Sistemi korijena i poluproste Liejeve algebre

Mandarić, Marcela

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

MARCELA MANDARIĆ

Sistemi korijena i poluproste Liejeve algebre

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2022.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

Sistemi korijena i poluproste Liejeve algebre

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Marcela Mandarić

Mentor:
doc. dr. sc. Gordan Radobolja

Split, rujan 2022.

Mojim sestrama, Karli i Petri

Uvod

U ovom radu je cilj klasificirati konačnodimenzionalne poluproste kompleksne Liejeve algebre. Da bismo to postigli prvo uvodimo sisteme korijena koji su se povijesno počeli proučavati upravo zbog Liejevih algebri, ali su pronašli svoju primjenu i u drugim područjima. Iz tog razloga prvo promatramo sisteme korijena u punoj općenitosti, a na kraju pokazujemo kako nam oni omogućavaju traženu klasifikaciju.

U prvom poglavlju uvodimo definiciju sistema korijena te neka osnovna svojstva, također uvodimo pojam ireducibilnog sistema korijena za kojeg će se vidjeti da je usko povezan s prostim Liejevim algebrama. Također ćemo uvesti bazu sistema korijena te Weylovu grupu, grupu generiranu svim refleksijama definiranim na početku prvog poglavlja. Pokazat će se da je dovoljno znati bazne korijene i refleksije preko istih. Nadalje ćemo uvesti Cartanovu matricu, Coxeterov graf te Dynkinov dijagram koji sadržavaju korisne informacije o sistemima korijena i bit će ključni u klasifikaciji ireducibilnih sistema korijena.

U drugom poglavlju ćemo provesti klasifikaciju ireducibilnih sistema korijena kroz deset koraka, uvodeći prvo pojam dopustivog skupa i promatrajući koji se Coxeterovi grafovi te Dynkinovi dijagrami mogu pojaviti.

U preostalim poglavljima je cilj povezati rezultate iz prva dva poglavlja s Liejevim algebrama, a time i provesti klasifikaciju konačnodimenzionalnih kompleksnih poluprostih Liejevih algebri pa ćemo u tu svrhu prvo uvesti pojam Liejeve algebre, navesti neke primjere i osnovna svojstva, a zatim pronaći sistem korijena pridružen određenoj Liejevoj algebri. Da bismo to postigli uvest ćemo Killingovu formu i Cartanovu podalgebru te predstaviti Cartanovu dekompoziciju. Uz pomoć tih pojmova ćemo definirati korijene te ih detaljnije proučiti na primjeru $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$. Pokazat će se da je klasifikacijom ireducibilnih sistema korijena završena klasifikacija konačnodimenzionalnih kompleksnih prostih Liejevih algebri, a time i poluprostih.

Sadržaj

Uvod **iv**

Sadržaj **vi**

1 Sistemi Korijena **1**

1.1 Definicija i osnovna svojstva 1

1.2 Ireducibilan sistem korijena 7

1.3 Baza sistema korijena i Weylova grupa 9

1.3.1 Weylova grupa 9

1.3.2 Baza sistema korijena 11

1.3.3 Weylove komore 14

1.4 Cartanova matrica i Dynkinov dijagram 16

1.4.1 Cartanova matrica 16

1.4.2 Dynkinov dijagram 17

2 Klasifikacija sistema korijena **21**

3 Definicija i svojstva Liejevih algebri **32**

3.1 Osnovni pojmovi 32

3.2 Engelov i Liejev teorem 36

4 Killingova forma **38**

5 Cartanova podalgebra i Cartanova dekompozicija **41**

6 Klasifikacija **48**

Literatura **51**

Poglavlje 1

Sistemi Korijena

Sistemi korijena su se povijesno javili zbog pokušaja klasifikacije svih prostih Liejevih algebri, ali se kasnije koriste i van teorije o Liejevim algebrama pa ćemo u prvom i drugom poglavlju proučavati sisteme korijena u punoj općenitosti i dati rezultate koji naizgled nemaju veze sa Liejevim algebrama, ali ta će se veza vidjeti na kraju ovoga rada.

1.1 Definicija i osnovna svojstva

Definicija 1.1 *Neka je E vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Bilinearna forma na E je funkcija $B\colon E \times E \to \mathbb{F}$ takva da vrijedi*
1) $B(a+b,c) = B(a,c) + B(b,c)$
2) $B(a,b+c) = B(a,b) + B(a,c)$
1) $B(\lambda a,b) = \lambda B(a,b)$
za svaki $a,b,c \in E$ i za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$.

Dakle bilinearna forma B je linearna u obe varijable.

Definicija 1.2 *Kažemo da je bilinearna forma $B\colon E \times E \to \mathbb{F}$ simetrična* *ako vrijedi*

$$B(a,b) = B(b,a)$$

za sve $a, b \in E$.

Definicija 1.3 *Kažemo da je bilinearna forma $B\colon E \times E \to \mathbb{F}$ pozitivno definitna ako je*

$$B(a,a) \geq 0$$

za sve $a \in E$ i ako iz $B(a,a) = 0$ slijedi $a = 0$.

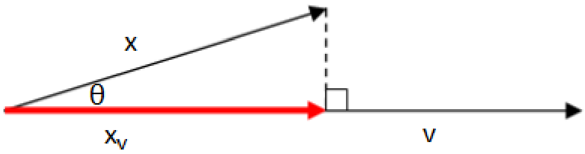
Neka je E konačnodimenzionalni realni vektorski prostor s definiranom pozitivno definitnom simetričnom bilinearnom formom $(\cdot\ ,\ \cdot)$. Time je na E zadana struktura realnog unitarnog prostora. Unitarni prostor definira geometriju, tj. dobro su definirani pojmovi kao što je norma (duljina) vektora sa $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$, ortogonalnost vektora (vektori x i y su ortogonalni ako je $(x,y) = 0$) te pojam ortogonalnog komplementa skupa S (skup svih vektora koji su ortogonalni na sve elemente iz S). Potprostor kodimenzije 1 nazivamo hiperravnina. Također je dobro definiran kosinus kuta između vektora sa x i y s

$$\cos\theta = \frac{(x,y)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(y,y)}}.$$

Refleksija na E je invertibilna linearna transformacija koja fiksira točke neke hiperravnine, a svaki vektor koji je ortogonalan na tu hiperravninu šalje u njegov aditivni inverz. Svaki nenula vektor v određuje refleksiju s_v. To je refleksija s obzirom na normalnu hiperravninu vektora v, $P_v = \{w \in E : (w,v) = 0\}$. Svi vektori koji su kolinearni s v određuju istu refleksiju. Dakle, s_v preslikava v u $-v$, a fiksira sve točke hiperravnine P_v. Može se pokazati da je

$$s_v(x) = x - \frac{2(x,v)}{(v,v)}v \qquad \text{za sve } x \in E.$$

Pokažimo da je $\frac{(x,v)}{(v,v)}v$ zapravo vektorska projekcija vektora x na vektor v.



Slika 1.1: Vektorska projekcija vektora x na v

Vrijedi $\cos\theta = \frac{\|x_v\|}{\|x\|}$ pa je $\|x_v\| = \cos\theta\|x\| = \frac{(x,v)}{\sqrt{(x,x)}\sqrt{(v,v)}}\|x\| = \frac{(x,v)}{\sqrt{(v,v)}}$.

Sada je vektorska projekcija jednaka $\|x_v\|v_0 = \frac{(x,v)}{\sqrt{(v,v)}}\frac{v}{\sqrt{(v,v)}} = \frac{(x,v)}{(v,v)}v$. Time je tvrdnja dokazana.

Primjetimo

$$\begin{aligned}
&(s_v(x), s_v(y)) = \left(x - \frac{2(x,v)}{(v,v)}v, y - \frac{2(y,v)}{(v,v)}v\right) = \\
&(x,y) - \frac{2(y,v)}{(v,v)}(x,v) - \frac{2(x,v)}{(v,v)}(v,y) + \frac{4(x,v)(y,v)}{(v,v)(v,v)}(v,v) = \\
&(x,y) \qquad \text{za sve } x,y \in E.
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Dakle, s_v čuva skalarni produkt, tj. s_v je unitaran operator.

Napomena 1.4 *U tekstu će uvijek $(\cdot,\cdot)$ označavati skalarni produkt, a označimo*

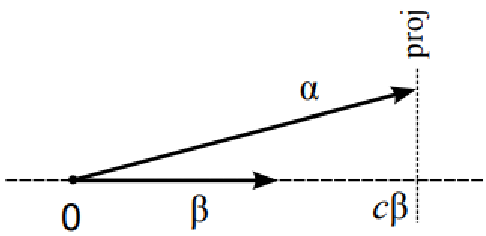
$$\langle x, v\rangle := \frac{2(x,v)}{(v,v)},$$

$\langle x, v\rangle$ je linearan po prvoj varijabli, ali ne i po drugoj. Ovaj izraz će nam biti od izrazite važnosti jer će nam dati puno informacija o sistemima korijena koje ćemo sada definirati.

Definicija 1.5 *Podskup R realnog unitarnog prostora E je sistem korijena ako zadovoljava sljedeća svojstva:*
(R1) R je konačan skup izvodnica za E i ne sadrži nulvektor.
(R2) Za $\alpha \in R$ i $c \in \mathbb{R}$ je $c\alpha \in R$ ako i samo ako $c = \pm 1$.
(R3) Ako je $\alpha \in R$ onda je $s_\alpha R = R$, tj. s_α permutira R.
(R4) Ako su $\alpha, \beta \in R$, onda je $\langle \beta, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}$.
Elemente skupa R nazivamo korijenima, a $\dim E$ *nazivamo rankom sistema korijena.*

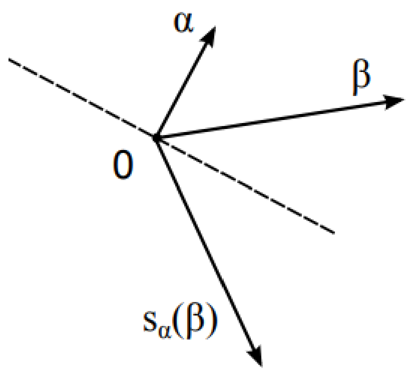
Ponekad sistem korijena pišemo kao uređeni par (R, E) da naglasimo o kojem vektorskom prostoru je riječ.

Primjetimo da nam geometrijski gledano $(R4)$ govori da je duljina ortogonalne projekcije β na α cjelobrojni ili polucjelobrojni višekratnik duljine od α. Vidi Sliku 1.2.



Slika 1.2: 2c je cijeli broj

Grafički prikaz refleksije $s_\alpha(\beta)$ za $\alpha, \beta \in R$ je dan na Slici 1.3.



Slika 1.3: Refleksija $s_\alpha(\beta)$

Primjer 1.6 *Sisteme korijena manjega ranka možemo opisati grafički. Npr. za sistem korijena ranka 1 postoji samo jedna mogućnost zbog (R2), označavamo je sa A_1. Vidi Sliku 1.4.*

Slika 1.4: Primjer sistema korijena ranka 1

Propozicija 1.7 *Neka su $\alpha, \beta \in R$ linearno nezavisni i $(\alpha, \alpha) \geq (\beta, \beta)$. Tada vrijedi jedno od sljedećeg:*

1) $(\alpha, \beta) = 0$,

2) $(\alpha, \alpha) = (\beta, \beta)$, $\quad \theta = \frac{\pi}{3}$ *ili* $\theta = \frac{2\pi}{3}$,

3) $(\alpha, \alpha) = 2(\beta, \beta)$, $\quad \theta = \frac{\pi}{4}$ *ili* $\theta = \frac{3\pi}{4}$,

4) $(\alpha, \alpha) = 3(\beta, \beta)$, $\quad \theta = \frac{\pi}{6}$ *ili* $\theta = \frac{5\pi}{6}$

Dokaz. Pretpostavimo da je $(\alpha, \beta) \neq 0$ i pokažimo da tada mora vrijediti jedan od preostalih slučajeva. Označimo s $m_1 = \langle \alpha, \beta \rangle$ i $m_2 = \langle \beta, \alpha \rangle$. Tada je $m_1 m_2 = 4\dfrac{(\alpha, \beta)^2}{(\alpha, \alpha)(\beta, \beta)} = 4\cos^2\theta$. Kako je $(\alpha, \beta) \neq 0$ to je dobro definirano

$\frac{m_1}{m_2}$ i vrijedi

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{(\alpha, \alpha)}{(\beta, \beta)} \geq 1 > 0.$$

Sada je $0 \leq m_1 m_2 \leq 4$. Zbog (R4) znamo da su m_1 i $m_2 \in \mathbb{Z}$.

