# Modalne logike

**Grgat, Ante**

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ANTE GRGAT

# MODALNE LOGIKE

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2022.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

# MODALNE LOGIKE

DIPLOMSKI RAD

Student:
Ante Grgat

Mentorica:
prof. dr. sc. Milica Klaričić Bakula

Split, rujan 2022.

# Uvod

Modalna logika poznata je i kao "logika nužnosti" ili kao "logika mogućnosti". Motivacija za takav naziv dolazi iz potrebe da formalno zapišemo na primjer rečenicu: "Možda će padati kiša". Upravo ta potreba bila je nit vodilja za povijesni razvoj teorije modalnih logika. U 4. stoljeću prije krista, starogrčki filozof Aristotel, pokušavao je razviti tu teoriju ali bezuspješno. U modernom vremenu, utemeljiteljem modalne logike smatra se američki filozof Clarence Irwing Lewis, koji je u dvadesetom stoljeću u svojim knjigama predstavio pet sistema modalne logike. Napretku modalne logike uvelike je pridonio i američki filozif i logičar Saul Aaron Kripke po kojemu je u čast nazvan pojam Kripkeovog okvira.

Ovaj rad podijeljen je u tri dijela. U prvom poglavlju uvodimo klasičnu logiku sudova koja je potrebna za razumijevanje daljnjeg gradiva. Klasična logika sudova je temelj od kojeg krećemo da bismo na kraju došli do najpoznatijih sistema modalne logike kao što su takozvani sistem K i sistem S5. U drugom poglavlju definira se općenito što je to modalna logika te navodimo sintaksu modalne logike. Definiramo pojam modela koji nam je potreban da bismo definirali što je to istina. Također, u drugom poglavlju se površinski razmatra pojam aksiomatskog sistema za lakše razumijevanje nekih poznatih modalnih sistema. Na kraju drugog poglavlja navodimo s dokazom čuvenu Lindenbaumovu lemu. U trećem poglavlju navodimo pojam standarnog modela koji je zapravo samo jedna posebna vrsta modela kojeg smo naveli u drugom poglavlju. Standardni model je od velike važnosti za modalne logike jer se tek pomoću njega definira istinitost takozvanih modalnih formula koje su zapravo i povijesni razlog razvoja ove teorije. Također uvodimo pet različitih sistema modalne logike koji se razlikuju po definiciji istinosti modalnih formula.

# Sadržaj

# Poglavlje 1

# Logika sudova

U ovom poglavlju definiramo klasičnu logiku sudova koja će nam pomoći u razumijevanju modalnih logika budući da su modalne logike proširenja logike sudova.

## 1.1 Sintaksa logike sudova

**Definicija 1.1** ***Alfabet logike sudova*** *je unija skupova* $A_1, A_2$ *i* $A_3$ *pri čemu je:*
$A_1 = \{\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots\}$ *prebrojiv skup čije elemente nazivamo* ***propozicionalnim varijablama****;*
$A_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *skup čije elemente nazivamo* ***logičkim veznicima****;*
$A_3 = \{(, )\}$ *čije elemente nazivamo* ***pomoćnim simbolima****.*

Neka je $n \in \mathbb{N}$. Za uređenu n-torku elemenata iz alfabeta logike sudova kažemo da je **riječ**. Na primjer, izraz $\vee \wedge ())))\neg\neg$ je riječ. Naravno, nas će zanimati samo riječi koje imaju smisla u našem intuitivnom shvaćanju, stoga je potrebno izdvojiti neke riječi koje ćemo nazivati formulama.

**Definicija 1.2** *Propozicionalne varijable nazivamo* ***atomarnim formulama****. Pojam* ***formule*** *definiramo rekurzivno na sljedeći način:*
*a) svaka atomarna formula je formula;*
*b) ako su A i B formule onda su i* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \to B)$ *i* $(A \leftrightarrow B)$ *formule.*

**Napomena 1.3** *U Definiciji 2.2 A i B nisu formule nego oznake za formule. Njih nazivamo meta-simboli. Oznake A, B, C, ... ćemo koristiti kao meta-simbole za formule dok ćemo za propozicijske varijable koristiti P, Q, R, ....*

## 1.2 Račun sudova

Za uvođenje pojma dokaza potrebno je definirati sustav u kojem je moguće iz određenih formula koje nazivamo **premisama** zaključivati neke druge formule koje nazivamo **konkluzijama**. Takve sustave nazivamo **deduktivni sustavi**. Jedan od najpoznatijih sustava je Frege- Lukasiewiczev sustav kojeg ćemo sada definirati.
Prvo objasnimo pojam **sheme formule**. Neka je A formula te neka je $\{P_1, \ldots, P_n\}$ skup svih propozicionalnih varijabli koje se pojavljuju u A. To kratko označavamo sa $A(P_1, \ldots, P_n)$. Neka je, zatim, B neka formula. Formulu dobivenu zamjenom neke varijable $P_i$ sa B u formuli A označavamo sa $A(B/P_i)$. Ako su pak $B_1, \ldots, B_n$ proizvoljne formule tada simultanu zamjenu varijabli $P_i$ s formulama $B_i$ označavamo sa $A(B_1/P_1, \ldots, B_n/P_n)$, ili pak kratko $A(B_1, \ldots, B_n)$. Shema formule $A(P_1, \ldots, P_n)$ je sada skup $\{A(B_1/P_1, \ldots, B_n/P_n) : B_1, \ldots, B_n \text{ su formule}\}$. Elemente shema formula nazivamo **instancama**. Tako je na primjer formula $(C \to D) \to B$ instanca sheme formule $A \to B$.
**Aksiom** je neka odabrana formula. **Prvilo izvoda** je zadana transformacije

kojom iz skupa formula dobivamo novu formulu. Pravilo izvoda se shematski zapisuje u obliku:

$$\frac{A_1, \ldots, A_n}{\text{A}}$$

i čitamo: iz skupa formula $\{A_1, \ldots, A_n\}$ slijedi formula A.
Sada možemo definirati Frege-Łukasiewiczev sistem koje ovdje označavamo s RS (račun sudova).

**Definicija 1.4** ***Račun sudova RS*** *zadan je svojim shemama aksioma i jednim pravilom izvoda.*
*Sheme aksioma su:*
*(A1)* $A \to (B \to A)$;
*(A2)* $(A \to (B \to C)) \to ((A \quad \to B) \to (A \to C))$;
*(A3)* $(\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$.
*Pravilo izvoda je:*

$$\frac{A \qquad A \to B}{B}$$

*i nazivamo ga* ***modus ponens.*** *Svaku instancu shema aksioma (A1)-(A3) nazivamo* ***aksiomom.***

**Definicija 1.5** *Za uređenu n-torku* $(F_1, \ \ldots F_n)$ *kažemo da je* ***dokaz*** *za formulu* $F = F_n$ *ako za svaki* $k \in \{1, \ldots, n\}$ *vrijedi:*
*Forumula* $F_k$ *je aksiom ili je nastala primjenom pravila modus ponens na neke formule* $F_i$ *i* $F_j$ *gdje su* $i, j < k$
*Za formulu F kažemo da je* ***teorem*** *sistema RS i pišemo* $\vdash_{RS} F$ *ili kratko* $\vdash F$ *ako u RS postoji dokaz za nju.*

**Napomena 1.6** *Primijetimo da pojam teorema ovdje koristimo u dva smisla. Teorem koji smo definirali u gornjoj definiciji odnosi se na teorem sistema*

*RS, to je neka određena formula unutar sistema. S druge strane, teorem u drugom smislu odnosi se na neke tvrdnje o samom sistemu. Takve teoreme nazivamo* ***metateoremima****. U daljnjem tekstu nećemo posebno naglašavati razliku smatrajući da će smisao biti jasan iz konteksta.*

**Primjer 1.7** *Konstrukcijom odgovarajućeg dokaza pokažimo da je formula $A \to A$ teorem sistema RS.*

*1)* $(A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ *(aksiom A2)*

*2)* $A \to ((A \to A) \to A)$ *(aksiom A1)*

*3)* $(A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ *(mod pon iz 1) i 2))*

*4)* $A \to (A \to A)$ *(aksiom A1)*

*5)* $A \to A$ *(mod pon iz 3) i 4))*

**Definicija 1.8** *Neka je S skup formula i F proizvoljna formula. Za uređenu n-torku formula $(F_1, \ldots, F_n)$ kažemo da je* ***izvod*** *formule F iz skupa S u sistemu RS u oznaci $S \vdash_{RS} F$ (ili kratko $S \vdash F$) ako vrijedi sljedeće:*

*(1) formula $F_n$ je upravo formula F;*

*(2) za svaki $i \in \{1, \ldots, n\}$ vrijedi barem jedno od sljedećeg:*

*(a) formula $F_i$ je aksiom*

*(b) $F_i \in S$*

*(c) formula $F_i$ je nastala primjenom pravila modus ponens na neke dvije formule $F_k$ i $F_l$, pri čemu je $k, l \leq i$.*

**Teorem 1.9 (Teorem dedukcije)** *Neka je S skup formula te A i B neke formule. Ako je $S \cup \{A\} \vdash B$, onda je $S \vdash A \to B$.*

Sada bez dokaza navodimo teorem potpunosti za sistem RS koji ćemo koristiti u daljnjim razmatranjima.

**Teorem 1.10 (Teorem potpunosti za RS)** *Formula F je valjana ako i samo ako je F teorem sistema RS.*

**Korolar 1.11** *Ako je* $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash A$ *onda je* $\vdash (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \to A$.

**Dokaz.** Pretpostavimo da vrijedi $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash A$. Po Teoremu dedukcije slijedi $\{F_1, \dots, F_{n-1}\} \vdash F_n \to A$. Primjenom Teorema dedukcije n puta dolazimo do formule $\emptyset \vdash F_1 \to (F_2 \to (\dots (F_n \to A))$. Dakle vrijedi $\vdash F_1 \to (F_2 \to (\dots (F_n \to A))$. Po teoremu potpunosti slijedi da je $F_1 \to (F_2 \to (\dots (F_n \to A))$ valjana formula. Primjenom matematičke indukcije nije teško dokazati da je formula $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \to A$ logički ekvivalentna formuli $F_1 \to (F_2 \to (\dots (F_n \to A))$. Slijedi da je i formula $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \to A$ valjana. Konačno, iz teorema potpunosti sada slijedi $\vdash (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \to A$.
■

# Poglavlje 2

# Modalne logike

U ovom poglavlju navest ćemo neke nove deduktivne sisteme koje možemo smatrati proširenjima sistema RS. Naglasak je na dodavanju novih takozvanih modalnih operatora $\Box$ te $\Diamond$. Ti operatori imaju povijesno značenje. Operator $\Box$ najčešće intuitivno shavaćamo kao nužnost. Naime, pretpostavimo da nam oznaka A predstavlja rečenicu: "Vozim automobil". Tada bi nam formula $\Box A$ predstavljala rečenicu: "Nužno je da vozim automobil". S druge strane, simbol $\Diamond$ bi nam tada predstavljao mogućnost pa bismo formulu $\Diamond A$ preveli kao: "Možda vozim automobil". No, postoje i drugačija intuitivna shvaćanja navedenih simbola. Na primjer, formule $\Box A$ i $\Diamond A$ možemo shavatiti na sljedeće načine:

| $\Box A$ | $\Diamond A$ |
|---|---|
| "Uvijek ću voziti automobil". | "Nekada ću voziti automobil." |
| "Namjeravam voziti automobil." | "Ne namjeravam ne voziti automobil." |
| "Stjepan misli da vozim automobil." | "Stjepan ne misli da ne vozim automobil." |
| "Bog zna da vozim automobil." | "Bog ne zna da ne vozim automobil." |

U ovisnosti o odabiru intuitivnog shvaćanja simbola $\Box$ i $\Diamond$ definiraju se različite modalne logike koje se primjenjuju u različitim područjima znanosti. Modalne logike imaju posebno veliko značenje u mtematičkoj teoriji računarstva.

## 2.1 Sintaksa modalnog sistema

**Definicija 2.1** ***Alfabet modalne logike*** *je unija skupova* $A_1, A_2, A_3, A_4$ *i* $A_5$ *pri čemu je:*
$A_1 = \{\mathbb{P}_0, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots\}$ *prebrojiv skup čije elemente nazivamo* ***propozicionalnim varijablama****;*
$A_2 = \{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *skup čije elemente nazivamo* ***logičkim veznicima****;*
$A_3 = \{(,)\}$ *čije elemente nazivamo* ***pomoćnim simbolima****;*
$A_4 = \{\Box\}$ *čiji element nazivamo* ***modalnim operatorom*** *te*
$A_5 = \{\top\}$ *čiji element nazivamo* ***konstantskim simbolom****.*

Definicija formule je analogna kao kod klasične logike sudova, uz dodatak takozvanih modalnih formula.

**Definicija 2.2** *Propozicijske varijable nazivamo* ***atomarnim formulama****.*
*Pojam* ***formule*** *definiramo rekurzivno na sljedeći način:*
*a) svaka atomarna formula je formula;*
*b) ako su A i B formule, onda su i* $(\neg A)$, $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ *i* $(A \leftrightarrow B)$ *formule;*
*c) ako je A formula, onda je i* $\Box A$ *formula;*
*d)* $\top$ *je formula.*

U nekim se literaturama u alfabet modalne logike dodaju unarni operator $\Diamond$ te konstanta $\bot$ , pri čemu je formula $\Diamond A$ pokrata za formulu $\neg\Box\neg A$ i $\bot$ pokrata za formulu $\neg\top$.

## 2.2 Modeli, istinitost, valjanost

U ovom odjeljku navodimo pojam modela i istinosti u širem smislu.

