PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

DOMINKA TADIĆ

# ELIPTIČKA GEOMETRIJA

DIPLOMSKI RAD

Split, travanj 2022.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

# ELIPTIČKA GEOMETRIJA

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Dominka Tadić

Mentor:
doc. dr. sc. Goran Erceg

Split, travanj 2022.

# Uvod

Priča iz 3. st. pr. Kr. o Euklidu, njegovim *Elementima* i njegovom *Petom postulatu* poznata je matematička tema. Često se prilikom izlaganja tog problema kaže da je u 19. st. u ovisnosti o Petom postulatu došlo do otkrića tri geometrije, od kojih se ona u kojoj vrijedi Peti postulat naziva euklidskom, a preostale dvije neeuklidske hiperboličkom i eliptičkom. Ako se ulazi dublje u njihovu teorijsku pozadinu i aksiomatiku, obično se odrade euklidska i hiperbolička geometrija, a eliptička se zanemari. Razlog tome je što se aksiomi euklidske i hiperboličke geometrije mogu sastaviti tako da se razlikuju u samo jednom aksiomu, dok je za eliptičku geometriju potrebno većinu aksioma barem malo promijeniti, a neke od njih i značajnije.

Obzirom na manjak literature i pokrivenosti ove teme, cilj ovog rada je izložiti aksiome eliptičke geometrije i iz tih aksioma dokazati niz teorema koji daju jasniju sliku o eliptičkoj geometriji i zanimljivostima koje u njoj vrijede.

U prvom poglavlju će se dati kratak povijesni pregled dvotisućljetnog problema *Petog postulata* i navesti najbitnije osobe koje su dovele do otkrića spomenute tri geometrije i njihovog aksiomatskog zasnivanja. U drugom poglavlju će se izložiti aksiomi eliptičke geometrije podijeljeni u četiri skupine: aksiomi incidencije, separacije, kongruencije i neprekidnosti. U trećem poglavlju će se definirati polarna dužina i pokazati niz teorema vezanih za nju. U posljednjem, četvrtom poglavlju će se ukratko predstaviti dva modela eliptičke geometrije: sferna geometrija i stereografska projekcija sfere na kompleksnu ravninu.

# Sadržaj

# Poglavlje 1

# Povijesni pregled

Kao izvor za ovo poglavlje se uglavnom koristi [3], te onaj koji želi više pročitati može detalje tu pogledati.

Današnja moderna aksiomatska geometrija vezana je sa starogrčkim matematičarom Euklidom (330.- 275. pr. Kr.), jednim od tri najveća grčka matematičara, uz Apolonija i Arhimeda. On je bio prvi matematičar koji je uspio aksiomatizirati i sakupiti sva dotad poznata matematička znanja u jednu cjelinu. O njegovom životu i njegovim djelima postoji mnogo tekstova, a za temu ovog rada djelo koje je najbitnije su njegovi *Elementi* u kojima aksiomatski gradi geometriju. Originalni tekst nije sačuvan, već razni prijepisi i prijevodi koji su se proširili svijetom. U 19. stoljeću J. L. Heiberg i H. Menge su pomoću raznih prijevoda i prijepisa restaurirali originalne *Elemente*, te se to izdanje danas koristi.

Sami *Elementi* sadrže 13 knjiga, od kojih je za ovaj rad najvažnija prva knjiga u kojoj se nalaze aksiomi i postulati euklidske geometrije. Detaljnije se o *Elementima* i njihovim nedostacima može pročitati u [3].

Sve svoje knjige, pa tako i prvu, Euklid započinje definiranjem pojmova koji će se koristiti, zatim zapisuje postulate i aksiome, a zatim dokazuje propozicije. Euklid je razlikovao postulate i aksiome, no danas ih smatramo sinonimima. Euklid u svojoj prvoj knjizi navodi pet postulata:

($P-1$) Neka se postulira da se od svake točke do svake točke povlači dužina.

($P-2$) I da se ograničena dužina neprekinuto produžuje u dužini.

($P-3$) I da se sa svakaim središtem i udaljenošću opisuje krug.

($P-4$) I da su svi pravi kutovi međusobno jednaki.

($P-5$) I da ako dužina koja siječe dvije dužine čini unutarnje kutove s iste strane manjima od dva prava kuta, dvije dužine, neograničeno produžene, sastaju s one strane na kojoj su kutovi manji od dva prava kuta.

Sam izgled i forma postulata ($P-5$) sličniji su teoremu nego ostalim postulatima, pa su matematičari bili sumnjičavi prema opravdanosti zvanja tog postulata postulatom, odnosno aksiomom. Za razliku od prva četiri postulata koji su očigledne istine, Peti postulat nije očigledna istina. Činilo se da bi se on mogao dokazati pomoću ostalih Euklidovih postulata i aksioma. Euklidovo odgađanje korištenja Petog postulata u prvih 28 propozicija sugerira da je možda i on bio skeptičan prema tom aksiomu. Matematičari su stoljećima pokušavali dokazati Peti postulat, najčešće kontradikcijom, no do željene kontradikcije nikako nisu dolazili. Najčešća greška u "dokazima" Petog postulata je bila ta što bi se nesvjesno koristile neke činjenice koje su zapravo mogle biti dokazane samo uz Peti postulat.

Iako su pokušaji dokazivanja Petog postulata bili uzaludni, oni su vodili do nekoliko tvrdnji ekvivalentnih Petom postulatu. Korištenjem tih tvrdnji umjesto Petog postulata mogao se dokazati Peti postulat, te svi teoremi i propozicije. Jedna od poznatijih se naziva *Playfairovim postulatom:*

(PP) Točkom van danog pravca prolazi točno jedan pravac koji ne siječe dani pravac.

Uz Playfairov postulat, poznato je još nekoliko tvrdnji ekvivalentno Petom postulatu:

- Postoje slični trokuti koji nisu kongruentni.
- Postoje trokuti proizvoljno velike površine.
- Postoje trokuti čiji je zbroj kutova jednak dva prava kuta.

Najzanimljiviji pokušaji dokazivanja Petog postulata bili su Saccherijev i Lambertov. Njihovi pokušaji su doveli do ideje o postojanju geometrije u kojoj ne vrijedi Peti postulat.

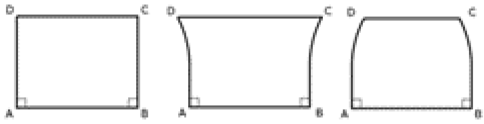
Saccheri je promatrao četverokut $ABCD$ kojemu su kutovi $\angle CAB$ i $\angle ABD$ pravi kutovi i kojemu su stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ jednake. U Saccherijevom četverokutu se stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BD}$ nazivaju **krakovima**, stranica $\overline{AB}$ **donjom bazom**, stranica $\overline{CD}$ **gornjom bazom**, a kutovi $\angle BDC$ i $\angle DCA$ **kutovima vrha**.

Saccheri je pokazao da je simetrala donje baze takvog četverokuta ujedno i simetrala gornje baze i da su kutovi vrha jednaki. Dokazao je i da vrijedi:

- ako su kutovi vrha pravi kutovi, onda su baze jednake
- ako su kutovi vrha manji od pravog kuta, onda je donja baza manja od gornje baze
- ako su kutovi vrha veći od pravog kuta, onda je donja baza veća od gornje baze.

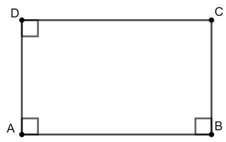
Zatim je promatrao čemu su jednaki kutovi vrha, te je razlikovao tri slučaja koje su dobili prikladna imena:

- kutovi vrha su pravi kutovi *(hipoteza pravog kuta)*
- kutovi vrha su manji od pravog kuta *(hipoteza šiljastog kuta)*
- kutovi vrha su veći od pravog kuta *(hipoteza tupog kuta)*.




Slika 1.1: Hipoteze pravog, šiljastog i tupog kuta

Saccheri je pokušao dokazati da hipoteza pravog kuta vrijedi i bez Petog postulata, pa je promatrao preostale dvije hipoteze i pokušao doći do kontradikcije. Do kontradikcije za hipotezu tupog kuta je došao uočavajući da bi u tom slučaju zbroj kutova u četverokutu bio veći od četiri prava kuta, a da bi dijeljenjem četverokuta dobio dva trokuta od kojih bi onda barem jedan morao imati zbroj kutova veći od dva prava kuta. Obzirom da je poznavao da se u apsolutnoj geometriji (geometriji utemeljenoj na prva četiri aksioma) može pokazati da je zbroj kutova u svakom trokutu manji ili jednak dva prava kuta (tvrdnje danas poznate kao *Drugi Legendreov teorem*), došao je u kontradikciju i zaključio da ta hipoteza nije moguća. Koliko je poznato, do kontradikcije u hipotezi šiljastog kuta nije došao. Uvjeren da je hipoteza pravog kuta jedina točna, nije bio svjestan da su hipoteza šiljastog kuta i hipoteza tupog kuta redom aksiomi za dvije nove geometrije, hiperboličku i eliptičku geometriju redom.
Slična priča je bila i s Lambertom. Lambert je promatrao četverokut kojemu su tri kuta prava.





Slika 1.2: Lambertov četverokut

Četvri kut može biti jednak, manji ili veći od pravog kuta. Stoga ponovo imamo tri hipoteze: hipotezu pravog kuta, hipotezu šiljastog kuta i hipotezu tupog kuta. Lambert je pokazao da je hipoteza pravog kuta ekvivalentna Petom postulatu, te je "srušio" hipotezu tupog kuta, no on, za razliku od Saccherija, nije uspio srušiti hipotezu šiljastog kuta.
Nakon Saccherija i Lamberta, Legendre je također pokušao dokazati Peti postulat i došao do zanimljivih tvrdnji. On je Peti postulat pokušavao povezati sa zbrojem kutova u trokutu. Pokazao je da, ako je zbroj kutova u trokutu jednak dva prava kuta, onda vrijedi Peti postulat. Pokazao je i da je zbroj kutova u trokutu manji ili jednak dva prava kuta, te da, ako je postoji trokut kojemu je zbroj kutova jednak dva prava kuta, onda je zbroj kutova u svakom trokutu jednak dva prava kuta.
Prvi matematičar koji je razumio problem Petog postulata bio je Gauss. Kao i ostali, u početku ga je pokušao dokazati, no uskoro postaje uvjeren da je Peti postulat nezavisan. Nakon toga počinje razmišljati o geometriji u kojoj točkom van danog pravca prolaze barem dva pravca koji dani pravac ne sijeku, te dolazi do zanimljivih rezultata. Svoja otkrića vezana za Peti postulat i neeuklidsku geometriju nije nikad objavio, no njegov dnevnik i dopisivanja s drugim matematičarima su dokazi o njegovom radu na Petom postulatu i neeuklidskoj geometriji.
Nedugo nakon Gaussa J. Bolyai i N. I. Lobačevski rješavaju istovremeno pitanje nezavisnosti Petog postulata i grade novu teoriju u kojoj točkom van da-

nog pravca prolaze barem dva pravaca koji dani pravac ne sijeku, danas poznatu pod nazivom *hiperbolička geometrija*. Oni nisu imali međusobnog kontakta, te su do svojih ideja došli nezavisno, iako postoje naznake da su obojica mogla na neki način imati neke predodžbe o Gaussovim promišljanjima. Iz Gaussovih pisama je također vidljivo da je on pratio njihove radove i odobravao ih, što je kasnije zapravo dovelo do zanimanja matematičara za neeuklidske geometrije. Važno je naglasiti da se hiperbolička geometrija u tim radovima nije dokazala konzistentnom.

Sljedeći matematičar bitan za razvoj neeuklidske geometrije bio je njemački matematičar G. F. B. Riemann, Gaussov učenik. Riemann je promatrao sfernu geometriju u kojom točkom van danog pravca ne prolazi niti jedan pravac koji dani pravac ne siječe, te je bio prvi koji je primijetio da je to još jedan tip neeuklidske geometrije, danas poznatoj kao *eliptička geometrija*.

Nakon njega, Beltrami daje nepotpuni model za hiperboličku geometriju, danas poznat pod nazivom pseudosfera. Iako je model bio nepoptun, dokazao je nezavisnost Petog postulata od ostalih euklidovih postulata, jer su u njemu vrijedila prva četiri postulata, ali ne i zadnji. Njegov rad je dovršio Klein koji daje modele za obje neeuklidske geometrije.

Budući da se dokazala nezavisnost Petog postulata i otkrile dvije nove geometrije, naglasak se prebacio na aksiomatsko zadavanje tih geometrija, prvenstveno euklidske. Među svim matematičarima koji su se bavili time, najpoznatiji je Hilbert koji je svoje aksiome objavio 1899. godine pod nazivom *Grundlagen der Geometrie*. Njegova aksiomatika se zasniva na tri osnovna pojma (točka, pravac, ravnina) i tri osnovne relacije (incidencija, poredak, kongruencija).

Poznate su još aksiomatike Tarskog i Birkhoffa.

# Poglavlje 2

# Aksiomi eliptičke geometrije

Kako je spomenuto u Uvodu, o aksiomatici euklidske i hiperboličke geometrije može se naći puno radova, no to nije slučaj i za eliptičku geometriju. Razlog tome je što se euklidska i hiperbolička geometrija mogu aksiomatski zadati mijenjajući samo iskaz aksioma o paralelama, dok aksiomi apsolutne geometrije za obje geometrije ostaju isti. No, za eliptičku geometriju potrebno je promijeniti i ostale aksiome. Većina aksioma apsolutne geometrije vrijedi i u eliptičkoj geometriji, no potrebno ih je ojačati i neke od njih promijeniti.

## 2.1 Aksiomi incidencije

Kao i u aksiomatikama euklidske i hiperboličke geometrije, točka, pravac i ravnina se ne definiraju, već se pomoću aksioma opisuju njihovi odnosi. U ovom radu neće biti potrebe za korištenjem prostornih aksioma incidencije, pa će se navesti samo dio prostornih aksioma incidencije prilagođenih eliptičkoj geometriji.

**Aksiomi incidencije:**

### 2.1. Aksiomi incidencije

($E - I_1$) Za svake dvije točke postoji pravac koji njima prolazi.

($E - I_2$) Za svake dvije različite točke postoji najviše jedan pravac koji njima prolazi.

($E - I_3$) Na svakom pravcu leže barem tri različite točke. Postoje tri nekolinearne točke.

($E - I_4$) Za svake tri točke postoji ravnina koja ih sadrži. U svakoj ravnini leži barem jedna točka.

($E - I_5$) Za sva tri nekolinearne točke postoji najviše jedna ravnina koja ih sadrži.

($E - I_6$) Ako dvije različite točke pravca leže u ravnini, onda sve točke tog pravca leže u toj ravnini.

($E - I_7$) Za svaka dva različita pravca postoji točka kojom oba prolaze.

Prva dva aksioma incidencije eliptičke geometrije su ista kao u apsolutnoj geometriji. Treći aksiom postavlja zahtjev da na svakom pravcu leže barem tri različite točke, što je razlika u odnosu na apsolutnu geometriju. Razlog tome su aksiomi separacije koji će se uvesti. Četvrti, peti i šesti aksiom su zapravo prostorni aksiomi incidencije, te ih ovdje navodimo u svrhu toga da, kada pričamo o ravninama, znamo da su jedinstveno određene trima različitim točkama i da svake tri točke možemo smjestiti u ravninu. Ubuduće nećemo posebno naglašavati da su objekti koje spominjemo smješteni u ravnini, ali to podrazumijevamo.
Ono što je novo je aksiom ($E - I_7$). Taj aksiom je zapravo ekvivalentan *Aksiomu o paralelama eliptičke geometrije* koji glasi: *Točkom van danog pravca ne prolazi niti jedan pravac koji dani pravac ne siječe.* Po iskazu tog aksioma očito je da je on zapravo aksiom incidencije, što je jedan od razloga

zašto ga stavljamo u ovu skupinu. Drugi razlog je taj što bi njegovim kasnijim uvođenjem teorema bilo nemoguće dokazati prije njegovog uvođenja na kraju, što bi vodilo u nepregledniji i nesistematičniji rad.
Kao i u apsolutnoj geometriji, vrijedi sljedeći teorem.

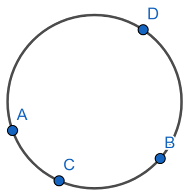
**Teorem 2.1** *Dva različita pravca imaju točno jednu zajedničku točku.*

**Dokaz.** Neka su $p$ i $q$ dva različita pravca. Po aksiomu $(E-I_7)$ postoji točka $P$ kojom oba prolaze. Tvrdimo da je to jedina točka kojom oba prolaze.
Pretpostavimo suprotno, odnosno neka je $P' \neq P$ točka kojom prolaze pravci $p$ i $q$. Po aksiomu $(E-I_2)$ postoji najviše jedan pravac koji prolazi točkama $P$ i $P'$, pa bi slijedilo da je $p = q$, što je kontradikcija. Dakle, $P$ je jedinstvena zajednička točka pravaca $p$ i $q$. ■

## 2.2 Aksiomi separacije

Kod apsolutne geometrije se druga grupa aksioma nazivala "aksiomi poretka". Taj izraz nije najprikladniji u ovom slučaju jer se shvaćanje pravaca mijenja. Obzirom na sve aksiome vezane za eliptičku geometriju ima smisla pravce promatrati kao kružnice, a na kraju rada će biti jasnije zašto se takav model pravca koristio. Napomenimo samo da u euklidskoj geometriji dvije različite točke ne određuju jedinstvenu kružnicu, no ovdje se ne radi o bilo kakvim kružnicama. Specifičniji opis tih kružnica će biti objašnjen na kraju, kroz model sferne geometrije.
Promatrajući pravce kao kružnice, ako su zadane tri točke $A, B$ i $C$, nije jasno koja od njih je između preostalih dviju, odnosno koji je njihov poredak. Dodavanjem nove točke $D$ na kružnici možemo vidjeti da je točka $C$ "odvojena" od točke $D$ točkama $A$ i $B$. Možemo reći da je točka $C$ **"između" točaka $A$ i $B$ u odnosu na $D$**. U skladu s ovim shvaćanjem pojma "biti između"

uvodimo oznaku $AB \parallel CD$ i čitamo ju kao "točka $C$ je između točaka $A$ i $B$ u odnosu na točku $D$" ili "točke $A$ i $B$ razdvajaju točke $C$ i $D$".




Slika 2.1: Separacija točaka

Zbog toga se aksiomi poretka ovdje nazivaju aksiomima razdvajanja ili separacije. Osim što se mijenja naziv, značajno se mijenjaju i sami aksiomi.

**Aksiomi separacije:**

$(E - II_1)$ Za svake tri međusobno različite kolinearne točke $A, B$ i $C$ postoji točka $D$ takva da je $AB \parallel CD$.

$(E - II_2)$ Ako je $AB \parallel CD$, onda su $A, B, C$ i $D$ kolinearne i međusobno različite točke.

$(E - II_3)$ Ako je $AB \parallel CD$, onda je $AB \parallel DC$ i $CD \parallel AB$.