Ako je $m_1 m_2 = 0$ onda je $\cos\theta = 0$ tj. $(\alpha, \beta) = 0$ pa je to prvi slučaj.

Ako je $m_1 m_2 = 4$ tada je $\cos^2\theta = 1$ pa je kut između α i β jednak 0 ili π pa su kolinearni što ne može biti po pretpostavci teorema.

Ako je $m_1 m_2 = 1$ tada je $\cos^2\theta = \frac{1}{4}$ pa je $\theta = \frac{\pi}{3}$ ili $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

U ovom slučaju možemo imati $m_1 = m_2 = 1$ ili $m_1 = m_2 = -1$. To znači da ako je $m_1 = m_2 = 1$ imamo da je $(\alpha, \beta) \geq 0$ pa je u tom slučaju šiljasti kut $\theta = \frac{\pi}{3}$, a u drugom slučaju je tupi $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Time smo dobili da mora vrijediti 2)

Ostali slučajevi se dokažu analogno. ■

$\langle \alpha, \beta \rangle$	$\langle \beta, \alpha \rangle$	θ	$\frac{(\beta,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$
0	0	$\frac{\pi}{2}$	neodređeno
1	1	$\frac{\pi}{3}$	1
-1	-1	$\frac{2\pi}{3}$	1
1	2	$\frac{\pi}{4}$	2
-1	-2	$\frac{3\pi}{4}$	2
1	3	$\frac{\pi}{6}$	3
-1	-3	$\frac{5\pi}{6}$	3

Tablica 1.1: Tablica svih mogućnosti

Korolar 1.8 *Neka su $\alpha, \beta \in R$ linearno nezavisni.*

1) Ako je kut između njih strogo tupi, onda je $\alpha + \beta \in R$.

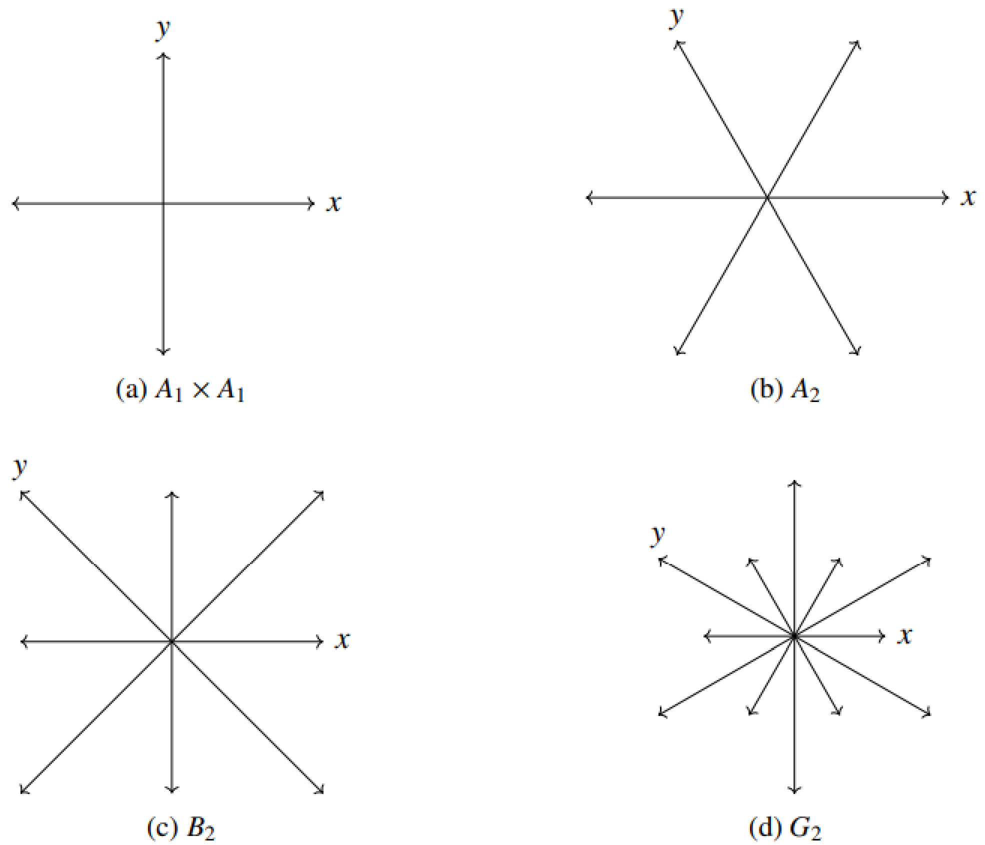
2) Ako je kut između njih strogo šiljasti i $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$, onda je $\alpha - \beta \in R$.

Dokaz. U oba slučaja pretpostavimo da je $(\beta, \beta) \geq (\alpha, \alpha)$. Po R3) znamo da je

$$s_\beta(\alpha) = \alpha - \langle \alpha, \beta \rangle \beta \in R$$

pa iz gornje tablice vidimo da ako je θ strogo šiljast onda je $\langle \alpha, \beta \rangle = 1$, i ako je θ strogo tupi onda je $\langle \alpha, \beta \rangle = -1$. ■

Primjer 1.9 *Na Slici 1.5 su dani svi sistemi korijena ranga 2.*



(a) $A_1 \times A_1$ (b) A_2 (c) B_2 (d) G_2

Slika 1.5: Sistemi korijena ranga 2

1.2 Ireducibilan sistem korijena

Definicija 1.10 *Kažemo da je sistem korijena R ireducibilan ako se R ne može izraziti kao disjunktna unija pravih podskupova takva da je svaki korijen* *iz jednog skupa okomit na svaki korijen iz drugog skupa, tj. ne postoje R_1 i R_2 takvi da je $R = R_1 \dot\cup R_2$ i $(\alpha, \beta) = 0$ za $\alpha \in R_1$ i $\beta \in R_2$.*

Ako takva dekompozicija postoji kažemo da je sistem korijena reducibilan i onda su R_1 i R_2 sistemi korijena za $\operatorname{Span} R_1$ i $\operatorname{Span} R_2$ redom.

U Primjeru 1.9 vidimo da su A_1, A_2, B_2, G_2 ireducibilni, a $A_1 \times A_1$ reducibilan.

Neka su (R, E) i (S, F) sistemi korijena. Definiramo direktnu sumu sistema korijena i označavamo sa $(E \oplus F, R \cup S)$. Skalarni produkt na $E \oplus F$ se definira na prirodan način,

$$((e, f), (e', f')) = (e, e') + (f, f').$$

Smatramo da je $R \subseteq E \subseteq E \oplus F$ prirodnom identifikacijom $e = (e, 0)$, analogno za $S \subseteq F \subseteq E \oplus F$ identifikacijom $f = (0, f)$. Primjetimo da je tada $E \perp F$ jer je $((e, 0), (0, f)) = (e, 0) + (0, f) = 0$. Lako se vidi da na ovaj način $R \cup S$ zadovoljava uvjete Definicije 1.5.

Primjetimo da smo ireducibilnost mogli definirati uz pomoć direktne sume sistema korijena i to na način koji slijedi.
Sistem korijena (R, E) je reducibilan ako postoji ortogonalna dekompozicija $E = E_1 \oplus E_2$ tako da je $\dim E_1, \dim E_2 > 0$ i za svaki $\alpha \in R$ je ili $\alpha \in E_1$ ili $\alpha \in E_2$. Inače, kažemo da je ireducibilan. Sada za R_1 i R_2 iz Definicije 1.10 uzmemo $R_1 = R \cap E_1$ i $R_2 = R \cap E_2$.

Lema 1.11 *Neka je R sistem korijena realnog vektorskog prostora E. Možemo R napisati kao disjunktnu uniju*

$$R = R_1 \cup \cdots \cup R_k$$

gdje je svaki R_i ireducibilan sistem korijena za E_i koji je razapet s R_i i E je direktna suma ortogonalnih potprostora $E_1, \ldots, E_k$.

Dokaz. Definirajmo relaciju ekvivalencije $\sim$ stavljajući $\alpha \sim \beta$ ako postoje $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_s$ u R takvi da je $\alpha = \gamma_1$ i $\beta = \gamma_s$ i $(\gamma_i, \gamma_{i+1}) \neq 0$ za $1 \leq i < s$. Neka su R_i klase ekvivalencije ove relacije. Svaki R_i zadovoljava svojstva iz Definicije 1.5. Pokažimo npr. da zadovoljava R3). Dovoljno je pokazati da ako je $(\alpha, \beta) \neq 0$ da je onda $(\alpha, s_\alpha(\beta)) \neq 0$. Prepostavimo suprotno tj. $(\alpha, s_\alpha(\beta)) = 0$ tada je

$$0 = \left(\alpha, \beta - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha\right) = (\alpha,\beta) - \frac{2(\beta,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}(\alpha,\alpha) = -(\alpha,\beta)$$

Dakle, $(\alpha, \beta) = 0$ što je kontradikcija s pretpostavkom.

Nadalje, po konstrukciji je svaki R_i ireducibilan. Kako se svaki korijen nalazi u nekom E_i to je suma svih E_i jednaka E. Pokažimo da je E direktna suma upravo tih E_i. Pretpostavimo da je $v_1 + \cdots + v_k = 0$, gdje je $v_i \in E_i$. Skalarno pomnožimo s v_j i dobivamo

$$0 = (v_1, v_j) + \cdots + (v_k, v_j) = (v_j, v_j)$$

pa za svaki j vrijedi $v_j = 0$, dakle $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_k$. ■

1.3 Baza sistema korijena i Weylova grupa

1.3.1 Weylova grupa

Definicija 1.12 *Kažemo da su sistemi korijena (R, E) i (R', E') izomorfni ako postoji izomorfizam vektorskih prostora $\varphi\colon E \to E'$ takav da je*

1) $\varphi(R) = R'$,

2) za svaka dva korijena $\alpha, \beta \in R$ vrijedi $\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \varphi(\alpha), \varphi(\beta) \rangle$.

Uvjet 2) se može zapisati i kao

$$\varphi(s_\alpha(\beta)) = s_{\varphi(\alpha)}(\varphi(\beta)) \tag{1.2}$$

Primjetimo da izmorfizam sistema korijena ne mora čuvati skalarni produkt, a time ni duljinu vektora, no mora čuvati kuteve između vektora jer je $\langle \alpha, \beta \rangle \langle \beta, \alpha \rangle = 4 \cos^2 \theta$.

Sljedeći teorem navodimo bez dokaza:

Teorem 1.13 *Ireducibilni sistemi korijena* (R, E) *i* (R', E') *su izomorfni ako i samo ako postoji skalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *i izomorfizam vektorskih prostora* $\varphi \colon E \to E'$ *takav da je* $\varphi(R) = R'$ *i*

$$(\varphi(u), \varphi(v)) = \lambda(u, v), \qquad \text{za sve } u, v \in E$$

Primjer 1.14 *Neka je* (R, E) *sistem korijena. Za proizvoljni* $c \in \mathbb{R}$ *skup* $cR = \{c\alpha : \alpha \in R\}$ *je sistem korijena u* E*. Preslikavanje* $\varphi \colon R \to cR$ *definirano s* $\varphi(v) = cv$ *je izmorfizam sistema korijena. U ovom primjeru se očito vidi da izomorfizam sistema korijena ne mora čuvati duljinu vektora.*

Definicija 1.15 *Neka je* (R, E) *sistem korijena. Podgrupu od* $\mathrm{gl}(E)$ *generiranu svim refleksijama* s_α *za* $\alpha \in R$ *nazivamo Weylova grupa sistema korijena* R *i označavamo s* W *ili* $W(R)$*.*

Po svojstvu R3) iz Definicije 1.5 grupa W djeluje na R tako da samo permutira korijene.