**Definicija 2.3** ***Model*** *je uređeni par* $\mathcal{M} = (W, \Vdash)$ *pri čemu je* $W$ *skup čije elemente nazivamo* ***mogućim svjetovima****, te* $\Vdash$ *relacija između skupa* $W$ *i skupa svih atomarnih formula.*

Pojam istine u ovom poglavlju definiramo samo za ne-modalne formule. U daljnjim poglavljima definirat ćemo pojam istine i za modalne formule, to jest formule oblika $\Box A$, iz čega će proizlaziti definicije različitih modalnih logika.

**Definicija 2.4** *Neka je* $\mathcal{M} = (W, \Vdash)$ *model te je* $\alpha \in W$ *proizvoljni mogući svijet u* $W$*. Za atomarnu formulu* $\mathbb{P}$ *kažemo da je* ***istinita*** *u mogućem svijetu* $\alpha$ *modela* $\mathcal{M}$ *i pišemo* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} \mathbb{P}$ *ako vrijedi* $\alpha \Vdash \mathbb{P}$*. Za ne-modalne formule istinitost definiramo rekurzivno:*

*1)* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} \neg A$ *ako i samo ako* $\not\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A$*;*

*2)* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A \wedge B$ *ako i samo ako* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A$ *i* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} B$*;*

*3)* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A \vee B$ *ako i samo ako* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A$ *ili* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} B$*;*

*4)* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A \to B$ *ako i samo ako* $\not\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A$ *ili* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} B$*;*

*5)* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A \leftrightarrow B$ *ako i samo ako:* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A$ *ako i samo ako* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} B$*.*

*Nadalje, za formulu* $\top$ *definiramo* $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} \top$*.*

Za formulu A modalne logike kažemo da je **istinita u modelu** $\mathcal{M} = (W, \Vdash)$ i pišemo $\models^{\mathcal{M}} A$ ako za svaki mogući svijet $\alpha \in W$ vrijedi $\models^{\mathcal{M}}_{\alpha} A$. Ako je A istinita u modelu $\mathcal{M}$ kažemo još i da je $\mathcal{M}$ model za A.
Za formulu A modalne logike kažemo da je **valjana** ili da je **tautologija** i pišemo $\models A$ ako je istinita u svakom modelu.

**Definicija 2.5** *Za formulu A kažemo da je* ***logička posljedica*** *formula* $A_1, \ldots, A_n$ *ako za svaki model* $\mathcal{M} = (W, \Vdash)$ *i svaki* $\alpha \in W$ *za koji je* $\vDash_\alpha^\mathcal{M} A_1, \ldots, \vDash_\alpha^\mathcal{M} A_n$ *vrijedi* $\vDash_\alpha^\mathcal{M} A$

**Napomena 2.6** *Primijetimo da smo pojmove istinosti i valjanosti formula već definirali kod logike sudova, no ne bi trebalo doći do zabune jer su to potpuno analogne definicije. Za lakše razumijevanje, određenu interpretaciju kod logike sudova možemo smatrati kao odabir određenog mogućeg svijeta. Dakle za atomarnu formulu* $\mathbb{P}$*, odabrati mogući svijet* $\alpha$ *tako da je* $\vDash_\alpha^\mathcal{M} \mathbb{P}$ *ekvivalentno je odabiru interpretacije I za koju je* $I(\mathbb{P}) = 1$*. U daljnjem tekstu nećemo posebno naglašavati o kojoj je istinitosti (valjanosti) riječ smatrajući da će to čitatelju biti jasno iz konteksta.*

## 2.3 Sistemi modalne logike

**Definicija 2.7** *Za skup formula kažemo da je* ***zatvoren na pravilo izvoda X ili da ima pravilo izvoda X*** *ako sadrži konkluziju pravila izvoda X čim sadrži premise pravila izvoda X.*

Na primjer, ako skup formula zatvoren na modus ponens sadrži formulu A i formulu $A \to B$, onda on sadrži i formulu B.
Za pravilo izvoda uobičajeno je zahtijevati da čuva istinitost, to jest da je konkluzija istinita čim su premise istinite. Konvencija je da pravilo koje nema premisa čuva istinitost ako je konkluzija valjana.

**Definicija 2.8** *Za skup formula* $\Sigma$ *kažemo da je* ***sistem modalne logike*** *ili* ***modalna logika*** *ako je zatvoren na sva pravila izvoda koja čuvaju istinitost. Za element* $F \in \Sigma$ *modalne logike* $\Sigma$ *kažemo da je* $\Sigma$ ***-teorem*** *i pišemo* $\vdash_\Sigma F$.

**Propozicija 2.9** *Vrijedi sljedeće:*

*(1) skup svih formula je modalna logika;*

*(2) ako je* $\{\Sigma_i : i \in I\}$ *familija modalnih logika, onda je* $\bigcap_{i\in I} \Sigma_i$ *modalna logika;*

*(3) skup svih valjanih formula je modalna logika;*

**Dokaz.** (1) Trivijalno;

(2) Neka je formula A logička posljedica formula $A_1, \ldots, A_n$ pri čemu su $A_1, \ldots, A_n \in \bigcap_{i\in I} \Sigma_i$. Neka je $j \in I$ proizvoljan. Kako je $\bigcap_{i\in I} \Sigma_i \subseteq \Sigma_j$ to vrijedi $A_1, \ldots, A_n \in \Sigma_j$. Nadalje, $\Sigma_j$ je modalna logika pa je $A \in \Sigma_j$. Dakle, za svaki $j \in I$ vrijedi $A \in \Sigma_j$ pa je $A \in \bigcap_{i\in I} \Sigma_i$.

(3) Neka je A logička posljedica formula $A_1, \ldots, A_n$. Formule $A_1, \ldots, A_n$ su istinite u svakom mogućem svijetu svakog modela iz čega slijedi da je i formula A istinita u svakom mogućem svijetu svakog modela. Dakle, A je valjana formula. ■

**Definicija 2.10** *Neka su* $\Sigma$ *i* $\Gamma$ *modalne logike. Za modalnu logiku* $\Gamma$ *kažemo da je* $\Sigma$***-sistem*** *ako je* $\Sigma \subseteq \Gamma$.

**Teorem 2.11** *Vrijedi:*

*(1) račun sudova RS je modalna logika;*

*(2) svaka modalna logika je RS-sistem;*

*(3) RS je u smislu inkluzije najmanja modalna logika.*

**Dokaz.** (1) Neka su $A_1$, ..., $A_n$ formule računa sudova (valjane formule u smislu logike sudova) i A logička posljedica formula $A_1, \ldots, A_n$. Kako je A logička posljedica formula $A_1, \ldots, A_n$ to je ona istinita čim su $A_1, \ldots, A_n$ istinite. Formule $A_1, \ldots, A_n$ su formule računa sudova pa su i valjane, dakle istinite su za svaku interpretaciju. Slijedi da je A istinita za svaku interpretaciju, to jest A je valjana formula. Tada po Teoremu 1.10 slijedi da je A formula računa sudova.

(2) Neka je $\Sigma$ modalna logika. Pravilo izvoda koje nema premisa čuva istinitost ako je konkluzija valjana. Kako je $\Sigma$ zatvorena i na takvo pravilo izvoda slijedi da $\Sigma$ sadrži sve valjane formule, a time i sve formule računa sudova. Dakle $RS \subseteq \Sigma$, to jest $\Sigma$ je RS-sistem.

(3) Trivijalno slijedi iz (2). ■

**Definicija 2.12** *Za formulu $A$ kažemo da je* ***izvediva*** *iz skupa formula $\Gamma$ u sistemu $\Sigma$ i pišemo $\Gamma \vdash_\Sigma A$ ako postoje formule $A_1, \dots, A_n \in \Gamma$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, tako da je formula $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to A$ $\Sigma$-teorem.*

**Napomena 2.13** *Ako u Definiciji 2.12 stavimo $n = 0$, onda se po dogovoru uzima da formula $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \to A$ označava formulu $A$.*

**Definicija 2.14** *Za skup formula $\Gamma$ kažemo da je* ***konzistentan*** *i pišemo $\mathfrak{Con}_\Sigma \Gamma$ ako formula $\perp$ nije izvediva iz $\Gamma$. Inače kažemo da je $\Gamma$* ***inkonzistentan*** *i pišemo $\mathfrak{C}\not{\mathfrak{o}}\mathfrak{n}_\Sigma \Gamma$.*

**Propozicija 2.15** *Neka je $\Sigma$ modalna logika, $A, B \in \Sigma$, te $\Gamma, \Delta$ skupovi formula. Tada vrijedi:*

*(1) $\vdash_\Sigma A$ ako i samo ako $\emptyset \vdash_\Sigma A$;*

*(2) $\vdash_\Sigma A$ ako i samo ako za svaki $\Gamma$ vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A$;*

*(3) ako $\Gamma \vdash_{RS} A$,onda $\Gamma \vdash_\Sigma A$;*

*(4) ako $A \in \Gamma$, onda $\Gamma \vdash_\Sigma A$;*

*(5) ako $\Gamma \vdash_\Sigma B$ i $\{B\} \vdash_\Sigma A$, onda $\Gamma \vdash_\Sigma A$;*

*(6) ako $\Gamma \vdash_\Sigma A$ i $\Gamma \subseteq \Delta$, onda $\Delta \vdash_\Sigma A$;*

*(7) $\Gamma \vdash_\Sigma A$ ako i samo ako postoji konačan skup $\Omega \subseteq \Gamma$ tako da je $\Omega \vdash_\Sigma A$;*

*(8)*[1] *$\Gamma \vdash_\Sigma A \to B$ ako i samo ako $\Gamma \cup \{A\} \vdash_\Sigma B$;*

[1]Ova tvrdnja naziva se **Teorem dedukcije** za sistem modalne logike

*(9)* $\mathfrak{Con}_{\Sigma}\Gamma$ *ako i samo ako postoji formula* $C$ *tako da ne vrijedi* $\Gamma \vdash_{\Sigma} C$*;*

*(10)* $\mathfrak{Con}_{\Sigma}\Gamma$ *ako i samo ako ne postoji formula* $C$ *tako da vrijedi* $\Gamma \vdash_{\Sigma} C$ *i* $\Gamma \vdash_{\Sigma} \neg C$*;*

*(11) ako* $\mathfrak{Con}_{\Sigma}\Gamma$*, onda* $\mathfrak{Con}_{RS}\Gamma$*;*

*(12) ako* $\mathfrak{Con}_{\Sigma}\Gamma$ *i* $\Omega \subseteq \Gamma$*, onda* $\mathfrak{Con}_{\Sigma}\Omega$*;*

*(13)*[2] $\mathfrak{Con}_{\Sigma}\Gamma$ *ako i samo ako za svaki konačan skup* $\Omega \subseteq \Gamma$ *vrijedi* $\mathfrak{Con}_{\Sigma}\Omega$*;*

*(14)* $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$ *ako i samo ako* $\mathfrak{C}\not{\mathfrak{o}}\mathfrak{n}_{\Sigma}\Gamma \cup \{\neg A\}$*;*

*(15)* $\mathfrak{Con}_{\Sigma}\Gamma \cup \{A\}$ *ako i samo ako ne vrijedi* $\Gamma \vdash_{\Sigma} \neg A$*.*

**Dokaz. (1)** Pretpostavimo da vrijedi $\vdash_{\Sigma} A$. Ako je $n = 0$, onda je po konvenciji formula $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A$ zapravo formula A. Dakle, vrijedi $\vdash_{\Sigma} (A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A$ pa po definiciji izvedivosti slijedi $\emptyset \vdash_{\Sigma} A$. Obratno, ako je $\emptyset \vdash_{\Sigma} A$ onda $\Sigma$ sadrži formulu $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A$ pri čemu je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i $A_1, \ldots, A_n \in \emptyset$. Slijedi $n = 0$, pa je formula $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A$ zapravo formula A . Stoga $\Sigma$ sadrži formulu A pa je $\vdash_{\Sigma} A$.

**(2)** Neka je $\vdash_{\Sigma} A$ i $\Gamma$ proizvoljan skup formula. Sistem $\Sigma$ sadrži formulu $(A_1 \wedge \cdots \wedge A_n) \rightarrow A$ pri čemu je $n = 0$ i $A_1, \ldots, A_n \in \Gamma$. Dakle $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$. Obratno, za $\Gamma = \emptyset$ vrijedi $\emptyset \vdash_{\Sigma} A$ pa iz (1) slijedi $\vdash_{\Sigma} A$.

**(3)** Neka je $\Gamma \vdash_{RS} A$. Kako je dokaz konačan niz formula to postoje formule $F_1, \ldots, F_n \in \Gamma$ takve da je $\{F_1, \ldots, F_n\} \vdash_{RS} A$. Primjenom Korolara 1.11 slijedi $\vdash_{RS} (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow A$. Nadalje, svaka modalna logika je RS-sistem pa je formula $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow A$ element sistema $\Sigma$. Dakle vrijedi $\vdash_{\Sigma} (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \rightarrow A$, a time i $\Gamma \vdash_{\Sigma} A$.

**(4)** Neka je $A \in \Gamma$. Formula $A \rightarrow A$ je valjana formula pa je element sistema RS. Kako je $RS \subseteq \Sigma$ to je formula $A \rightarrow A$ $\Sigma$-teorem. Premisa A je element

[2]Ova tvrdnja naziva se **Teorem kompaktnosti** za sistem modalne logike

skupa $\Gamma$ pa slijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A$.