$(E - II_4)$ Ako su $A, B, C$ i $D$ četiri međusobno različite kolinearne točke, onda je ili $AB \parallel CD$ ili $AC \parallel BD$ ili $AD \parallel BC$.

$(E - II_5)$ Ako su $A, B, C, D$ i $E$ međusobno različite kolinearne točke i ako je $AB \parallel CD$, onda je ili $AB \parallel CE$ ili $AB \parallel DE$.

Prije iskaza posljednjeg aksioma separacije definirajmo perspektivno preslikavanje.

**Definicija 2.2** *Neka su dani točka $O$ i dva pravca $l$ i $l'$ u istoj ravnini kao i točka $O$ koji njome ne prolaze. Preslikavanje $f_O : l \longrightarrow l'$ nazivamo* ***perspektivnim preslikavanjem*** *ako je za svaku točku $T$ pravca $l$ $f_O(T)$ točka pravca $l'$ kolinearna s točkama $O$ i $T$.*

Sada se može iskazati i posljednji aksiom separacije.

$(E - II_6)$ Ako je $AB \parallel CD$ i ako su točke $A', B', C'$ i $D'$ pravca $l'$ slike perspektivnog preslikavanja točaka $A, B, C$ i $D$ pravca $l$ redom, onda je $A'B' \parallel C'D'$.

Teorem koji slijedi je eliptička verzija teorema o kraćenju (iako treba imati na umu da taj izraz ovdje nema smisla).

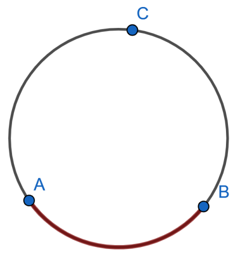
**Teorem 2.3** *Neka su dane međusobno različite kolinearne točke $A, B, C, D$ i $E$. Ako je $AB \parallel CD$ i $AD \parallel BE$, onda je $AB \parallel CE$, $BE \parallel CD$ i $AD \parallel CE$.*

**Dokaz.** Kako je $AB \parallel CD$, po aksiomu $(E - II_5)$ je ili $AB \parallel CE$ ili $AB \parallel DE$. Kako je po pretpostavci $AD \parallel BE$, po aksiomu $(E - II_4)$ ne može biti $AB \parallel DE$. Dakle, vrijedi $AB \parallel CE$.
Iz $AB \parallel CE$ višestrukom primjenom aksioma $(E - II_3)$ slijedi redom $AB \parallel EC$, $EC \parallel AB$, $EC \parallel BA$, te konačno $BA \parallel EC$. Kako po pretpostavci vrijedi $AD \parallel BE$, primjenom aksioma $(E - II_3)$ dobivamo $BE \parallel AD$, a zatim i $BE \parallel DA$. Ako sada stavimo da je $A' = B, B' = E, C' = D, D' = A$ i $E' = C$, imamo da vrijedi $A'D' \parallel B'E'$ i $A'B' \parallel C'D'$. Analogno kao u prvom dijelu dokaza dobijemo da mora vrijediti $A'B' \parallel C'E'$, što je ekvivalentno $BE \parallel DC$, pa po aksiomu $(E - II_3)$ slijedi $BE \parallel CD$.
Sada imamo $AB \parallel CE$ i $BE \parallel CD$, iz čega po aksiomu $(E - II_3)$ slijedi $EC \parallel AB$ i $EB \parallel CD$. Stavimo da je sada $A' = E, B' = C, C' = A, D' = B$ i

$E' = D$. Sada imamo $A'B' \,||\, C'D'$ i $A'D' \,||\, B'E'$. Analogno kao u prvom dijelu dokaza dobijemo da mora vrijediti $A'B' \,||\, C'E'$, što je ekvivalentno $EC \,||\, AD$, pa po aksiomu $(E - II_3)$ slijedi $AD \,||\, EC$. ■

**Definicija 2.4** *Neka su $A, B$ i $C$ tri međusobno različite kolinearne točke.* ***Dužina*** $\overline{AB}/C$ *je skup svih točaka $T$ takvih da je $AB \,||\, CT$ zajedno s točkama $A$ i $B$. Točke $A$ i $B$ nazivamo rubnim točkama dužine $\overline{AB}/C$.*

Kako je već komentirano, u eliptičkoj geometriji se ne može odrediti odnos tri točke pravca bez uvođenja nove točke. Zbog toga se dužine moraju definirati u odnosu na neku točku pravca na kojem leže rubne točke.




Slika 2.2: Dužina $\overline{AB}/C$

**Teorem 2.5** *Neka su $A$ i $B$ dvije različite točke. Tada postoji barem jedna dužina koja ih sadrži.*

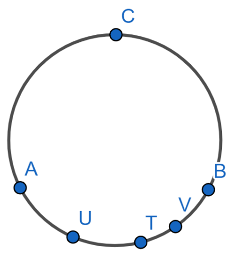
**Dokaz.** Neka su $A$ i $B$ dvije proizvoljne različite točke.
Prema aksiomu $(E - I_1)$ postoji pravac $p$ koji njima prolazi. Prema aksiomu $(E - I_3)$ postoji točka $C$ na pravcu $p$ različita od $A$ i $B$. $\overline{AB}/C$ je tražena dužina. ■
Prirodno se definiraju unutrašnje i vanjske točke dužine.

**Definicija 2.6** *Za točku $T$ dužine $\overline{AB}/C$ kažemo da je* ***unutrašnja točka dužine*** $\overline{AB}/C$ *ako je različita od $A$ i $B$. Za točku $T$ pravca $AB$ kažemo da* *je* ***vanjska točka dužine*** $\overline{AB}/C$ *ako nije unutrašnja točka te dužine i ako je različita od* $A$ *i* $B$.

Ako na danoj dužini promatramo tri njene unutrašnje točke, može se odrediti njihov poredak ako se ograničimo na tu dužinu kao univerzalni skup. Iduća definicija daje upravo takav poredak, koji se može intuitivno povezati s poretkom u apsolutnoj geometriji.

**Definicija 2.7** *Za unutrašnju točku* $T$ *dužine* $\overline{AB}/C$ *kažemo da je* ***između unutrašnjih točaka*** $U$ *i* $V$ *dužine* $\overline{AB}/C$ *ako je* $UV \parallel CT$ *i pišemo* $(UTV)/C$.

Ponekad će se u radu ovo nazivati "*relativnim poretkom*".




Slika 2.3: "Relativni poredak"

**Teorem 2.8** *Svaka dužina ima barem jednu unutrašnju točku.*

**Dokaz.** Neka je $\overline{AB}/C$ proizvoljna dužina. Po aksiomu $(E - II_1)$ postoji točka $D$ takva da je $AB \parallel CD$. $D$ je tražena točka. ■

**Korolar 2.9** *Između dvije različite točke bilo kojeg pravca leži prebrojivo mnogo točaka.*

**Dokaz.** Primjenom prethodnog teorema induktivno se definira prebrojivi niz unutrašnjih točaka dane dužine. ■

Sljedeći teorem je karakterizacija unutrašnje točke dužine.

**Teorem 2.10** *Neka je $T$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$. Točka $S$ pravca $AB$, $S \neq T$, je unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$ ako i samo ako je $AT \parallel BS$ ili $AS \parallel BT$.*

**Dokaz.** Neka je $T$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$. Po definiciji imamo $AB \parallel CT$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Pretpostavimo da je $S$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$. Tada je $AB \parallel CS$. Kako vrijedi $AB \parallel CT$ i $AB \parallel CS$, to po aksiomu $(E - II_5)$ ne može istovremeno vrijediti i $AB \parallel TS$. Dakle, $AB \not\parallel TS$. Sada je po aksiomu $(E - II_4)$ ili $AT \parallel BS$ ili $AS \parallel BT$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pretpostavimo da vrijedi $AT \parallel BS$ ili $AS \parallel BT$.

Pretpostavimo da vrijedi $AT \parallel BS$. Iz $AB \parallel CT$ i $AT \parallel BS$ primjenom Teorema 2.3 slijedi $AB \parallel CS$, pa je $S$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$.

Pretpostavimo da vrijedi $AS \parallel BT$. Višestrukom primjenom aksioma $(E - II_3)$ na $AS \parallel BT$ i $AB \parallel CT$ dobivamo $BA \parallel CT$ i $BT \parallel AS$. Primjenom Teorema 2.3 dobivamo $BA \parallel CS$, pa primjenom aksioma $(E - II_3)$ $AB \parallel CS$. Dakle, $S$ je unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$. ■

Iz ovog teorema direktno slijedi sljedeći korolar.

**Korolar 2.11** *Neka je $T$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$. Točka $S$ pravca $AB$ je vanjska točka dužine $\overline{AB}/C$ ako i samo ako $AB \parallel TS$.*

**Dokaz.** $\boxed{\Rightarrow}$ Obratom po kontrapoziciji.

Neka je $AB \not\parallel TS$. Tada je po aksiomu $(E - II_4)$ ili $AT \parallel BS$ ili $AS \parallel BT$.

Sada po Teoremu 2.10 slijedi da je $S$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$.

Dakle, ako je $S$ vanjska točka dužine $\overline{AB}/C$, onda je $AB \parallel TS$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Obratom po kontrapoziciji.

Neka je $S$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$. Po Teoremu 2.10 je ili $AT \parallel BS$ ili $AS \parallel BT$. Sada po aksiomu $(E - II_4)$ ne može biti $AB \parallel TS$.

Dakle, ako je $AB \parallel TS$, onda je $S$ vanjska točka dužine $\overline{AB}/C$. ■

Uočimo da, ako je točka $S$ vanjska točka dužine $\overline{AB}/C$, onda je $\overline{AB}/C = \overline{AB}/S$. Drugim riječima, dužina $\overline{AB}/C$ ne ovisi o izboru vanjske točke $C$, iako se zbog definicije i oznake može činiti da ovisi.

Sljedeći teorem govori kako je moguće dužinu podijeliti njenom unutrašnjom točkom na dvije dužine koje u presjeku imaju samo odabranu unutrašnju točku.

**Teorem 2.12** *Neka je $T$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$. Tada je $\overline{AB}/C = \overline{AT}/C \cup \overline{TB}/C$ i $T$ je jedina zajednička točka dužina $\overline{AT}/C$ i $\overline{TB}/C$.*

**Dokaz.** Pokažimo da je $\overline{AB}/C \subseteq \overline{AT}/C \cup \overline{TB}/C$. Očito je $T$ u $\overline{AT}/C$ ili $\overline{TB}/C$. Neka je $S \neq T$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$. Po Teoremu 2.10 je $AT \parallel BS$ ili $AS \parallel BT$. Pretpostavimo da je $AT \parallel BS$. Kako je $S$ točka dužine $\overline{AB}/C$ imamo $AB \parallel CS$. Sada primjenom aksioma $(E-II_3)$ imamo $BA \parallel CS$ i $BS \parallel AT$, a zatim po Teoremu 2.3 slijedi $AT \parallel CS$, pa je $S$ na dužini $\overline{AT}/C$. Slično se pokaže da, ako je $AS \parallel BT$, onda je $S$ na dužini $\overline{TB}/C$. Dakle, $\overline{AB}/C \subseteq \overline{AT}/C \cup \overline{TB}/C$.

Pokažimo sada da je $\overline{AT}/C \cup \overline{TB}/C \subseteq \overline{AB}/C$. Po pretpostavci teorema znamo da je $T$ na dužini $\overline{AB}/C$. Neka je $S$ unutrašnja točka dužine $\overline{AT}/C$. Tada je $AT \parallel CS$. Kako je $T$ na $\overline{AB}/C$, to vrijedi $AB \parallel TC$. Po Teoremu 2.3 slijedi $AB \parallel CS$, pa je $S$ na $\overline{AB}/C$. Slično se pokaže da, ako je $S$ unutrašnja točka dužine $\overline{TB}/C$, onda je $S$ na dužini $\overline{AB}/C$. Dakle, $\overline{AT}/C \cup \overline{TB}/C \subseteq \overline{AB}/C$.

Time je dokazano da je $\overline{AB}/C=\overline{AT}/C \cup \overline{TB}/C$.

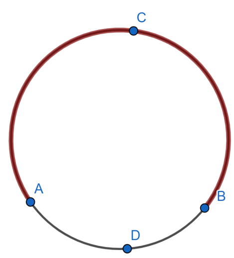
Pokažimo da je $T$ jedina zajednička točka dužina $\overline{AT}/C$ i $\overline{TB}/C$. $T$ je očito njihova zajednička točka. Prepostavimo da postoji točka $S \neq T$ koja je na dužinama $\overline{AT}/C$ i $\overline{TB}/C$. Tada je $AT \parallel CS$ i $TB \parallel CS$. Točka $S$ je ujedno i na dužini $\overline{AB}/C$ pa je $AB \parallel CS$. Primjenom aksioma $(E-II_3)$ dobivamo

$SC \mid\mid AB$. Sada je po aksiomu $(E - II_5)$ ili $SC \mid\mid AT$ ili $SC \mid\mid BT$, što je u kontradikciji s pretpostavkom da točka $S$ leži na dužinama $\overline{AT}/C$ i $\overline{TB}/C$. Dakle, $T$ je jedina zajednička točka dužina $\overline{AT}/C$ i $\overline{TB}/C$. ■

U euklidskoj i hiperboličkoj geometriji dvije različite točke određuju jedinstvenu dužinu. To nije slučaj u eliptičkoj geometriji - dvije različite točke određuju dvije različite dužine kojima su dane točke rubne točke. Uzimajući kao model pravca kružnicu, intuitivno je jasno da, ako je dana neka dužina $\overline{AB}/C$, onda bi nekom njenom unutrašnjom točkom $D$ (takva postoji po Teoremu 2.8) trebala biti definirana nova dužina $\overline{AB}/D$ koja je očito različita od $\overline{AB}/C$.

**Definicija 2.13** *Neka je dana dužina $\overline{AB}/C$ i neka je $D$ njena unutrašnja točka. Dužinu $\overline{AB}/D$ nazivamo **komplementarnom dužinom** dužine $\overline{AB}/C$ i označavamo s $\underset{C}{\overline{AB}}$.*

Uočimo da, ako je $D$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$, vrijedi: $T$ je unutrašnja točka dužine $\underset{C}{\overline{AB}}$ ako i samo ako je $AB \mid\mid DT$. Nadalje, kako je $AB \mid\mid DC$, $C$ je uvijek unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/D$, odnosno $\underset{C}{\overline{AB}}$.




Slika 2.4: Dužina $\underset{C}{\overline{AB}} = \overline{AB}/D$

Sljedeći teorem govori o odnosu dužine i njene komplementarne dužine.

**Teorem 2.14** *Neka je dan pravac $AB$ i dužina $\overline{AB}/C$. Tada vrijedi:*

*(i)* $\overline{AB}/C \cap \underset{C}{\overline{AB}} = \{A, B\}$

*(ii)* $\overline{AB}/C \cup \underset{C}{\overline{AB}} = AB.$

**Dokaz.**

(i) Po definiciji vrijedi $\{A, B\} \subseteq \overline{AB}/C \cap \underset{C}{\overline{AB}}$.
Pokažimo da je $\overline{AB}/C \cap \underset{C}{\overline{AB}} \subseteq \{A, B\}$.
Pretpostavimo suprotno, odnosno da postoji točka $T \in \overline{AB}/C \cap \underset{C}{\overline{AB}}$, $T \neq A, B$. Kako je $T$ točka dužine $\overline{AB}/C$ vrijedi $AB \mid\mid CT$. Kako je $T$ točka dužine $\underset{C}{\overline{AB}}$ vrijedi $AB \mid\mid DT$, za neku unutrašnju točku $D$ dužine $\overline{AB}/C$. Kako je $D$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$ vrijedi $AB \mid\mid CD$. Dobili smo kontradikciju s aksiomom $(E - II_5)$ po kojem ne može istovremeno biti $AB \mid\mid CT$, $AB \mid\mid DT$ i $AB \mid\mid CD$.
Dakle, $\overline{AB}/C \cap \underset{C}{\overline{AB}} \subseteq \{A, B\}$, pa je $\overline{AB}/C \cap \underset{C}{\overline{AB}} = \{A, B\}$.

(ii) Pokažimo da je $\overline{AB}/C \cup \underset{C}{\overline{AB}} \subseteq AB$.
Neka je točka $T$ iz $\overline{AB}/C \cup \underset{C}{\overline{AB}}$. Ako je $T = A$ ili $T = B$, onda je $T$ na pravcu $AB$. Prepostavimo da je $T \neq A, B$. Ako je $T$ točka dužine $\overline{AB}/C$, onda je $AB \mid\mid CT$, pa su po aksiomu $(E - II_2)$ $A, B, C$ i $T$ kolinearne točke, pa je $T$ na pravcu $AB$. Ako je $T$ točka dužine $\underset{C}{\overline{AB}}$, onda je $AB \mid\mid DT$, za neku unutrašnju točku $D$ dužine $\overline{AB}/C$. Sada su po aksiomu $(E - II_2)$ $A, B, C$ i $T$ kolinearne točke, pa je $T$ na pravcu $AB$. Dakle, $\overline{AB}/C \cup \underset{C}{\overline{AB}} \subseteq AB$.
Pokažimo da je $AB \subseteq \overline{AB}/C \cup \underset{C}{\overline{AB}}$. Ako je $T = A$ ili $T = B$, onda je $T$ točka dužine $\overline{AB}/C$. Prepostavimo da je $T$ točka pravca $AB$ različita od $A$ i $B$. Po aksiomu $(E - II_4)$ vrijedi da je ili $AB \mid\mid CT$ ili $AC \mid\mid BT$ ili $AT \mid\mid BC$. U slučaju $AB \mid\mid CT$, $T$ je točka dužine $\overline{AB}/C$. Ako je $AC \mid\mid BT$, onda primjenom aksioma $(E - II_3)$ i Teorema 2.3 na $AC \mid\mid BT$ i $AB \mid\mid CD$, za neku unutrašnju točku $D$ dužine $\overline{AB}/C$,

dobivamo $AB \parallel DT$, pa je $T$ točka dužine $\underset{C}{\overline{AB}}$. Ako je $AT \parallel BC$, onda primjenom aksioma $(E-II_3)$ i Teorema 2.3 na $AT \parallel BC$ i $AB \parallel CD$, za neku unutrašnju točku $D$ dužine $\overline{AB}/C$, dobivamo $BA \parallel DT$, pa je $T$ točka dužine $\underset{C}{\overline{AB}}$. Dakle, $AB \subseteq \overline{AB}/C \cup \underset{C}{\overline{AB}}$.

Time je dokazano $\overline{AB}/C \cup \underset{C}{\overline{AB}} = AB$.