Lema 1.16 *Weylova grupa* $W(R)$ *je konačna.*

Dokaz. Kako grupa W permutira R, to postoji homomorfizam između W i grupe svih permutacija od R. Grupa svih permutacija od R je konačna jer je R konačan. Pokažimo da je taj homomorfizam injektivan pa će W biti konačna. Pretpostavimo da je g u jezgri tog homomorfizma. Tada g fiksira sve korijene. Kako je E razapet s R to g fiksira sve bazne elemente od E pa g mora biti identiteta. ■

Propozicija 1.17 *Neka je R sistem korijena ranka 2 s minimalnim kutem $\theta = \frac{2\pi}{n}$, $n = 4, 6, 8, 12$, tada je $W(R)$ grupa simetrija pravilnog $\frac{n}{2}$-kuta.*

Dokaz. Može se pronaći u [2]. ■

Ako je φ izomorfizam sistema korijena onda vrijedi 1.2 pa taj izomorfizam inducira izomorfizam Weylovih grupa $\sigma \mapsto \varphi \circ \sigma \circ \varphi^{-1}$. Dakle ako su sistemi korijena izomorfni tada su pripadne Weylove grupe konjugirane tim izomorfizmom.

1.3.2 Baza sistema korijena

Želimo pokazati da nam nije potreban cijeli sistem korijena već neki poseban podskup da bismo znali potpunu informaciju o sistemu korijena. U tu svrhu definiramo bazu sistema korijena.

Definicija 1.18 *Neka je (R, E) sistem korijena. Za $B \subseteq R$ kažemo da je baza sistema korijena R ako vrijedi*
B1) B je baza vektorskog prostora E,
B2) svaki $\beta \in R$ se može zapisati kao $\sum\limits_{\alpha \in B} k_\alpha \alpha$ gdje su $k_\alpha \in \mathbb{Z}$ i svi ne nula koeficijenti k_α imaju isti predznak.

Korijeni iz B se nazivaju prosti korijeni.

Ako je $k_\alpha \geq 0$ onda β zovemo pozitivan korijen. Skup pozitivnih korijena označavamo s R^+.
Ako je $k_\alpha \leq 0$ onda β zovemo negativan korijen. Skup negativnih korijena označavamo s R^-.
Pozitivnost i negativnost korijena se gleda s obzirom na odabranu bazu i vrijedi $R = R^+ \cup R^-$.

Propozicija 1.19 *Neka je B baza za R, tada je $(\alpha, \beta) \leq 0$, za $\alpha \neq \beta$ u B i $\alpha - \beta$ nije korijen.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno tj. $(\alpha, \beta) > 0$. Kako je po pretpostavci $\alpha \neq \beta$, a onda očito i $\alpha \neq -\beta$ vrijedi po Korolaru 1.8 da je $\alpha - \beta$ korijen. No to je u kontradikciji s B2) jer su α i β elementi baze pa svaki korijen mora imati koeficijente istog predznaka u prikazu preko α i β. ■

Dakle kut između baznih tj. prostih korijena je pravi ili tupi.

Na prirodan način možemo označiti korijene kao pozitivne ili negativne fiksirajuću neku hiperravninu i gledajući strane te hiperravnine. Neka je hiperravnina H određena vektorom h. Tada ćemo pozitivnima nazivati one korijene α za koje je $(\alpha, h) > 0$, a negativnima one za koje je $(\alpha, h) < 0$.

Teorem 1.20 *Svaki sistem korijena ima bazu.*

Dokaz. Neka je (R, E) sistem korijena. Možemo pretpostaviti da je E dimenzije barem 2. Možemo odabrati vektor $z \in E$ takav da ne leži u niti jednoj hiperravnini određenoj korijenima. Takav vektor postoji jer unija konačno mnogo hiperravnina $P_\alpha, \alpha \in R$ ne može iscrpiti E (dokaz ove pomoćne tvrdnje se može naći u [3] i u [2]).
Neka je $R^+ = \{\alpha \in R : (z, \alpha) > 0\}$ tj. skup svih korijena koji leže s pozitivne strane vektora z. Neka je

$$B = \{\alpha \in R^+ : \alpha \text{ nije suma dva elementa iz } R^+\}$$

Tvrdimo da je B baza za R. Prvo pokažimo da vrijedi B2). Ako je $\beta \in R$ onda je $\beta \in R^+$ ili $-\beta \in R^+$ pa je dovoljno dokazati da se svaki $\beta \in R^+$ može zapisati kao $\sum_{\alpha \in B} k_\alpha \alpha$ za neke $k_\alpha \in \mathbb{Z}$ takvi da su svi $k_\alpha \geq 0$. U suprotnom možemo odabrati $\beta \in R^+$ koji se ne može zapisati na taj način takav da je

(z, β) najmanji mogući. Kako je $\beta \notin B$ zbog načina odabira β (β je sigurno suma nekih elemenata iz R^+, ali mu po pretpostavci nisu svi koeficijenti istog predznaka, zato nije u B) postoje $\beta_1, \beta_2 \in R^+$ takvi da je $\beta = \beta_1 + \beta_2$. Tada zbog linearnosti skalarnog produkta vrijedi

$$(z, \beta) = (z, \beta_1) + (z, \beta_2),$$

a $(z, \beta_1), (z, \beta_2) > 0$ pa je to kontradikcija s odabirom β tj. s minimalnošću (z, β). Preostaje pokazati da je B linearno nezavisan.

Po Propoziciji 1.19 kut između dva različita elementa skupa B mora biti tupi. Pretpostavimo da je $\sum_{\alpha \in B} r_\alpha \alpha = 0$, gdje su $r_\alpha \in \mathbb{R}$. Premještanjem svih elemenata s pozitivnim koeficijentima na jednu stranu dobivamo

$$x := \sum_{\alpha\ : r_\alpha > 0} r_\alpha \alpha = \sum_{\beta\ : r_\beta < 0} (-r_\beta)\beta$$

Dakle,

$$(x, x) = \sum_{\substack{\alpha\ : r_\alpha > 0 \\ \beta\ : r_\beta < 0}} r_\alpha (-r_\beta)(\alpha, \beta) \leq 0$$

pa je $x = 0$. Dakle,

$$0 = (x, z) = \sum_{\alpha\ : r_\alpha > 0} r_\alpha (\alpha, z)$$

gdje je svaki $(\alpha, z) > 0$ kako je $\alpha \in R^+$ pa mora biti $r_\alpha = 0$ za sve α i slično $r_\beta = 0$ za sve β. ■

Sljedeći teorem pokazuje da je sva informacija o sistemu korijena sadržana u bazi sistema korijena.

Označimo s $W_0 := \langle s_\gamma : \gamma \in B \rangle$ podgrupu od W.

Teorem 1.21 *Neka je (R, E) sistem korijena i B njegova baza. Tada vrijedi:*
1) ako je $\alpha \in B$ onda refleksija s_α permutira pozitivne korijene različite od α,

2) za $\beta \in R$ postoji $g \in W_0$ i $\alpha \in B$ tako da je $\beta = g(\alpha)$,

3) $W_0 = W$ tj. W je generirana svim s_α za $\alpha \in B$.

Dokaz. 1) Pretpostavimo da je $\beta \in R^+$ i $\beta \neq \alpha$. Znamo da je $\beta = \sum_{\gamma \in B} k_\gamma \gamma$ za neke $k_\gamma \geq 0$. Kako je $\beta \neq \alpha$ i $\beta \in R$ to postoji neki $\gamma \in B$ takav da je $k_\gamma \neq 0$ i $\gamma \neq \alpha$. Znamo da je $s_\alpha(\beta) \in R$ i zbog $s_\alpha(\beta) = \beta - \langle \beta, \alpha \rangle \alpha$ je koeficijent uz γ u $s_\alpha(\beta)$ jednak k_γ koji je pozitivan. Kako svi ne nula koficijenti u izrazu za $s_\alpha(\beta)$ moraju biti istog predznaka to znači da je $s_\alpha(\beta)$ u R^+.
2) Može se pronaći u [4].
3) Po definiciji je W generiran svim refleksijama s_β za $\beta \in R$ pa je dovoljno dokazati da je $s_\beta \in W_0$ za svaki $\beta \in R$. Po tvrdnji 2) znamo da za β postoji $g \in W_0$ i $\alpha \in B$ takav da je $\beta = g(\alpha)$. Uočimo da vrijedi

$$gs_\alpha(\beta) = g(\beta - \frac{2(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}\alpha) = g(\beta) - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}g(\alpha)$$

$$s_{g(\alpha)}g(\beta) = g(\beta) - 2\frac{(g(\beta), g(\alpha))}{(g(\alpha), g(\alpha))}g(\alpha) = g(\beta) - 2\frac{(\beta, \alpha)}{(\alpha, \alpha)}g(\alpha)$$

pa je $gs_\alpha(\beta) = s_{g(\alpha)}g(\beta)$ tj.

$$s_\beta = gs_\alpha g^{-1} \in W_0$$

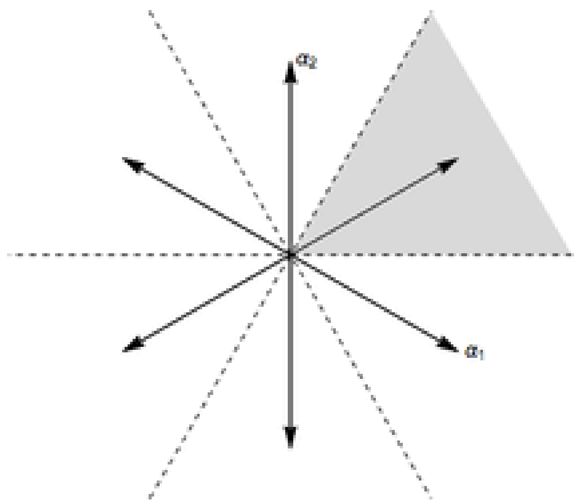
Time je tvrdnja dokazana. ■

Treća tvrdnja Teorema 1.21 nam govori kako je dovoljno poznavati refleksije za elemente iz baze da bismo dobili cijelu Weylovu grupu, čime je olakšana konstrukcija Weylove grupe budući da je sad skup generatora znatno manji.

1.3.3 Weylove komore

Definirat ćemo Weylove komore i pogledati djelovanje Weylove grupe na njih te vidjeti bijektivnu vezu između Weylovih komora i baze sistema korijena.

Definicija 1.22 *Otvorene Weylove komore sistema* (R, E) *su komponente povezanosti od* $E \setminus \bigcup_{\alpha \in R} P_\alpha$ *gdje je* P_α *hiperravnina određena s* α*. Ako je* $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ *baza za* R *onda je fundamentalna otvorena Weylova komora u* E *(s obzirom na bazu* B*) skup svih* $v \in E$ *takvih da je* $(\alpha_j, v) > 0$*, za sve* $j \in \{1, \ldots, l\}$*.*



Slika 1.6: Primjer otvorene Weylove komore

Može se pokazati da je otvorena fundamentalna Weylova komora konveksan, time i povezan te neprazan skup. Jedini način za izići iz otvorene fundamentalne Weylove komore jest da prijeđemo preko vektora v za kojeg je $(\alpha_j, v) = 0$, dakle otvorena fundamentalna Weylova komora je zaista otvorena Weylova komora.

Svaki $g \in W$ permutira korijene, ali i proste korijene, a onda i preslikava jednu hiperravninu u drugu pa ako je C otvorena komora onda je $g(C)$ opet otvorena komora. Dakle postoji bijektivna veza između baze sistema korijena i otvorenih Weylovih komora. (Za detalje pogledati [1].)

Sljedeće dvije tvrdnje navodimo bez dokaza čiji se dokazi mogu pronaći u [1] ili u [2].

Propozicija 1.23 *Weylova grupa djeluje tranzitivno na skup otvorenih Weylovih komora.*

Propozicija 1.24 *Neka su B_1 i B_2 baze za R, tada postoji jedinstveni $g \in W$ tako da je $g(B_1) = B_2$.*

1.4 Cartanova matrica i Dynkinov dijagram

Cartanova matrica i Dynkinov dijagram služe za pohranu informacija o strukturi baze sistema korijena. Pokaže se da je Dynkinov dijagram određen Cartanovom matricom. Također će se pokazati da uz pomoć njih možemo klasificirati sisteme korijena.

1.4.1 Cartanova matrica

Neka je $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ baza sistema korijena i promatrajmo sada uređenu bazu, tj. fiksirajmo neki uređaj na B.
Matricu reda $l \times l$ gdje je l rank sistema korijena, kojoj se na ij-tom mjestu nalazi $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ naziva za Cartanova matrica sistema R. Ta matrica ovisi o uređaju baze, ali ne ovisi o izboru baze jer za svaki korijen β vrijedi

$$\langle s_\beta(\alpha_i), s_\beta(\alpha_j) \rangle = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$$

(pokazali smo da refleksije čuvaju skalarni produkt pa time i $\langle \cdot, \cdot \rangle$). Sada se po Propoziciji 1.24 vidi da Cartanova matrica ne ovisi o izboru baze.
Cartanova matrica sadržava informaciju o kutovima između baznih elemenata i njihove relativne duljine.