**(5)** Neka j $\Gamma \vdash_\Sigma B$ i $\{B\} \vdash_\Sigma A$. Ako je $\vdash_\Sigma A$, onda po (2) vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A$ pa pretpostavimo $\nvdash_\Sigma A$. Postoji $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i formule $F_1, \dots, F_n \in \Gamma$ takve da vrijedi $\vdash_\Sigma (F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \to B$. Nadalje, zbog $\{B\} \vdash_\Sigma A$ i $\nvdash_\Sigma A$ vrijedi $\vdash_\Sigma B \to A$. Ako je $n = 0$, onda je $\vdash_\Sigma B$ pa primjenom pravila modus ponens slijedi $\vdash_\Sigma A$, što je kontradikcija, dakle $n \neq 0$. Nadalje, promotrimo pravilo izvoda[3]:

$$\frac{A \to B \qquad B \to C}{A \to C}$$

Nije teško provjeriti da ono čuva istinitost. Kako je $\Sigma$ modalna logika to je zatvorena na pravila izvoda koja čuvaju istinitost pa posebno i na gornje pravilo. Sada iz $\vdash_\Sigma (F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \to B$ i $\vdash_\Sigma B \to A$ primjenom gornjeg pravila izvoda slijedi $\vdash_\Sigma (F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \to A$, a time i $\Gamma \vdash_\Sigma A$.

**(6)** Očito.

**(7)** Neka je $\Gamma \vdash_\Sigma A$. Po definiciji izvedivosti postoji $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i formule $F_1, \dots, F_n \in \Gamma$ takve da je $\vdash_\Sigma (F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \to A$ no to znači da je $\{F_1, \dots, F_n\} \vdash_\Sigma A$. Stavimo $\Omega = \{F_1, \dots, F_n\}$. Obrat izravno slijedi iz (6)

**(8)** Neka je $\Gamma \vdash_\Sigma A \to B$. Tada postoji $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i formule $F_1, \dots, F_n \in \Gamma$ tako da je $\vdash_\Sigma (F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \to (A \to B)$. Nije teško provjeriti da pravilo izvoda:

$$\frac{(F_1 \wedge \dots \wedge F_n) \to (A \to B)}{(F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge A) \to B}$$

čuva istinotost. Stoga je $\vdash_\Sigma (F_1 \wedge \dots \wedge F_n \wedge A) \to B$, to jest $\Gamma \cup \{A\} \vdash_\Sigma B$.

[3] Navedeno pravilo izvoda naziva se **Čisti hipotetički silogizam**

Obratno, pretpostavimo da vrijedi $\Gamma \cup \{A\} \vdash_\Sigma B$. Tada postoji $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ i formule $F_1, \dots, F_n \in \Gamma \cup \{A\}$ tako da je $\vdash_\Sigma (F_1 \wedge \cdots \wedge F_n) \to B$. Promotrimo slučaj $A \in \{F_1, \dots, F_n\}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $A = F_n$. Formula $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_{n-1}) \to (A \to B)$ je nastala iz formule $(F_1 \wedge \cdots \wedge F_{n-1} \wedge A) \to B$ primjenom gornjeg pravila izvoda. Stoga je $\vdash_\Sigma (F_1 \wedge \cdots \wedge F_{n-1}) \to (A \to B)$, a time i $\Gamma \vdash_\Sigma A \to B$. Promotrimo sada slučaj $A \notin \{F_1, \dots, F_n\}$. Ako je $n = 0$, onda je $\vdash_\Sigma B$. Nije teško provjeriti da pravilo izvoda

$$\frac{\mathrm{B}}{A \to B}$$

čuva istinitost. Dakle vrijedi $\vdash_\Sigma A \to B$ pa po (2) vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A \to B$. Neka $n \neq 0$. Promotrimo pravilo izvoda:

$$\frac{F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \to B}{F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \to (A \to B)}$$

Iz uvjeta Definicije 2.4 lako se provjeri da gornje pravilo čuva istinitost. Primjenom gornjeg pravila izvoda slijedi $\vdash_\Sigma F_1 \wedge \cdots \wedge F_n \to (A \to B)$, to jest $\Gamma \vdash_\Sigma A \to B$.

**(9)** Ako je $\mathfrak{Con}_\Sigma \Gamma$ onda je $\Gamma \nvdash_\Sigma \perp$ pa je $\perp$ tražena formula. Obratno, neka postoji formula A tako da ne vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A$. Pretpostavimo suprotno, to jest $\mathfrak{C}\varnothing\mathfrak{n}_\Sigma \Gamma$. Tada je $\Gamma \vdash_\Sigma \perp$. Za pravilo izvoda

$$\frac{\perp}{\mathrm{A}}$$

trivijalno vrijedi da čuva istinitost pa zaključujemo da je $\Gamma \vdash_\Sigma A$ za svaku formulu A, što je kontradikcija. Dakle, vrijedi $\mathfrak{Con}_\Sigma \Gamma$.

**(10)** Neka je $\mathfrak{Con}_\Sigma \Gamma$, tada je $\Gamma \nvdash_\Sigma \perp$. Pretpostavimo suprotno, to jest da postoji formula A takva da je $\Gamma \vdash_\Sigma A$ i $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A$. Sada po (6) slijedi

$\Gamma \cup \{A\} \vdash_\Sigma \neg A$. Pa po (8) vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A \to \neg A$. Nije teško provjeriti da pravilo izvoda

$$\frac{\emptyset}{(A \to \neg A) \to \bot}$$

čuva istinitost. Slijedi $\vdash_\Sigma (A \to \neg A) \to \bot$. Po definiciji izvedivosti je onda $\{A \to \neg A\} \vdash_\Sigma \bot$. Sada iz (5) slijedi $\Gamma \vdash_\Sigma \bot$ a time i $\mathfrak{C}\mathfrak{ø}\mathfrak{n}_\Sigma\Gamma$. Dobili smo kontradikciju. Dakle ne postoji formula A takva da je $\Gamma \vdash_\Sigma A$ i $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A$. Obratno, neka za svaku formulu A ne vrijedi istovremeno $\Gamma \vdash_\Sigma A$ i $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A$. Dakle, za proizvoljnu formulu A vrijedi $\Gamma \nvdash_\Sigma A$ ili $\Gamma \nvdash_\Sigma \neg A$ pa po (9) vrijedi $\mathfrak{Con}_\Sigma\Gamma$.

**(11)** Neka $\mathfrak{Con}_\Sigma\Gamma$, tada $\Gamma \nvdash_\Sigma \bot$. Sada iz (3) slijedi $\Gamma \nvdash_{RS} \bot$ pa je $\mathfrak{Con}_{RS}\Gamma$.

**(12)** Neka $\mathfrak{Con}_\Sigma\Gamma$ i $\Omega \subseteq \Gamma$. Kako je $\Gamma \nvdash_\Sigma \bot$ to iz (6) slijedi $\Omega \nvdash_\Sigma \bot$ pa je $\mathfrak{Con}_\Sigma\Omega$.

**(13)** Nužnost slijedi iz (12). Obratno, pretpostavimo suprotno. Neka je $\mathfrak{C}\mathfrak{ø}\mathfrak{n}_\Sigma\Gamma$. Tada vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma \bot$ pa po (7) postoji konačan $\Omega \subseteq \Gamma$ tako da $\Omega \vdash_\Sigma \bot$ što znači da je $\Omega$ inkonzistentan, a to je kontradikcija.

**(14)** Pretpostavimo $\Gamma \vdash_\Sigma A$. Po (6) slijedi $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_\Sigma A$ te iz (4) slijedi $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_\Sigma \neg A$. Stoga, iz (10) slijedi $\mathfrak{C}\mathfrak{ø}\mathfrak{n}_\Sigma\Gamma \cup \{\neg A\}$. Obratno, pretpostavimo $\mathfrak{C}\mathfrak{ø}\mathfrak{n}_\Sigma\Gamma \cup \{\neg A\}$, to jest $\Gamma \cup \{\neg A\} \vdash_\Sigma \bot$. Tada po (8) vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A \to \bot$. Nadalje, lako se provjeri da pravilo izvoda

$$\frac{\emptyset}{(\neg A \to \bot) \to A}$$

čuva istinitost iz čega slijedi $\vdash_\Sigma (\neg A \to \bot) \to A$. Dakle $\{\neg A \to \bot\} \vdash_\Sigma A$. Sada iz (5) slijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A$.

**(15)** Neka je $\mathfrak{Con}_\Sigma\Gamma \cup \{A\}$. Pretpostavimo suprotno. Neka je $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A$.

Tada iz (6) slijedi $\Gamma \cup \{A\} \vdash_\Sigma \neg A$. Nadalje, iz (4) slijedi $\Gamma \cup \{A\} \vdash_\Sigma A$. Sada iz (10) slijedi $\mathfrak{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{A\}$, što je kontradikcija. Obratno, neka je $\Gamma \nvdash_\Sigma \neg A$. Pokažimo $\Gamma \cup \{A\} \nvdash_\Sigma \neg A$. Pretpostavimo suprotno, to jest $\Gamma \cup \{A\} \vdash_\Sigma \neg A$. Tada je $\Gamma \vdash_\Sigma A \to \neg A$. U (10) smo dokazali da je $\vdash_\Sigma (A \to \neg A) \to \perp$. Dakle vrijedi $\{A \to \neg A\} \vdash_\Sigma \perp$. Primjenom (5) vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma \perp$ pa je $\Gamma$ inkonzistentan, što je prema (9) kontradikcija s $\Gamma \nvdash_\Sigma \neg A$. Dakle vrijedi $\Gamma \cup \{A\} \nvdash_\Sigma \neg A$ pa prema (9) vrijedi $\mathfrak{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{A\}$. ■

## 2.4 Aksiomatika

U ovom dijelu sadržaj će biti manje matematički strog. Naime, za preciznu analizu potrebne su jače teorije matematičke logike koje nadilaze svrhu ove teze.

Za skup formula $\Gamma$ kažemo da je **odlučiv** ako za bilo koju formulu F postoji konačna efektivna metoda za odrediti je li $F \in \Gamma$ ili $F \notin \Gamma$. Na primjer, skup svih formula koje sadže simbol $\neg$ je odlučiv jer za proizvoljnu formulu F možemo vrlo lako provjeriti sadržava li simbol $\neg$. Nadalje, za pravilo izvoda reći ćemo da je **razumno** ako postoji način da od danih formula koje se pojavljuju u pravilu izvoda odredimo koje su formule premise, a koja formula je konkluzija. Na primjer, modus ponens je razumno jer je od tri zadane formule trivijalno provjeriti koje su dvije premise, a koja je konkluzija.
Uočimo da se svaki sistem modalne logike $\Sigma$ može zadati nekim svojim podskupom $\Gamma \subseteq \Sigma$ te pravilima izvoda. To je trivijalno jer možemo uzeti $\Gamma = \Sigma$, a za pravilo izvoda uzmemo:

$$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{A}}$$

Naravno, ovakvo nam zadavanje sistema nije od interesa. Postavlja se pitanje: postoji li neki pravi podskup $\Gamma \subset \Sigma$ sistema $\Sigma$ tako da počevši od $\Gamma$ uz neka pravila izvoda možemo doći do svih formula sistema $\Sigma$?

Ako je $\Sigma$ generiran nekim odlučivim podskupom $\Gamma \subseteq \Sigma$ uz konačno mnogo razumnih pravila izvoda, onda kažemo da je $\Sigma$ **aksiomatizabilan** i da je skup $\Gamma$ **skup aksioma** sistema $\Sigma$. Elemente od $\Gamma$ nazivamo **aksiomima**. Već smo upoznati s nekim aksiomatskim sistemima modalne logike kao što je RS, no postoje i sistemi koji nisu aksiomatizabilni, na primjer, skupovi formula koje su istinite u nekom odabranom svijetu modela su rijetko aksiomatizabilni. Aksiomatizabilni sistemi su od važnosti jer uvode pojam dokaza, a time i takozvani pozitivan test za skup teorema. Pojasnimo pojam pozitivnog testa. Neka je S skup nekih formula i A neka formula. Pretpostavimo da želimo saznati je li $A \in S$ ili $A \notin S$. **Pozitivan test** skupa S je algoritam koji za svaku formulu iz S na konačan i efektivan način može provjeriti da je ona zaista unutar S. Ovdje smo veoma površno definirali pojam pozitivnog testa. Naime, prvo bismo trebali definirati što je to algoritam, no to nadilazi svrhu ove teze. **Negativan test** skupa S je pozitivan test komplementa od S. Uočimo da je skup formula S odlučiv ako i samo ako postoji pozitivan i negativan test za S.

Pojam dokaza aksiomatizabilnog sistema analogan je pojmu dokaza u sistemu RS. Dakle, **dokaz** formule F u aksiomatizabilnom sistemu $\Sigma$ je konačan niz formula od kojih je posljednja upravo F i svaka je ili aksiom ili je nastala primjenom nekog pravila izvoda sistema $\Sigma$ na neke prethodne formule u nizu. Formulu F za koju postoji dokaz nazivamo **teoremom**. Kako je skup svih formula prebrojiv i dokaz je konačan niz formula to je skup svih dokaza nekog aksiomatizabilnog sistema također prebrojiv. Dakle, sve dokaze možemo poredati u niz $p_1, p_2, p_3, \dots$. Ako je neka formula F teorem aksiomatizabilnog sistema, onda se ona nalazi na kraju nekog dokaza $p_n$. Provjerom svakog dokaza počevši od $p_1$, nakon konačno koraka doći ćemo do $p_n$ i time ustanoviti da je F teorem aksiomatizabilnog sistema. Dakle, konstruirali smo pozitivan test za skup svih teorema aksiomatizabilnog sistema. Ako neka formula A nije teorem onda se ona ne nalazi na kraju nijednog dokaza iz niza $p_1, p_2, \ldots,$ međutim provjeravanjem jednog po jednog dokaza, trebali bismo provjeriti svih beskonačno mnogo dokaza da bismo ustanovili da formula A nije teorem, no taj način nije konačan ni efektivan pa ga ne uzimamo kao negtivan test.