■

Prethodni teorem implicira da za danu dužinu $\overline{AB}/C$ njoj komplementarna dužina $\underset{C}{\overline{AB}}$ ne ovisi o izboru unutrašnje točke $D$ dužine $\overline{AB}/C$. Također, iz ovoga slijedi da dvije različite točke dijele pravac na dvije dužine koje u uniji daju cijeli pravac. Zbog aksioma $(E-I_2)$ i definicija dužine i njene komplementarne dužine slijedi da dvije različite točke određuju točno dvije različite dužine kojima su one rubovi. Zbog toga će prilikom dokazivanja tvrdnji biti potrebno odabrati jednu od dužina da bi s njom mogli raditi, pa će se u daljnjem tekstu često pojavljivati izraz "izbor dužine". Ponekad će se, kada je dužina izabrana i fiksna u određenom teoremu, zbog pojednostavljivanja oznaka izostavljavati /, pa će se primjerice za dužinu $\overline{AB}/C$ pisati samo $\overline{AB}$. Sljedeći teorem govori da tri različite točke pravca dijele taj pravac na tri dužine koje u parovima u presjeku imaju jednu od te tri točke, a u uniji daju cijeli pravac.

**Teorem 2.15** *Neka je dan pravac $p$ i međusobno različite točke $A, B, C$ na pravcu $p$. Tada vrijedi:*

*(i)* $\overline{AB}/C \cup \overline{BC}/A \cup \overline{CA}/B = p$

*(ii)*
- $\overline{AB}/C \cap \overline{CA}/B = \{A\}$
- $\overline{AB}/C \cap \overline{BC}/A = \{B\}$
- $\overline{BC}/A \cap \overline{CA}/B = \{C\}$

**Dokaz.**

(i) Neka je $T$ točka iz $\overline{AB}/C \cup \overline{BC}/A \cup \overline{CA}/B$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $T$ točka iz $\overline{AB}/C$. Tada je $T$ iz $\overline{AB}/C \cup \underset{C}{AB}$, pa je po Teoremu 2.14 $T$ s $p$. Dakle, $\overline{AB}/C \cup \overline{BC}/A \cup \overline{CA}/B \subseteq p$.

Neka je $T$ točka pravca $p$ različita od $A, B, C$. Tada je po aksiomu $(E - II_4)$ ili $AB \mid\mid CT$ ili $AC \mid\mid BT$ ili $AT \mid\mid BC$. Sada je po definiciji dužine $T$ ili točka dužine $\overline{AB}/C$ ili točka dužine $\overline{CA}/B$ ili točka dužine $\overline{BC}/A$, odnosno $T$ je točka iz $\overline{AB}/C \cup \overline{BC}/A \cup \overline{CA}/B$. Dakle, $p \subseteq \overline{AB}/C \cup \overline{BC}/A \cup \overline{CA}/B$.

Time je dokazano da je $\overline{AB}/C \cup \overline{BC}/A \cup \overline{CA}/B = p$.

(ii) Dokažimo prvu tvrdnju.

Očito je $\{A\} \subseteq \overline{AB}/C \cap \overline{CA}/B$.

Neka je $T$ točka iz $\overline{AB}/C \cap \overline{CA}/B$ i neka je $T \neq A$. Tada je $T$ točka dužine $\overline{AB}/C$ i dužine $\overline{CA}/B$, pa po definiciji vrijedi $AB \mid\mid CT$ i $AC \mid\mid BT$, no to je kontradikcija s aksiomom $(E - II_4)$. Dakle, $\overline{AB}/C \cap \overline{CA}/B = \{A\}$.

Analogno se pokažu ostale tvrdnje.

■

Sljedeći teorem je poopćenje prethodne tvrdnje na konačan broj točaka.

**Teorem 2.16** *Neka je dan pravac $p$ i $n$ različitih točaka na njemu. Moguće je označiti te točke s $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$ tako da je $\bigcup_{r=0}^{n-1} \overline{A_r A_{r+1}}/A_{r-1} = p$, gdje je $A_{-1} := A_{n-1}$, i da presjek bilo kojeg para takvih dužina sadrži samo rubove.*

**Dokaz.** Dokaz provodimo principom matematičke indukcije po $n$.

Baza indukcije. Za $n = 2$ i $n = 3$ tvrdnja slijedi po Teoremu 2.14 i Teoremu 2.15.

Pretpostavka indukcije. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za $n-1$ točaka.
Korak indukcije. Pokažimo da tvrdnja vrijedi za $n$ točaka.
Izaberimo $n-1$ točaka od $n$ točaka. Po pretpostavci indukcije moguće je označiti te točke s $A_0, A_1, ..., A_{n-2}$ tako da je $\bigcup\limits_{r=0}^{n-2} \overline{A_rA_{r+1}}/A_{r-1} = p$ i tako da presjek bilo kojeg para takvih dužina sadrži samo rubove. Označimo s $T$ preostalu točku. $T$ je očito unutrašnja točka neke dužine $\overline{A_rA_{r+1}}/A_{r-1}$. Bez smanjenja općenitosti neka je to dužina $\overline{A_1A_2}/A_0$. Tada je $A_1A_2 \mid\mid A_0T$. Točka $T$ dijeli dužinu $\overline{A_1A_2}/A_0$ na dva dijela: $\overline{A_1T}/A_0$ i $\overline{TA_2}/A_1$. Povećajmo sada indekse točaka $A_2, A_3, ..., A_{n-2}$ za jedan i označimo točku $T$ s $A_2$. Sada za točke $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$ vrijedi tvrdnja.
Time je proveden korak indukcije. ■
Iskaz sljedećeg teorema je sličan Paschovom aksiomu u apsolutnoj geometriji, uz prilagodbu na činjenicu da dvije različite točke određuju dvije dužine kojima su one rubovi. Zbog te dvojnosti je i iskaz teorema dvojan, odnosno presjecanje pravaca i dužina ovisi o njihovim izborima.

**Teorem 2.17 (Paschov aksiom)** *Neka su $A, B$ i $C$ tri nekolinearne točke i neka je $p$ pravac koji ne prolazi njima. Ako $p$ siječe dužinu $\overline{AB}/E$, za neku točku $E$ pravca $AB$, onda za odabrani izbor dužine $\overline{AC}$, označimo ga $\overline{AC}/F$, postoji jedinstveni izbor dužine $\overline{BC}$, označimo ga $\overline{BC}/G$, takav da $p$ siječe ili $\overline{AC}/F$ ili $\overline{BC}/G$.*

**Dokaz.** Neka su $A, B$ i $C$ tri nekolinearne točke i $p$ pravac koji ne prolazi njima, te neka $p$ siječe dužinu $\overline{AB}/E$ u točki $P$. Po aksiomu $(E - I_7)$ postoji točka $Q$ koja leži na pravcima $p$ i $AC$, te točka $R$ koja leži na pravcima $p$ i $BC$. Uočimo da su $P, Q, R$ jedine točke presjeka pravaca $AB$ i $p$, $AC$ i $p$, $BC$ i $p$ redom. Naime, u slučaju postojanja još jedne točke presjeka pravaca $AB$ i $p$ po aksiomu $(E - I_2)$ bi slijedilo da su $AB$ i $p$ jednaki, pa bi $p$ prolazio točkama $A$ i $B$, što je kontradikcija s pretpostavkom. Analogno se pokaže za preostala dva slučaja.

Neka je $\overline{AC}/F$ odabrana dužina iz pretpostavke teorema i neka je $G$ proizvoljna točka pravca $BC$, $G \neq B, C, R$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $F \neq Q$ (u suprotnom $F$ zamijenimo nekom drugom točkom). Po Teoremu 2.14 je $Q$ točka ili dužine $\overline{AC}/F$ ili dužine $\underset{F}{\overline{AC}}$, a $R$ točka ili dužine $\overline{BC}/G$ ili dužine $\underset{G}{\overline{BC}}$. Neka je $Q$ točka dužine $\overline{AC}/F$. Ako je $R$ točka dužine $\overline{BC}/G$, onda je tražena dužina $\underset{G}{\overline{BC}}$, a ako je $R$ točka dužine $\underset{G}{\overline{BC}}$, onda je tražena dužina $\overline{BC}/G$. Neka je $Q$ točka dužine $\underset{F}{\overline{AC}}$. Ako je $R$ točka dužine $\overline{BC}/G$, onda je tražena dužina $\overline{BC}/G$, a ako je $R$ točka dužine $\underset{G}{\overline{BC}}$, onda je tražena dužina $\underset{G}{\overline{BC}}$. ■

Probleme dvojnosti prethodnog teorema se ne može popraviti, no ubacivanjem još jednog pravca dobije se precizniji odgovor o tome koji pravci sijeku koji izbor dužine.

**Teorem 2.18** *Neka su $A, B$ i $C$ tri nekolinearne točke, te $p$ i $q$ različiti pravci koji ne prolaze njima. Neka je na pravcu $AC$ odabrana jedna od dužina određena tim točkama i pretpostavimo da je $p$ i $q$ ne sijeku, te neka je $\overline{AB}/E$ odabrana dužina i $\underset{E}{\overline{AB}}$ njoj komplementarna dužina. Tada vrijedi:*

*(i) Ako $p$ i $q$ sijeku $\overline{AB}/E$, onda postoji jedinstveni izbor dužine $\overline{BC}$, označimo ga s $\overline{BC}/F$, takav da ga $p$ i $q$ sijeku.*

*(ii) Ako $p$ siječe $\overline{AB}/E$ i $q$ siječe $\underset{E}{\overline{AB}}$, onda postoji jedinstveni izbor dužine $\overline{BC}$, označimo ga s $\overline{BC}/F$, takav da $p$ siječe $\overline{BC}/F$, a $q$ siječe $\underset{F}{\overline{BC}}$.*

**Dokaz.**

(i) Neka $p$ i $q$ sijeku $\overline{AB}/E$ u točkama $P$ i $Q$ redom. $P$ i $Q$ su unutrašnje točke, pa je po Teoremu 2.10 $AP \mid\mid BQ$ ili $AQ \mid\mid BP$. Po Teoremu 2.17 $p$ siječe jednu od dužina $\overline{BC}$ u točki $P'$. Označimo tu dužinu s $\overline{BC}/F$.

Isto tako, po Teoremu 2.17 pravac $q$ siječe jednu od dužina $\overline{BC}$ u točki $Q'$.

Po aksiomu $(E - I_7)$ $p$ i $AC$ se sijeku u nekoj točki $O''$. Uočimo da točka $O''$ nije na pravcima $AB$ i $BC$. Naime, kada bi točka $O''$ ležala na pravcu $AB$ ili $BC$, onda bi, jer je $O'' \neq P, P'$ (u suprotnom bi pravci $AB$ i $AC$ ili $AB$ i $BC$ imali dvije različite zajedničke točke pa bi slijedilo $AB = AC$ ili $AB = BC$, pa bi $A, B, C$ bile kolinearne točke, što je kontradikcija s pretpostavkom teorema), slijedilo da je $p = AB$ ili $p = BC$, što je kontradikcija s pretpostavkom da $p$ ne prolazi točkama $A, B, C$.

Sada je dobro definirano perspektivno preslikavanje $f_{O''} : AB \longrightarrow BC$. Uočimo da je po pretpostavci teorema $O''$ vanjska točka izabrane dužine $\overline{AC}$. Neka se pravci $QO''$ i $BC$ sijeku u točki $Q''$. Kako je $AP \parallel BQ$ ili $AQ \parallel BP$, po aksiomu $(E - II_6)$ slijedi $CP' \parallel BQ''$ ili $CQ'' \parallel BP'$. Kako je $P'$ unutrašnja točka dužine $\overline{BC}/F$, po Teoremu 2.10 je $Q''$ također unutrašnja točka dužine $\overline{BC}/F$.

Neka se $p$ i $q$ sijeku u točki $O'$, te neka $q$ siječe pravac $AC$ u točki $O$, gdje je $O$ vanjska točka dane dužine $\overline{AC}$.

Neka je $O = O''$. Tada je $O' = O$, pa je $Q' = Q''$. Sada je $CP' \parallel BQ'$ ili $CQ' \parallel BP'$, pa su po Teoremu 2.10 $P'$ i $Q'$ unutrašnje točke dužine $\overline{BC}/F$.

Neka je $O \neq O''$. Kako su $O$ i $O''$ vanjske točke dane dužine $AC$, one su unutrašnje točke njene komplementarne dužine pa po Teoremu 2.10 slijedi $CO \parallel AO''$ ili $CO'' \parallel AO$. Kako $Q$ ne leži na pravcima $AB$ i $BC$, dobro je definirano perspektivno preslikavanje $f_Q : AB \longrightarrow BC$. Po ovom preslikavanju se točka $A$ preslika u točku $B$, $O$ u $Q'$, $O''$ u $Q''$, a $C$ je fiksna točka. Po aksiomu $(E - II_6)$ slijedi $CQ' \parallel BQ''$ ili $CQ''$

$\| BQ'$. Kako je $Q''$ unutrašnja točka dužine $\overline{BC}/F$, po Teoremu 2.10 je $Q'$ također unutrašnja točka dužine $\overline{BC}/F$.
Dakle, $P'$ i $Q'$ su unutrašnje točke dužine $\overline{BC}/F$, odnosno $p$ i $q$ sijeku $\overline{BC}/F$.

(ii) Neka $p$ siječe dužinu $\overline{AB}/E$, a pravac $q$ dužinu $\underset{E}{\overline{AB}}$. Za pravac $p$ po Teoremu 2.17 postoji jedinsteni izbor dužine $\overline{BC}$, označimo ga s $\overline{BC}/F$, takav da $p$ siječe ili $\overline{AC}$ ili $\overline{BC}/F$, gdje je $\overline{AC}$ dana dužina iz pretpostavke teorema. Kako $p$ ne siječe danu dužinu $\overline{AC}$ slijedi da $p$ siječe dužinu $\overline{BC}/F$. Također, po Teoremu 2.17 za pravac $q$ postoji jedinstvena dužina $\overline{BC}$ takva da $q$ siječe ili $\overline{AC}$ ili $\overline{BC}$, gdje je $\overline{AC}$ dana dužina. Kako $q$ ne siječe danu dužinu $\overline{AC}$ to $q$ siječe dužinu $\overline{BC}$. Tvrdimo da je ta dužina $\underset{F}{\overline{BC}}$. Pretpostavimo suprotno, odnosno neka $q$ siječe dužinu $\overline{BC}/F$. Tada po tvrdnji $(i)$ ovog teorema slijedi da postoji jedinstvena dužina $\overline{AB}$ koju $p$ i $q$ sijeku, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, $q$ siječe dužinu $\underset{F}{\overline{BC}}$.

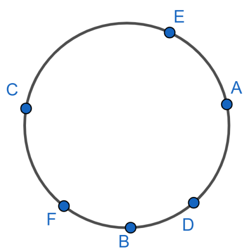
■

Sljedeći teorem govori da svaku dužinu možemo "proširiti".

**Teorem 2.19** *Neka je dana dužina* $\overline{AB}/C$ *. Tada postoje vanjske točke* $E$ *i* $F$ *dužine* $\overline{AB}/C$, $E \neq F$, *takve da je* $\overline{AB}/C$ *sadržana u* $\overline{EF}/C$.

**Dokaz.** Neka je $\overline{AB}/C$ dana dužina. Po Teoremu 2.8 postoji unutrašnja točke $D$ dužine $\overline{AB}/C$ i postoji unutrašnja točka $E$ dužine $\overline{BC}/A$. Tada je $BC \| AE$, pa su po aksiomu $(E - II_2)$ $B, C, A$ i $E$ međusobno različite točke. Ako je $E = D$, onda je $BC \| AD$ što je kontradikcija s aksiomom $(E - II_4)$, jer ne može istovremeno biti $BC \| AD$ i $DC \| AB$. Kako $D$ može biti bilo koja unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$ slijedi da je $E$ vanjska točka dužine $\overline{AB}/C$, pa po Kororalu 2.11 slijedi $AB \| DE$.

$E$ je unutrašnja točka dužine $\underset{E}{\overline{AC}}$. Kako je $AC \mid\mid CB$ i $AB \mid\mid ED$ po Teoremu 2.3 slijedi $AE \mid\mid CD$, pa je po Teoremu 2.10 $D$ unutrašnja točka dužine $\underset{E}{\overline{AC}}$. Kako $D$ može biti bilo koja unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$ slijedi da su sve unutrašnje točke dužine $\overline{AB}/C$ sadržane u $\underset{E}{\overline{AC}}$. Kako je $AE \mid\mid BC$, po Teoremu 2.10 je $B$ unutrašnja točka dužine $\underset{E}{\overline{AC}}$. Dakle, dužina $\overline{AB}/C$ je sadržana u $\underset{E}{\overline{AC}}$.
Neka je $F$ unutrašnja točka dužine $\overline{AC}/E$. Kako je $AC \mid\mid EF$, to je $A$ točka dužine $\overline{EF}/C$. Kako su $B$ i $D$ unutrašnje točke dužine $\underset{E}{\overline{AC}} = \overline{AC}/F$ to je $AC \mid\mid BF$ i $AC \mid\mid DF$. Kako je $AE \mid\mid BC$ i $AC \mid\mid EF$ po Teoremu 2.3 slijedi $AE \mid\mid BF$, a, jer je $A$ unutrašnja točka dužine $\overline{EF}/C$, po Teoremu 2.10 je $B$ unutrašnja točka dužine $\overline{EF}/C$. Slično, kako je $AE \mid\mid CD$ i $AC \mid\mid FE$ po Teoremu 2.3 slijedi $AE \mid\mid FD$, pa je $D$ unutrašnja točka dužine $\overline{EF}/C$. Kako $D$ može biti bilo koja unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$ slijedi da su sve unutrašnje točke dužine $\overline{AB}/C$ sadržane u dužini $\overline{EF}/C$.
Dakle, dužina $\overline{AB}/C$ je sadržana u dužini $\overline{EF}/C$.



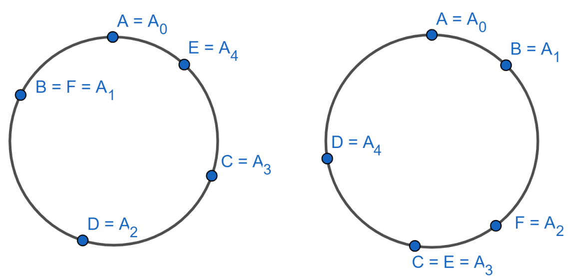

Preostaje pokazati da je $F$ vanjska točka dužine $\overline{AB}/C$. Kako je $F$ vanjska točka dužine $\overline{AC}/E$, to je $F \neq A$. Pretpostavimo da je $F = B$. Tada je $AC \mid\mid EB$, što je kontradikcija s aksiomom $(E - II_4)$ po kojem ne može istovremeno biti $AE \mid\mid CB$ i $AC \mid\mid EB$. Pretpostavimo da je $F = D$, gdje je $D$ bilo koja unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/C$. Tada je $AC \mid\mid ED$, što je kontradikcija s aksiomom $(E - II_4)$ po kojem ne može istovremeno biti $AC \mid\mid ED$ i $AE \mid\mid CD$.

Dakle, $F$ je vanjska točka dužine $\overline{AB}/C$. ■

Teorem 2.16 nam omogućava da definiramo orijentaciju na pravcima.