Propozicija 1.25 *Neka je $A = [a_{ij}]$ Cartanova matrica, tada ona zadovoljava sljedeća svojstva*

1) $a_{ii} = 2$ za sve i,

2) $a_{ij} \in \{0, -1, -2, -3\}$ ako je $i \neq j$,

3) ako je $a_{ij} = -2$ ili -3 onda je $a_{ji} = -1$,

4) $a_{ij} = 0$ ako i samo ako $a_{ji} = 0$.

Dokaz. sva navedena svojstva se vide iz Tablice 1.1. ■

Primjer 1.26 *Jedina Cartanova matrica reda 1 je* $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$.

Cartanove matrice za sisteme korijena ranka 2 iz Primjera 1.9 su redom:

1) za $A_1 \times A_1$ $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$,

2) za A_2 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

3) za B_2 $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,

4) za G_2 $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

1.4.2 Dynkinov dijagram

Drugi način za prikazati informacije sadržane u Cartanovoj matrici su Coxeterov graf i Dynkinov dijagram. Coxeterov graf sistema R je graf s l vrhova kojem su vrhovi prosti korijeni i gdje su i-ti i j-ti vrh, za $i \neq j$ spojeni s $d_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j \rangle \langle \alpha_j, \alpha_i \rangle$ bridova. Prisjetimo se da je $d_{ij} \in \{0, 1, 2, 3\}$. Coxeterov graf određuje brojeve $\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle$ u slučaju kada svi korijeni imaju istu duljinu. Ako se javljaju dvostruki ili trostruki bridovi u Coxeterovom grafu onda možemo na bridove dodati strelicu koja ide od dužeg vrha (korijena) prema kraćem. Na taj način ćemo moći odrediti Cartanovu matricu i time dobivamo Dynkinov dijagram.

Primjer 1.27 *1) Dynkinov dijagram za Primjer 1.6 je samo jedan vrh.* $\circ$

2) Dynkinovi dijagrami za primjere ranka 2 1.9 su sljedeći:

2.1) $A_1 \times A_2$ $\circ \qquad\qquad \circ$

2.2) A_2 $\circ \longrightarrow \circ$

2.3) B_2 $\circ \Longrightarrow \circ$

2.4) G_2 $\circ \Rrightarrow \circ$

Propozicija 1.28 *Sistem korijena R je ireducibilan ako i samo ako je pripadni Dynkinov dijagram povezan.*

Dokaz. Ako je R reducibilan tj. postoje R_1 i R_2 tako da je R njihova direktna suma onda postoji baza B od R tako da je $B = B_1 \cup B_2$ gdje su B_1 i B_2 baze za R_1 i R_2 redom. Kako su elementi iz R_1 okomiti na elemente iz R_2 to je svaki element iz B_1 okomit na svaki element iz B_2 pa je Dynkinov dijagram nepovezan.
Obratno, pretpostavimo da je Dynkinov dijagram za R nepovezan. Tada se baza B može rastaviti kao $B = B_1 \cup B_2$ gdje su svi iz B_1 okomiti na sve iz B_2 (s obzirom da ne postoji brid koji bi povezivao te korijene). Dakle, E je ortogonalna direktna suma vektorskih prostora $E_1 = \mathrm{Span}\, R_1$ i $E_2 = \mathrm{Span}\, R_2$ pa je E reducibilan. ■

Pokazuje se da ako dva sistema korijena imaju isti Dynkinov dijagram da su onda oni izomorfni.

Propozicija 1.29 *Neka su (R, E) i (R', E') sistemi korijena. Ako su Dynkinovi dijagrami za R i R' jednaki onda su sistemi korijena izomorfni.*

Dokaz. Možemo odabrati baze $B = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ u R i $B^{'} = \{\alpha_1^{'}, \dots, \alpha_l^{'}\}$ u $R^{'}$ tako da je za svaki i, j vrijedi

$$\langle \alpha_i, \alpha_j \rangle = \langle \alpha_i^{'}, \alpha_j^{'} \rangle$$

Neka je $\varphi\colon E \to E^{'}$ linearni operator koji α_i preslikava u $\alpha_i^{'}$. Po definiciji je ovo izomorfizam vektorskih prostora koji zadovoljava uvijet 2) iz Definicije 1.12. Preostaje dokazati da vrijedi $\varphi(R) = R^{'}$.
Neka je $v \in R$ i $\alpha_i \in B$. Tada vrijedi

$$\varphi(s_{\alpha_i}(v)) = \varphi(v - \langle v, \alpha_i \rangle \alpha_i) = \varphi(v) - \langle v, \alpha_i \rangle \alpha_i^{'}.$$

Želimo pokazati da je $\langle v, \alpha_i \rangle = \langle \varphi(v), \alpha_i^{'} \rangle$. Da bismo to pokazali, izrazimo v kao linearnu kombinaciju korijena $\alpha_1, \dots, \alpha_l$ i iskoristimo da je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ linearan u prvoj varijabli. Dakle, zadnja jednadžba se može zapisati kao

$$\varphi(s_{\alpha_i}(v)) = s_{\alpha_i^{'}}(\varphi(v)).$$

Po Teoremu 1.21 3) proste refleksije s_{α_i} generiraju $W(R)$. Dakle, slika po φ orbite od v pri djelovanju Weylove grupe $W(R)$ je sadržana u orbiti $\varphi(v)$ pri djelovanju Weylove grupe $W(R^{'})$. Nadalje, po tom istom teoremu iz tvrdnje 2) slijedi da je $\{g(\alpha) : g \in W_0, \alpha \in B\} = R$, i kako je $\varphi(B) = B^{'}$ mora biti $\varphi(R) \subset R^{'}$. Primjenjujući iste argumente na inverz od φ pokaže se da je $\varphi^{-1}(R^{'}) \subset R$. Dakle vrijedi $\varphi(R) = R^{'}$. ∎

Ako je Dynkinov graf nepovezan, može se podijeliti na komponente povezanosti. Ako numeriramo vrhove tako da su svi koji su u istoj komponenti povezanosti numerirani uzastopno, Cartanova matrica postaje dijagonalna blok matrica oblika

$$\begin{pmatrix} \star & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \star & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \star \end{pmatrix}$$

gdje svaki blok na dijagonali prestavlja jednu komponentu povezanosti. Baza $B = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_l\}$ će se particionirati na podskupove na odgovarajući način tako da su korijeni u različitim podskupovima okomiti jedni na druge.

Poglavlje 2

Klasifikacija sistema korijena

U prethodnom poglavlju smo vidjeli da Dynkinov dijagram određuje sistem korijena do na izomorfizam. Također, ako imamo dva izomorfna sistema korijena onda će oni imati iste Dynkinove dijagrame (s drugačijim oznakama vrhova, ali esencijalno će biti isti) što slijedi iz Propozicije 1.24. Dakle, za klasifikaciju sistema korijena dovoljno je klasificirati sve Dynkinove dijagrame. Iz prethodnog poglavlja je također vidljivo da je dovoljno klasificirati ireducibilne sisteme korijena tj. povezane Dynkinove dijagrame.

Pokazat ćemo da postoje četiri beskonačne familije sistema korijena i pet iznimaka, tj. dokazat ćemo sljedeći teorem.

Teorem 2.1 *Neka je R ireducibilan sistem korijena ranka l, tada je njegov Dynkinov dijagram jedan od sljedećih:*

A_l *za* $l \geq 1$:

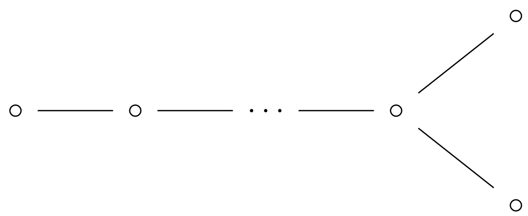
$$\circ \text{------} \circ \text{------} \cdots \text{------} \circ \text{------} \circ$$

B_l *za* $l \geq 2$:

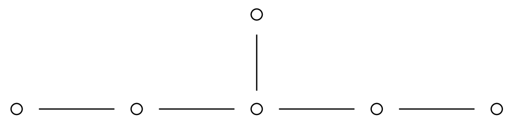
$$\circ \text{------} \circ \text{------} \cdots \text{------} \circ \Longrightarrow \circ$$

C_l *za* $l \geq 3$:

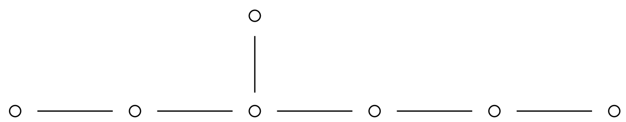
D_l *za* $l \geq 4$:



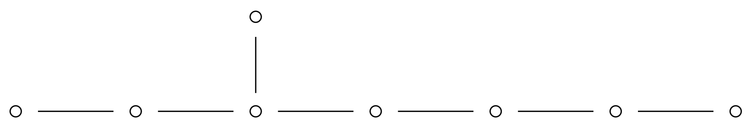
E_6



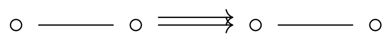
E_7



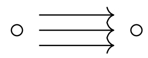
E_8



F_4



G_2



Primjetimo da u gornjoj listi nema ponavljanja, npr. C_2 nije na listi jer je isti kao B_2 pa su pripadni sistemi korijena izomorfni.

Dokaz teorema ćemo dati kroz deset koraka. Za početak ćemo tražiti Coxeterove grafove tj. zanemarit ćemo duljine korijena pa možemo smatrati da imamo sve jedinične vektore. Također ćemo promatrati općenitiji skup vektora tzv. dopustiv skup, ako normiramo sve korijene, baza sistema korijena će biti primjer dopustivog skupa.

Definicija 2.2 *Neka je E realni unitarni prostor. $A \subseteq E$ je dopustiv ako se sastoji od linearno nezavisnih vektora $v_1, \dots v_n$ koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:*
1) $(v_i, v_i) = 1$ za sve i te $(v_i, v_j) \leq 0$ ako je $i \neq j$.
2) Ako je $i \neq j$, onda je $4(v_i, v_j)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$.
Dopustivom skupu pridružujemo graf Γ_A kojem su vrhovi vektori $v_1, \dots v_n$, gdje su v_i i v_j povezani s $d_{ij} := 4(v_i, v_j)^2$ bridova za $i \neq j$.

Očito je podskup svakog dopustivog skupa opet dopustiv skup te ako normiranu bazu sistema korijena gledamo kao dopustiv skup onda je graf pridružen tom skupu upravo Coxeterov graf.

Želimo odrediti koji sve povezani grafovi mogu biti pridruženi dopustivom skupu.

1) Ako izbacimo neki v_i iz A, dobit ćemo opet dopustiv skup čiji graf dobijemo iz Γ_A uklanjanjem odgovarajućeg vrha i svih njemu incidentnih bridova.

2) Broj parova vrhova u Γ_A povezanih barem jednim bridom je strogo manji od $n = |A|$.
Neka je $v = \sum_{i=1}^{n} v_i$. Kako su $v_1, \dots v_n$ linearno nezavisni to je $v \neq 0$. Sada je

$$0 < (v, v) = n + 2\sum_{i<j}(v_i, v_j). \tag{2.1}$$

Neka su i, j par različitih indekasa tako da je $(v_i, v_j) \neq 0$ tj. neka postoji brid između v_i i v_j. Tada je

$$4(v_i, v_j)^2 = 1, 2 \text{ ili } 3$$

pa je posebno $2(v_i, v_j) \leq -1$. Sada imamo

$$\sum_{i<j}(v_i, v_j) \leq -\frac{1}{2}\sum_{i<j} 1$$

Iz nejednakosti 2.1 slijedi:

$$2\sum_{i<j}(v_i, v_j) > -n$$

$$\sum_{i<j}(v_i, v_j) > -\frac{n}{2}$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{i<j} 1 > -\frac{n}{2}$$

$$\sum_{i<j} 1 < n$$

Dakle, broj parova spojenih barem jednim bridom je strogo manji od n.

3) Γ_A ne sadrži cikluse.

