.from.hr/natjecanja-iz-matematike/Lucko/Diofantske-jednadzbe-Zadaci-i-rjesenja-Maja-Zelcic.pdf

[16] Zelčić, M. *Dirichletov princip.* Preuzeto 10. srpnja 2020. s internetske stranice: http://matzelcic.com.hr/wp-content/uploads/2018/08/Dirichletov-princip-zadaci-i-rje%C5%A1enja.pdf

[17] Marić, M. *Diofantske jednadžbe.* Preuzeto 18. srpnja 2020., s internetske stranice: https://natjecanja.math.hr/wp-content/uploads/2019/07/Diofantske-jednadzbe-Maja-Maric-1.pdf

[18] Nepoznati autor. *Natjecanja iz matematike.* Preuzeto 18. srpnja 2022. s internetske stranice: https://www.azoo.hr/app/uploads/2020/12/Posebna_pravila_matematika_2021.pdf

[19] Nepoznati autor. *Natjecanja iz matematike.* Preuzeto 18. srpnja 2022. s internetske stranice: https://www.azoo.hr/app/uploads/2022/01/Posebna_pravila_matematika_2022.pdf