**Definicija 2.20** *Neka su $ABC$ i $DEF$ dvije trojke točaka na pravcu $p$. Označimo različite točke s $A_0, A_1, ..., A_{n-1}$, gdje je $n \in \{3,4,5,6\}$, tako da $\bigcup_{r=0}^{n-1} \overline{A_r A_{r+1}}/A_{r-1} = p$, gdje je $A_{-1} := A_{n-1}$, i da presjek bilo kojeg para takvih dužina sadrži samo rubove. Možemo pretpostaviti da su oznake sljedeće: $A = A_0$, $B = A_b$, $C = A_c$, $D = A_d$, $E = A_e$ i $F = A_f$, $b < c$. Ako je $d < e < f$ ili $e < f < d$ ili $f < d < e$ kažemo da trojke $ABC$ i $DEF$ imaju* ***istu orijentaciju****. Inače kažemo da imaju* ***suprotnu orijentaciju****.*

Ilustrirajmo to na primjeru koristeći kružnicu kao model pravca.




Slika 2.5: Primjer iste (lijevo) i suprotne (desno) orijentacije

Na lijevoj slici za indekse trojke $ABC$ vrijedi $0 < 1 < 3$, a za indekse trojke $DEF$ $1 < 2 < 4$, pa te trojke imaju istu orijentaciju. Na desnoj slici za indekse trojke $ABC$ vrijedi $0 < 1 < 3$, a za indekse trojke $DEF$ ne vrijedi ništa od spomenutog u definiciji, pa su te trojke suprotnih orijentacija.

Sljedeća tvrdnja nam omogućava da pojam *iste orijentacije* povežemo s prije definiranim pojmom *separacije*.

**Propozicija 2.21** *$ABC$ i $ABD$ imaju istu orijentaciju ako i samo ako $AB \nparallel CD$.*

**Dokaz.** $\boxed{\Rightarrow}$ Obratom po kontrapoziciji. Neka je $AB \parallel CD$. Označimo točke na sljedeći način: $A = A_0, C = A_1, B = A_2, D = A_3$. Trojke $ABC$ i $ABD$ su suprotnih orijentacija.
Dakle, ako $ABC$ i $ABD$ imaju istu orijentaciju, onda $AB \nparallel CD$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Kako je $AB \nparallel CD$, to su oznake, bez smanjenja općenitosti, sljedeće: $A = A_0, B = A_1, C = A_2, D = A_3$. Kako vrijedi $0 < 1 < 3$, to su trojke $ABC$ i $ABD$ istih orijentacija. ∎
Iz prethodne definicije intuitivno slijedi definicija polupravca.

**Definicija 2.22** ***Polupravac s početnom točkom*** $A$ ***koji prolazi točkom*** $B$ ***u odnosu na*** $C$*, u oznaci* $\overrightarrow{AB}/C$*, je skup svih točaka dužine* $\overline{AB}/C$ *i svih vanjskih točaka* $D$ *dužine* $\overline{AB}/C$ *na pravcu* $AB$ *takvih da* $ABC$ *i* $ABD$ *imaju istu orijentaciju.*

Uočimo da su za jedinstveno određivanje polupravca u eliptičkoj geometriji potrebne tri točke, za razliku od apsolutne u kojoj su dovoljne dvije. Uzimajući u obzir Propoziciju 2.21 sve točke polupravca $\overrightarrow{AB}/C$ leže na $\overline{AB}/C$ ili $\underset{C}{\overline{AB}}$, a kako je po Teoremu 2.14 $\overline{AB}/C \cup \underset{C}{\overline{AB}} = AB$, slijedi da se polupravac $\overrightarrow{AB}/C$ i pravac $AB$ podudaraju u svim točkama, odnosno da su to isti skupovi. No, očito je da je na svakom pravcu moguće odrediti trojke točaka suprotnih orijentacija, pa stoga ima smisla definirati suprotne polupravce.

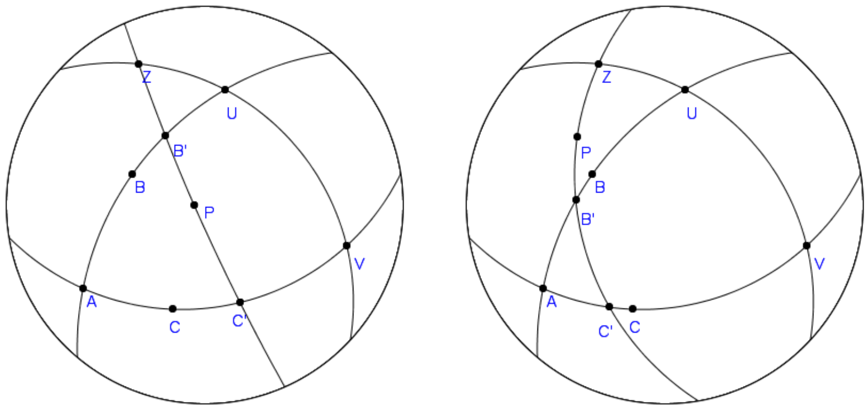
**Definicija 2.23** *Neka su* $A, B$ *i* $C$ *tri različite točke na pravcu* $p$*. Polupravce* $\overrightarrow{AB}/C$ *i* $\overrightarrow{AC}/B$ *nazivamo* ***suprotnim polupravcima*** *s početnom točkom* $A$ *na pravcu* $p$*.*

Po prethodno komentiranom su očito suprotni polupravci skupovno jednaki skupovi, a razlikuju se samo u orijentaciji.
Sada se može definirati kut sa svim svojim pripadnim dijelovima slično kao u apsolutnoj geometriji.

**Definicija 2.24** *Neka su* $\overrightarrow{AB}/U$ *i* $\overrightarrow{AC}/V$ *dva polupravca koja ne leže na istom pravcu. Par* $\{\overrightarrow{AB}/U, \overrightarrow{AC}/V\}$ *nazivamo* ***kutom s krakovima*** $\overrightarrow{AB}/U$ *i* $\overrightarrow{AC}/V$ *i vrhom* $O$*, te označavamo* $\angle BAC$*.*

**Definicija 2.25** *Neka su* $\overrightarrow{AB}/U$ *i* $\overrightarrow{AC}/V$ *dva kraka kuta i neka je* $\overline{UV}/Z$ *dužina kojoj je* $Z$ *vanjska točka. Točku* $P$ *nazivamo* ***unutrašnjom točkom kuta u odnosu na*** $Z$ *ako ne leži na krakovima kuta i ako svaki od izbora dužine* $\overline{PZ}$ *siječe točno jedan krak kuta. Točku koja nije unutrašnja točka kuta i koja ne leži na krakovima kuta nazivamo* ***vanjskom točkom kuta****.*

Kako po aksiomu $(E - I_3)$ postoje tri nekolinearne točke, to postoji i kut, pa je njegovo postojanje neupitno. Kao što su se dužina i njene unutrašnje točke morale definirati u odnosu na neku točku, iz istih razloga to se treba napraviti i za unutrašnje točke kuta. Uočimo da za $\overline{UV}/Z$ s vanjskom točkom $Z$ imamo dva izbora (mogli smo uzeti i $\underset{Z}{\overline{UV}}$ i odabrati neku njenu vanjsku točku $P$), pa stoga odgovor na pitanje je li neka točka unutrašnja ili vanjska točka kuta nije jednoznačno određen. Dakle, kao što postoje dva moguća izbora za dužinu, postoje i dva moguća izbora za kut. Uočimo da zbog aksioma $(E - I_7)$ da za bilo koju točku $P$ ravnine pravac $PZ$ mora sjeći oba kraka kuta. U slučaju da je $P$ unutrašnja točka kuta svaki od izbora dužine $\overline{PZ}$ siječe po jedan krak kuta, a u slučaju da je $P$ vanjska točka kuta jedan od izbora dužine $\overline{PZ}$ će sijeći oba kraka kuta, a drugi nijedan. Ilustrirajmo to pomoću modela stereografske projekcije sfere, koji će detaljnije biti opisan u posljednjem poglavlju.



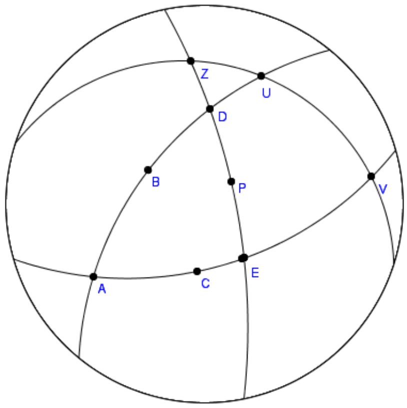

Slika 2.6: $P$ unutrašnja točka (lijevo) i vanjska točka (desno) kuta $\angle BAC$ u odnosu na točku $Z$

**Propozicija 2.26** *Kut dijeli točke eliptičke ravnine na tri međusobno disjunktna skupa: točke na krakovima kuta, unutrašnje točke kuta i vanjske točke kuta.*

**Dokaz.** Očito iz definicije unutrašnje i vanjske točke kuta. ■
Slijedi nekoliko teorema analognih teoremima u apsolutnoj geometriji.

**Teorem 2.27** *Neka je $\angle BAC$ kut s vrhom $A$ i neka je unutrašnjost kuta definirana u odnosu na točku $Z$. Neka je točka $P \neq A$ i neka $PZ$ siječe $\overrightarrow{AB}/U$ u točki $D$, a $\overrightarrow{AC}/V$ u točki $E$. Tada je $P$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$ ako i samo ako $PZ \parallel DE$.*

**Dokaz.** $\boxed{\Rightarrow}$ Neka je $P$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$ u odnosu na $Z$. Tada su $D$ i $E$ jedinstvene točke u kojima dužine $\overline{PZ}/E$ i $\underset{E}{\overline{PZ}}$ redom sijeku krakove kuta. $D$ je tada unutrašnja točka dužine $\overline{PZ}/E$, pa vrijedi $PZ \parallel DE$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Neka vrijedi $PZ \parallel DE$. Prvo uočimo da su $E$ i $D$ jedine točke u kojima pravac $PZ$ siječe krakove kuta. U suprotnom, ako bi primjerice pravac $PZ$ sijekao $\overrightarrow{AB}/U$ u još jednoj točki $D', D' \neq D$, onda bi po aksiomu $(E - I_2)$



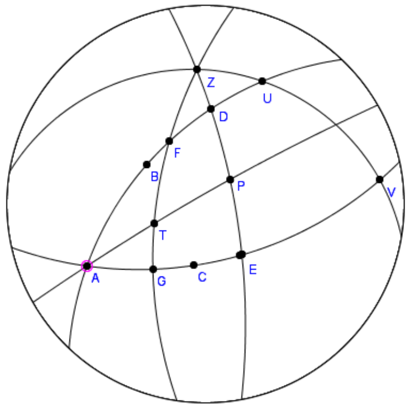

slijedilo $AB = PZ = ZU$, pa bi točka $V$ ležala na kraku $\overrightarrow{AB}/U$, što je kontradikcija s definicijom kuta. Preostaje pokazati da točka $P$ ne leži na krakovima kuta $\angle BAC$. Zbog $PZ \parallel DE$ po aksiomu $(E - II_2)$ $P, Z, D, E$ su kolinearne i međusobno različite točke, pa bi u slučaju da $P$ leži na $\overrightarrow{AB}/U$ slijedilo da je $AB = PD$, pa bi točka $E$ ležala na $\overrightarrow{AB}/U$, što je kontradikcija (slično se pokaže u drugom slučaju). Dakle, $P$ ne leži na krakovima kuta, pa zaključujemo da je $P$ doista unutrašnja točka kuta $\angle BAC$. ■

Pomoću prethodnog teorema lako se pokaže da svaki kut ima barem jednu unutrašnju točku.

**Propozicija 2.28** *Svaki kut ima barem jednu unutrašnju točku.*

**Dokaz.** Neka je dan kut $\angle BAC$ s pripadnom dužinom $\overline{UV}/Z$. Neka je $P$ unutrašnja točka dužine $\overline{UV}/Z$ (takva postoji po Teoremu 2.8). Tada vrijedi $UV \parallel PZ$, pa po prethodnom teoremu slijedi da je $P$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$. ■

**Teorem 2.29** *Neka je $\angle BAC$ kut s vrhom $A$ i $P$ unutrašnja točka kuta u odnosu na točku $Z$. Tada su sve točke $T$ pravca $AP$ koje su različite od $A$ unutrašnje točke kuta $\angle BAC$.*




**Dokaz.** Neka je $\angle BAC$ kut s vrhom $A$ i $P$ unutrašnja točka kuta u odnosu na točku $Z$. Tada postoji izbor dužine $\overline{PZ}$ koji siječe $\overrightarrow{AB}/U$ u točki $D$, a njena komplementarna dužina siječe $\overrightarrow{AC}/V$ u točki $E$. Sada po Teoeremu 2.27 vrijedi $PZ \mid\mid DE$. Neka je $T$ točka pravca $AP$ različita od $A$. Tada po $(E-I_7)$ pravac $TZ$ siječe $\overrightarrow{AB}/U$ u nekoj točki $F$, a $\overrightarrow{AC}/V$ u $G$. Kako $A$ ne leži na pravcima $PZ$ i $TZ$, dobro je definirano perspektivno preslikavanje s pravca $PZ$ na pravac $TZ$ iz točke $A$. Kako je $PZ \mid\mid DE$, to je po aksiomu $(E-II_6)$ $TZ \mid\mid FG$, pa je po Teoremu 2.27 $T$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$.

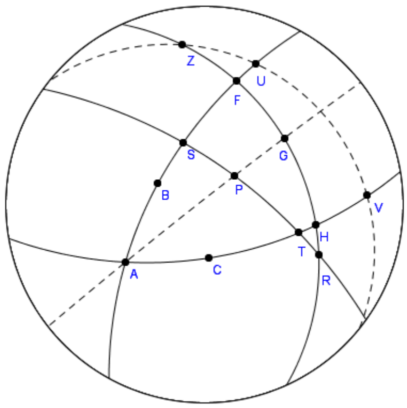
■

**Teorem 2.30** *Neka je $\angle BAC$ kut s vrhom $A$, $P$ unutrašnja točka kuta u odnosu na točku $Z$, $T \neq A$ točka na $\overrightarrow{AC}/V$, te $S$ sjecište pravca $PT$ i polupravca $\overrightarrow{AB}/U$. Ako je $R$ točka na $PT$ takva da je $ST \mid\mid PR$, onda je $R$ vanjska točka kuta $\angle BAC$.*

**Dokaz.** Uočimo da je $S \neq A$, jer bi u suprotnom dobili da $P$ leži na $\overrightarrow{AC}/V$, što je kontradikcija s činjenicom da je $P$ unuturašnja točka kuta $\angle BAC$. Slično se pokaže i da je $R \neq A$.

Promotrimo pravac $RZ$. U ovisnosti o odnosu točke $A$ i pravca $RZ$ razlikujemo dva slučaja. Ako $RZ$ prolazi točkom $A$, onda $R$ mora biti vanjska

točka kuta $\angle BAC$, jer bi u suprotnom po Teoremu 2.29 sve točke pravca $RZ$, uključujući i $Z$, bile unutrašnje točke kuta $\angle BAC$, što je kotradikcija s izborom točke $Z$.
Ako $RZ$ ne prolazi kroz točku $A$, onda po aksiomu $(E - I_7)$ siječe $\overrightarrow{AB}/U$, $\overrightarrow{AC}/V$ i $AP$ u nekim točkama $F$, $G$ i $H$ redom. Kako je $P$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$ po Teoremu 2.29 su sve točke pravca $AP$ unutrašnje točke kuta $\angle BAC$, pa tako i točka $H$. Sada po Teoremu 2.27 slijedi $HZ \mid\mid FG$. Kako



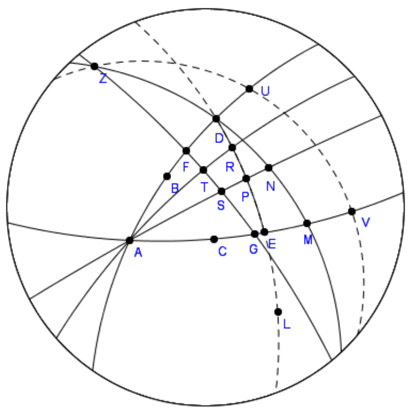

točka $A$ ne leži na pravcima $ST$ i $RZ$, dobro je definirano perspektivno preslikavanje pravca $ST$ na pravac $RZ$ iz točke $A$. Sada iz pretpostavke teorema da vrijedi $ST \mid\mid PR$ po aksiomu $(E - II_6)$ slijedi $FG \mid\mid HR$. Kako vrijedi $FG \mid\mid HR$ i $FG \mid\mid HZ$ po aksiomu $(E - II_5)$ ne može biti $FG \mid\mid RZ$, iz čega po Teoremu 2.27 slijedi da $R$ nije unutrašnja točka kuta $\angle BAC$.
Lako se pokaže da $R$ ne leži na krakovima kuta $\angle BAC$, pa zaključujemo da je $R$ vanjska točka kuta $\angle BAC$. ■

**Teorem 2.31** *Neka je dan kut $\angle BAC$ s točkama $D$ i $E$ na različitim krakovima kuta, $D, E \neq A$. Tada postoji izbor dužine $\overline{DE}$ takav da su sve unutrašnje točke te dužine unutrašnje točke kuta $\angle BAC$.*

**Dokaz.** Prvo pokažimo da postoji izbor dužine $\overline{DE}$ koji sadrži unutrašnju točku kuta $\angle BAC$. Pravac $DZ$ siječe pravac $AC$ u nekoj točki $M \neq A$ (u suprotnom bi došli u kontradikciju s odnosom točaka $U, V, Z$ i krakova kuta $\angle BAC$). Po Teoremu 2.8 postoji unutrašnja točka $N$ dužine $\overline{DM}/Z$. Tada vrijedi $DM \mid\mid ZN$, pa je po Teoremu 2.27 $N$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$. Pravac $AN$ siječe pravac $DE$ u nekoj točki $P$. Očito je $P$ na jednoj od dužina $\overline{DE}$, označimo ju s $\overline{DE}/L$. Kako je $P$ točka pravca $AN$ po Teoremu 2.29 je $P$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$.

Neka je $R$ još jedna unutrašnja točka dužine $\overline{DE}/L$ različita od $P$. Po Teoremu 2.10 je $DP \mid\mid ER$ ili $DR \mid\mid EP$. Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da vrijedi $DP \mid\mid ER$. Po aksiomu $(E - I_3)$ na pravcu $AP$ postoji točka $S$ različita od točaka $A$ i $P$. Po Teoremu 2.29 je $S$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$. Uočimo da $S$ nije na dužini $\overline{DE}/L$, jer bi u suprotnom došli u kontradikciju s definicijom kuta.