Pretpostavimo suprotno tj. da Γ_A sadržava neki ciklus. Neka je $A' \subset A$ koji sadržava vektore koji su u tom ciklusu. Tada je A' dopustiv skup koji ima $|A|$ ili više bridova što je kontradikcija s 2).

4) Svaki vrh može biti incidentan s najviše 3 brida.

Neka je v proizvoljan vrh u Γ_A i neka su $v_1, \ldots v_k$ različiti vrhovi s kojima je v spojen (s $1, 2$ ili 3 brida) tj. $(v, v_i) < 0$ za sve $i \in \{1, \ldots, k\}$. Kako Γ_A ne sadrži niti jedan ciklus po 3), mora biti $(v_i, v_j) = 0$ za $i \neq j$. Promotrimo potprostor U generiran s $v, v_1, \ldots v_k$. Po Gram-Schmidtovom postupku možemo $v_1, \ldots v_k$ proširiti do ortonormirane baze npr. dodavajući v_0, nužno je $(v, v_0) \neq 0$. Sada v možemo prikazati preko te ortonormirane baze tj.

$$v = \sum_{i=0}^{k}(v, v_i)v_i.$$

Po pretpostavci je v jedinični vektor pa dobivamo:

$$\begin{aligned} 1 = (v, v) &= \sum_{i=0}^{k} (v, v_i)^2 \\ \implies 1 &> \sum_{i=1}^{k} (v, v_i)^2 \\ \implies 4 &> \sum_{i=1}^{k} 4(v, v_i)^2 \end{aligned}$$

Broj $4(v, v_i)^2$ predstavlja broj bridova koji spaja v i v_i pa zaključujemo da v može biti incidentan s najviše 3 brida.

5) Ako povezani graf Γ_A sadrži trostruki brid, to može biti samo G_2 (Coxeterov).

$$\circ \equiv \circ$$

Ovo slijedi direktno iz 4).

6) (Ova tvrdnja je poznata kao Shrinking lema ili Lema o skupljanju) Neka je $\{v_1, \dots, v_k\} \subset A$ takav da je njegov graf (koji je podgraf od Γ_A) lanac tj. oblika

$$\circ \text{---} \circ \text{---} \cdots \text{---} \circ \text{---} \circ$$

Neka je $A' = (A \setminus \{v_1, \dots, v_k\}) \cup \{v\}, v = \sum_{i=1}^{k} v_i$. Tada je A' dopustiv. Graf $\Gamma_{A'}$ se dobije iz Γ_A tako da se cijeli lanac zamijeni jednim vrhom.

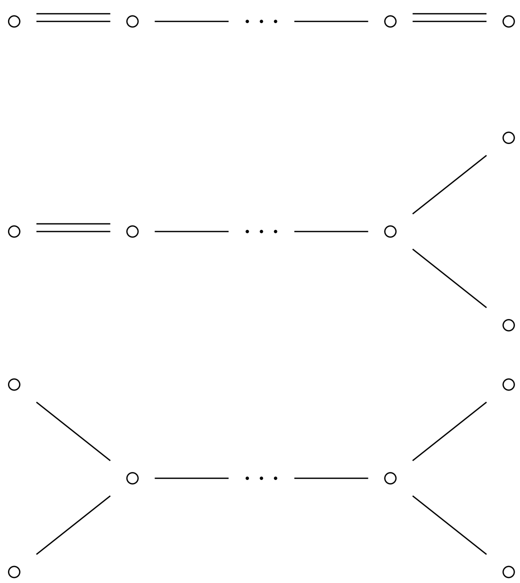
A' je očito linearno nezavisan. Po pretpostavci je $4(v_i, v_{i+1})^2 = 1$ za $1 \leq i \leq k$ pa je $2(v_i, v_{i+1}) = -1$ za $1 \leq i \leq k$ i $(v_i, v_j) = 0$ za $i \neq j$ inače. Iz ovoga dobivamo

$$(v, v) = k + 2 \sum_{i=1}^{k-1} (v_i, v_{i+1}) = k - (k - 1) = 1$$

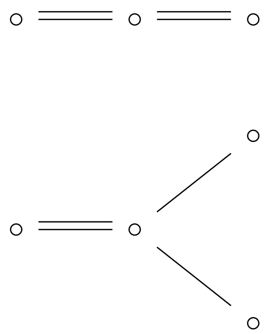
tj. v je jedinični vektor.

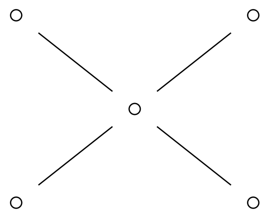
Neka je $w \in A$ i $w \neq v_i$ za $1 \leq i \leq k$. Tada je w incidentan s najviše jednim od $\{v_1, \ldots, v_k\}$ jer bismo inače imali ciklus. Dakle, mora vrijediti ili $(w, v) = 0$ ili $(w, v) = (w, v_i)$ za neki $1 \leq i \leq k$ pa je $4(w, v)^2 \in \{0, 1, 2, 3\}$ pa A' zadovoljava uvjete dopustivog skupa. Ova zapažanja određuju i $\Gamma_{A'}$.

7) Γ_A ne sadrži podgraf oblika:



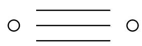
Pretpostavimo da se neki od ovih grafova javlja u Γ_A. Tada je to graf dopustivog skupa zbog 1). Sada primjenjujući 6) možemo u svakom slučaju lanac zamijeniti jednim vrhom. Tim postupkom dobivamo sljedeće grafove:

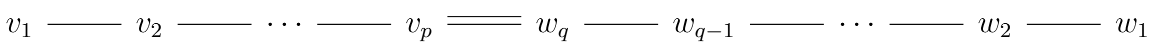


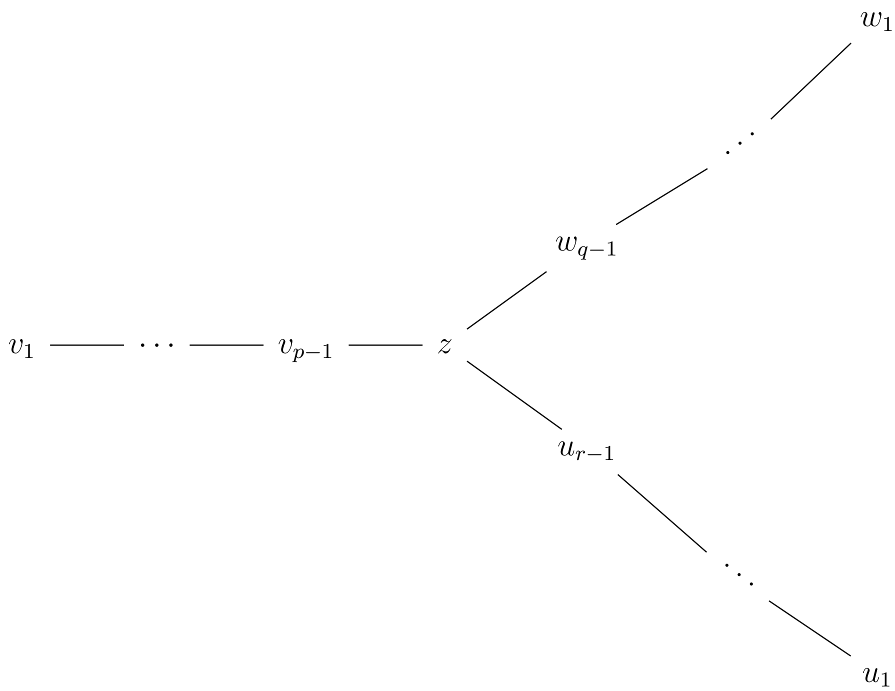


Što je u kontradikciji s 4).

8) Svaki povezani graf Γ_A dopustivog skupa ima jedan od sljedećih oblika:



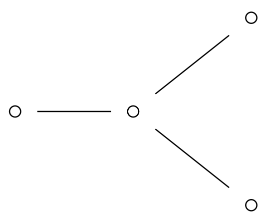




Jedini graf koji može imati 3 brida je G_2 po 5). Povezani graf koji sadrži više dvostrukih bridova bi sadržavao podgraf

$$\circ = \circ - \cdots - \circ = \circ$$

što po 7) ne može biti. Dakle, najviše se jedan dvostruki brid može pojaviti. Nadalje, ako Γ_A sadržava dvostruki brid, ne može sadržavati granu zbog 7). (Grana je vrh koji je incidentan s tri ili više bridova, po 4) je tada taj vrh incidentan s točno tri brida).



Dakle, treći graf nacrtan gore je jedina mogućnost s obzirom da ne može sadržavati ni cikluse. Ako Γ_A sadržava jedino jednostruke bridove i ako ne sadržava grane onda mora biti lanac. Nadalje, graf može sadržavati najviše jednu granu pa je četvrti graf jedina preostala mogućnost.

9) Jedini povezani graf Γ_A drugog tipa iz 8) je Coxeterov graf F_4

$$\circ - \circ = \circ - \circ$$

ili Coxeterov graf $B_n (= C_n)$

$$\circ - \circ - \cdots - \circ = \circ$$

Neka je $v = \sum_{i=1}^{p} i v_i$ i neka je $w = \sum_{i=1}^{q} i w_i$. Po pretpostavci je $2(v_i, v_{i+1}) = -1 = 2(w_i, w_{i+1})$ i ostali su parovi okomiti, dakle

$$(v, v) = \sum_{i=1}^{p} i^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i(i+1) = p^2 - \sum_{i=1}^{p-1} i = \frac{p(p+1)}{2}$$

$$(w,w) = \frac{q(q+1)}{2}.$$

Kako je $4(v_p, w_q)^2 = 2$ također imamo

$$(v,w)^2 = p^2q^2(v_p, w_q)^2 = \frac{p^2q^2}{2}$$

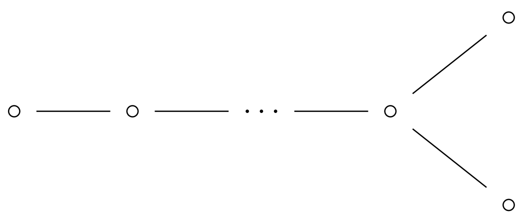
Kako su v i w linearno nezavisni po Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky nejednakosti imamo $(v,w)^2 < (v,v)(w,w)$ tj.

$$\frac{p^2q^2}{2} < \frac{p(p+1)q(q+1)}{4}$$

dakle, $(p-1)(q-1) < 2$.

Mogućnosti su $p = q = 2$ (to je F_4) ili $p = 1$ i q proizvoljan odnosno $q = 1$ i p proizvoljan (to su $B_n (= C_n)$).

10) Jedini povezani graf Γ_A četvrtog tipa u 8) je Coxeterov graf D_n



ili Coxeterov graf E_n za $n \in \{6, 7, 8\}$

Neka su $v = \sum_{i=1}^{p} iv_i$, $w = \sum_{i=1}^{q} iw_i$ i $u = \sum_{i=1}^{r} iu_i$. Očito je da su v, w i u međusobno ortogonalni i linearno nezavisni vektori te da z nije u njihovoj linearnoj ljusci. Neka su $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ kutovi koje z zatvara s v, w i u redom. Slično kao u dokazu tvrdnje 4) dokaže se da je $cos^2\theta_1 + cos^2\theta_2 + cos^2\theta_3 < 1$. Može se pokazati da je:

$$\begin{aligned} cos^2\theta_1 &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p}) \\ cos^2\theta_2 &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{q}) \\ cos^2\theta_3 &= \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r}). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Tada je

$$cos^2\theta_1 + cos^2\theta_2 + cos^2\theta_3 = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{r}) < 1$$

Dakle, vrijedi

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1. \tag{2.3}$$

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\frac{1}{p} \leq \frac{1}{q} \leq \frac{1}{r} \leq \frac{1}{2}$ (ako je neki od p, q ili r jednak 1 onda je to tip A_n). Zbog nejednakosti 2.3 vrijedi $\frac{3}{2} \geq \frac{3}{r} > 1$ dakle, $r = 1$. Tada je $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2}$, $\frac{2}{q} > \frac{1}{2}$ i $2 \leq q < 4$.
Ako je $q = 3$ onda je $\frac{1}{p} > \frac{1}{6}$ i nužno $p < 6$. Dakle jedine moguće trojke (p, q, r) su $(p, 2, 2) = D_n; (3, 3, 2) = E_6; (4, 3, 2) = E_7; (5, 3, 2) = E_8$.