## 2.5 Maksimalnost i Lindenbaumova lema

U ovom dijelu razmotrit ćemo takozvane maksimalne skupove formula. Grubo govoreći, to su konzistentni skupovi koji dodavanjem novih formula postaju inkonzistentni. Navedimo preciznu definiciju.

**Definicija 2.16** *Za skup formula $\Gamma$ kažemo da je* ***maksimalno konzistentan*** *ili* ***maksimalan****, u oznaci $\mathfrak{Max}_\Sigma \Gamma$, ako je konzistentan i vrijedi: za svaku formulu $A$, iz $\mathfrak{Con}_\Sigma \Gamma \cup \{A\}$ slijedi $A \in \Gamma$.*

**Propozicija 2.17** *Neka je $\Gamma$ maksimalan skup formula. Tada vrijedi:*

*(1) $A \in \Gamma$ ako i samo ako $\Gamma \vdash_\Sigma A$;*

*(2) $\Sigma \subseteq \Gamma$;*

*(3) $\top \in \Gamma$;*

*(4) $\bot \notin \Gamma$;*

*(5) $\neg A \in \Gamma$ ako i samo ako $A \notin \Gamma$;*

*(6) $A \wedge B \in \Gamma$ ako i samo ako $A \in \Gamma$ i $B \in \Gamma$;*

*(7) $A \vee B \in \Gamma$ ako i samo ako $A \in \Gamma$ ili $B \in \Gamma$;*

*(8) $A \to B \in \Gamma$ ako i samo ako $A \notin \Gamma$ ili $B \in \Gamma$;*

*(9) $A \leftrightarrow B \in \Gamma$ ako i samo ako je istovremeno $A \in \Gamma$ i $B \in \Gamma$ ili istovremeno*

$A \notin \Gamma$ *i* $B \notin \Gamma$*;*

*(10)* $\Gamma$ *je* $\Sigma$*-sistem.*

**Dokaz.**

**(1)** Nužnost slijedi iz Propozicije 2.15 pod (4). Obratno, neka je $\Gamma \vdash_\Sigma A$. Pretpostavimo suprotno, to jest $A \notin \Gamma$. Tada zbog maksimalnosti od $\Gamma$ slijedi $\mathfrak{C}\o\mathfrak{n}_\Sigma \Gamma \cup \{A\}$. Iz tvrdnje (15) Propozicije 2.15 slijedi $\Gamma \vdash_\Sigma \neg A$. Sada po tvrdnji (10) iz Propozicije 2.15 slijedi $\mathfrak{C}\o\mathfrak{n}_\Sigma \Gamma$.

**(2)** Neka je $A \in \Sigma$, to jest $\vdash_\Sigma A$. Po (2) iz Propozicije 2.15 formula A je izvediva iz bilo kojeg skupa formula. Dakle $\Gamma \vdash_\Sigma A$ pa po (1) slijedi $A \in \Gamma$.

**(3)** Kako je $\top$ valjana formula, to je $\vdash_\Sigma \top$ pa po (2) slijedi $\top \in \Gamma$.

**(4)** Ako je $\bot \in \Gamma$ onda je $\Gamma \vdash_\Sigma \bot$, a time i $\mathfrak{C}\o\mathfrak{n}_\Sigma \Gamma$ što je kontradikicija s maksimalnošću od $\Gamma$.

**(5)** Neka je $\neg A \in \Gamma$. Pretpostavimo suprotno, to jest $A \in \Gamma$. Sada po (10) iz Propozicije 2.15 slijedi da je $\Gamma$ inkonzistentan, što je kontradikcija s maksimalnošću od $\Gamma$. Dakle $A \notin \Gamma$. Obratno, neka vrijedi $A \notin \Gamma$. Sada po (14) iz Propozicije 2.15 slijedi da je skup $\Gamma \cup \{\neg A\}$ konzistentan. Po definiciji maksimalnog skupa slijedi $\neg A \in \Gamma$.

**(6)** Neka je $A \wedge B \in \Gamma$. Tada po (1) vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A \wedge B$. Pravilo izvoda

$$\frac{\emptyset}{(A \wedge B) \to A}$$

čuva istinitost pa vrijedi $\vdash_\Sigma (A \wedge B) \to A$. Dakle vrijedi $\{A \wedge B\} \vdash_\Sigma A$. Sada po (5) iz Propozicije 2.15 vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A$. Analogno zaključujemo $\Gamma \vdash_\Sigma B$. Sada po (1) zaključujemo $A \in \Gamma$ i $B \in \Gamma$. Obratno, neka je $\Gamma \vdash_\Sigma A$ i $\Gamma \vdash_\Sigma B$. Tada po (1) vrijedi $A \in \Gamma$ i $B \in \Gamma$. Pravilo izvoda

$$\frac{\emptyset}{(A \wedge B) \to (A \wedge B)}$$

čuva istinitost pa vrijedi $\vdash_\Sigma (A \land B) \to (A \land B)$. Stoga je $\Gamma \vdash_\Sigma A \land B$, a time i $A \land B \in \Gamma$.

**(7)** Neka vrijedi $A \lor B \in \Gamma$. Tada po (1) vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A \lor B$. Pretpostavimo suprotno, to jest da je $A \notin \Gamma$ i $B \notin \Gamma$. Sada po (5) vrijedi $\neg A \in \Gamma$ i $\neg B \in \Gamma$. Pravilo izvoda

$$\frac{\emptyset}{(\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)}$$

čuva istinitost pa je $\vdash_\Sigma (\neg A \land \neg B) \to \neg(A \lor B)$. Dakle, $\Gamma \vdash_\Sigma \neg(A \lor B)$ pa po (5) slijedi $A \lor B \notin \Gamma$, što je kontradikcija. Obratno, neka je $A \in \Gamma$ ili $B \in \Gamma$. Pretpostavimo da je $A \in \Gamma$. Pravilo izvoda

$$\frac{\emptyset}{A \to (A \lor B)}$$

čuva istinitost pa je $\vdash_\Sigma A \to (A \lor B)$. Dakle $\Gamma \vdash_\Sigma A \lor B$ pa je po (1) $A \lor B \in \Gamma$. Analogno se dokaže $A \lor B \in \Gamma$ u slučaju $B \in \Gamma$.

**(8)** Neka je $A \to B, A \in \Gamma$. Tada je po (6) $A \land (A \to B) \in \Gamma$ pa je po (1) $\Gamma \vdash_\Sigma A \land (A \to B)$. Nadalje, očito je $\{A \land (A \to B)\} \vdash_\Sigma B$. Sada po (5) iz Propozicije 2.15 slijedi $\Gamma \vdash_\Sigma B$, a time zbog (1) i $B \in \Gamma$. Obratno. Pretpostavimo suprotno. Neka je $A \to B \notin \Gamma$. Pokažimo da iz $A \in \Gamma$ ne slijedi $B \in \Gamma$. Po (5) vrijedi $\Gamma \vdash_\Sigma \neg(A \to B)$. Nadalje, lako se vidi da je $\{\neg(A \to B)\} \vdash_\Sigma A$ i $\{\neg(A \to B)\} \vdash_\Sigma \neg B$. Primjenom (5) iz Propozicije 2.15 slijedi $\Gamma \vdash_\Sigma A$ i $\Gamma \vdash_\Sigma \neg B$. Sada po (1) slijedi $A \in \Gamma$ i $\neg B \in \Gamma$. Pokazali smo da iz $A \in \Gamma$ ne slijedi $B \in \Gamma$, što je kontradikcija.

**(9)** Očito vrijedi $\{A \leftrightarrow B\} \vdash_\Sigma A \to B$ i $\{A \leftrightarrow B\} \vdash_\Sigma B \to A$ pa tvrdnja slijedi primjenom (8).

**(10)** Ekvivalentno s (2). ■

Sljedeći teorem je od velike važnosti. Naime, teorem tvrdi da svaki konzistentni skup formula ima proširenje koje je maksimalno. Zapišimo to formalno.

**Teorem 2.18 (Lindenbaumova lema)** *Neka je* $\mathfrak{Con}_\Sigma \Gamma$*. Tada postoji skup formula* $\Delta$ *takav da je* $\Gamma \subseteq \Delta$ *i* $\mathfrak{Max}_\Sigma \Delta$*.*

**Dokaz.** Dokaz ćemo provesti kontrukcijom skupa $\Delta$. Skup svih formula je prebrojiv pa postoji bijekcija sa skupa $\mathbb{N}$ u skup formula. Tako dobivamo niz $(A_n)$ svih formula. Za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ induktivno ćemo definirati skup formula $\Delta$ na način:

(1) $\Delta_0 = \Gamma$;

$$(2)\ \Delta_n = \left\{ \begin{array}{cc} \Delta_{n-1} \cup \{A_n\}, & \text{ako } \mathfrak{Con}_\Sigma \Delta_{n-1} \cup \{A_n\} \\ \Delta_{n-1}, & \text{inače} \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

Očito je da je skup $\Delta_n$ konzistentan za svaki $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Definirajmo sada skup $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$. Skup $\Delta$ očito sadrži $\Gamma$. Preostaje pokazati da je $\Delta$ maksimalan. Dokažimo sljedeće dvije tvrdnje:

**Tvrdnja 1.** Za svaki $k \in \mathbb{N}$ vrijedi $A_k \in \Delta_k$ čim je $A_k \in \Delta$.
Naime, neka je $A_k \in \Delta$. Kako je $\Delta = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Delta_n$ to postoji $l \in \mathbb{N}$ takav da je $A_k \in \Delta_l$. Ako je $l \leq k$ onda očito vrijedi $\Delta_l \subseteq \Delta_k$ pa je $A_k \in \Delta_k$. Pretpostavimo $k < l$. Kad bi bilo $A_k \notin \Delta_k$ iz konstrukcije $\Delta_k$ slijedilo bi da skup $\Delta_{k-1} \cup \{A_k\}$ nije konzistentan, a kako je $\Delta_{k-1} \cup \{A_k\} \subseteq \Delta_l$ slijedi da je i $\Delta_l$ inkonzistentan, što je kontradikcija. Dakle $A_k \in \Delta_k$.

**Tvrdnja 2.** Za svaki konačan $\Delta' \subseteq \Delta$ postoji $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tako da je $\Delta' \subseteq \Delta_n$.
Neka je $\Delta' \subseteq \Delta$ konačan. Tada postoji $n = max\{l \in \mathbb{N} \cup \{0\} : A_l \in \Delta'\}$.

Pokažimo $\Delta^{'} \subseteq \Delta_n$. Neka je $A \in \Delta^{'}$. Tada je $A = A_l$ za neki $l \in \{1, \ldots, n\}$. Po Tvrdnji 1. slijedi $A_l \in \Delta_l \subseteq \Delta_n$. Dakle $\Delta^{'} \subseteq \Delta_n$.

**Tvrdnja 3.** Skup $\Delta$ je konzistentan.

Naime, pretpostavimo suprotno, to jest da $\Delta$ nije konzistentan. Po (13) iz Propozicije 2.15 postoji konačan $\Delta^{'} \subseteq \Delta$ koji nije konzistentan. Sada po Tvrdnji 2. postoji $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tako da je $\Delta^{'} \subseteq \Delta_n$. Po (12) iz Propozicije 2.15 slijedi da $\Delta_n$ nije konzistentan, što je kontradikcija. Dakle $\Delta$ je konzistentan.

Konačno, pokažimo da iz $\mathfrak{Con}_\Sigma \Delta \cup \{A\}$ slijedi $A \in \Delta$. Neka je $\mathfrak{Con}_\Sigma \Delta \cup \{A\}$. Kako se sve formule nalaze u nizu $(A_n)$ to postoji $n \in \mathbb{N}$ tako da je $A = A_n$. Prema (12) iz Propozicije2.15 slijedi $\mathfrak{Con}_\Sigma \Delta_{n-1} \cup \{A_n\}$. Sada po (2.1) slijedi $\Delta_n = \Delta_{n-1} \cup \{A_n\}$. Kako je $A_n \in \Delta_n$ slijedi $A \in \Delta$. Time je teorem u potpunosti dokazan. ■

Sljedeći teorem daje nam karakterizaciju izvedivosti formule iz nekog skupa formula.

**Teorem 2.19** *Vrijede sljedeće tvrdnje:*

*(1) formula $A$ je izvediva iz skupa formula $\Gamma$ ako i samo ako je $A \in \Delta$ za svaki maksimalan skup formula $\Delta$ za koji je $\Gamma \subseteq \Delta$;*

*(2) formula $A$ je teorem sistema $\Sigma$ ako i samo ako je $A \in \Delta$ za svaki maksimalan skup formulan $\Delta$.*

**Dokaz. (1)** Pretpostavimo $\Gamma \vdash_\Sigma A$. Neka je $\Delta$ maksimalan i neka je $\Gamma \subseteq \Delta$. Prema (6) iz Propozicije 2.15 slijedi $\Delta \vdash_\Sigma A$, zatim iz (1) Propozicije 2.17 slijedi $A \in \Delta$. Obratno. Pretpostavimo suprotno, neka je $\Gamma \nvdash_\Sigma A$. Tada po (14) iz Propozicije 2.15 slijedi da je skup $\Gamma \cup \{\neg A\}$ konzistentan. Nadalje, skup $\Gamma \cup \{\neg A\}$ ima maksimalno proširenje $\Delta$. Uočimo da vrijedi $\neg A \in \Delta$ pa po Propoziciji 2.17 slijedi $\Delta \vdash_\Sigma \neg A$. Uočimo da je skup $\Delta$ maksimalno proširenje i od $\Gamma$ te $\Delta \vdash_\Sigma A$ i $\Delta \vdash_\Sigma \neg A$, što je kontradikcija s konzistentnošću od $\Delta$.