Neka $ZS$ siječe krakove kuta $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ u točkama $F$ i $G$ redom. Uočimo da su $DE$ i $ZS$ različiti pravci (zbog odnosa dužine $\overline{DE}/L$ i $S$, te činjenice da je $S$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$). Kako je $S$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$ po Teoremu 2.27 slijedi $ZS \mid\mid FG$. Neka se pravci $AR$ i $ZS$ sijeku u točki $T$. Kako točka $A$ nije na pravcima $ZS$ i $DE$, dobro je definirano




perspektivno preslikavanje pravca $DE$ na pravac $ZS$ iz točke $A$. Kako vrijedi $DP \parallel ER$, po aksiomu $(E - II_6)$ slijedi $FS \parallel GT$. Sada, kako imamo $FS \parallel GT$ i $ZS \parallel FG$, po Teoremu 2.3 slijedi $FS \parallel TZ$, pa je po Teoremu 2.27 $T$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$. Kako točka $R$ leži na pravcu $AT$, po Teoremu 2.29 slijedi da je $R$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$. Kako $R$ može biti bilo koja unutrašnja točka dužine $\overline{DE}/L$, slijedi da su sve unutrašnje točke dužine $\overline{DE}/L$ ujedno i unutrašnje točke kuta $\angle BAC$. ∎

Uočimo da dokaz ovog teorema implicira da za dužinu kojoj su rubovi na krakovima kuta ne mogu istovremeno postojati njena unutrašnja točka i unutrašnja točka njoj komplementarne dužine tako da su obje unutrašnje točke danog kuta.

Za dokaz sljedećeg teorema korisno je prije dokazati sljedeću lemu.

**Lema 2.32** *Neka je dan kut $\angle BAC$ s vrhom A, te neka su P i R unutrašnje točke kuta u odnosu na točku $Z$. Tada postoji dužina $\overline{PR}$ takva da nijedna točka te dužine ne leži na krakovima kuta $\angle BAC$.*

**Dokaz.** Po aksiomu $(E - I_7)$ pravci $PQ$ i $AC$ se sijeku. Sada postoji izbor dužine $\overline{PR}$, označimo ga s $\overline{PR}/S$, gdje je $S$ neka točka pravca $PR$, tako da $\overline{PR}/S$ siječe $\overrightarrow{AC}/V$ u nekoj točki $T$. Tada $\underset{S}{PR} = \overline{PR}/T$ ne siječe $\overrightarrow{AC}/V$. Uočimo da $S$ može biti proizvoljna točka dužine $\overline{PR}/T$ i da vrijedi $PR \parallel ST$.

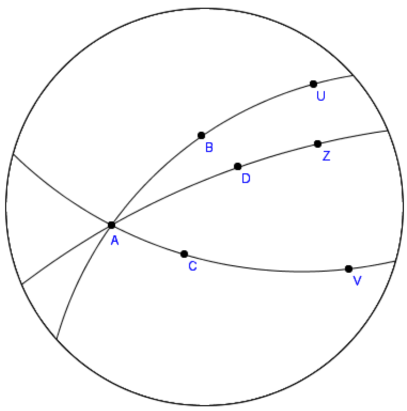
Pretpostavimo da točka $S$ leži na $\overrightarrow{AB}/U$. Sada je po Teoremu 2.30 jedna od točaka $P$ ili $R$ vanjska točka kuta $\angle BAC$, što je kotradikcija s pretpostavkom. Time smo pokazali da je $\overline{PR}/T$ tražena dužina. ∎

**Teorem 2.33** *Neka je dan kut $\angle BAC$ s vrhom A, te neka su P i R unutrašnje točke kuta u odnosu na točku $Z$. Tada postoji dužina $\overline{PR}$ takva da su sve točke te dužine unutrašnje točke kuta $\angle BAC$.*

**Dokaz.** Po prethodnoj Lemi 2.32 postoji izbor dužine $\overline{PR}$, označimo ga s

$\overline{PR}/T$, tako da nijedna točka te dužine nije točka krakova kuta $\angle BAC$. Neka je $S$ unutrašnja točka dužine $\overline{PR}/T$. Po definiciji kuta dužina jedna od dužina $\overline{PZ}$ siječe krak $\overrightarrow{AC}/V$, a njoj komplementarna dužina siječe krak $\overrightarrow{AB}/U$. Po Lemi 2.32 postoji izbor dužine $\overline{PS}$ takav da nijedna točka te dužine ne leži na krakovima kuta $\angle BAC$. Po aksiomu $(E - I_7)$ postoji izbor dužine $\overline{SZ}$ kojeg $\overrightarrow{AC}/V$ siječe, a zatim po Teoremu 2.18 $\overrightarrow{AB}/U$ siječe njenu komplementarnu dužinu, pa je $S$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$. Kako $S$ može biti bilo koja unutrašnja točka dužine $\overline{PR}/T$, slijedi da su sve unutrašnje točke te dužine ujedno i unutrašnje točke kuta $\angle BAC$. ■

**Definicija 2.34** *Za polupravac $\overrightarrow{AD}/Z$ kažemo da leži **između** polupravaca $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ ako $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ nisu suprotnih orijentacija i ako je $D$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$.*




Slika 2.7: Polupravac $\overrightarrow{AD}/Z$ između polupravaca $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$

Uočimo da ako je $\overrightarrow{AD}/Z$ između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$, onda po Teoremu 2.29 slijedi da su sve točke polupravca $\overrightarrow{AD}/Z$ osim $A$ unutrašnje točke kuta $\angle BAC$.

**Teorem 2.35** *Neka je $\overrightarrow{AD}/Z$ između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$, te neka su $A'$ i $B'$ proizvoljne točke na krakovima $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ redom različite od $A$. Tada $\overrightarrow{AD}/Z$ siječe jednu od dužina $\overline{B'C'}$ u unutrašnjoj točki kuta $\angle BAC$.*

**Dokaz.** Po aksiomu $(E - I_7)$ pravci $AD$ i $B'C'$ se sijeku u nekoj točki $T$. Uočimo da se $T$ nalazi na jednoj od dužina $\overline{B'C'}$. Kako je $\overrightarrow{AD}/Z$ između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$, to je $T \neq B, C$ i $D$ je unutrašnja točka kuta $\angle BAC$, pa su po Teoremu 2.29 sve točke pravca $AD$ koje su različite od $A$, uključujući $T$, unutrašnje točke kuta $\angle BAC$. ■

Vrijedi i obrat.

**Teorem 2.36** *Neka je dan kut $\angle BAC$ i neka je $\overrightarrow{AD}/P$ polupravac koji siječe sve dužine $\overline{B'C'}/Z'$ u njihovim unutrašnjim točkama, gdje su $B'$ i $C'$ točke na krakovima $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ redom različite od $A$, a $\overline{B'C'}/Z'$ onaj izbor dužine $\overline{B'C'}$ za koji su sve unutrašnje točke te dužine ujedno i unutrašnje točke kuta $\angle BAC$. Tada je polupravac $\overrightarrow{AD}/P$ između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$.*

**Dokaz.** Neka je $\overline{B'C'}/Z'$ proizvoljna dužina koja zadovoljava pretpostavke teorema i neka je $S$ njena unutrašnja točka u kojoj ju polupravac $\overrightarrow{AD}/P$ siječe. $S$ je unutrašnja točka kuta $\angle BAC$, pa je po Teoremu 2.29 svaka točka pravca $AS = AD = \overrightarrow{AD}/P$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$, pa je to i $D$. Sada je po definiciji polupravac $\overrightarrow{AD}/P$ između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$. ■

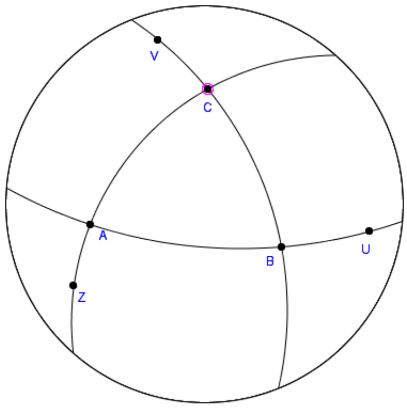
**Teorem 2.37** *Ako je $D$ unutrašnja točka dužine $\overline{BC}/Z$, onda postoji točka $A$ koja ne leži na $BC$ takva da $\overrightarrow{AD}/P$ leži između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$.*

**Dokaz.** Po aksiomu $(E - I_3)$ postoji točka $A$ koja ne leži na pravcu $BC$. Ako je $D$ na dužini $\overline{BC}/Z$, onda vrijedi $BC \mid\mid DZ$. Sada po Teoremu 2.27 slijedi da je $D$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$, pa $\overrightarrow{AD}/P$ leži između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$. ■

Trokut se definira slično kao u apsolutnoj geometriji.

**Definicija 2.38** *Neka su $A, B$ i $C$ tri nekoliearne točke. Skup $\{\overline{AB}/U$, $\overline{BC}/V$, $\overline{CA}/Z\}$ nazivamo* ***trokutom*** *i označavamo s $\triangle ABC$. Točke $A, B$*

*i $C$ nazivamo **vrhovima** trokuta, a dužine $\overline{AB}/U$, $\overline{BC}/V$, $\overline{CA}/Z$ **stranicama** trokuta.*




Slika 2.8: Trokut $\triangle ABC$

**Napomena:** U daljnjem tekstu se svaki put pri spominjaju trokuta podrazumijeva da su zadane i pripadne točke $U, V, Z$, iako to ne mora biti naglašeno u samim iskazima.

**Definicija 2.39** *Za točku $T$ kažemo da je **unutrašnja točka trokuta** $\triangle ABC$ ako je $T$ unutrašnja točka kutova $\angle CAB$, $\angle ABC$ i $\angle BCA$ određenih polupravcima određenim stranicama trokuta $\triangle ABC$. Za točku $T$ kažemo da je **vanjska točka trokuta** $\triangle ABC$ ako nije unutrašnja točka $\triangle ABC$ i ako ne leži na stranicama trokuta $\triangle ABC$.*

Uočimo da za dane vrhove $A, B, C$ trokuta $\triangle ABC$ postoji više mogućih trokuta, ovisno o izborima dužina/stranica trokuta.

## 2.3 Aksiomi kongruencije

$(E - III_1)$ Neka je dana dužina $\overline{AB}/U$ i neka je dan polupravac $\overrightarrow{A'C'}/U'$ s početnom točkom $A'$. Tada postoji jedinstvena točka $B'$ na $\overrightarrow{A'C'}/U'$

za koju vrijedi točno jedno od sljedećeg:

- $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$ i $A'C' \parallel B'U'$
- $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$ i $A'B' \parallel C'U'$
- $\overline{AB}/U \equiv \underset{U'}{\overline{A'B'}}$ i $A'U' \parallel C'B'$.

$(E-III_2)$ Ako je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$ i $\overline{AB}/U \equiv \overline{A''B''}/U''$, onda je $\overline{A'B'}/U'$ $\equiv \overline{A''B''}/U''$. Svaka dužina je kongruentna samoj sebi.

$(E-III_3)$ Ako su $A, B, C$ točke dužine $\overline{PQ}/U$ takve da je $(ABC)/U$ i $A', B', C'$ točke dužine $\overline{P'Q'}/U'$ takve da je $(A'B'C')/U'$, te ako je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$ i $\overline{BC}/U \equiv \overline{B'C'}/U'$, onda je $\overline{AC}/U \equiv \overline{A'C'}/U'$.

$(E-III_4)$ Ako je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, onda je $\underset{U}{\overline{AB}} \equiv \underset{U'}{\overline{A'B'}}$.

$(E-III_5)$ Neka je dan $\angle BAC$ određen polupravcima $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$, te neka je dan polupravac $\overrightarrow{A'B'}/U'$. Tada postoje točno dva različita polupravca, $\overrightarrow{A'C'}/V'$ i $\overrightarrow{A'C''}/V''$, takva da je $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ i $\angle BAC \equiv \angle B'A'C''$.

$(E-III_6)$ Ako je $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$ i $\angle BAC \equiv \angle B''A''C''$ onda je $\angle B'A'C' \equiv \angle B''A''C''$. Svaki kut je kongruentan samom sebi.

Prije iskaza posljednjeg aksioma kongruencije definirajmo što znači da su dva trokuta kongruentna.

**Definicija 2.40** *Za dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ kažemo da su* ***kongruentni****, i pišemo $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, ako je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, $\overline{BC}/V \equiv \overline{B'C'}/V'$, $\overline{CA}/Z \equiv \overline{C'A'}/Z'$, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$ i $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$.*

$(E - III_7)$ **(S-K-S)** Neka su dana dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$, te neka je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, $\overline{AC}/Z \equiv \overline{A'C'}/Z'$ i $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. Tada postoji jedinstveni izbor dužine $\overline{BC}$ takav da je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Može se pokazati da je $\equiv$ relacija ekvivalencije na skupu dužina i kutova. Forma aksioma $(E - III_1)$ je neobična. Razlog tome se krije u trećoj točki iskaza. Zbog načina na koji su definirane dužine i zbog činjenice da dvije točke određuju dvije dužine, nužno je naglasiti da je u slučaju kada je $A'U' \parallel C'B'$ dana dužina kongruentna $\underset{U'}{\overline{A'B'}}$. Uočimo da su tim tvrdnjama pokriveni svi slučajevi koji mogu nastupiti (to slijedi iz aksioma $(E - II_4)$). Intuitivno gledajući, jasno je da se točka $U'$ može uvijek "pomaknuti dovoljno daleko". U daljnjem radu će se zbog jednostavnosti uvijek pokušati koristiti prenošenje dužine tako da vrijedi jedna od prve dvije mogućnosti. Pretpostavljat će se da je točka $U'$ takva da udovoljava jednoj od prve dvije mogućnosti i na nju se neće obraćati puno pozornosti, obzirom da je to stvar čiste formalnosti, a razlaganje na slučajeve bi vodilo u nepotrebne komplikacije u dokazima. Aksiom $(E - III_3)$ govori o zbrajanju dužina, pa iskažimo odmah teorem o oduzimanju dužina.

**Teorem 2.41 (O oduzimanju dužina)** *Ako su $A, B, C$ točke dužine $\overline{PQ}/U$ takve da je $(ABC)/U$ i $A', B', C'$ točke dužine $\overline{P'Q'}/U'$ takve da je $(A'B'C')/U'$, te ako je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$ i $\overline{AC}/U \equiv \overline{A'C'}/U'$, onda je $\overline{BC}/U \equiv \overline{B'C'}/U'$.*

**Dokaz.** Pretpostavimo suprotno, odnosno neka $\overline{BC}/U \not\equiv \overline{B'C'}/U'$.
Po aksiomu $(E - III_1)$ postoji jedinstvena točka $C''$ na $\overrightarrow{B'C'}/A'$ tako da je $\overline{BC}/U \equiv \overline{B'C''}/U'$. Očito je $C'' \neq C'$, jer bi u suprotnom vrijedilo $\overline{BC}/U \equiv \overline{B'C''}/U'$ i $\overline{B'C'}/U' \equiv \overline{B'C''}/U'$, pa bi po aksiomu $(E - III_2)$ slijedilo $\overline{BC}/U \equiv \overline{B'C'}/U'$, što je kontradikcija s pretpostavkom. Kako je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, po aksiomu $(E - III_3)$ slijedi $\overline{AC}/U \equiv \overline{A'C''}/U'$. Kako je po pretpostavci

teorema $\overline{AC}/U \equiv \overline{A'C'}/U'$, po aksiomu $(E - III_2)$ slijedi $\overline{A'C'}/U' \equiv \overline{A'C''}/U'$, što je kontradikcija s činjenicom da su $C'$ i $C''$ različite točke.
Dakle, $\overline{BC}/U \equiv \overline{B'C'}/U'$. ∎
Kao i u apsolutnoj geometriji, za jednakokračne trokute vrijedi sljedeći teorem.

**Teorem 2.42** *U jednakokračnom trokutu su kutovi uz osnovicu kongruentni.*

**Dokaz.** Neka je $\triangle ABC$ jednakokračan trokut i neka je $\overline{CA}/Z \equiv \overline{BC}/V$. Promotrimo trokute $\triangle ABC$ i $\triangle BAC$. Vrijedi $\overline{CA}/Z \equiv \overline{BC}/V$, $\overline{BC}/V \equiv \overline{CA}/Z$ i $\angle ACB \equiv \angle BCA$. Kako je treća stranica tih trokuta, $\overline{AB}/U$, jednaka u oba trokuta, uz izbor te dužine po aksiomu $(E - III_7)$ je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, pa je i $\angle CAB \equiv \angle ABC$. ∎
Sada uvedimo nekoliko definicija vezanih za kutove i pokažimo da u eliptičkoj geometriji za njih vrijede slične tvrdnje kao u apsolutnoj geometriji.

**Definicija 2.43** *Dva kuta koja imaju zajednički vrh i jedan krak, a kojima su preostali krakovi suprotni polupravci istog pravca nazivamo* ***suplementarnim kutovima****.*

**Teorem 2.44** *Suplementarni kutovi kongruentnih kutova su kongruentni.*

**Dokaz.** Neka su $\angle ABC$ i $\angle A'B'C'$ proizvoljni kutovi takvi da je $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, te neka su $\angle DBA$ i $\angle D'B'A'$ njima suplementarni kutovi redom. Kako su $A, C, D$ proizvoljne točke, možemo pretpostaviti da za njih vrijedi $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, $\overline{BC}/V \equiv \overline{B'C'}/V'$ i $\overline{BD}/Q \equiv \overline{B'D'}/Q'$ (u slučaju da to ne vrijedi, uvijek po aksiomu $(E - III_1)$ možemo odabrati točke za koje to vrijedi). Po aksiomu $(E - III_7)$ postoji izbor dužine $\overline{AC}/Z$ takav da je $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$. Tada je $\overline{AC}/Z \equiv \overline{AC}/Z'$ i $\angle ACB \equiv \angle A'C'B'$.
Zbog definicije suplementarnih kutova točke $D$ i $D'$ nisu točke dužina $\overline{BC}/V$

i $\overline{B'C'}/V'$. Dakle, $B, C, D$ i $B', C', D'$ su trojke međusobno različitih točaka. Po aksiomu $(E-II_1)$ postoje točke $E$ i $E'$ takve da je $CD \parallel BE$ i $C'D' \parallel B'E'$, pa ponovnom primjenom aksioma $(E-II_1)$ postoje točke $F$ i $F'$ takve da je $CE \parallel BF$ i $C'E' \parallel B'F'$, a zatim po istom aksiomu postoje točke $G$ i $G'$ takve da je $EF \parallel BG$ i $E'F' \parallel B'G'$. Može se pokazati da su $B, C, D$ i $B', C', D'$ unutrašnje točke dužina $\overline{EF}/G$ i $\overline{E'F'}/G'$ redom, te da vrijedi $(BCD)/G$ i $(B'C'D')/G'$. Sada po aksiomu $(E-III_3)$ slijedi da je $\overline{BD}/Q \equiv \overline{B'D'}/Q'$. Po aksiomu $(E-III_7)$ slijedi da postoji izbor stranice $\overline{AD}/R$ takav da je $\triangle ADC \equiv \triangle A'D'C'$, pa je $\angle ADC \equiv \angle A'D'C'$ i $\overline{AD}/R \equiv \overline{A'D'}/R'$. Sada po aksiomu $(E-III_7)$ postoji izbor stranice $\overline{AB}/U$, što je u ovom slučaju već spomenuta dužina, takva da je $\triangle ADB \equiv \triangle A'D'B'$. Tada je i $\angle DBA \equiv \angle D'B'A'$, što je i trebalo dokazati. ■

Sljedeća dva teorema govore o zbrajanju i oduzimanju kutova.