Sada kada smo odredili koji sve grafovi mogu biti grafovi dopustivog skupa lako je odrediti sve moguće Dynkinove grafove tj. dovršiti dokaz Teorema 2.1. Pokazali smo da sve grafove dopustivog skupa možemo pronaći među Coxeterovim grafovima tipa $A - G$. Neka je Γ neki Dynkinov dijagram, tada njegov pripadni Coxeterov graf mora biti neki od tipova $A - G$. Ako Γ nema dvostrukih bridova onda se Coxeterov i Dynkinov dijagram poklapaju pa je to jedan od grafova izlistan u Teoremu 2.1. Ako Γ ima dvostruki brid onda postoje dvije mogućnosti za pripadni Coxeterov graf, u slučaju B_2 i F_4 dobijemo esencijalno isti graf bez obzira kako usmjerimo strelicu, a u slučajevima B_n i C_n za $n \geq 3$ imamo dvije različite opcije ovisno kako usmjerimo strelicu. Ako Γ ima trostruki brid, onda je to G_2. Time je dokazan Teorem 2.1 čiju ćemo važnost i primjenu vidjeti u sljedećem poglavlju.

Može se pokazati da svaki od tipova $A - G$ odgovara nekom sistemu korijena R. Konstrukcije tipova $A - G$ se mogu pronaći u [1] i [3].

Primjer 2.3 *Pripadne Cartanove matrice za svaki tip se jednostavno pronađu,* *navest ćemo samo primjer za tip A_l.*

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Poglavlje 3

Definicija i svojstva Liejevih algebri

3.1 Osnovni pojmovi

U ovom odjeljku ćemo navesti definicije i osnovne pojmove vezane uz Liejeve algebre. Također ćemo dati neka svojstva bez dokaza koji se mogu naći u [3] ili [4].

Definicija 3.1 *Liejeva algebra je vektorski prostor* L *nad poljem* $\mathbb{F}$ *na kojem je definirana bilinearna operacija, Liejeva zagrada* $L \times L \to L, \quad (x, y) \mapsto [x, y]$ *koja zadovoljava sljedeća svojstva:*
L1) $[x, x] = 0$ *za sve* $x \in L$,
L2) $[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0$ *za sve* $x, y, z \in L$.
Svojstvo L2) je poznatije kao Jakobijev identitet.
Liejeva zagrada $[x, y]$ *naziva se komutator od* x *i* y.

Zbog bilinearnosti imamo da je

$$0 = [x + y, x + y] = [x, x] + [x, y] + [y, x] + [y, y] = [x, y] + [y, x] \tag{3.1}$$

pa vrijedi $[x, y] = -[y, x]$

Liejeva podalgebra od L je vektorski potprostor $K \subseteq L$ takav da je $[x, y] \in K$ za sve $x, y \in K$.

Ideal Liejeve algebre L je vektorski potprostor I od L takav da je $[x, y] \in I$ za sve $x \in L, y \in I$. Zbog 3.1 ne razlikujemo lijeve i desne ideale.

Promatrat ćemo samo konačnodimenzionalne Liejeve algebre.

Navedimo primjere Liejevih algebri.

Primjer 3.2 *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad $\mathbb{F}$. Označimo s $L(V)$ skup svih linearnih operatora na V. Ovo je ponovno vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i postaje Liejeva algebra stavljajući*

$$[x, y] := x \circ y - y \circ x \quad za\ x, y \in Ł(V),$$

gdje $\circ$ označava kompoziciju lineranih operatora. Ako umjesto linearnih operatora promatramo matrice, dobijemo prostor $\mathrm{gl}(n, \mathbb{F})$, gdje je Liejeva zagrada dana s $[x, y] = xy - yx$, pri čemu je xy uobičajeni produkt matrica. Ove dvije algebre su esencijalno jednake.

Primjer 3.3 *Neka je $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ potprostor od $\mathrm{gl}(n, \mathbb{F})$ koji sadrži sve matrice kojima je trag jednak 0. Liejeva zagrada je također dana sa $[x, y] = xy - yx$. $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ je Liejeva podalgebra od $\mathrm{gl}(n, \mathbb{F})$ jer je za sve $x, y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$, $\mathrm{tr}[x, y] = \mathrm{tr}(xy - yx) = \mathrm{tr}(xy) - \mathrm{tr}(yx) = 0$ pa je $[x, y] \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$ za sve $x, y \in \mathfrak{sl}(n, \mathbb{F})$. Ova Liejeva algebra se naziva specijalna linearna algebra. Zbog važnosti ćemo istaknuti $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, čija je baza dana matricama:*

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ i\ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Primjetimo da vrijede sljedeće relacije:

$$
\begin{aligned}
[h, e] &= 2e \\
[h, f] &= -2f \\
[e, f] &= h
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

Definicija 3.4 *Neka su L_1 i L_2 Liejeve algebre. Funkcija $\varphi\colon L_1 \to L_2$ se zove homomorfizam Liejevih algebri ako je φ linearan operator i vrijedi*

$$\varphi([x, y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \;\; \textit{za sve } x, y \in L_1.$$

Funkcija $\varphi\colon L_1 \to L_2$ se zove izomorfizam Liejevih algebri ako je φ bijektivni homomorfizam Liejevih algebri. Ako postoji izomorfizam $\varphi\colon L_1 \to L_2$ onda kažemo da su L_1 i L_2 izomorfne.

Neka su I i J ideali Liejeve algebre L. Definiramo produkt ideala

$$[I, J] = \mathrm{Span}\{[x, y] : x \in I, y \in J\},$$

lako se pokaže da je $[I, J]$ ideal.

Liejeva algebra je abelova ako je $[L, L] = 0$ tj. ako je $[x, y] = 0$ za sve $x, y \in L$.

Definiramo niz

$$L^1 = L, \qquad L^{n+1} = [L^n, L] \text{ za } n \geq 1,$$

svaki L^n je ideal u L i vrijedi $L = L^1 \supset L^2 \supset L^3 \supset \cdots$ Primjetimo da je L abelova ako i samo ako je $L^2 = 0$.

Definicija 3.5 *Kažemo da je L nilpotentna ako postoji $n \geq 1$ tako da je $L^n = 0$.*

Svaka abelova Liejeva algebra je nilpotentna.

Nadalje, definiramo niz

$$L^{(0)} = L \qquad L^{(n+1)} = [L^{(n)}, L^{(n)}] \text{ za } n \geq 0,$$

svaki $L^{(n)}$ je ideal u L i vrijedi $L = L^{(0)} \supset L^{(2)} \supset L^{(3)} \supset \cdots$.

Definicija 3.6 *Kažemo da je L rješiva ako postoji $n \geq 0$ tako da je $L^{(n)} = 0$.*

Definicija 3.7 *Kažemo da je L prosta ako nije abelova i nema pravih ideala, tj. jedini ideali su L i 0.*

Proste Liejeve algebre možemo smatrati "gradivnim materijalom", tj. kao one algebre koje se ne mogu rastaviti na manje algebre.

Definicija 3.8 *Kažemo da je L poluprosta ako postoje ideali $L_1, \dots, L_n$ od L tako da je*

$$L = \bigoplus_{i=1}^{n} L_i$$

gdje je svaki L_i prosta Liejeva algebra.

Sada vidimo da je za klasifikaciju poluprostih Liejevih algebri dovoljno klasificirati proste Liejeve algebre.

Definicija 3.9 *Reprezentacija Liejeve algebre L nad $\mathbb{F}$ je homomorfizam Liejevih algebri $\varphi\colon L \to gl(V)$ gdje je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.*

Primjer 3.10 *Preslikavanje $ad\colon L \to \mathrm{gl}(L), \quad (\operatorname{ad} x)y = [x, y]$ je homomorfizam Liejevih algebri pa je* ad *reprezentacija od L gdje je $V = L$, nazivamo je adjungirana reprezentacija. Primjetimo da je restrikcija od* ad *također reprezentacija bilo koje podalgebre od L nad L.*

Definicija 3.11 *Neka je L Liejeva algebra nad $\mathbb{F}$. L-modul je vektorski prostor V nad $\mathbb{F}$ zajedno s preslikavanjem*

$$L \times V \to V \qquad (x, v) \mapsto x \cdot v$$

tako da su zadovoljena sljedeća svojstva:

M1) $(x, v) \mapsto x \cdot v$ je linearan u obje varijable

M2) $[x, y] \cdot v = x \cdot (y \cdot v) - y \cdot (x \cdot v)$ za sve $x, y \in V$.

Reprezentacije i L-moduli su različiti načini za opisati iste strukture. Ako imamo reprezentaciju $\varphi\colon L \to \mathrm{gl}(V)$ onda V postaje L-modul stavljajući

$$x \cdot v := \varphi(x)(v)$$

za $x \in L, v \in V$. Obratno, ako je V L-modul onda možemo V smatrati reprezentacijom stavljajući $\varphi\colon L \to \mathrm{gl}(V)$ gdje je $\varphi(x)$ linearno preslikavanje $v \mapsto x \cdot v$.

3.2 Engelov i Liejev teorem

Engelov i Liejev teorem navodimo zbog važnosti bez dokaza koji se također mogu naći u [3] i [4].

Kažemo da je linearni operator φ nilpotentan ako postoji $r \geq 1$ tako da je $\varphi^r = 0$.

Teorem 3.12 *(Engelov teorem) Neka je V vektorski prostor i L Liejeva podalgebra od $\mathrm{gl}(V)$ takva da je svaki element iz L nilpotentni linearni operator. Tada postoji baza od V takva da je svaki element iz L reprezentiran strogo gornje trokutastom matricom.*

Teorem 3.13 *(Engelov teorem, druga verzija) Liejeva algebra L je nilpotentna ako i samo ako je za sve $x \in L$ linearni operator* $\operatorname{ad} x \colon L \to L$ *nilpotentan.*

Teorem 3.14 *(Liejev teorem) Neka je V n-dimenzionalni kompleksni vektorski prostor i neka je L rješiva Liejeva podalgebra od* $\mathrm{gl}(V)$*. Tada postoji baza od V u kojoj je svaki element iz L reprezentiran gornje trokutastom matricom.*

Poglavlje 4

Killingova forma

U prvom poglavlju smo vidjeli da ako želimo definirati sistem korijena potrebno je imati realan unitaran prostor tj. definiran skalarni produkt na nekom realnom vektorskom prostoru. U ovom odjeljku ćemo definirati Killingovu formu koja će nas dovesti do željenog skalarnog produkta i navest ćemo neke rezultate bez dokaza (mogu se pronaći u [4]) koji kazuju kako se uz pomoć Killingove forme mogu provjeriti neka svojstva Liejevih algebri.

Definicija 4.1 *Neka je L kompleksna Liejeva algebra. Killingova forma je preslikavanje $(\cdot,\cdot)\colon L \times L \to \mathbb{C}$ zadano s $(x, y) = \mathrm{tr}(\mathrm{ad}\, x \circ \mathrm{ad}\, y)$.*

Killingova forma je bilinearna zbog svojstava traga i preslikavanja ad, simetrična je jer je $\mathrm{tr}\, AB = \mathrm{tr}\, BA$ te također vrijedi $([x, y], z) = (x, [y, z])$ za sve $x, y, z \in L$. To svojstvo se zove invarijantnost forme.

Napomena 4.2 *Od sada pa nadalje u tekstu $(\cdot,\cdot)$ označava Killingovu formu.*

Za svaki potprostor M od L definiramo $M^\perp = \{x \in L : (x, y) = 0 \text{ za sve } y \in M\}$. $M^\perp$ je također potprostor te ako je I ideal u L onda je $I^\perp$ također ideal u L. Kažemo da je Killingova forma od L nedegenerirana ako je $L^\perp = 0$ tj. ako iz $(x, y) = 0$ za svaki $y \in L$ slijedi da je $x = 0$.