**(2)** Tvrdnja izravno slijedi iz (1) kada uzmemo $\Gamma = \emptyset$. $\blacksquare$

# Poglavlje 3

# Standardni modeli

U Definiciji 2.4 nismo definirali istinitost formule $\Box A$. Definicijom istinitosti za formulu $\Box A$ na neki način određujemo u kojoj će klasi modela određene formule biti valjane. Prvo navodimo vrstu modela koju je prvi definirao Saul Kripke u kasnim 1950-ima.

**Definicija 3.1** *Uređen par $(W, R)$, pri čemu je $W$ proizvoljan neprazan skup te $R \subseteq W \times W$ proizvoljna binarna relacija, nazivamo **Kripkeov okvir** ili kratko **okvir**. Elemente skupa $W$ nazivamo **svjetovima**, a relaciju $R$ **relacijom dosežnosti**.*

**Definicija 3.2** ***Standardni model*** *ili* ***Kripkeov model*** *je uređena trojka $(W, R, \Vdash)$ pri čemu je $(W, R)$ Kripkeov okvir i $\Vdash$ binarna relacija sa skupa $W$ u skup svih formula koja ima sljedeća svojstva:*

1) $w \nVdash \bot$

2) $w \Vdash \neg A$ *ako i samo ako* $w \nVdash A$

3) $w \Vdash A \wedge B$ *ako i samo ako* $w \Vdash A$ *i* $w \Vdash B$

4) $w \Vdash A \vee B$ *ako i samo ako* $w \Vdash A$ *ili* $w \Vdash B$

5) $w \Vdash A \to B$ *ako i samo ako* $w \nVdash A$ *ili* $w \Vdash B$

6) $w \Vdash A \leftrightarrow B$ *ako i samo ako je* $w \Vdash A$ *ekvivalentno s* $w \Vdash B$

7) $w \Vdash \Box A$ *ako i samo ako za svaki* $v \in W$ *iz* $wRv$ *slijedi* $w \Vdash A$

*Elemente skupa* $W$ *nazivamo* ***svjetovi****. Za svijet* $\beta \in W$ *kažemo da je* ***dosežan*** *iz svijeta* $\alpha \in W$ *i pišemo* $\alpha R \beta$ *ako vrijedi* $(\alpha, \beta) \in R$*. Relaciju* $\Vdash$ *nazivamo relacijom* ***forsiranja****.*

**Definicija 3.3** *Neka je* $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ *standardni model. Kažemo da je formula* $A$ ***istinita u svijetu*** $\alpha$ ***modela*** $\mathcal{M}$ *ako je* $\alpha \Vdash A$*. Kažemo da je formula* $A$ ***istinita u modelu*** $\mathcal{M}$ *i pišemo* $\mathcal{M} \models A$ *ako za svaki* $w \in \mathcal{M}$ *vrijedi* $w \Vdash A$*. Za formulu* $A$ *kažemo da je* ***valjana*** *ako za sve standardne modele* $\mathcal{M}$ *vrijedi* $\mathcal{M} \models A$*.*

**Napomena 3.4** *Uočimo da smo Definicijom 2.4 definirali i istinitost modalnih formula. Dakle formula* $\Box A$ *je istinita u svijetu* $\alpha$ *modela* $\mathcal{M}$ *ako je formula* $A$ *istinita u svakom svijetu* $\beta$ *modela* $\mathcal{M}$ *koji je dosežan iz* $\alpha$*. Kako je formula* $\Diamond A$ *pokrata za formulu* $\neg \Box \neg A$ *slijedi da je formula* $\Diamond A$ *istinita u svijetu* $\alpha$ *ako i samo ako postoji svijet* $\beta$ *modela* $\mathcal{M}$ *takav da je formula* $A$ *istinita u njemu i uz to je* $\beta$ *dosežan iz* $\alpha$*.*

**Primjer 3.5** *Ako simbol* $\Box$ *shvatimo kao tvrdnju "Uvijek će vrijediti", onda je prirodno skup* $W$ *definirati kao skup točaka u vremenu (na primjer* $\mathbb{R}$*), a relaciju* $R$ *kao standardni uređaj na skupu* $\mathbb{R}$*. Dakle,* $wRv$ *označava da je trenutak* $v$ *kasniji od trenutka* $w$*. Formula* $\Box A$ *je istinita u trenutku* $w$ *ako je formula* $A$ *istinita u svakom trenutku nakon trenutka* $w$*.*

Promotrimo sljedeće sheme formula:

D. $\Box A \to \Diamond A$

T. $\Box A \to A$

B. $A \to \Box\Diamond A$

4. $\Box A \to \Box\Box A$

5. $\Diamond A \to \Box\Diamond A$

**Teorem 3.6** *Nijedna od shema D,T,B,4,5 nije valjana.*

**Dokaz.** Konstruirajmo protumodel za shemu D. Neka je $W = \{\alpha\}$ i $R = \emptyset$, S skup svih formula jezika te P skup svih atomarnih formula. Za svaku relaciju iz skupa W u skup P postoji jedinstveno proširenje $\Vdash \subseteq W \times S$ koje ima svojstva iz Definicije 3.2. Neka je $\Vdash$ jedinstveno proširenje relacije $\emptyset \subseteq W \times P$. Dakle, svaka atomarna formula je neistinita. Definirajmo $\mathcal{M} := (W, R, \Vdash)$ i odaberimo proizvoljnu atomarnu formulu $\mathbb{P}$. Očito je $\mathcal{M}$ standardni model i vrijedi $\alpha \Vdash \Box\mathbb{P}$ i $\alpha \nVdash \Diamond\mathbb{P}$. Naime, $\alpha \Vdash \Box\mathbb{P}$ je trivijalno ispunjeno budući da ne postoji $\beta \in W$ takav da je $\alpha R \beta$. Nadalje, ne postoji $\beta \in W$ takav da je $\alpha R \beta$ i $\beta \Vdash \mathbb{P}$. Dakle, $\mathcal{M}$ je traženi protumodel.
Uočimo da je $\mathcal{M}$ protumodel i za shemu T budući da je $\alpha \Vdash \Box\mathbb{P}$ trivijalno ispunjeno te vrijedi $\alpha \nVdash A$.
Konstruirajmo protumodel za shemu B. Neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ pri čemu je $W = \{\alpha, \beta\}$ , $R = \{(\alpha, \beta)\}$, i $\Vdash \subseteq W \times S$ relacija takva da vrijede uvjeti iz Definicije 3.2 te da za svaku atomarnu formulu $\mathbb{P}$ vrijedi $\alpha \Vdash \mathbb{P}$ i $\beta \nVdash \mathbb{P}$. Očito za svijet $\alpha$ vrijedi $\alpha \Vdash \mathbb{P}$, no $\alpha \nVdash \Box\Diamond\mathbb{P}$. Doista, za svijet $\beta$ vrijedi $\alpha R \beta$ i ne postoji $\gamma \in W$ tako da vrijedi $\beta R \gamma$ i $\gamma \Vdash \mathbb{P}$.
Pokažimo da shema 4 nije valjana. Neka je $\mathcal{M}$ =(W,R,$\Vdash$) pri čemu je $W = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $R = \{(\alpha, \beta), (\alpha, \gamma)\}$ te $\Vdash \subseteq W \times S$ takva da vrijede svojstva iz Definicije 3.2 te da za svaku atomarnu formulu $\mathbb{P}$ vrijedi $\alpha \nVdash \mathbb{P}, \beta \Vdash \mathbb{P}$ te $\gamma \nVdash \mathbb{P}$. Neka je $\mathbb{P}$ proizvoljna atomarna formula. Kako je $\beta$ jedini svijet takav da je $\alpha R \beta$ te vrijedi $\beta \Vdash \mathbb{P}$, zaključujemo da vrijedi $\alpha \Vdash \Box\mathbb{P}$. Nadalje, zbog $\beta R \gamma$ te $\gamma \nVdash \mathbb{P}$ vrijedi $\beta \nVdash \Box\mathbb{P}$. Time je pokazano $\alpha \nVdash \Box\Box\mathbb{P}$. Dakle, $\mathcal{M}$ je

protumodel za shemu 4.

Konačno, pokažimo da shema 5 također nije valjana. Definirajmo $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ pri čemu je $W = \{\alpha, \beta_1, \beta_2\}$, $R = \{(\alpha, \beta_1), (\alpha, \beta_2)\}$ te $\Vdash \subseteq W \times S$ relacije takva da zadovoljava uvjete it Definicije 3.2 i da za svaku atomarnu formulu $\mathbb{P}$ vrijedi $\alpha \nVdash \mathbb{P}$, $\beta_1 \Vdash \mathbb{P}$ te $\beta_2 \nVdash \mathbb{P}$. Neka je $\mathbb{P}$ proizvoljna atomarna formula. Kako vrijedi $\alpha R \beta_1$ te $\beta \Vdash \mathbb{P}$ zaključujemo da je $\alpha \Vdash \Diamond\mathbb{P}$. Uočimo da ne postoji $\gamma \in W$ takav da je $\beta_2 R \gamma$, stoga vrijedi $\beta_2 \nVdash \Diamond\mathbb{P}$. Sada iz $\alpha R \beta_2$ slijedi $\alpha \nVdash \Box\Diamond\mathbb{P}$. Time je teorem u potpunosti dokazan.

■

Teorem 3.6 tvrdi da za sheme D, T, B, 4 i 5 postoje modeli u kojima one nisu istinite. Prirodno se postavlja pitanje postoje li neke nama zanimljive klase modela u kojima će navedene sheme biti istinite? Takvo razmatranje nas navodi na sljedeću definiciju.

**Definicija 3.7** *Neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ standardni model. Za relaciju $R$ kažemo da je:*

*(1)* ***serijska*** *ako za svaki $\alpha \in W$ postoji $\beta \in W$ tako da je $\alpha R \beta$*

*(2)* ***refleksivna*** *ako za svaki $\alpha \in W$ vrijedi $\alpha R \alpha$*

*(3)* ***simetrična*** *ako za svaki $\alpha \in W$ i $\beta \in W$ takve da je $\alpha R \beta$ vrijedi $\beta R \alpha$*

*(4)* ***tranzitivna*** *ako za sve $\alpha, \beta, \gamma \in W$ takvi da je $\alpha R \beta$ i $\beta R \gamma$ vrijedi $\alpha R \gamma$*

*(5)* ***euklidska*** *ako za sve $\alpha, \beta, \gamma \in W$ takvi da je $\alpha R \beta$ i $\alpha R \gamma$ vrijedi $\beta R \gamma$*

*Za model $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ kažemo da je* ***serijski*** *(refleksivan, simetričan, tranzitivan, euklidski) ako je relacija $R$* ***serijska*** *(refleksivna, simetrična, tranzitivna, euklidska). Za klasu $\mathcal{C}$ standardnih modela kažemo da je* ***serijska*** *(refleksivna, simetrična, tranzitivna, euklidska) ako je svaki model u $\mathcal{C}$ serijski (refleksivan, simetričan, tranzitivan, euklidski). Za formulu $A$ kažemo da je* ***valjana u klasi*** *$\mathcal{C}$ standardnih modela ako je istinita u svakom modelu klase $\mathcal{C}$.*

**Teorem 3.8** *Vrijedi sljedeće:*

*(1) shema D je valjana u serijskoj klasi standardnih modela;*

*(2) shema T je valjana u refleksivnoj klasi standardnih modela;*

*(3) shema B je valjana u simetričnoj klasi standardnih modela;*

*(4) shema 4 je valjana u tranzitivnoj klasi standardnih modela;*

*(5) shema 5 je valjana u euklidskoj klasi standardnih modela;*

**Dokaz.** (1) Neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ proizvoljan model u serijskoj klasi standardnih modela i neka je $\alpha \in W$ proizvoljan svijet u W. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \Vdash \Box A$. Kako je $\mathcal{M}$ serijski model to postoji $\beta \in W$ tako da je $\alpha R \beta$. Dakle vrijedi $\beta \Vdash A$ a time i $\alpha \Vdash \Diamond A$. Zaključujemo $\alpha \Vdash \Box A \to \Diamond A$ za svaki $\alpha \in W$. Dakle $\mathcal{M} \models \Box A \to \Diamond A$.
(2) Neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ refleksivni standardni model, $\alpha \in W$ proizvoljan svijet. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \Vdash \Box A$. Zbog refleksivnosti od $\mathcal{M}$ vrijedi $\alpha R \alpha$. Dakle vrijedi $\alpha \Vdash A$ a time i $\mathcal{M} \models \Box A \to A$.
(3) Neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ simetrični standardni model, $\alpha \in W$ proizvoljan svijet u W i pretpostavimo da vrijedi $\alpha \Vdash A$. Neka je $\beta \in W$ proizvoljan svijet u W takav da vrijedi $\alpha R \beta$. Treba pokazati $\beta \Vdash \Diamond A$. Kako je relacija R simetrična to vrijedi $\beta R \alpha$. Sada zbog $\alpha \Vdash A$ zaključujemo da vrijedi $\beta \Vdash \Diamond A$. Dakle za svaki $\beta \in W$ takav da je $\alpha R \beta$ vrijedi $\beta \Vdash \Diamond A$. Stoga je $\alpha \Vdash \Box \Diamond A$, a time i $\alpha \Vdash A \to \Box \Diamond A$.
(4) Neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ tranzitivni standardni model. Odaberimo proizvoljan $\alpha \in W$ i pretpostavimo $\alpha \Vdash \Box A$. Pokažimo da vrijedi $\alpha \Vdash \Box\Box A$. Neka je $\beta \in W$ proizvoljan svijet u W takav da vrijedi $\alpha R \beta$ i neka je $\gamma \in W$ proizvoljan svijet u W takav da je $\beta R \gamma$. Zbog tranzitivnosti relacije R slijedi $\alpha R \gamma$. Kako je $\alpha \Vdash \Box A$ i $\alpha R \gamma$ to je $\gamma \Vdash A$. Kako je $\gamma$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $\beta \Vdash \Box A$. Konačno, zbog proizvoljnosti od $\beta$ pokazali smo $\alpha \Vdash \Box\Box A$, a time i $\alpha \Vdash \Box A \to \Box\Box A$.