**Teorem 2.45 (O zbrajanju kutova)** *Neka je polupravac $\overrightarrow{AC}/Z$ između polupravaca $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AD}/V$, a polupravac $\overrightarrow{A'C'}/Z'$ između polupravaca $\overrightarrow{A'B'}/U'$ i $\overrightarrow{A'D'}/V'$. Ako je $\angle DAC \equiv \angle D'A'C'$ i $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, onda je $\angle DAB \equiv \angle D'A'B'$.*

**Dokaz.** Zbog Teorema 2.35 i Teorema 2.29 možemo pretpostaviti da je $C$ unutrašnja točka dužine $\overline{BD}/R$, gdje je $R$ vanjska točka kuta $\angle DAB$. Zbog aksioma $(E-III_1)$ možemo pretpostaviti da su točke $B', C', D'$ takve da je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, $\overline{AC}/Z \equiv \overline{A'C'}/Z'$ i $\overline{AD}/V \equiv \overline{A'D'}/V'$. Po aksiomu $(E-III_7)$, uz dužine $\overline{BC}/R$ i $\overline{CD}/R$, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ i $\triangle ACD \equiv \triangle A'C'D'$, pa je posebno $\angle BCA \equiv B'C'A'$ i $\angle ACD \equiv \angle A'C'D'$.

Točke $B, C$ i $D$ su kolinearne, pa su $\angle BCA$ i $\angle DCA$ suplementarni kutovi. Po Teoremu 2.44 slijedi da suplementarni kut kuta $\angle BCA$ mora biti kongruentan kutu $\angle ACD$. Po aksiomu $(E-III_5)$ postoje dva različita polupravca $\overline{C'D''}/R''$ i $\overline{C'D'''}/R'''$ tako da je $\angle ACD \equiv \angle A'C'D''$ i $\angle ACD \equiv \angle A'C'D'''$.

Kako je po prethodno dokazanom imamo $\triangle ACD \equiv \triangle A'C'D'$, to $\overrightarrow{C'D'}/R'$, gdje je $R'$ neka vanjska točka kuta $\angle D'A'B'$, mora biti jedan od ta dva polupravca, pa su $B', C'$ i $D'$ kolinearne točke. Kako je polupravac $\overrightarrow{A'C'}/Z'$ između polupravaca $\overrightarrow{A'B'}/U'$ i $\overrightarrow{A'D'}/V'$, to su po Teoremu 2.29 sve točke $\overrightarrow{A'C'}/Z'$ osim $A'$ unutrašnje točke kuta $\angle D'A'B'$, pa je po Teoremu 2.27 $C'$ unutrašnja točka dužine $\overline{B'D'}/R'$. Sada korištenjem Teorema 2.19 i aksioma $(E - III_3)$ slijedi da je $\overline{BD}/R \equiv \overline{B'D'}/R'$.

Kako je $\triangle ADC \equiv \triangle A'D'C'$, to je posebno i $\angle ADC \equiv \angle A'D'C'$. Sada je, za dužinu $\overline{AB}/U$, po aksiomu $(E - III_7)$ $\triangle ADB \equiv \triangle A'D'B'$, pa je posebno $\angle BAD \equiv B'A'D'$. ∎

**Teorem 2.46 (O oduzimanju kutova)** *Neka je polupravac $\overrightarrow{AC}/Z$ između polupravaca $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AD}/V$, a polupravac $\overrightarrow{A'C'}/Z'$ između polupravaca $\overrightarrow{A'B'}/U'$ i $\overrightarrow{A'D'}/V'$. Ako je $\angle DAC \equiv \angle D'A'C'$ i $\angle DAB \equiv \angle D'A'B'$, onda je $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$.*

**Dokaz.** Zbog Teorema 2.35 i Teorema 2.29 možemo pretpostaviti da je $C$ unutrašnja točka dužine $\overline{BD}/R$, gdje je $R$ vanjska točka kuta $\angle DAB$, a $C'$ unutrašnja točka dužine $\overline{B'D'}/R'$, gdje je $R'$ vanjska točka kuta $\angle D'A'B'$. Zbog aksioma $(E - III_1)$ možemo pretpostaviti da su točke $B'$ i $D'$ takve da je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$ i $\overline{AD}/V \equiv \overline{A'D'}/V'$. Po aksiomu $(E - III_7)$, uz dužine $\overline{BD}/R$ i $\overline{CD}/R$, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$ i $\triangle ACD \equiv \triangle A'C'D'$, pa je posebno $\angle ACD \equiv \angle A'C'D'$, $\overline{AC}/P \equiv \overline{A'C'}/P'$, $\overline{BD}/R \equiv \overline{B'D'}/R'$ i $\overline{CD}/R \equiv \overline{C'D'}/R'$. Sada korištenjem Teorema 2.19 i Teorema 2.41 slijedi da je $\overline{BC}/R \equiv \overline{B'C'}/R'$. Kako je $\angle ACD \equiv \angle A'C'D'$, to je po Teoremu 2.44 $\angle BCA \equiv \angle B'C'A'$. Sada, uz dužinu $\overline{AC}/P$, po aksiomu $(E - III_7)$ slijedi da je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$, pa je posebno $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$. ∎

**Definicija 2.47** *Dva kuta koji imaju zajednički vrh, a krakovi su im suprotni* *polupravci dvaju različitih pravaca koji prolaze tim vrhom nazivamo* ***vršnim kutovima****.*

**Teorem 2.48** *Vršni kutovi su kongruentni.*

**Dokaz.** Direktno iz prethodnog teorema. ■

**Definicija 2.49** *Kut koji je kongruentan svome suplementarnom kutu nazivamo* ***pravim kutom****. Pravce na kojima leže krakovi pravog kuta nazivamo* ***okomitim pravcima****.*

**Teorem 2.50** *Postoji pravi kut.*

**Dokaz.** Neka je $\angle BAC$ proizvoljni kut. Po aksiomu $(E - III_5)$ postoji polupravac $\overrightarrow{AB'}/U' \neq \overrightarrow{AB}/U$ tako da je $\angle BAC \equiv \angle CAB'$.
Ako su $B, A$ i $B'$ kolinearne točke, onda je $\angle BAC$ traženi pravi kut.
Pretpostavimo da su $B, A$ i $B'$ nekolinearne točke. Tada po aksiomu $(E - I_7)$ pravac $BB'$ siječe pravac $AC$ u nekoj točki $T \neq A$. Sada po aksiomu $(E - III_7)$ postoji jedinstveni izbor dužine $\overline{BT}$ tako da je $\triangle BAT \equiv \triangle TAB'$. Posebno je tada $\angle ATB \equiv \angle B'TA$, pa je $\angle ATB$ traženi pravi kut. ■
Ubuduće će se pravi kut ponekad označavati s $R$.

**Teorem 2.51** *Ako je $\overline{AC}/U \equiv \overline{A'C'}/U'$, onda za svaku unutrašnju točku $B$ dužine $\overline{AC}/U$ postoji jedinstvena unutrašnja točka $B'$ dužine $\overline{A'C'}/U'$ takva da je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$.*

**Dokaz.** Po aksiomu $(E - III_1)$ postoji jedinstvena točka $B'$ na polupravcu $\overrightarrow{A'C'}/U'$ takva da je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$. Pokažimo da je $B'$ unutrašnja točka dužine $\overline{A'B'}/U'$.
Točka $B'$ je različita od $C'$, jer bi u suprotnom imali $\overline{AC}/U \equiv \overline{A'C'}/U'$ i $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'C'}/U'$, pa bi po aksiomu $(E - III_2)$ slijedilo $\overline{AC}/U \equiv \overline{AB}/U$,

što je kontradikcija s aksiomom $(E - III_1)$.
Pretpostavimo da je $B'$ vanjska točka dužine $\overline{A'C'}/U'$. Po aksiomu $(E-III_1)$ postoji jedinstvena točka $D$ na $\overrightarrow{CU}/A$ takva da je $\overline{C'B'}/A' \equiv \overline{CD}/A$. Možemo prepostaviti da su $D$ i $B'$ unutrašnje točke dužina $\overline{CU}/A$ i $\overline{C'U'}/A'$ redom (u suprotnom uvijek možemo zamijeniti točke $U$ i $U'$ drugim točkama tako da to vrijedi). Po aksiomu $(E - III_3)$ je $\overline{AD}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, a kako je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, po aksiomu $(E - III_2)$ slijedi $\overline{AB}/U \equiv \overline{AD}/U$. Kako su ACB i ACD istih orijentacija, to je i $D$ točka polupravca $\overrightarrow{AC}/U$. Dakle, dobili smo da su $B$ i $D$ dvije točke polupravca $\overrightarrow{AC}/U$ takve da je $\overline{AB}/U \equiv \overline{AD}/U$, što je kontradikcija s aksiomom $(E - III_1)$.
Dakle, $B'$ je unutrašnja točka dužine $\overline{A'C'}/U'$. ■
Slično kao i u apsolutnoj geometriji možemo uvesti relaciju "biti manji" na dužinama i kutovima. Svojstva koja je ta relacija imala u apsolutnoj geometriji vrijede i u eliptičkoj geometriji. Dokazi tih svojstava se provode slično kao u apsolutnoj geometriji, te se ovdje neće posebno dokazivati.

**Definicija 2.52** *Neka su dane dužine $\overline{AB}/U$ i $\overline{A'B'}/U'$. Kažemo da je dužina $\overline{A'B'}/U'$* ***manja*** *od dužine $\overline{AB}/U$ (ili dužina $\overline{AB}/U$* ***veća*** *od dužine $\overline{A'B'}/U'$), i pišemo $\overline{A'B'}/U' < \overline{AB}/U$ (ili $\overline{AB}/U > \overline{A'B'}/U'$), ako postoji unutrašnja točka $C$ dužine $\overline{AB}/U$ takva da je $\overline{AC}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$.*

**Teorem 2.53** *Neka su $\overline{AB}/U$, $\overline{CD}/V$ i $\overline{EF}/Z$ proizvoljne dužine. Tada vrijedi:*

*(i) ili $\overline{AB}/U \equiv \overline{CD}/V$ ili $\overline{AB}/U < \overline{CD}/V$ ili $\overline{AB}/U > \overline{CD}/V$*

*(ii) ako je $\overline{AB}/U < \overline{CD}/V$ i $\overline{CD}/V \equiv \overline{EF}/Z$, onda je $\overline{AB}/U < \overline{EF}/Z$*

*(iii) ako je $\overline{AB}/U > \overline{CD}/V$ i $\overline{CD}/V \equiv \overline{EF}/Z$, onda je $\overline{AB}/U > \overline{EF}/Z$*

*(iv) ako je $\overline{AB}/U < \overline{CD}/V$ i $\overline{CD}/V < \overline{EF}/Z$, onda je $\overline{AB}/U < \overline{EF}/Z$.*

**Definicija 2.54** *Neka su* $\overline{AB}/U$ *i* $\overline{CD}/V$ *dvije dužine. Za dužinu* $\overline{AE}/Z$ *kažemo da je* ***zbroj dužina*** $\overline{AB}/U$ *i* $\overline{CD}/V$*, i pišemo* $\overline{AE}/Z \equiv \overline{AB}/U + \overline{CD}/V$*, ako je* $E$ *vanjska točka dužine* $\overline{AB}/U$ *i ako je* $\overline{BE}/Z \equiv \overline{CD}/V$*.*

**Teorem 2.55** *Neka su* $\overline{AB}/U$*,* $\overline{CD}/V$*,* $\overline{EF}/W$ *i* $\overline{GH}/D$ *proizvoljne dužine. Tada vrijedi:*

*(i)* $\overline{AB}/U + \overline{CD}/V \equiv \overline{CD}/V + \overline{AB}/U$

*(ii)* $(\overline{AB}/U + \overline{CD}/V) + \overline{EF}/W \equiv \overline{AB}/U + (\overline{CD}/V + \overline{EF}/W)$

*(iii) ako je* $\overline{AB}/U < \overline{CD}/V$*, onda je* $\overline{AB}/U + \overline{EF}/W < \overline{CD}/V + \overline{EF}/W$

*(iv) ako je* $\overline{AB}/U < \overline{CD}/V$ *i* $\overline{EF}/W < \overline{GH}/Z$*, onda je* $\overline{AB}/U + \overline{EF}/W < \overline{CD}/V + \overline{GH}/Z$

*(v) ako je* $\overline{AB}/U \equiv \overline{CD}/V$ *i* $\overline{EF}/W \equiv \overline{GH}/Z$*, onda je* $\overline{AB}/U + \overline{EF}/W \equiv \overline{CD}/V + \overline{GH}/Z$

**Definicija 2.56** *Neka su dani kutovi* $\angle BAC$ *i* $\angle B'A'C'$*. Kažemo da je kut* $\angle B'A'C'$ ***manji*** *od kuta* $\angle BAC$ *(ili* $\angle BAC$ ***veći*** *od kuta* $\angle B'A'C'$*), i pišemo* $\angle B'A'C' < \angle BAC$ *(ili* $\angle BAC > \angle B'A'C'$*), ako postoji unutrašnja točka* $D$ *kuta* $\angle BAC$ *takva da je* $\angle DAC \equiv \angle B'A'C'$*. Kut koji je manji od pravog kuta nazivamo* ***šiljastim*** *kutom, a kut koji je veći od pravog kuta nazivamo* ***tupim*** *kutom.*

**Teorem 2.57** *Neka su* $\angle BAC, \angle EDF$ *i* $\angle HGI$ *proizvoljni kutovi. Tada vrijedi:*

*(i) ili* $\angle BAC \equiv \angle EDF$ *ili* $\angle BAC < \angle EDF$ *ili* $\angle BAC > \angle EDF$

*(ii) ako je* $\angle BAC < \angle EDF$ *i* $\angle EDF \equiv \angle HGI$*, onda je* $\angle BAC < \angle HGI$

*(iii)* *ako je* $\angle BAC > \angle EDF$ *i* $\angle EDF \equiv \angle HGI$*, onda je* $\angle BAC > \angle HGI$

*(iv)* *ako je* $\angle BAC < \angle EDF$ *i* $\angle EDF < \angle HGI$*, onda je* $\angle BAC < \angle HGI$.

**Definicija 2.58** *Neka su* $\angle BAC$ *i* $\angle C'A'D'$ *kutovi. Za kut* $\angle BAD$ *kažemo da je* ***zbroj kutova*** $\angle BAC$ *i* $\angle C'A'D'$*, i pišemo* $\angle BAD \equiv \angle BAC + \angle C'A'D'$*, ako je* $\overrightarrow{AC}/V$ *između* $\overrightarrow{AB}/U$ *i* $\overrightarrow{AD}/Z$ *i ako je* $\angle CAD \equiv \angle C'A'D'$.

**Teorem 2.59** *Neka su* $\angle BAC$*,* $\angle EDF$*,* $\angle HGI$ *i* $\angle KJL$ *proizvoljni kutovi. Tada vrijedi:*

*(i)* $\angle BAC + \angle EDF \equiv \angle EDF + \angle BAC$

*(ii)* $(\angle BAC + \angle EDF) + \angle HGI \equiv \angle BAC + (\angle EDF + \angle HGI)$

*(iii)* *ako je* $\angle BAC < \angle EDF$*, onda je* $\angle BAC + \angle HGI < \angle EDF + \angle HGI$

*(iv)* *ako je* $\angle BAC < \angle EDF$ *i* $\angle HGI < \angle KJL$*, onda je* $\angle BAC + \angle HGI < \angle EDF + \angle KJL$

*(v)* *ako je* $\angle BAC \equiv \angle EDF$ *i* $\angle HGI \equiv \angle KJL$*, onda je* $\angle BAC + \angle HGI \equiv \angle EDF + \angle KJL$.

Sada možemo dokazati sljedeći teorem.

**Teorem 2.60** *Svaka dva prava kuta su kongruentna.*

**Dokaz.** Neka su $\angle BAC$ i $\angle B'A'C'$ dva proizvoljna prava kuta. Tvrdimo da je $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$.

Pretpostavimo suprotno, odnosno $\angle BAC \not\equiv \angle B'A'C'$. Tada je po Teoremu 2.57 ili $\angle BAC < \angle B'A'C'$ ili $\angle BAC > \angle B'A'C'$.

Pretpostavimo da je $\angle BAC > \angle B'A'C'$. Po definiciji slijedi da postoji unutrašnja točka $B''$ kuta $\angle BAC$ takva da je $\angle B''AC \equiv \angle B'A'C'$. Neka

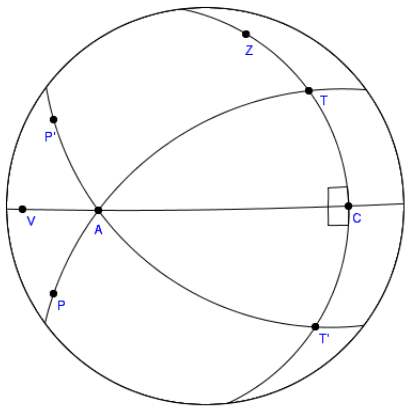
je $\overrightarrow{AD}/P$ polupravac suprotne orijentacije od polupravca $\overrightarrow{AC}/Z$. Tada su $\angle DAB$ i $\angle DAB''$ suplementarni kutovi kutova $\angle BAC$ i $\angle B''AC$ redom. Kako su $\angle BAC$ i $\angle B''AC$ pravi kutovi, to vrijedi $\angle BAC \equiv \angle DAB$ i $\angle B''AC \equiv \angle DAB''$. Polupravac $\overrightarrow{AB}/U$ se nalazi između polupravaca $\overrightarrow{AB''}/U''$ i $\overrightarrow{AD}/P$, pa je $\angle DAB'' > \angle DAB$, a kako je $\angle DAB \equiv \angle BAC$, to je po Teoremu 2.57 $\angle DAB'' > \angle BAC$. Kako je $\angle DAB'' \equiv \angle B''AC$, to po Teoremu 2.57 slijedi da je $\angle B''AC > \angle BAC$, a kako je $\angle B''AC \equiv \angle B'A'C'$, po Teoremu 2.57 slijedi $\angle B'A'C' > \angle BAC$, što je kontradikcija s pretpostavkom.
Slično se pokaže u slučaju da je $\angle BAC < \angle B'A'C'$. Dakle, mora biti $\angle BAC \equiv \angle B'A'C'$. ■

Sljedeći teorem je slabija verzija teorema o okomici iz dane točke na dani pravac koji vrijedi u apsolutnoj geometriji. U apsolutnoj geometriji je iz dane točke, bez obzira ležala ona na danom pravcu ili ne, postojala jedinstvena okomica na dani pravac. U ovom sustavu aksioma jedinstvenost te okomice se može pokazati samo za slučaj kada dana točka leži na danom pravcu, dok će u slučaju da je dana točka van danog pravca postojati slučajevi kada tom točkom prolazi beskonačno mnogo okomica iz te točke na dani pravac. Više o tome će biti pokazano u kasnijim poglavljima.