Teorem 4.3 *Kompleksna Liejeva algebra L je rješiva ako i samo ako je $([x, y], z) = 0$ za sve $x, y, z \in L$.*

Skica dokaza. Neka je L rješiva. Tada po Teoremu 3.14 postoji baza od L u kojoj je svaki $\operatorname{ad} x$ gornje trokutasta matrica. Tada je $\operatorname{ad}[x, y] = [\operatorname{ad} x, \operatorname{ad} y]$ strogo gornje trokutasta matrica. Dakle, $\operatorname{ad}[x, y] \circ \operatorname{ad} z$ je strogo gornje trokutasta. Sada slijedi da je $([x, y], z) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad}[x, y] \circ \operatorname{ad} z = 0$. Obratno, neka je $([x, y], z) = 0$ za sve $x, y, z \in L$. Može se pokazati da ako je $\operatorname{tr}(\operatorname{ad}[x, y] \circ \operatorname{ad} z) = 0$ za sve $x, y, z \in L$ da je onda $\operatorname{ad} L'$ rješiva. Sada je L' rješiva pa je L rješiva. ■

Teorem 4.4 *Killingova forma nilpotentne Liejeve algebre je nulforma.*

Dokaz. Neka je L nilpotentna Liejeva algebra. Tada po Teoremu 3.12 postoji baza od L takva da je za sve $x \in L$ matrica od $\operatorname{ad} x$ s obzirom na tu bazu strogo gornje trokutasta. Sada je $\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y$ strogo gornje trokutasta matrica za sve $x, y \in L$ pa je $(x, y) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} x \circ \operatorname{ad} y) = 0$ tj. Killingova forma nilpotentne Liejeve algebre je nulforma. ■

Teorem 4.5 *Killingova forma od L je nedegenerirana ako i samo ako je L poluprosta.*

Skica dokaza. Neka je L poluprosta Liejeva algebra. Tada je L direktna suma prostih tj. $L = L_1 \oplus \cdots \oplus L_t$, gdje su L_i proste Liejeve algebre za $i = 1, \ldots, t$. Ako je $k = (\cdot, \cdot)$ Killingova forma za L onda je k ortogonalna direktna suma formi tj. $k = k_1 \oplus \cdots \oplus k_t$ gdje je $k_i = k|_{L_i \times L_i}$. Pokažimo sada da je k nedegenerirana. Neka je $(x, y) = 0$ za svaki $y \in L$. Tada je $(x_1 + \cdots + x_t, y_1 + \cdots + y_t) = 0$ tj. $(x_1, y_1) + \cdots + (x_t, y_t) = 0$ za svaki $y_i \in L_i$, $i = 1, \ldots, t$. Odavde slijedi da je $(x_i, y_i) = 0$ za sve i. Mora biti $x_i = 0$ za sve i jer bi inače u L_i postojao ne nula pravi ideal $L_i^\perp$ što ne može biti jer je L_i prosta. Dakle, zaključujemo da je $x = 0$ tj. da je Killingova forma za L nedegenerirana. Obrat se dokaže obratom po kontrapoziciji. Prvo se pretpostavi da L nije poluprosta i koristeći činjenicu da onda postoji ne nula maksimalni rješivi ideal u L se zaključi da Killingova forma mora biti degenerirana. ■

Poglavlje 5

Cartanova podalgebra i Cartanova dekompozicija

U ovom odjeljku je cilj odrediti sistem korijena za određenu Liejevu algebru što je ključan korak u klasifikaciji konačnodimenzionalnih prostih Liejevih algebri budući da smo u prethodnom poglavlju klasificirali sve sisteme korijena. Od sada promatramo samo konačnodimenzionalne poluproste kompleksne Liejeve algebre.

Definicija 5.1 *Neka je φ reprezentacija od L na kompleksnom vektorskom prostoru V. Za $\alpha \in L^*$ definiramo*

$$V_\alpha := \{v \in V : (\varphi(h) - \alpha(h))^n v = 0 \text{ za sve } h \in L \text{ za neki } n = n(h, v) \in \mathbb{N}\}.$$

Ako je $V_\alpha \neq 0$ onda V_α nazivamo generalizirani težinski prostor, a α nazivamo težinom.

Teorem 5.2 *Neka je L nilpotentna Liejeva algebra i φ reprezentacija na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Tada se V može rastaviti kao direktna suma generaliziranih težinskih prostora, tj. postoje težine α_i i* *težinski prostori V_{α_i} tako da je*

$$V = \bigoplus_i V_{\alpha_i}.$$

Dokaz. Može se naći u [4]. ■

Dekompozicija iz prethodnog teorema se zove dekompozicija po težinskim prostorima od V.

Definicija 5.3 *Neka je L poluprosta kompleksna Liejeva algebra. Kažemo da je H Cartanova podalgebra od L ako je H maksimalna abelova podalgebra od L za čije je elemente $h \in H$ operator* $\operatorname{ad} h$ *dijagonalizabilan.*

Napomena 5.4 *Primjetimo da su* $\operatorname{ad} h$ *za $h \in H$, gdje je H Cartanova podalgebra simultano dijagonalizabilni s obzirom da su to operatori koji su dijagonalizabilni i međusobno komutiraju.*

Napomena 5.5 *Gornja definicija Cartanove podalgebre je dana samo za kompleksne poluproste Liejeve algebre. Ona se može definirati puno općenitije, ali za potrebe ovoga rada je gornja definicija dovoljna.*

Neka je L Liejeva algebra i H Cartanova podalgebra od L. Kako je H abelova to je nilpotentna pa po prethodnom teoremu imamo dekompoziciju po težinskim prostorima

$$L = \bigoplus_\lambda L_\lambda,$$

gdje je

$$L_\lambda = \{x \in L : ((\operatorname{ad} h) - \lambda(h))^n x = 0 \text{ za svaki } h \in H \text{ i za neki } n = n(h, x)\}$$

i $\lambda \in H^*$, dakle, ovdje za reprezentaciju φ gledamo adjungiranu reprezentaciju tj. $\operatorname{ad}\colon H \to \operatorname{gl}(L)$.

Može se pokazati da za svaku konačnodimenzionalnu kompleksnu poluprostu Liejevu algebru postoji Cartanova podalgebra te da su sve Cartanove podalgebre jedne takve Liejeve algebre izomorfne. Također vrijedi da je $H = L_0$.

Koristeći dekompoziciju po težinskim prostorima, možemo L rastaviti kao

$$L = H \oplus \big(\bigoplus_{\lambda \in R} L_\lambda\big),$$

gdje je R skup svih ne nula težina λ za koje je $L_\lambda \neq 0$. Takve λ nazivamo korijenima od L s obzirom na H, a L_λ korijenskim prostorima od λ. Ova dekompozicija se naziva korijenska dekompozicija ili Cartanova dekompozicija s obzirom na H.

Primjer 5.6 *Promotrimo $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ i odredimo Cartanovu dekompoziciju. Prvo promotrimo Killingovu formu. Želimo pokazati da je nedegenerirana pa će po Teoremu 4.5 slijediti da je $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ poluprosta. Neka su e, f i h kao u Primjeru 3.3. Lako se izračuna iz relacija 3.2 da je*

$$\operatorname{ad} e = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \operatorname{ad} f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \ i \ \operatorname{ad} h = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Odavde možemo izračunati

$$(h, h) = \operatorname{tr}(\operatorname{ad} h \circ \operatorname{ad} h) = \operatorname{tr} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 8$$

te se analogno dobiju sljedeće jednakosti

$$(e, e) = 0, \ (f, f) = 0, \ (e, f) = 4, \ (e, h) = 0 \ i \ (f, h) = 0.$$

Neka je $x \in L$ proizvoljan i pretpostavimo da je $(x, y) = 0$ za svaki $y \in L$. Kako su e, f i h bazni vektori to postoje neki skalari α, β i γ takvi da je $x = \alpha e + \beta h + \gamma f$. Sada je

$$0 = (x, e) = (\alpha e + \beta h + \gamma f, e) = \alpha(e, e) + \beta(h, e) + \gamma(f, e) = 4\gamma$$

pa je $\gamma = 0$. Slično se dobije $0 = (x, h) = 8\alpha$ i $0 = (x, f) = 4\alpha$ pa je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ tj. $x = 0$. Dakle, Killingova forma za L je nedegenerirana pa je L poluprosta.

Sada možemo odrediti Cartanovu podalgebru i Cartanovu dekompozciju. Cartanova podalgebra za L je prostor koji sadrži sve dijagonalne matrice iz $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$, to je potprostor generiran s $h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, tj. to je potprostor $\mathbb{C}h$. Označimo s H tu podalgebru. To je zaista Cartanova podalgebra jer je maksimalna abelova podalgebra od $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ i $\operatorname{ad} h'$ su dijagonalizabilni za sve $h' \in H$ što se vidi iz relacija 3.2.

Pokažimo da je Cartanova dekompozicija od L s obzirom na H dana s

$$L = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f.$$

Neka su $\lambda_1 \colon H \to \mathbb{C}$ i $\lambda_2 \colon H \to \mathbb{C}$ linearni funkcionali zadani s

$$\lambda_1 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = 2 \text{ i } \lambda_2 \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right) = -2. \tag{5.1}$$

Pokazat ćemo da je λ_1 korijen i odrediti pripadni korijenski prostor, a za λ_2 se postupi analogno. Pretpostavimo da je $(\operatorname{ad} h')x = \lambda_1(h')x$ za svaki $h' \in H$. Ponovno, kako su e, f i h bazni vektori to postoje neki skalari α, β i γ takvi da je $x = \alpha e + \beta h + \gamma f$, pa je $[h, \alpha e + \beta h + \gamma f] = 2\alpha e - 2\gamma f$. Dakle, mora vrijediti $2\alpha e - 2\gamma f = 2(\alpha e + \beta h + \gamma f)$ iz čega slijedi da je $\beta = \gamma = 0$. Zaključujemo da je pripadni korijenski prostor $L_{\lambda_1} = \mathbb{C}e$ (jer smo dobili $\mathbb{C}e =$

$\{x \in L : ((\operatorname{ad} h') - \lambda_1(h'))^n x = 0$ za svaki $h' \in H$ i za neki $n = n(h', x)\}$, u ovom slučaju je to bilo za $n = 1$ i provjerili smo samo na baznom vektoru h što je dovoljno). Analogno se dobije $L_{\lambda_2} = \mathbb{C}f$. Dakle, λ_1 i λ_2 su korijeni tj. $R = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ i odredili smo pripadne korijenske prostore pa je Cartanova dekompozicija od L s obzirom na H dana s

$$L = \mathbb{C}h \oplus \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f.$$

Primjer 5.7 *Općenitije, Cartanova dekompozicija za $L = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$ je dana sa*

$$L = H \oplus \bigoplus_{i \neq j} L_{\varepsilon_i - \varepsilon_j},$$

gdje je H Liejeva podalgebra koja sadrži sve dijagonalne matrice i ε_i su funkcionali $\varepsilon_i \colon H \to \mathbb{C}$, $\varepsilon_i(h) = a_i$ (gdje je a_i i-ti dijagonalni element). Skup svih korijena je $R = \{\pm(\varepsilon_i - \varepsilon_j) : 1 \leq i < j \leq n\}$, a pripadni korijenski prostor $L_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}$ je razapet s e_{ij}.

Sada želimo povezati korijene definirane za Liejeve algebre s sistemom korijena definiranom u prvom poglavlju. Označimo s $H^* = Hom(H, \mathbb{C})$ dualni prostor od H. Koristeći Killingovu formu definiramo preslikavanje $^* \colon H \to H^*$, za dani $h \in H$ definiramo $h^* \in H^*$ s

$$h^*(x) = (h, x) \text{ za sve } x \in H. \tag{5.2}$$

Preslikavanje $h \mapsto h^*$ je izomorfizam vektorskih prostora jer je očito linearno i ako je $h \in H$ iz jezgre tog preslikavanja onda je $(h, x) = 0$ za sve $x \in H$ pa je zbog nedegeneriranosti $h = 0$. Dakle, jezgra je trivijalna. Kako je $\dim H^* = \dim H$ to je ovo preslikavanje bijekcija.

Sada imamo konačan podskup $R \subset H^*$ gdje je R skup svih korijena od L s obzirom na H. Za svaki $\alpha \in R$ postoji jedinstveni element $h'_\alpha \in H$ tako da je $\alpha(x) = (h'_\alpha, x)$ za sve $x \in H$.

Propozicija 5.8 *Vektori* h'_α *za* $\alpha \in R$ *razapinju* H.

Dokaz. vidi u [4]. ■

Propozicija 5.9 *Za sve* $\alpha \in R$ *je* $\dim L_\alpha = 1$.

Dokaz. vidi u [4]. ■

Sada možemo pronaći neki podskup tih vektora koji čini bazu za H. Neka vektori $h'_{\alpha_1}, \ldots, h'_{\alpha_l}$ čine bazu za H.