(5) Neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ euklidski standardni model. Odaberimo proizvoljno $\alpha \in W$ i pokažimo $\alpha \Vdash \Diamond A \to \Box\Diamond A$. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \Vdash \Diamond$ te odaberimo proizvoljan $\beta \in W$ takav da je $\alpha R \beta$. Zbog $\alpha \Vdash \Diamond A$ postoji $\gamma \in W$ tako da je $\alpha R \gamma$ i $\gamma \Vdash A$. Relacija R je euklidska pa vrijedi $\beta R \gamma$, a time i $\beta \Vdash \Diamond A$. Kako je $\beta$ bio proizvoljan to vrijedi $\alpha \Vdash \Box\Diamond A$, a time i $\alpha \Vdash \Diamond A \to \Box\Diamond A$. ■

## 3.1 Sistem K

Pretpostavimo da se u formuli A pojavljuju propozicijske varijable $p_1, \dots, p_n$. Tada formulu A označavamo i s $A(p_1, \dots, p_n)$. Neka su $B_1, \dots, B_n$ proizvoljne formule. Tada s $A[B_1/p_1, \dots, B_n/p_n]$ označavamo formulu koja je nastala iz formule A zamjenom propozicijskih varijabli $p_1, \dots, p_n$ formulama $B_1, \dots, B_n$ redom. Navedimo sad definiciju sistema K.

**Definicija 3.9** ***Sistem K*** *zadan je svojim shemama aksioma i dvama pravilima izvoda. Sheme aksioma su:*
*(A1)* $A[B_1/p_1, \dots, B_n/p_n]$*, pri čemu je* $A(p_1, \dots, p_n)$ *valjana formula logike sudova i* $B_1, \dots, B_n$ *proizvoljne formule modalne logike;*
*(K)* $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.
*Pravila izvoda sistema K su:*

$$\frac{A}{\Box A} \ \textit{(nužnost RN)} \qquad\qquad \frac{A \quad A \to B}{B} \ \textit{(modus ponens MP)}$$

*Sasvim analogno kao kod sistema RS definiraju se pojmovi dokaza, izvoda i teorema.*

**Napomena 3.10** *Postoje i alternativne metode zadavanja sistema K. Naime, neki autori za aksiom (A1) stavljaju samo valjane formule logike sudova,* *ali onda se doda pravilo izvoda:*

$$\frac{A(p_1, \ldots, p_n)}{A[B_1/p_1, \ldots, B_n/p_n]} \quad \textit{(uniformna supstitucija) US}$$

*Može se pokazati svaka formula koja je dokaziva u ovakvom sistemu dokaziva je i u sistemu iz gornje definicije, i obratno.*

**Primjer 3.11** *Konstrukcijom dokaza pokažimo da je za formula* $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$ *teorem sistema K.*

| | |
|---|---|
| *(1)* $A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$ | *(A1)* |
| *(2)* $\Box(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B)))$ | *(1), RN* |
| *(3)* $\Box(A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))) \rightarrow (\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B)))$ | *K* |
| *(4)* $\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B))$ | *(2),(3) MP* |
| *(5)* $\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$ | *K* |
| *(6)* $(\Box A \rightarrow \Box(B \rightarrow (A \wedge B))) \rightarrow ((\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))) \rightarrow (\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))))$ | *(A1)* |
| *(7)* $(\Box(B \rightarrow (A \wedge B)) \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))) \rightarrow (\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B)))$ | *(4),(6) MP* |
| *(8)* $\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))$ | *(5),(7) MP* |
| *(9)* $(\Box A \rightarrow (\Box B \rightarrow \Box(A \wedge B))) \rightarrow ((\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B))$ | *(A1)* |
| *(10)* $(\Box A \wedge \Box B) \rightarrow \Box(A \wedge B)$ | *(8),(9) MP* |

Primijetimo da ako su A i B formule sistema K da je onda i $A \wedge B$ formula sistema K. Naime, dokažimo formulu $A \wedge B$:

(1) A pretpostavka

(2) B pretpostavka

(3) $A \to (B \to (A \wedge B))$ (A1)

(4) $B \to (A \wedge B)$ (1),(3) MP

(5) $A \wedge B$ (2),(4) MP

Primijetimo da smo upravo pokazali da vrijedi sljedeće pravilo izvoda:

$$\frac{\mathrm{A} \qquad \mathrm{B}}{A \wedge B}$$

Ovakvo pravilo nazivamo **introdukcija veznika** $\wedge$ i označavamo s $(\wedge I)$. Ovo razmatranje navodi nas na sljedeću definiciju.

**Definicija 3.12** *Za pravilo izvoda*

$$\frac{A_1 \ldots, A_n}{A}$$

*kažemo da je* ***dopustivo*** *u sistemu* $\Sigma$ *ako* $\vdash_\Sigma A_1, \ldots, \vdash \Sigma A_n$ *povlači* $\vdash_\Sigma A$.

Dopustiva pravila izvoda možemo koristiti u dokazima teorema. Navedimo sada primjer jednog dopustivog pravila izvoda za sistem K:

**(DR1)**

$$\frac{A \to B}{\Box A \to \Box B}$$

(1) $A \to B$ pretpostavka

(2) $\Box(A \to B)$ (1), RN

(3) $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$ K

(4) $\Box A \to \Box B$ (2),(3), MP

Navedimo sada dva važna teorema sistema K.

**(K1)**: $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$

**(K2)**: $(\Box A \wedge \Box B) \to \Box(A \wedge B)$

Teorem (K2) dokazali smo u Primjeru 3.11 pa ćemo navesti samo dokaz teorema (K1).

| | |
|---|---|
| (1) $\Box(A \wedge B)$ | pretpostavka |
| (2) $(A \wedge B) \to B$ | (A1) |
| (3) $\Box(A \wedge B) \to \Box B$ | (DR1) |
| (4) $(A \wedge B) \to A$ | (A1) |
| (5) $\Box(A \wedge B) \to \Box A$ | (DR1) |
| (6) $(\Box(A \wedge B) \to \Box B) \to ((\Box(A \wedge B) \to \Box A) \to$ $(\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)))$ | (A1) |
| (7) $(\Box(A \wedge B) \to \Box A) \to (\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B))$ | (3),(6), MP |
| (8) $\Box(A \wedge B) \to (\Box A \wedge \Box B)$ | (5),(7), MP |
| (9) $\Box A \wedge \Box B$ | (1),(8), MP |

**Teorem 3.13 (Teorem adekvatnosti za sistem K)** *Ako je $\vdash_K F$ onda je $F$ valjana formula.*

**Dokaz.** Treba dokazati da su aksiomi sistema K valjane formule te da pravila izvoda čuvaju istinitost iz čega će tvrdnja slijediti indukcijom po duljini dokaza. Sve tautologije u novom jeziku su očito valjane. Pokažimo da je aksiom K valjana formula. Neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ proizvoljni standardni model i $\alpha \in W$ proizvoljni svijet u W. Pokažimo da vrijedi $\alpha \Vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$. Neka je $\alpha \Vdash \Box(A \to B)$. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \Vdash \Box A$. Treba pokazati $\alpha \Vdash \Box B$. Odaberimo proizvoljan $\beta \in W$ tako da je $\alpha R \beta$. Iz $\alpha \Vdash \Box(A \to B)$ slijedi $\beta \Vdash A \to B$ te iz $\alpha \Vdash \Box A$ slijedi $\beta \Vdash A$. Sada iz $\beta \Vdash A \to B$ i $\beta \Vdash A$ slijedi $\beta \Vdash B$. Kako je $\beta$ bio proizvoljan zaključujemo da vrijedi $\alpha \Vdash \Box B$. Pokazali smo da iz pretpostavke $\alpha \Vdash \Box A$ slijedi $\alpha \Vdash \Box B$, dakle vrijedi $\alpha \Vdash \Box A \to \Box B$, a time i $\alpha \Vdash \Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$. Nadalje, iz Definicije 3.2 pod 5) očito slijedi da pravilo modus ponens čuva istinitost. Pokažimo da pravilo nužnosti čuva istinitost. Neka je A valjana formula i $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ proizvoljni standardni model. Tada za svaki $\alpha \in W$ vrijedi $\alpha \Vdash A$ pa posebno vrijedi za svaki $\beta \in W$ za koji je $\alpha R \beta$. Dakle, za svaki $\alpha \in W$ vrijedi $\alpha \Vdash \Box A$. Dokaz teorema sad slijedi primjenom indukcije po duljini dokaza. ■

**Teorem 3.14 (Teorem potpunosti sistema K)** *Neka je $F$ valjana formula. Tada je $\vdash_K F$.*

**Definicija 3.15** *Za skup formula $S$ kažemo da je* ***konzistentan*** *ako ne postoji formula $A$ takva da vrijedi $S \vdash_K A$ i $S \vdash_K \neg A$.*

**Napomena 3.16** *Definicija konzistentosti u ovom poglavlju različita je od definicije u prošlom poglavlju, ali koristeći Korolar 1.11, definicije izvoda i izvodljivosti te tvrdnju (10) Teorema 2.15 može se pokazati da su te definicije ekvivalentne.*

Teorem adekvatnosti za sistem K nam govori da su teoremi sistema K istinite formule u bilo kojem standardnom modelu bez obzira na definiciju relacije R. Nadalje, teorem potpunosti nam govori da se svaka valjana formula može dokazati unutar sistema K. Dakle, sistem K je najopćenitij konzistentni sistem u klasi svih standardnih modela.

## 3.2 Sistem T

Ranije smo pokazali da formula $\Box A \to A$ nije valjana. Po teoremu potpunosti za sistem K slijedi da ona nije teorem sistema K. Ako sistemu K dodamo formulu $\Box A \to A$ kao novi aksiom, dobivamo "jači" sistem u smislu da ako je neka formula dokaziva u sistemu K da je dokaziva i u novom sistemu. Operator $\Box$ zvali smo nužnost. Dakle, formulu $\Box A$ čitali smo "Nužno je A". Novi aksiom bismo tada interpretirali kao "Što je nužno, to onda i jest". Dodavanjem tog novog aksioma zapravo prihvaćamo da je takva formula istinita. Definirajmo sada formalnije takav sistem.

**Definicija 3.17** ***Sistem T*** *zadan je svojim shemama aksioma i dvama pravilima izvoda. Sheme aksioma su:*
*(A1)* $A[B_1/p_1, \ldots, B_n/p_n]$*, pri čemu je* $A(p_1, \ldots, p_n)$ *valjana formula logike sudova i* $B_1, \ldots, B_n$ *proizvoljne formule modalne logike;*
*(K)* $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.
*(T)* $\Box A \to A$
*Pravila izvoda sistema K su:*

$$\frac{A}{\Box A} \quad \textit{(nužnost RN)} \qquad\qquad \frac{A \qquad A \to B}{B} \quad \textit{(modus ponens MP)}$$

*Sasvim analogno kao kod sistema RS definiraju se pojmovi dokaza, izvoda i teorema.*

Budući da smo u dokazivanju dupustivosti pravila izvoda **DR1** koristili alate sistema K, dokaz da je **DR1** dopustivo i u sistemu T potpuno je jednak kao kod sistema K.
Zanimljivo je postaviti pitanje postoje li neki teoremi sistema T koji nisu teoremi u sistemu K. Prirodno je očekivati da će se u dokazivanju takvog teorema pojaviti akisom **T**. Navedimo primjer takvog teorema:

**(T1)** $A \to \Diamond A$.

| | |
|---|---|
| (1) $\Box(\neg A) \to (\neg A)$ | T |
| (2) $(\Box(\neg A) \to (\neg A)) \to (A \to \neg\Box(\neg A))$ | (A1) |
| (3) $A \to \neg\Box(\neg A)$ | (1),(2), MP |
| (4) $A \to \Diamond A$ | (3), Definicija $\Diamond$ |

Sjetimo se da smo prilikom definicije alfabeta formulu $\Diamond A$ definirali kao $\neg\Box\neg A$, dakle, T1 je doista teorem sistema T.
Kontruirajmo sada model u kojem formula $A \to \Diamond A$ neće biti istinita. Neka je $W = \{\alpha\}$, $R = \emptyset$. Odaberimo proizvoljnu propozicijsku varijablu $\mathbb{P}$ i definirajmo $\alpha \Vdash \mathbb{P}$. Pretpostavimo da je $A \to \Diamond A$ teorem sistema K. Tada je formula $\mathbb{P} \to \Diamond\mathbb{P}$ istinita u svijetu $\alpha$, to jest $\alpha \Vdash \mathbb{P} \to \Diamond\mathbb{P}$. Po definiciji istinosti za formule oblika $A \to B$ slijedi da je $\alpha \Vdash \Diamond\mathbb{P}$. Dakle postoji svijet $\beta \in W$ takav da je $\alpha R\beta$ i $\beta \Vdash \Diamond\mathbb{P}$, što je kontradikcija jer je $R = \emptyset$.
S obzirom da su svi teoremi sistema K ujedno i teoremi sistema T, uz gornje razmatranje sistem T možemo nazvati **pravim proširenjem** sistema K.