**Teorem 2.61** *Neka je dan pravac $p$ i točka $T$. Tada postoji pravac $q$ okomit na $p$ koji prolazi točkom $T$. U slučaju da je $T$ točka pravca $p$ okomica je jedinstvena.*

**Dokaz.** Obzirom na odnos pravca $p$ i točke $T$ razlikujemo dva slučaja.
Neka $T$ ne leži na pravcu $p$. Neka je $\overrightarrow{AC}/V$ proizvoljni polupravac na pravcu $p$ i neka je $\overrightarrow{AT}/P$ proizvoljni polupravac. Neka je $\overrightarrow{AT'}/P'$ drugi polupravac iz aksioma $(E{-}III_5)$ takav da je $\angle TAC \equiv \angle CAT'$. Možemo pretpostaviti da je $\overline{AT}/P \equiv \overline{A'T'}/P'$. Neka je unutrašnjost kuta $\angle TAT'$ definirana u odnosu na neku točku $Z$ tako da joj je $C$ unutrašnja točka. Zbog Teorema 2.35 možemo

pretpostaviti da je $C$ točka presjeka polupravca $\overrightarrow{AC}/V$ i dužine $\overline{TT'}/Z$. Po




aksiomu $(E - III_7)$ koristeći dužinu $\overline{CT}/Z$ slijedi da je $\triangle ACT \equiv \triangle AT'C$. Sada je $\angle ACT \equiv \angle T'CA$. Kako su $T, T'$ i $C$ kolinearne točke, to su $\angle ACT$ i $\angle T'CA$ suplementarni kutovi, pa su zbog $\angle ACT \equiv \angle T'CA$ to pravi kutovi. $TT'$ je tražena okomica.

Neka je $T$ točka pravca $p$ i neka je $\overrightarrow{TC}/P$ proizvoljni polupravac s početkom $T$ na pravcu $p$. Po Teoremu 2.50 postoji pravi kut, pa po aksiomu $(E - III_5)$ postoje polupravac $\overrightarrow{TC'}/P'$ tako da je kut $\angle C'TC$ kongruentan pravom kutu. $C'T$ je okomica kroz točku $T$ na pravac $p$. Jedinstvenost okomice slijedi iz Teorema 2.57 i Teorema 2.60. ■

U eliptičkoj geometriji se lako pokaže da vrijede skoro svi teoremi vezani uz kongruencije trokuta. Teorem koji kaže da su trokuti kongruentni ako su im kongruentna dva para kutova i stranice nasuprot većih kutova *(K-K-$S^>$)* ne vrijedi u eliptičkoj geometriji. U poglavlju o modelima će se dati kontraprimjer koji to potvrđuje.

**Teorem 2.62 (K-S-K)** *Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ proizvoljni trokuti. Ako je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ i $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$, onda je, uz dani izbor stranica $\overline{BC}/V$ i $\overline{AC}/Z$, $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.*

**Dokaz.** Pokažimo da je $\overline{AC}/Z \equiv \overline{A'C'}/Z'$.

Pretpostavimo suprotno, tj. $\overline{AC}/Z \not\equiv \overline{A'C'}/Z'$. Po aksiomu $(E - III_1)$ postoji jedinstvena točka $C''$ na $\overrightarrow{A'C'}/Z'$ takva da je $\overline{AC}/Z \equiv \overline{A'C''}/Z'$. Po aksiomu $(E - III_7)$ postoji jedinstveni izbor dužine $\overline{B'C''}/Z''$ takav da je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$. Iz toga slijedi da je $\angle ABC \equiv \angle A'B'C''$. Po aksiomu $(E - III_6)$ je $\angle A'B'C' \equiv \angle A'B'C''$.

Zbog pretpostavke $\overline{AC}/Z \not\equiv \overline{A'C'}/Z'$ je očito $C'' \neq C'$. Iz toga slijedi da je $C''$ ili unutrašnja ili vanjska točka dužine $\overline{A'C'}/Z'$. Neka je vanjština kuta $\angle A'B'C'$ određena u odnosu na točku $Z'$. Ako je $C''$ unutrašnja točka dužine $\overline{A'C'}/Z'$, to je po Teoremu 2.27 $C''$ unutrašnja točka kuta $\angle A'B'C'$, pa slijedi $\angle A'B'C'' < \angle A'B'C'$, što je kontradikcija. Ako je $C''$ vanjska točka dužine $\overline{A'C'}/Z'$, onda bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $C'$ unutrašnja točka dužine $\overline{A'C''}/Z'$ (uvijek možemo izabrati neku novu točku $Z'$ koja zadovoljava taj uvjet), pa je $\angle A'B'C' < \angle A'B'C''$, što je opet kontradikcija.

Dakle, $\overline{AC}/Z \equiv \overline{A'C'}/Z'$. Sada po aksiomu $(E - III_7)$ postoji jedinstveni izbor dužine $\overline{B'C'}/V'$ takav da je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. ■

**Teorem 2.63** *Ako u trokutu $\triangle ABC$ vrijedi $\angle ABC \equiv \angle ACB$, onda je $\overline{AB}/U \equiv \overline{AC}/Z$ i $\triangle ABC$ je jednakokračan trokut.*

**Dokaz.** Primjenom prethodnog teorema. ■

**Teorem 2.64** *Ako točke $C$ i $D$ ne leže na pravcu $AB$, te ako je $\overline{AC}/Z \equiv \overline{AD}/Z'$ i $\overline{BC}/V \equiv \overline{BD}/V'$, onda je $\triangle ACB \equiv \triangle ABD$.*

**Dokaz.** Ako je $C = D$, tvrdnja očito vrijedi.

Pretpostavimo da je $C \neq D$. Kako $C$ i $D$ ne leže na pravcu $AB$, pravci $CD$ i $AB$ se sijeku, pa jedna od mogućih dužina $\overline{CD}$ siječe $AB$ u nekoj točki $E$. Ako je $E = A$, onda je trokut $\triangle CDB$ jednakokračan, pa je po Teoremu 2.42

$\angle BCA \equiv \angle ADB$. Sada po aksiomu $(E - III_7)$ za zajednički izbor dužine $\overline{AB}$ je $\triangle ACB \equiv \triangle ABD$. Slično se pokaže u slučaju $E = B$.
Pretpostavimo da je $E \neq A, B$. Tada je po Teoremu 2.57 ili $\angle BDA > \angle EDA$ ili $\angle BDA < \angle EDA$. Trokuti $\triangle DAC$ i $\triangle CBD$ su jednakokračni trokuti, pa je po Teoremu 2.42 $\angle CDA \equiv \angle ACD$ i $\angle BDC \equiv \angle DCB$. Ako je $\angle BDA > \angle EDA$, po Teoremu 2.45 slijedi $\angle BDA \equiv \angle ACB$. Ako je $\angle BDA < \angle EDA$, po Teoremu 2.46 slijedi $\angle BDA \equiv \angle ACB$. U oba slučaja po aksiomu $(E - III_7)$ za zajednički izbor dužine $\overline{AB}$ je $\triangle ABD \equiv \triangle ACB$.
■

**Teorem 2.65 (S-S-S)** *Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ proizvoljni trokuti. Ako je $\overline{AB}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$, $\overline{BC}/V \equiv \overline{B'C'}/V'$ i $\overline{AC}/Z \equiv \overline{A'C'}/Z'$, onda je $\triangle ABC \equiv \angle A'B'C'$.*

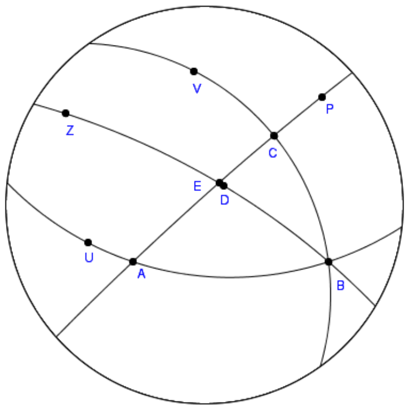
**Dokaz.** Po $(E - III_5)$ postoji polupravac $\overrightarrow{A'C''}/Z''$ tako da je $\angle CAB \equiv \angle C''A'B'$. Možemo pretpostaviti da je točka $C''$ takva da je $\overline{AC}/Z \equiv \overline{A'C''}/Z''$. Po aksiomu $(E - III_7)$ postoji jedinstveni izbor dužine $\overline{B'C''}/V''$ tako da je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C''$. Tada je posebno $\overline{BC}/V \equiv \overline{B'C''}/V''$. Kako je $\overline{BC}/V \equiv \overline{B'C'}/V'$ i $\overline{BC}/V \equiv \overline{B'C''}/V''$, te $\overline{AC}/Z \equiv \overline{A'C'}/Z'$ i $\overline{AC}/Z \equiv \overline{A'C''}/Z''$, po aksiomu $(E - III_2)$ slijedi da je $\overline{B'C'}/V' \equiv \overline{B'C''}/V''$ i $\overline{A'C'}/Z' \equiv \overline{A'C''}/Z''$. Zbog definicija trokuta i kutova točke $C'$ i $C''$ ne leže na pravcu $A'B'$, pa po Teoremu 2.64 slijedi da je $\triangle A'B'C' \equiv \triangle A'B'C''$. Posebno, $\angle C'A'B' \equiv \angle C''A'B'$, pa kako po pretpostavci vrijedi $\angle CAB \equiv \angle C''A'B'$, po aksiomu $(E - III_6)$ slijedi da je $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$. Sada po aksiomu $(E - III_7)$ slijedi da je za danu dužinu $\overline{BC}/V$ $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$. ■

**Teorem 2.66** *Neka je $\overline{AB}/U$ proizvoljna dužina. Tada postoji jednakokračni trokut kojemu je $\overline{AB}/U$ osnovica.*

**Dokaz.** Neka je $\overline{AB}/U$ proizvoljna dužina. Po aksiomu $(E - I_3)$ postoji točka $C$ koja ne leži na pravcu $AB$.

Ako je $\angle CAB \equiv \angle ABC$, $\triangle ABC$ je traženi jednakokračni trokut.

Pretpostavimo da $\angle CAB \not\equiv \angle ABC$. Po Teoremu 2.57 je ili $\angle CAB < \angle ABC$ ili $\angle CAB > \angle ABC$. Pretpostavimo da je $\angle CAB < \angle ABC$. Tada postoji unutrašnja točka $D$ kuta $\angle ABC$ takva da je $\angle ABD \equiv \angle CAB$. $\overrightarrow{BD}/Z$ se nalazi između $\overrightarrow{BA}/U$ i $\overrightarrow{BC}/V$. Po Teoremu 2.35 $\overrightarrow{BD}/Z$ siječe dužinu $\overline{AC}/P$ u njenoj unutrašnjoj točki $E$. Kako su $\angle ABD = \angle ABE$ i $\angle CAB = \angle EAB$




kutovi uz $\overline{AB}/U$ i kako je $\angle ABD \equiv \angle CAB$, to je po Teoremu 2.63 $\triangle ABE$ traženi jednakokračni trokut. ■

**Teorem 2.67** *Neka su dana dva suplementarna kuta $\angle CAB$ i $\angle DAC$ na pravcu $BD$, neka je $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$ i $\angle DAC \equiv \angle D'A'C'$, te neka $\angle C'A'B'$ i $\angle D'A'C'$ nisu isti kutovi i neka polupravac $\overrightarrow{A'D'}/Z'$ nije između polupravaca $\overrightarrow{A'B'}/U'$ i $\overrightarrow{A'C'}/V'$. Tada su $\angle C'A'B'$ i $\angle D'A'C'$ suplementarni kutovi.*

**Dokaz.** Po Propoziciji 2.26 je $D'$ ili unutrašnja točka ili vanjska točka ili točka na krakovima kuta $\angle C'A'B'$.

$D'$ nije unutrašnja točka kuta $\angle C'A'B'$, jer bi tada slijedilo da je polupravac

$\overrightarrow{A'D'}/Z'$ između polupravaca $\overrightarrow{A'B'}/U'$ i $\overrightarrow{A'C'}/V'$, što je kontradikcija s pretpostavkom teorema.
Pretpostavimo da je $D'$ vanjska točka kuta $\angle C'A'B'$. Kako za svaki kut imamo dva moguća izbora, $D'$ je tada unutrašnja točka drugog izbora $\angle C'A'B'$, označimo ga $\angle C'A'E'$. Tada je $\angle C'A'D' < E'A'C'$. Po Teoremu 2.44 su suplementarni kutovi kongruentnih kutova kongruentni, pa je $\angle E'A'C' \equiv \angle DAC$. Po Teoremu 2.57 slijedii $\angle C'A'D' < \angle CAD$, a po pretpostavci teorema imamo $\angle C'A'D' \equiv \angle CAD$, što je kontradikcija.
Dakle, $D'$ se nalazi na krakovima kuta $\angle C'A'B'$. Zbog činjenice $\angle D'A'C'$ kut $D'$ ne može biti na $\overrightarrow{A'C'}/V'$, pa je $D'$ na $\overrightarrow{A'B'}/U'$. Po pretpostavci teorema $\angle C'A'B'$ i $\angle D'A'C'$ nisu isti kutovi, pa moraju biti suplementarni kutovi. ■

**Teorem 2.68** *Neka je dan kut $\angle BAC$. Tada postoji jedinstveni polupravac $\overrightarrow{AD}/Z$ između polupravaca $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ takav da je $\angle CAD \equiv \angle DAB$.*

**Dokaz.** Bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da je $\overline{AB}/U < \overline{AC}/V$. Tada postoji postoji jedinstvena unutrašnja točka $C'$ dužine $\overline{AC}/V$ takva da je $\overline{AC'}/V \equiv \overline{AB}/U$. Po Teoremu 2.31 postoje dužine $\overline{BC'}/P$ i $\overline{BC}/R$ takve da su sve unutrašnje točke tih dužina ujedno i unutrašnje točke kuta $\angle BAC$. Primjenom Teorema 2.66 na $\overline{BC'}/P$ koristeći točku $C$ možemo konstruirati jednakokračni trokut $\triangle DC'B$ s onovnicom $\overline{BC'}/P$. Zbog korištenja točke $C$ točka $D$ mora biti ili na $\overline{CC'}/V$ ili na $\overline{BC}/R$.
Prepostavimo da je $D$ na $\overline{CC'}/V$. Vrijedi $\angle DC'B \equiv \angle C'BD$, jer je $\triangle DC'B$ jednakokračan trokut. Također je $\angle ABC' \equiv BC'A$, jer je $\triangle ABC'$ jednakokračan trokut. Uočimo da su $\angle BC'A$ i $\angle DC'B$ suplementarni kutovi i da su $\angle ABC'$ i $\angle C'BD$ različiti kutovi (u suprotnom bi slijedilo da je $D$ na $AB$, pa bi kroz točke $A$ i $D$ prolazila dva različita pravca, što je kontradikcija s $(E-I_2)$). Uočimo i da vrijedi $AD \mid\mid C'C$, pa polupravac $\overrightarrow{BD}/B''$ nije između polupravaca $\overrightarrow{BA}/B'$ i $\overrightarrow{BC'}/P$. Sada po Teoremu 2.67 slijedi da su $\angle ABC'$

i $\angle C'BD$ suplementarni kutovi, iz čega slijedi da je $D$ na pravcu $AB$, što je kontradikcija zbog već gore spomenutog. Dakle, $D$ nije na $\overline{CC'}/V$, pa $D$ mora biti na $\overline{BC}/R$. Kako su sve unutrašnje točke dužine $\overline{BC}/R$ unutrašnje točke kuta $\angle BAC$, to je posebno i $D$ unutrašnja točka kuta $\angle BAC$, pa je $\overrightarrow{AD}/T$ između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$. Po Teoremu 2.65 slijedi $\triangle C'AB \equiv \triangle BDC'$, pa slijedi da je $\angle CAD \equiv \angle DAB$.
Dokažimo još jedinstvenog polupravca $\overrightarrow{AD}/Z$. Pretpostavimo suprotno, odnosno neka postoji polupravac $\overrightarrow{AD'}/Z' \neq \overrightarrow{AD}/Z$ između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ takav da je $\angle CAD' \equiv \angle D'AB$. Kako je očito $\angle DAC \not\equiv \angle D'AC$, po Teoremu 2.57 je ili $\angle DAC < \angle D'AC$ ili $\angle DAC > \angle D'AC$. Pretpostavimo da je $\angle DAC < \angle D'AC$. Tada je po Teoremu 2.59 $\angle DAC + \angle DAC < \angle D'AC + \angle D'AC$. No, vrijedi $\angle DAC + \angle DAB \equiv BAC$ i $\angle D'AC + \angle D'AB \equiv BAC$, što je kontradikcija. Dakle, $\overrightarrow{AD}/Z$ je jedinstvena simetrala kuta $\angle BAC$. ■
Polupravac $\overrightarrow{AD}/Z$ se naziva *simetralom kuta* $\angle BAC$,

**Teorem 2.69** *Neka je $\overline{AB}/U$ proizvoljna dužina. Tada postoji jedinstvena unutrašnja točka $P$ dužine $\overline{AB}/U$ takva da je $\overline{AP}/U \equiv \overline{PB}/U$.*

**Dokaz.** Neka je $\overline{AB}/U$ proizvoljna dužina. Po Teoremu 2.66 možemo konstruirati jednakokračni trokut $\triangle ABC$ sa osnovicom $\overline{AB}/U$. Po Teoremu 2.68 postoji jedinstveni polupravac $\overrightarrow{CD}/T$ između poluparavaca $\overrightarrow{CA}/V$ i $\overrightarrow{CB}/Z$ takav da je $\angle DCA \equiv \angle BCD$. Po Teoremu 2.35 $\overrightarrow{CD}/T$ siječe $\overline{AB}/U$ u unutrašnjoj točki $P$ kuta $\angle BCA$. Uočimo da je $P$ ujedno i unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/U$. Po aksiomu $(E - III_7)$ je $\triangle CAD \equiv \triangle DBC$, pa je $\overline{AP}/U \equiv \overline{PB}/U$. Dakle, $P$ je tražena točka.
Jedinstvenost polovišta dužine slijedi iz jedinstvenosti simetrale kuta. ■

## 2.4 Aksiom neprekidnosti

Kao u apsolutnoj geometriji, za aksiom neprekidnosti može se uzeti Dedekindov aksiom ili Cantorov i Arhimedov aksiom zajedno. Kako je u iskazima ovih aksioma za apsolutnu geometriju bio bitan poredak, ovdje će se jedina razlika stvarati u toj prilagodbi na eliptičku geometriju. Kako po Teoremu 2.19 za svaku dužinu $\overline{AB}/U$ postoji dužina $\overline{EF}/U$ tako da su joj sve točke dužine $\overline{AB}/U$ unutrašnje točke, možemo koristiti "relativni poredak", što će olakšati iskazivanje aksioma.