Označimo s $H_{\mathbb{R}}$ skup svih elemenata oblika

$$\sum_{i=1}^{l} \mu_i h'_{\alpha_i}$$

gdje su $\mu_i \in \mathbb{R}$. $H_{\mathbb{R}}$ je skup svih realnih linearnih kombinacija vektora iz baze za H.

Propozicija 5.10 *Neka je* $x \in H_{\mathbb{R}}$. *Tada je* $(x, x) \in \mathbb{R}$ *i* $(x, x) \geq 0$. *Ako je* $(x, x) = 0$ *onda je* $x = 0$.

Dokaz. vidi [4] ■

Dakle, Killingova forma restringirana na $H_{\mathbb{R}}$ je preslikavanje

$$(\cdot, \cdot)\colon H_{\mathbb{R}} \times H_{\mathbb{R}} \to \mathbb{R}$$

koje je simetrična pozitivno definitna bilinearna forma, tj. Killingovom formom je dan skalarni produkt na $H_{\mathbb{R}}$. S obzirom da je s 5.2 dan izomorfizam prostora H i H^*, označimo s $H^*_{\mathbb{R}}$ sliku od $H_{\mathbb{R}}$ s obzirom na taj izomorfizam. $H^*_{\mathbb{R}}$ je realni vektorski potprostor od H^* razapet s R. Definiramo na $H^*_{\mathbb{R}}$ skalarni produkt s

$$(h_1^*, h_2^*) = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}.$$

Time $H^*_{\mathbb{R}}$ postaje realan unitaran prostor koji sadrži sve korijene $\alpha \in R$.

Sada kada na $H_{\mathbb{R}}^*$ imamo definiranu strukturu realnog unitarnog prostora, može se pokazati da je $(R, H_{\mathbb{R}}^*)$ sistem korijena tj. da zadovoljava sve uvjete Definicije 1.5. Taj dokaz preskačemo zbog opširnosti i tehničke prirode (u Primjeru 5.11 ćemo to provjeriti za $L = \mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$). Na taj način smo poluprostoj Liejevoj algebri pridružili sistem korijena, a sisteme korijena smo klasificirali što će omogućiti klasifikaciju poluprostih Liejevih algebri.

Primjer 5.11 *Kao nastavak na Primjer 5.6 ćemo provjeriti da $(R, H_{\mathbb{R}}^*)$ zadovoljava uvjete Definicije 1.5 tj. da je sistem korijena. Prisjetimo se da je u tom slučaju $R = \{\lambda_1, \lambda_2\}$ gdje su λ_1 i λ_2 linarni funkcionali zadani s 5.1.*
R1) R je očito konačan skup izvodnica za $H_{\mathbb{R}}^*$ jer je $\dim H_{\mathbb{R}}^* = 1$ i ne sadrži nulvektor.
R2) Također vrijedi očito zbog načina na koji su definirani λ_1 i λ_2.
R3) Uočimo prvo da je $\lambda_1 = -\lambda_2$. Sada je

$$\begin{aligned} s_{\lambda_1}(\lambda_1) &= \lambda_1 - 2\frac{(\lambda_1, \lambda_1)}{(\lambda_1, \lambda_1)}\lambda_1 = -\lambda_1 \\ s_{\lambda_1}(\lambda_2) &= s_{\lambda_1}(-\lambda_1) = -s_{\lambda_1}(\lambda_1) = \lambda_1. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Sada se vidi da je $s_\alpha R = R$ za sve $\alpha \in R$, tj. vrijedi R3).
R4) Očito se vidi da je $\langle \lambda_1, \lambda_1 \rangle = 2$ i da je $\langle \lambda_1, \lambda_2 \rangle = -2$. tj. $\langle \alpha, \beta \rangle \in \mathbb{Z}$ za sve $\alpha, \beta \in R$ pa je ispunjen i R4).
Zaključujemo da je $(R, H_{\mathbb{R}}^*)$ zaista sistem korijena. Primjetimo da je to zapravo sistem korijena ranka 1 dan u Primjeru 1.6 i na Slici 1.4. Pripadna Cartanova matrica je $\begin{pmatrix} 2 \end{pmatrix}$, a Dynkinov dijagram $\circ$.

Poglavlje 6

Klasifikacija konačnodimenzionalnih kompleksnih poluprostih Liejevih algebri

Želimo povezati rezultate iz prva dva poglavlja s poluprostim Liejevim algebrama, točnije primjeniti klasifikacijski teorem za sisteme korijena na Liejeve algebre. Sljedeća dva teorema čije dokaze preskačemo zbog opširnosti, omogućavaju primjenu klasifikacije sistema korijena na klasifikaciju kompleksnih poluprostih Liejevih algebri.

Teorem 6.1 *Neka su L_1 i L_2 kompleksne poluproste Liejeve algebre sa sistemima korijena R_1 i R_2 redom. Ako su R_1 i R_2 izomorfni sistemi korijena onda su L_1 i L_2 izomorfne Liejeve algebre.*

Teorem 6.2 *Neka je R sistem korijena. Tada postoji kompleksna poluprosta Liejeva algebra L kojoj je R sistem korijena.*

Ovim teoremima je dana bijektivna veza između sistema korijena i konačno dimenzionalne kompleksne poluproste Liejeve algebre, točnije klase izomorfnih konačnodimenzionalnih poluprostih Liejevih algebri. Dakle, svaka takva Liejeva algebra je jedinstveno određena svojim Dynkinovim dijagramom pa je njihova klasifikacija određena klasifikacijom Dynkinovih dijagrama.

Teorem 6.3 *Poluprosta Liejeva algebra L ima povezan Dynkinov dijagram tj. pripadni sistem korijena je ireducibilan ako i samo ako je prosta.*

Primjetimo da to znači da su svi Dynkinovi dijagrami prostih konačno dimenzionalnih kompleksnih Liejevih algebri dani u Teoremu 2.1 na stranici 21. Kako je svaka poluprosta Liejeva algebra direktna suma prostih, to je sistem korijena za poluprostu zapravo unija sistema korijena za prostu tj. ireducibilnih sistema korijena, a u pripadnom Dynkinovom dijagramu poluproste Liejeve algebre komponente povezanosti su izlistane u Teoremu 2.1.

Za kraj ćemo navesti klasične Liejeve algebre i naglasiti kojoj familiji pripadaju. Već smo se upoznali s $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{C})$, preostaje nam definirati $\mathfrak{so}(n, \mathbb{C})$ i $\mathfrak{sp}(n, \mathbb{C})$.

Neka je $S \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$, tada definiramo Liejevu podalgebru od $\mathrm{gl}(n, \mathbb{C})$ s

$$\mathrm{gl}_S(n, \mathbb{C}) = \{x \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{C}) : x^t S = -Sx\}.$$

Pretpostavimo prvo da je $n = 2l$. Neka je S matrica s $l \times l$ blokovima

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ I_l & 0 \end{pmatrix}.$$

Definiramo $\mathfrak{so}(2l, \mathbb{C}) = \mathrm{gl}_S(2l, \mathbb{C})$. U slučaju $n = 2l + 1$ uzimamo

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_l \\ 0 & I_l & 0 \end{pmatrix}$$

te definiramo $\mathfrak{so}(2l+1,\mathbb{C}) = \mathrm{gl}_S(2l+1,\mathbb{C})$. Ove Liejeve algebre se nazivaju ortogonalne Liejeve algebre.

Liejeve algebre $\mathfrak{sp}(n,\mathbb{C})$ se definiraju samo za parni n. Ako je $n = 2l$ uzmemo

$$S = \begin{pmatrix} 0 & I_l \\ -I_l & 0 \end{pmatrix}$$

i defiramo $\mathfrak{sp}(2l,\mathbb{C}) = \mathrm{gl}_S(2l,\mathbb{C})$. Ove Liejeve algebre se nazivaju simplektičke Liejeve algebre.

Sve klasične Liejeve algebre su proste osim $\mathfrak{so}(2,\mathbb{C})$ i $\mathfrak{so}(4,\mathbb{C})$.

U sljedećoj tablici su izlistani tipovi Dynkinovih dijagrama i pripadne klasične Liejeve algebre.

Tip Dynkinovog dijagrana	Liejeva algebra
$A_n,\ (n \geq 1)$	$\mathfrak{sl}(n+1,\mathbb{C})$
$B_n,\ (n \geq 2)$	$\mathfrak{so}(2n+1,\mathbb{C})$
$C_n,\ (n \geq 3)$	$\mathfrak{sp}(2n,\mathbb{C})$
$D_n,\ (n \geq 4)$	$\mathfrak{so}(2n,\mathbb{C})$

Tablica 6.1: Tablica klasičnih Liejevih algebri i pripadnih Dynkinovih dijagrama

Dakle, zaključujemo da je svaka konačnodimenzionalna prosta kompleksna Liejeva algebra izomorfna jednoj od klasičnih Liejevih algebri (tu se javljaju četiri familije) ili jednoj od pet iznimaka koje označavamo sa $\mathfrak{e}_6, \mathfrak{e}_7, \mathfrak{e}_8, \mathfrak{f}_4$ i $\mathfrak{g}_2$. Kako su konačnodimenzionalne poluproste kompleksne Liejeve algebre direktna suma prostih, to je klasifikacijom prostih završena i klasifikacija poluprostih.

Literatura

[1] James E. Humphreys, Introduction to Lie Algebras and Representation Theory, Springer-Verlag, 1972.

[2] Brian C. Hall Lie Groups, Lie Algebras, and Representations, An Elementary Introduction, Second Edition

[3] Karin Erdmann and Mark J. Wildon, Introduction to Lie Algebras

[4] Roger Carter, Lie Algebras of Finite and Affine Type, Cambridge University Press, 2005.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

Sistemi korijena i poluproste Liejeve algebre

Marcela Mandarić

Sažetak:

Cilj ovog rada je klasificirati konačnodimenzionalne poluproste kompleksne Liejeve algebre. U tu svrhu smo prvo uveli općeniti pojam sistema korijena, baze sistema korijena te Weylove grupe. Svakom sistemu korijena smo pridružili Cartanovu matricu i Dynkinov dijagram koji sadržavaju potrebne informacije o sistemima korijena te omogućavaju klasifikaciju svih sistema korijena. Nadalje smo za konačnodimenzionalnu poluprostu kompleksnu Liejevu algebru definirali Cartanovu podalgebru, Cartanovu dekompoziciju te korijene što nam je omogućilo da primjenimo klasifikacijski teorem za sisteme korijena na Liejeve algebre. To je bilo moguće zbog bijektivne veze između konačnodimenzionalne poluproste kompleksne Liejeve algebre i pripadnog sistema korijena. Prvo smo se sveli na proste i zaključili smo da postoje četiri beskonačne familije takvih algebri i pet iznimaka. Kako su poluproste direktna suma prostih time je bila dovršena klasifikacija i poluprostih.

Ključne riječi:

Dynkinov dijagram, Cartanova podalgebra, Cartanova dekompozicija, klasifikacija

Podatci o radu:

broj stranica 50, broj slika 6, broj tablica 2, broj literaturnih navoda 4, jezik

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

izvornika: Hrvatski

Mentor: *doc. dr. sc. Gordan Radobolja*

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Tea Martinić Bilać

prof. dr. sc. Saša Krešić Jurić

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *15. 09. 2022.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

Root systems and semisimple Lie algebras

Marcela Mandarić

Abstract:

Goal of this paper is to classify finitedimensional semisimple complex Lie algebras. In order to do that we firstly introduce root systems in general, bases of a root system and the Weyl group. We joined a Cartan matrix and Dynkin diagram to each root system which contain important information about the root system and enable the classification of the root systems. Furthermore, we defined Cartan subalgebra, Cartan decomposition and roots for finitedimensional complex semisimple Lie algebra which enabled us to apply classification theorem for root systems on Lie algebras. It was possible because of bijective relation between finitedimensional semisimple complex Lie algebras and it's root system. We firstly explored simple Lie algebras and concluded that there are four infinite families and five exeptional. Since those that are semisimple are a direct sum of simple Lie algebras, classification of those that are semisimple is over by classifying simple ones.

Key words:

Dynkin diagram, Cartan subalgebra, Cartan decomposition, classification

Specifications:

50 pages, 6 figures, 2 tables, 4 references, original in: Croatian

Mentor: *assisstant professor Gordan Radobolja*

Committee:

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

assisstant professor Tea Martinić Bilać

professor Saša Krešić Jurić

This thesis was approved by a Thesis commettee on *15. 09. 2022.*