Naravno, postoje neki modeli u kojima će sve formule sistema T biti istinite. Prema Teoremu 3.8 aksiom **T** je valjana formula u klasi svih refleksivnih modela. Pravila izvoda sistema T jednaka su kao pravila izvoda sistema K i već smo pokazali da čuvaju istinitost. Imajući na umu Teorem 3.8 možemo zaključiti da su sve formule sistema T valjane u klasi svih refleksivnih modela. Sada bez dokaza navodimo teorem potpunosti za sistem T.

**Teorem 3.18 (Teorem potpunosti za sistem T)** *Neka je $A$ proizvoljna formula i $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ standardni model, pri čemu je $R$ refleksivna relacija. Formula $A$ je istinita u modelu $\mathcal{M}$ ako i samo ako je teorem sistema T.*

## 3.3 Sistem D

Zanimljivo je razmotriti možemo li operator $\Box$ intuitivno shvatiti kao "obavezu". Tada bi nam formula $\Box A$ predstavljala rečenicu: "Obavezno je A", a formula $\Diamond A$ rečenicu: "Dopušteno je A". U takvom shvaćanju bi nam imalo smisla formulu $\Box A \to \Diamond A$ smatrati istinom. Dakle, što je obavezno to je i dopušteno. Dodamo li sistemu K novi aksiom:

**(D)** $\Box A \to \Diamond A$,

dobivamo novi sistem kojeg nazivamo **Sistem D**. U prošlim razmatranjima dokazali smo Teorem 3.6 koji između ostalog tvrdi da je akisom **D** nevaljala formula. Dakle nije teorem sistema K. Kao i kod sistema T, morat ćemo suziti klasu standardnih modela u kojima će aksiom **D** biti valjana formula, no već smo Teoremom 3.8 pokazali da je riječ o klasi serijskih modela. Primijetimo da smo u dokazu Teorema 3.6 konstruirali protumodel za shemu **D** koji nije serijski.

Navedimo sada primjer teorema u sistemu D koji nije teorem sistema K.

**Primjer 3.19** ***(D1)*** $\Diamond(A \to A)$.

| | |
|---|---|
| *(1)* $A \to A$ | *(A1)* |
| *(2)* $\Box(A \to A)$ | *(1), RN* |
| *(3)* $\Box(A \to A) \to \Diamond(A \to A)$ | *(D)* |
| *(4)* $\Diamond(A \to A)$ | *(2),(3), MP* |

**Napomena 3.20** *U gornjim razmatranjima uveli smo aksiom **D**, dok smo za formulu D1 pokazali da je teorem sistema D. Zanimljivo je to što smo mogli provesti i alternativnu aksiomatizaciju sistema D. Umjesto aksioma **D** možemo uvesti aksiom D1 te se može pokazati da će teda aksiom **D** biti teorem sistema D1.*

Zanimljivo je sada promotriti odnos sitema T i sistema D. Nije teško dokazati da je **D** teorem sistema T. Naime, provedimo taj dokaz:

| | |
|---|---|
| (1) $\Box A \to A$ | T |
| (2) $A \to \Diamond A$ | T1 |
| (3) $(\Box A \to A) \to ((A \to \Diamond A) \to (\Box A \to \Diamond A))$ | (A1) |
| (4) $(A \to \Diamond A) \to (\Box A \to \Diamond A)$ | (1),(3), MP |
| (5) $\Box A \to \Diamond A$ | (2),(4), MP |

Dakle, dodatni aksiom sistema D je teorem unutar sistema T. To nam govori da je svaki teorem sistema D ujedno i teorem sistema T. Pokazali smo da je sistem D pravo proširenje sistema K. Dakle sistem D se nalazi između sistema K i sistema T. Pod "između" mislimo na to da je sistem D proširenje sistema K i da je sistem T proširenje sistema D. Kasnije ćemo pokazati da je sistem T pravo proširenje sistema D. Prvo bez dokaza navodimo teorem potpunosti sistem D.

**Teorem 3.21 (Teorem potpunosti za sistem D)** *Neka je $A$ proizvoljna formula i $\mathcal{M}$ serijski standardni model. Formula $A$ je istinita u modelu $\mathcal{M}$ ako i samo ako je teorem sistema D.*

Konstruirajmo sada serijski model $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ u kojemu aksiom **T** neće biti valjana formula. Neka je $W = \{\alpha, \beta\}$, $R = \{(\alpha, \beta), (\beta, \alpha)\}$. Neka je $\mathbb{P}$ proizvoljna atomarna formula. Definirajmo $\alpha \nVdash \mathbb{P}$ i $\beta \Vdash \mathbb{P}$. Budući da je $\beta \Vdash \mathbb{P}$ to za svijet $\alpha$ vrijedi $\alpha \Vdash \Box\mathbb{P}$. Međutim, ne vrijedi $\alpha \Vdash A$, dakle ne vrijedi $\alpha \Vdash \Box A \to A$, što znači da shema **T** nije istinita u ovakvom modelu. Kako je $\mathcal{M}$ serijski model i **T** nije istinita u $\mathcal{M}$ po teoremu potounosti za sistem D slijedi da **T** nije teorem sistema D. Time smo pokazali da je sistem T pravo proširenje sistema D. Sada grubo govoreći možemo reći da je sistem D "strogo između" sistema K i sistema T.

**Napomena 3.22** *Primijetimo da je refleksivan model ujedno i serijski, ali da su teoremi od D ujedno i teoremi od T. Ovakav odnos modela i teorema može biti zbunjujuć. Naime, kod sistema D, klasa modela u kojima su teoremi sistema D valjane formule šira je od klase modela za sistem T. Dakle, ako imamo širu klasu modela, tada je manji broj formula koje su istinite u svim tim modelima, dok ako imamo užu klasu modela, onda će više formula biti istinite u takvim modelima.*

## 3.4 Sistem S4

**Definicija 3.23** ***Sistem S4*** *zadan je svojim shemama aksioma i dvama pravilima izvoda. Sheme aksioma su:*
*(A1)* $A[B_1/p_1, \ldots, B_n/p_n]$, *pri čemu je* $A(p_1, \ldots, p_n)$ *valjana formula logike sudova i* $B_1, \ldots, B_n$ *proizvoljne formule modalne logike;*
*(K)* $\Box(A \to B) \to (\Box A \to \Box B)$.
*(T)* $\Box A \to A$
*(4)* $\Box A \to \Box\Box A$
*Pravila izvoda sistema K su:*

$$\frac{A}{\Box A} \quad \textit{(nužnost RN)} \qquad\qquad \frac{A \quad A \to B}{B} \quad \textit{(modus ponens MP)}$$

*Sasvim analogno kao kod sistema RS definiraju se pojmovi dokaza, izvoda i teorema.*

Primijetimo da je sistem S4 zapravo proširenje sistema T. Naime, sistemu T dodali smo nelogični aksiom **4**. Štoviše, sistem S4 je pravo proširenje sistema T. Može se pokazati da je $\Diamond\Diamond A \to \Diamond A$ teorem sistema S4, ali nije teorem sistema T.

Prisjetimo se sada Teorema 3.8 koji, između ostalog, tvrdi da je shema **4** valjana u klasi svih tranzitivnih standardnih modela. Kako sistem S4 sadrži i aksiom **T**, slijedi da su teoremi sistema S4 valjane formule u klasi standardnih modela koji su i refleksivni i tranzitivni. Navedimo sada bez dokaza sljedeći važan teorem za sistem S4.

**Teorem 3.24 (Teorem potpunosti za sistem S4)** *Formula $A$ je valjana u klasi svih standardnih modela koji su i refleksivni i tranzitivni ako i samo ako je $A$ teorem sistema S4.*

## 3.5 Sistem S5

Dodamo li sistemu T aksiom $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ dobivamo novi takozvani **Sistem S5**. Aksiom $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ označavamo brojem **5**. Nadalje, u sistemu S5 može se dokazati formula **4**. Dakle, sistem S5 je proširenje sistema S4. Konstrukcijom odgovarajućeg protumodela pokažimo da formula **S**5 nije teorem sistema S4. Neka je S skup svih formula. Definirajmo $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$, pri čemu je $W = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $R = \{(\alpha,\alpha), (\alpha,\beta), (\alpha,\gamma), (\beta,\beta), (\gamma,\gamma)\}$ i $\Vdash \subseteq W \times S$ binarna relacija takva da zadovoljava uvjete iz Definicije 3.2 te da za svaku atomarnu formulu $\mathbb{P}$ vrijedi $\alpha \nVdash \mathbb{P}$, $\beta \Vdash \mathbb{P}$ i $\gamma \nVdash \mathbb{P}$. Neka je $\mathbb{P}$ proizvoljna atomarna formula. Kako je $\alpha R \beta$ i $\beta \Vdash \mathbb{P}$ slijedi $\alpha \Vdash \Diamond\mathbb{P}$. Jedini svijet koji je dosežan iz $\gamma$ je sam $\gamma$ i uz to vrijedi $\gamma \nVdash \mathbb{P}$. Stoga ne vrijedi $\gamma \Vdash \Diamond\mathbb{P}$. Kako je $\alpha R \gamma$, slijedi $\alpha \nVdash \Box\Diamond\mathbb{P}$. Dakle, pokazali smo da za svijet $\alpha$ vrijedi $\alpha \Vdash \Diamond\mathbb{P}$ i $\alpha \nVdash \Box\Diamond\mathbb{P}$ pa je $\alpha \nVdash \Diamond\mathbb{P} \to \Box\Diamond\mathbb{P}$. Nadalje, uočimo da je model $\mathcal{M}$ refleksivan i tranzitivan. Kako formula $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ nije istinita u takvom modelu, iz teorema potpunosti za sistema S4 slijedi da ona nije teorem sistema S4. Iz dosadašnjih razmatranja možemo zaključiti da je sistem S5 pravo proširenje sistema S4. Promotrimo sada sljedeće. U Teoremu 3.8 pokazali smo da je formula $\Diamond A \to \Box\Diamond A$ valjana u klasi svih euklidskih modela. Kako je sistem S5 proširenje sistema S4 zaključujemo da su svi teoremi sistema S5 valjane formule u refleksivnoj, tranzitivnoj i euklidskoj klasi standardnih modela. Iako nećemo dokazivati teorem potpunosti sistema S5 navest ćemo sljedeću lemu.

**Lema 3.25** *Neka je $X$ skup. Binarna relacija $R \subseteq X \times X$ je refleksivna, tranzitivna i simetrična ako i samo ako je refleksivna, tranzitivna i euklidska.*

**Dokaz.** Neka je $R \subseteq X \times X$ refleksivna, tranzitivna i simetrična. Preostaje pokazati da je R euklidska. Neka su $\alpha, \beta, \gamma \in X$ takvi da je $\alpha R \beta$ i $\alpha R \gamma$. Kako je R simetrična to je $\beta R \alpha$. Sada iz tranzitivnosti od R slijedi $\beta R \gamma$. Dakle R je euklidska. Obrtno. Treba pokazati da je R simetrična. Neka su $\alpha, \beta \in X$ takvi da je $\alpha R \beta$. Kako je R refleksivna to je $\alpha R \alpha$. Nadalje, R je euklidska pa zaključujemo da je $\beta R \alpha$. Dakle, R je simetrična. ■

Gornja lema nam tvrdi da je refleksivna, tranzitivna i euklidska relacija zapravo relacija ekvivalencije.

**Teorem 3.26 (Teorem potpunosti za sistem S5)** *Neka je $A$ proizvoljna formula i $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ standardni model, pri čemu je $R$ relacija ekvivalencije. Formula $A$ je teorem sistema S5 ako i samo ako je istinita u modelu $\mathcal{M}$.*

## 3.6 Shema $\mathbf{G^{k,l,m,n}}$

Sheme **D, T, B, 4 i 5** možemo generalizirati. Naime, u ovom odjeljku ćemo navesti shemu $\mathbf{G^{k,l,m,n}}$ koja je će nam povoljnim odabirom brojeva $k, l, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ predstavljati sheme **D, T, B, 4 i 5**.

**Definicija 3.27** *Neka je $X$ skup i $R \subseteq X \times X$ proizvoljna binarna relacija te $x, y \in X$. Definirajmo relaciju $R^n$ induktivno:*
*(1) $xR^0y$ ako $x = y$;*
*(2) $xR^ny$ ako postoji $z \in X$ tako da je $xRz$ i $zR^{n-1}y$.*

Za $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ definirajmo $\Box^n A := \underbrace{\Box\Box\ldots\Box}_{n-puta} A$. Analogno definiramo $\Diamond^n A := \underbrace{\Diamond\Diamond\ldots\Diamond}_{n-puta} A$. Zanimljivo je promotriti kada će formule $\Box^n A$ i $\Diamond^n A$ biti istinite. Odgovor nam daje sljedeća propozicija.

**Propozicija 3.28** *Neka je $\alpha$ svijet u standardnom modelu $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ i $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tada vrijedi:*
*(1) $\alpha \Vdash \Box^n A$ ako i samo ako za svaki $\beta \in W$ takav da je $\alpha R^n \beta$ vrijedi $\beta \Vdash A$.*
*(2) $\alpha \Vdash \Diamond^n A$ ako i samo ako postoji $\beta \in W$ takav da je $\alpha R^n \beta$ i $\beta \Vdash A$.*

**Dokaz.** (1) Dokaz provodimo indukcijom po $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.
**Baza:** Neka je $\alpha \Vdash \Box^0 A$, to jest $\alpha \Vdash A$. Neka je $\beta \in W$ takav da je $\alpha R^0 \beta$. Kako je $R^0 = id_W$ to je $\alpha$ jedini s tim svojstvom. Kako vrijedi $\alpha \Vdash A$ slijedi tvrdnja. Obratno, neka za svaki $\beta \in W$ takav da je $\alpha R^0 \beta$ vrijedi $\beta \Vdash A$. Tada posebno za $\beta = \alpha$ vrijedi $\alpha \Vdash A$ odnosno $\alpha \Vdash \Box^0 A$.
**Korak:** Neka je $n \in \mathbb{N}$ i pretpostavimo da za sve $k < n$ vrijedi tvrdnja (1). Neka vrijedi $\alpha \Vdash \Box^n A$ i neka je $\beta \in W$ takav da je $\alpha R^n \beta$. Tada po Definiciji 3.27 postoji $\gamma \in W$ takav da je $\alpha R \gamma$ i $\gamma R^{n-1} \beta$. Nadalje, formula $\Box^n A$ je zapravo formula $\Box\Box^{n-1} A$. Sada iz $\alpha \Vdash \Box^n A$ i $\alpha R \gamma$ slijedi $\gamma \Vdash \Box^{n-1} A$. Kako je $\gamma R^{n-1} \beta$ po pretpostavci indukcije slijedi $\beta \Vdash A$. Obratno, pretpostavimo da za svaki $\beta \in W$ takav da je $\alpha R^n \beta$ vrijedi $\beta \Vdash A$. Dokažimo da vrijedi $\alpha \Vdash \Box^n A$. Neka je $\gamma \in W$ takav da je $\alpha R \gamma$. Treba pokazati $\gamma \Vdash \Box^{n-1} A$. Neka je $\beta \in W$ takav da je $\gamma R^{n-1} \beta$. Kako je $\alpha R \gamma$ i $\gamma R^{n-1} \beta$ to je $\alpha R^n \beta$. Pa je i $\beta \Vdash A$. Dakle vrijedi $\gamma \Vdash \Box^{n-1} A$, a time i $\alpha \Vdash \Box^n A$.
(2) Dokaz također provodimo indukcijom po $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

**Baza:** Za $n = 0$ tvrdnja trivijalno slijedi uzimajući $\beta = \alpha$.
**Korak:** Neka je $n \in \mathbb{N}$ i neka tvrdnja vrijedi za sve $k < n$. Pretpostavimo da je $\alpha \Vdash \Diamond^n A$. Dakle, postoji $\gamma \in W$ takav da je $\alpha R \gamma$ i $\gamma \Vdash \Diamond^{n-1} A$. Sada po pretpostavci indukcije postoji $\beta \in W$ takav da vrijedi $\gamma R^{n-1} \beta$ i $\beta \Vdash A$. Dakle za $\beta$ vrijedi $\alpha R^n \beta$ i $\beta \Vdash A$ što je i trebalo dokazati. Obratno, pretpostavimo da postoji $\beta \in W$ takav da je $\alpha R^n \beta$ i $\beta \Vdash A$. Treba pokazati $\alpha \Vdash \Diamond^n A$. Po definiciji relacije $R^n$ slijedi da postoji $\gamma \in W$ takav da je $\alpha R \gamma$ i $\gamma R^{n-1} \beta$. Sada po pretpostavci indukcije slijedi $\gamma \Vdash \Diamond^{n-1} A$. Dakle za $\gamma$ vrijedi $\alpha R \gamma$ i $\gamma \Vdash \Diamond^{n-1} A$ pa zaključujemo $\alpha \Vdash \Diamond^n A$. ■

**Definicija 3.29** *Neka $X$ skup i $R \subseteq X \times X$ binarna relacija. Za relaciju $R$ kažemo da je* ***n-tranzitivna*** *ako za svaki $x, y \in X$ vrijedi da $xR^n y$ povlači $xRy$. Za standardni model $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ kažemo da je* ***n-tranzitivan*** *ako je relacija $R$ n-tranzitivna.*

Neka je $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Promotrimo sljedeću shemu formula:

$$(\mathbf{4^n}) \qquad \Box A \to \Box^n A$$

Nije teško provjeriti da je shema $\mathbf{4^n}$ valjana u klasi n-tranzitivnih standardnih modela. Naime, neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ n-tranzitivni model i neka je $\alpha \in W$. Pretpostavimo da je $\alpha \Vdash \Box A$. Neka je $\beta \in W$ takav da je $\alpha R^n \beta$. Kako je $\mathcal{M}$ n-tranzitivan model to je $\alpha R \beta$ pa zbog $\alpha \Vdash \Box A$ slijedi $\beta \Vdash A$. Dakle, vrijedi $\alpha \Vdash \Box^n A$ pa je i $\alpha \Vdash \Box A \to \Box^n A$.
Primjetimo da je shema **4** zapravo shema $\mathbf{4^2}$. Po gornjem razmatranju vidimo da je shema $\mathbf{4^2}$ valjana u klasi 2-tranzitivnih modela, to jest u klasi tranzitivnih modela. Uočimo da smo to svojstvo sheme $\mathbf{4^2}$ već dokazali u Teoremu 3.8.

Shemu $\mathbf{4^n}$ možemo generalizirati. Naime, promotrimo sljedeću shemu:

### 3.6. Shema $\mathbf{G^{k,l,m,n}}$

$$(\mathbf{4^{m,n}}) \qquad \Box^m A \to \Box^n A.$$

Vrlo lako se pokaže da je shema $\mathbf{4^{m,n}}$ valjana u klasi standardnih modela u kojima relacija R ima sljedeće svojstvo:

$$\text{Ako je } \alpha R^n \beta \text{ onda je } \alpha R^m \beta.$$

Generalizaciju možemo nastaviti definicijom sheme $\mathbf{G^{k,l,m,n}}$.

$$(\mathbf{G^{k,l,m,n}}) \qquad \Diamond^k \Box^l A \to \Box^m \Diamond^n A$$

Uočimo da su sheme **D, T, B, 4, 5** posebni slučajevi sheme $\mathbf{G^{k,l,m,n}}$.

$\mathbf{D=G^{0,1,0,1}}$

$\mathbf{T=G^{0,1,0,0}}$

$\mathbf{B=G^{0,0,1,1}}$

$\mathbf{4=G^{0,1,2,0}}$

$\mathbf{5=G^{1,0,1,1}}$

Zanimljivo je promotriti u kojoj klasi standardnih modela je shema $\mathbf{G^{k,l,m,n}}$ valjana. Prvo navodimo sljedeću definiciju.

**Definicija 3.30** *Neka je $X$ skup i $R \subseteq X \times X$ binarna relacija na skupu $X$. Za relaciju $R$ kažemo da je **k,l,m,n-incestualna** ako vrijedi:*
*$(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\forall z \in X)$ $xR^k y \wedge xR^m z$ povlači $yR^l w \wedge zR^n w$ za neki $w \in X$*

**Teorem 3.31** *Shema $\mathbf{G^{k,l,m,n}}$ je valjana u klasi k,l,m,n-incestualnih stan-*

*dardnih modela.*

**Dokaz.** Neka je $\mathcal{M} = (W, R, \Vdash)$ k,l,m,n-incestualni model i $\alpha \in W$ proizvoljan svijet. Pretpostavimo da vrijedi $\alpha \Vdash \Diamond^k \Box^l A$ i pokažimo $\alpha \Vdash \Box^m \Diamond^n A$. Iz $\alpha \Vdash \Diamond^k \Box^l A$ slijedi da postoji $\beta \in W$ takav da je $\alpha R^k \beta$ i $\beta \Vdash \Box^l A$. Neka je $\gamma \in W$ proizvoljan svijet takav da je $\alpha R^m \gamma$. Treba pokazati $\gamma \Vdash \Diamond^n A$. Relacija R je k,l,m,n-incestualna pa postoji $\delta \in W$ takav da je $\beta R^l \delta$ i $\gamma R^n \delta$. Sada iz $\beta \Vdash \Box^l A$ i $\beta R^l \delta$ dobivamo $\delta \Vdash A$. Konačno, iz $\gamma R^n \delta$ i $\delta \Vdash A$ slijedi $\gamma \Vdash \Diamond^n A$. ■

**Korolar 3.32** *Neka je $W$ skup i $R \subseteq W \times W$ binarna relacija. Tada vrijede sljedeće tvrdnje:*
*(1) relacija R je serijska ako i samo ako je 0,1,0,1-incestualna;*
*(2) relacija R je refleksivna ako i samo ako je 0,1,0,0-incestualna;*
*(3) relacija R je simetrična ako i samo ako je 0,0,1,1-incestualna;*
*(4) relacija R je tranzitivna ako i samo ako je 0,1,2,0-incestualna;*
*(5) relacija R je euklidska ako i samo ako je 1,0,1,1-incestualna.*

**Dokaz.** Dokaz provodimo za tvrnje (2) i (3), a ostale ostavljamo čitatelju.
(2) Neka je R refleksivna i neka su $\alpha, \beta, \gamma \in W$ takvi da je $\alpha R^0 \beta$ i $\alpha R^0 \gamma$. Kako je $R^0 = id_W$ slijedi $\alpha = \beta = \gamma$. Zbog refleksivnosti od R je $\alpha R \alpha$ odnosno $\alpha R^1 \alpha$. Stavimo $\delta := \alpha$. Dakle za $\delta$ vrijedi $\beta R^1 \delta$ i $\gamma R^0 \delta$ pa je R 0,1,0,0-incestulna. Obratno, neka je R 0,1,0,0-incestualna. Pokažimo da je R refleksivna. Neka je $\alpha \in R$. Za $\alpha$ vrijedi $\alpha R^0 \alpha$. Ako definiramo $\beta := \alpha$ i $\gamma := \alpha$ onda vrijedi $\alpha R^0 \beta$ i $\alpha R^0 \gamma$. Kako je R 0,1,0,0-incestualna to postoji $\delta \in W$ tako da je $\beta R^1 \delta$ i $\gamma R^0 \delta$. Zbog $\gamma R^0 \delta$ i $\gamma = \alpha$ slijedi $\alpha = \delta$. Sada iz $\beta = \alpha$ i $\beta R^1 \delta$ slijedi $\alpha R \alpha$.
(3) Neka je R simetrična i neka su $\alpha, \beta, \gamma \in W$ takvi da je $\alpha R^0 \beta$ i $\alpha R^1 \gamma$. Zbog simetričnosti od R vrijedi $\gamma R \alpha$. Nadalje, vrijedi $\alpha = \beta$ i $\alpha R^0 \alpha$. Ako

definiramo $\delta := \alpha$ slijedi $\beta R^0 \delta$ i $\gamma R^1 \delta$. Obratno, neka je R 0,0,1,1-incestualna. Pokažimo da je R simetrična. Neka su $\alpha, \beta \in W$ takvi da je $\alpha R \beta$. Vrijedi $\alpha R^0 \alpha$ i $\alpha R^1 \beta$. Kako je R 0,0,1,1-incestualna to postoji $\delta \in W$ tako da je $\alpha R^0 \delta$ i $\beta R^1 \delta$. Iz $\alpha R^0 \delta$ slijedi $\alpha = \delta$. Dakle, vrijedi $\beta R \alpha$. ■

# Literatura

[A1] Brian F. Chellas, Modal logic an introduction; Cambridge University Press 1980.

[A2] Mladen Vuković, Matematička logika 1, PMF-Matematički odjel, Sveučilište u Zagrebu, 2007.

[A3] Marek Sergot, Systems of modal logic, Department of Computing Imperial College, London 2008.

[A4] G.E. Hughes, M.J. Cresswell: A New Introduction To Modal Logic, Victoria University of Wellington.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

# MODALNE LOGIKE

Ante Grgat

**Sažetak**:

*Cilj ovog rada je uvesti čitatelja u teoriju modalnih logika. Glavni smisao je uvođenje novih unarnih operatora: nužnost i mogućnost. Također, u ovisnosti o različitim kontekstima, definirat ćemo njihovo značenje. Time dobivamo proširenje klasične logike sudova. Poseban naglasak je na takozvanoj Kripkeovoj semantici koja je jedna od najznačajnijih semantika modalnih logika. Također, razmotrit ćemo i pet različitih sistema modalnih logika te navesti neke primjere teorema. Pri samom kraju navest ćemo jedan od najvažnijih rezultata modalnih logika, a to je teorem potpunosti za svih pet sistema.*

**Ključne riječi**:

*Alfabet, formula, premisa, konkluzija, sistem, shema, aksiom, dokaz, teorem, izvod, model, istina, konzistentnost, Lindenbaumova lema, maksimalno konzistentan*

**Podatci o radu**:

*45 stranica, 4 literaturna navoda, napisano na hrvatskom jeziku*

**Mentor(ica)**: *prof.dr.sc. Milica Klaričić Bakula*

**Članovi povjerenstva**:

*doc.dr.sc. Goran Erceg*

*dr.sc. Dino Peran*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *16. rujna 2022.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

# MODAL LOGICS

Ante Grgat

**Abstract**:

*The aim of this thesis is to introduce the reader to the theory of modal logics. The main meaning is introduction of new unary operators: necessity and possibility. Also, depends of different contexts, we will define their meaning. That's how we get an extension of propositional logic. Special emphasis is placed on the so-called Kripke's semantics, which is one of the most significant semantics of modal logics. Also, we will consider five different systems of modal logics and state them some examples of theorems. At the very end, we will mention one of the most important of the results of modal logics, which is a completeness theorems for all five systems.*

**Key words**:

*Alphabet, formula, premise, conclusion, system, shema, axiom, proof, theorem, derivative, model, truth, consistency, Lindenbaum's lemma, maximally consistent*

**Specifications**:

*45 pages, 4 references, written in Croatian*

**Mentor**: *Full Professor Milica Klaričić Bakula*

**Committee**:

*Assistant Professor Goran Erceg*

*Postdoctoral Researcher Dino Peran*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

This thesis was approved by a Thesis commettee on *16. September 2022.*