$(E - IV)$ **(Dedekindov aksiom za eliptičku geometriju)**

Neka je $\overline{AB}/U$ proizvoljna dužina i neka je $\overline{EF}/U$ dužina kojoj su sve točke dužine $\overline{AB}/U$ unutrašnje točke. Neka su sve točke dužine $\overline{AB}/U$ podijeljene u dvije klase tako da vrijedi:

(i) svaka točka je točno u jednoj od tih klasa; točka $A$ je u prvoj, a točka $B$ u drugoj klasi

(ii) za svaku točku $L$ prve klase, različitu od $A$, vrijedi $(ALD)/U$, za svaku točku $D$ iz druge klase.

Tada postoji jedinstvena točka $O$ dužine $\overline{AB}/U$ takva da svaka točka $L$ za koju je $(ALO)/U$ pripada prvoj klasi, a svaka točka $D$ za koju je $(ODB)/U$ pripada drugoj klasi.

**Definicija 2.70** *Neka su $\overline{AB}/U$ i $\overline{CD}/V$ proizvoljne dužine, te neka je $\overline{EF}/U$ dužina kojoj su sve točke dužine $\overline{AB}/U$ unutrašnje točke. Kažemo da je dužina $\overline{CD}/V$* ***nanesena*** *na dužinu $\overline{AB}/U$ $n$ puta ako postoje točke $A = A_0, A_1, A_2, A_3, ...$ na $\overline{AB}/U$ tako da vrijedi $(AA_kA_{k+1})/U$, za $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ i tako da je $\overline{A_k - 1A_k}/U \equiv \overline{CD}/V$, za $k \in \{1, 2, ..., n\}$.*

*Oznaka n* $\overline{CD}/V$ *označava da je dužina* $\overline{CD}/V$ *nanesena n puta na neku dužinu.*

Uočimo da je ovdje dužina nanesena na dužinu, a ne polupravac. Razlog tome je što je za "relativni poredak" potrebna dužina, no očito je da se ovo podudara s nanošenjem na polupravac jer se dužina na koju nanosimo uvijek može proširiti.

**Teorem 2.71** ***(Arhimedov aksiom za eliptičku geometriju)*** *Neka su* $\overline{AB}/U$ *i* $\overline{CD}/V$ *proizvoljne dužine, te neka je* $\overline{EF}/U$ *dužina kojoj su sve točke dužine* $\overline{AB}/U$ *unutrašnje točke. Tada postoji* $n \in \mathbb{N}$ *tako da je, ako nanesemo dužinu* $\overline{CD}/V$ *na* $\overline{AB}/U$ *n puta, točka* $A_n$ *iz pripadnog niza vanjska točka dužine* $\overline{AB}/U$.

**Dokaz.** Dokaz analogno kao u apsolutnoj geometriji. Obzirom na razliku vezanu za poredak, u prvom koraku kod pretpotavljanja suprotne tvrdnje suprotna tvrdnja je da je za svaki $n > 1$ $A_n$ unutrašnja točka dužine $\overline{AB}/U$ ili $A_n = B$. Ostatak dokaza se značajno ne mijenja, treba samo pripaziti da se koriste aksiomi eliptičke geometrije i da se koristi "relativni poredak" umjesto poretka u apsolutnoj geometriji. ■

**Teorem 2.72** ***(Cantorov aksiom za eliptičku geometriju)*** *Neka je dan niz dužina* $\overline{A_1B_1}/U$, $\overline{A_2B_2}/U$, $\overline{A_3B_3}/U,\ldots$ *tako da je* $\overline{A_iB_i}/U \subseteq \overline{A_{i-1}B_{i-1}}/U$, $i \in \{2, 3, 4, ...\}$ *i neka ne postoji dužina koja je sadržana u svakoj dužini niza. Tada postoji jedinstvena točka koja je sadržana u svakoj dužini niza.*

**Dokaz.** Slično kao u apsolutnoj geometriji korištenjem Dedekindovog aksioma za eliptičku geometriju i "relativnog poretka". ■

**Teorem 2.73** *Iz aksioma incidencije, separacije, kongruencije za eliptičku geometriju, te Cantorovog i Arhimedovog aksioma slijedi Dedekindov aksiom.*

**Dokaz.** Slično kao u apsolutnoj geometriji. ∎

**Teorem 2.74 (Dedekindov aksiom za kutove)** *Neka je $\angle BAC$ proizvoljni kut. Neka su svi polupravci koji se nalaze između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ zajedno s $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ podijeljeni u dvije klase tako da vrijedi:*

*(i) svaki polupravac je točno u jednoj od tih klasa; $\overrightarrow{AB}/U$ je u prvoj, a $\overrightarrow{AC}/V$ u drugoj klasi*

*(ii) svaki polupravac iz prve klase leži između $\overrightarrow{AB}/U$ i bilo kojeg pravca iz druge klase.*

*Tada postoji jedinstveni polupravac $\overrightarrow{AD}/Z$ koji se nalazi između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ takav da je svaki polupravac koji leži između $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AD}/Z$ u prvoj klasi, a svaki polupravac koji leži između $\overrightarrow{AD}/Z$ i $\overrightarrow{AC}/V$ u drugoj klasi.*

**Dokaz.** Neka je $\overline{AB}/P$ onaj izbor dužine $\overline{AB}$ čije su sve unutrašnje točke ujedno i unutrašnje točke kuta $\angle BAC$. Svaki polupravac $\overrightarrow{AM}/N$ koji je između polupravaca $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ siječe $\overline{AB}/P$ u jedinstvenoj unutrašnjoj točki te dužine, a za svaku unutrašnju točku $T$ dužine $\overline{AB}/U$ postoji jedinstveni polupravac $\overrightarrow{AT}/T'$ koji se nalazi između polupravaca $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$. Iz toga slijedi da je moguće definirati bijekciju između skupa svih polupravaca koji se nalaze između polupravaca $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ zajedno s $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ i skupa svih točaka dužine $\overline{AB}/P$. Ta bijekcija klasama iz pretpostavke teorema pridruži klase točaka dužine $\overline{AB}/P$. Te klase dužine $\overline{AB}/P$ udovoljavaju uvjetima *Dedekindovog aksioma* za dužine, pa postoji Dedekindova točka $O$ za te klase. Točka $O$ određuje jedinstveni polupravac $\overrightarrow{AO}/O'$ koji se nalazi između polupravaca $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/V$ koji je upravo traženi polupravac ovog teorema. ∎

**Definicija 2.75** *Neka je $\angle EDF$ proizvoljni kut i $\overrightarrow{AB}/U$ proizvoljni polupravac. Kažemo da je kut $\angle EDF$ nanesen na polupravac $\overrightarrow{AB}/U$ $n$ puta ako* *postoje polupravci* $\overrightarrow{AB_0}/U_0 = \overrightarrow{AB}/U$, $\overrightarrow{AB_1}/U_1$,... *takvi da je* $\overrightarrow{AB_k}/U_k$ *između* $\overrightarrow{AB}/U$ *i* $\overrightarrow{AB_{k+1}}/U_{k+1}$, $k \in \{1, 2, ..., n-1\}$ *i da je* $\angle B_{k-1}AB_k \equiv \angle EDF$, $k \in \{1, 2, ..., n\}$. *Oznaka* $n\angle EDF$ *označava da je kut* $\angle EDF$ *nanesen* $n$ *puta na neki polupravac.*

**Teorem 2.76 (Arhimedov aksiom za kutove)** *Neka je dani kutovi* $\angle BAC$ *i* $\angle EDF$ *i neka je* $\overrightarrow{AS}/Z$ *simetrala kuta* $\angle BAC$. *Tada postoji* $n \in \mathbb{N}$ *za koji će, ako nanesemo kut* $\angle EDF$ *na* $\overrightarrow{AB}/U$ $n$ *puta, vrijediti* $\angle BAS < \angle BAB_n$.

**Dokaz.** Slično kao u apsolutnoj geometriji. ■

# Poglavlje 3

# Polarna dužina

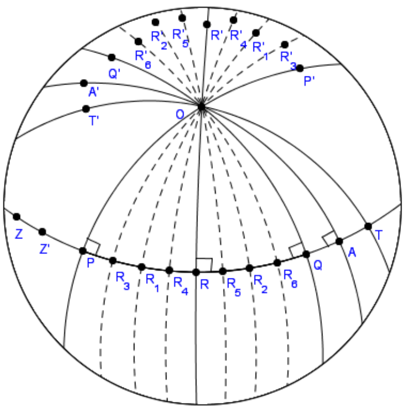
U prethodnom poglavlju su postavljeni temelji eliptičke geometrije, te su dokazani bitni teoremi vezani za dužine, pravce, kutove i trokute koji podsjećaju na teoreme iz apsolutne geometrije. Iako su i prethodni teoremi bili ponekad različiti u odnosu na apsolutnu geometriju, u ovom poglavlju će se pozornost obratiti na specifičnije pojmove i teoreme vezane uz eliptičku geometriju. Definirat će se *polarna dužina* i zbog njenih svojstava će se moći dokazati nekoliko zanimljivih teorema koji će najbolje ilustrirati razlike u odnosu na euklidsku i hiperboličku geometriju.
Po aksiomu $(E - I_7)$ se svaka dva pravca sijeku, pa to vrijedi i za svake dvije okomice na neki pravac. Prvi teorem u ovom poglavlju govori da se sve okomice na dani pravac sijeku u jedinstvenoj točki.

**Teorem 3.1** *Neka je dan pravac $m$. Ako se okomice $p$ i $q$ na pravac $m$ sijeku u točki $O$ koja ne leži na $m$, onda se sve okomice na pravac $m$ sijeku u točki $O$. Sve dužine $\overline{TO}/U$, gdje je $T$ bilo koja točka pravca $m$, su kongruentne.*

**Dokaz.** Neka je $m$ proizvoljan pravac, te neka su pravci $p$ i $q$ proizvoljni pravci okomiti na pravac $m$ koji sijeku $m$ u točkama $P$ i $Q$ redom. Neka je

$\overline{PQ}/Z$ proizvoljni izbor dužine $\overline{PQ}$. Po Teoremu 2.63 $\triangle OPQ$ je jednakokračan trokut pa je $\overline{PO}/P' \equiv \overline{QO}/Q'$. Po Teoremu 2.69 postoji polovište dužine $\overline{PQ}/Z$, označimo ga s $R$. Po Teoremu 2.65 je $\triangle OPR \equiv \triangle ORQ$, pa je $\angle PRO \equiv \angle ORQ$. Kako su $P, Q$ i $R$ kolinearne točke slijedi da su kutovi $\angle PRO$ i $\angle ORQ$ pravi kutovi. Sada je $\triangle OPR$ po Teoremu 2.63 jednakokračan trokut, pa je je $\overline{PO}/P' \equiv \overline{RO}/R'$.

Neka je $R_2$ polovište dužine $\overline{PR}/Z$, a $R_4$ polovište dužine $\overline{RQ}/Z$. Sličnom argumentacijom se pokaže da su $OR_2$ i $O3_3$ okomiti na $M$ i $\overline{R_20}/R_2' \equiv \overline{R_30}/R_3'$ $\equiv \overline{PO}/P'$. Daljnjim raspolavljanjem dužina dobije se niz pravaca $R_kOR_k'$ koji sijeku $m$ pod pravim kutom i za koje je $\overline{R_kO}/R_k' \equiv \overline{PO}/P'$. Zbog aksioma neprekidnosti možemo pretpostaviti da na ovaj način možemo doći do svake točke $R$ dužine $\overline{PQ}/Z$, i da će za svaku točku $R$ dužine $\overline{PQ}/Z$ $RO$ biti okomit na $m$ i da je $\overline{RO}/R' \equiv \overline{PO}/P'$. Neka je sada $A$ vanjska točka dužine $\overline{PQ}/Z$




takva da je $\overline{PQ}/Z \equiv \overline{QA}/Z'$. Po aksiomu $(E - III_7)$ je $\triangle PQO \equiv \triangle QAO$, pa je pravac $AO$ okomit na $m$ i $\overline{AO}/A' \equiv \overline{PO}/P'$. Sličnom argumentacijom kao gore slijedi da je za svaku točku $T$ dužine $\overline{QA}/Z'$ pravac $TO$ okomit na $m$ i $\overline{TO}/T' \equiv \overline{PO}/P'$.

Neka je sada $T$ proizvoljna točka pravca $m$ različita od $P$. Primjenjujući Teorem 2.71 na dužine $\overline{PT}/Z''$ i $\overline{PQ}/Z$ slijedi da se nanošenjem dužina $\overline{PQ}/Z$

na $\overline{PT}/Z''$ u nekom koraku dođe do dužine koja sadrži točku $T$, a po prethodno komentiranom za točku $T$ će vrijediti da je $TO$ okomit na $m$ i $\overline{TO}/T'$ $\equiv \overline{PO}/P'$. Kako je $T$ proizvoljna točka, to će vrijedi za svaku točku pravca $m$, pa su po aksiomu $(E - III_2)$ sve dužine $\overline{TO}/T'$ kongruentne.

Kako su okomice u točkama pravca na dani pravac jedinstvene i kako svaka okomica na dani pravac prolazi nekom njegovom točkom, to po prethodnome sve okomice na pravac $m$ prolaze kroz točku $O$, odnosno sve okomice na pravac $m$ se sijeku u točki $O$. ■

Točku $O$ iz prethodnog teorema ćemo nazivati *polom pravca m.*

**Definicija 3.2** *Za točku O kažemo da je* ***pol pravca*** *p ako se sve okomice na pravac p sijeku u toj točki.*

Uočimo da za svaki pravac uvijek postoji pol (zbog aksioma $(E-I_7)$, Teorema 2.61 i Teorema 3.1).

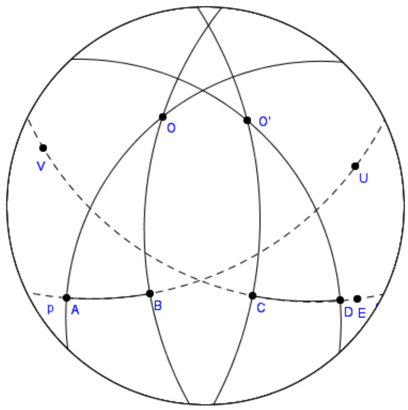
Zbog posljednje tvrdnje Teorema 3.1 ima smisla sljedeća definicija.

**Definicija 3.3** *Neka je $p$ proizvoljni pravac, $T$ proizvoljna točka na njemu, $O$ pripadni pol pravca i $T'$ točka na pravcu $OT$ različita od $O$ i $T$. Dužinu $\overline{OT}/T'$ nazivamo* ***polarnom dužinom pravca p****.*

Uočimo da polarna dužina pravca nije jedinstvena. Kako po Teoremu 3.1 slijedi da su sve polarne dužine nekog pravca međusobno kongruentne, u nastavku se bez smanjenja općenitosti za polarnu dužinu danog pravca uvijek mogu uzimati pogodni predstavnici.

**Teorem 3.4** *Za svaka dva pravca su njihove polarne dužine kongruentne.*

**Dokaz.** Neka su $p$ i $q$ dva proizvoljna pravca. Ako je $p = q$, tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo da je $p \neq q$. Po aksiomu $(E - I_3)$ postoje tri različite točke $A, B$ i $U$ na pravcu $p$ i tri različite točke $C, E$ i $V$ na pravcu $q$. Po aksiomu $(E-II_1)$ postoji jedinstvena točka $D$ na $\overrightarrow{CE}/V$ takva da je $\overline{AB}/U \equiv \overline{CD}/V$. Konstruirajmo okomice u točkama $A$ i $B$ na pravac $p$, te u točkama $C$ i $D$ na pravac $q$. Neka se one sijeku u točkama $O$ i $O'$ redom. Po Teoremu




2.62 slijedi da je $\triangle ABO \equiv \triangle CDO'$, pa je i $\overline{BO}/B' \equiv \overline{CO'}/C'$. ■

Iz prethodnog teorema slijedi da su u eliptičkoj ravnini polarne dužine svih pravaca međusobno kongruentne, pa se bez smanjenja općenitosti za polarnu dužinu uvijek može uzimati pogodni predstavnik.

**Definicija 3.5** *Neka je $p$ proizvoljni pravac i $\overline{OT}/T'$ njegova polarna dužina. Svaku dužinu kongruentnu dužini $\overline{OT}/T'$ nazivamo **polarnom dužinom**.*

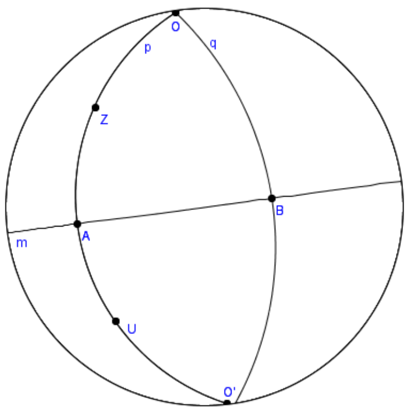
Uočimo da polarna dužina ovisi samo o eliptičkoj ravnini. Sljedeći teorem govori o tome kako pravci u eliptičkoj geometriji nisu neomeđeni kao u apsolutnoj geometriji, već da je njihova "duljina" uvijek jednaka "duljini" dvostruke polarne dužine.

**Teorem 3.6** *Neka je $p$ proizvoljni pravac i $\overline{AC}/U$ proizvoljna dužina na njemu. Tada je dužina $\overline{AC}/U + \underset{U}{AC}$ kongruentna dvostrukoj polarnoj dužini.*

**Dokaz.** Prvo pokažimo da tvrdnja vrijedi u slučaju kad je dana dužina na pravcu kongruentna polarnoj dužini. Neka su $O, A$ i $U$ točke na pravcu

$p$ takve da je dužina $\overline{OA}/U$ kongruentna polarnoj dužini. Tvrdimo da je $\overline{OA}/U + \underset{U}{\overline{OA}}$ kongruentna dvostrukoj polarnoj dužini, odnosno da je $\underset{U}{\overline{OA}}$ kongruentna polarnoj dužini.

Konstruirajmo okomicu $m$ u točki $A$ na pravac $p$ i neka je $B$ proizvoljna točka na $m$ različita od $A$. Konstruirajmo okomicu $q$ na pravac $m$ u točki $B$. Pravac $q$ siječe $p$ u točki $O$, jer bi u suprotnom došli u kontradikciju s pretpostavkom da je $\overline{OA}/U$ kongruentna polarnoj dužini. Dakle, $O$ je pol pravca $m$. Primjenom aksioma $(E - III_1)$ konstruirajmo točku $O'$ na $\overrightarrow{AU}/O$ tako da je $\overline{OA}/U \equiv \overline{AO'}/Z$, gdje je $Z$ neka unutrašnja točka dužine $\overline{OA}/U$. Sada po aksiomu $(E - III_7)$ postoji izbor dužine $\overline{OB}$ takav da je $\triangle OAB \equiv \triangle O'BA$. Iz toga slijedi da je $\angle ABO \equiv \angle O'BA$, pa je $\angle O'BA$ pravi kut. Dakle, $O'B$ je okomica na pravac $AB$. Sada su $O$ i $O'$ točke u kojima se sijeku po dvije okomice na pravac $AB$, pa po Teoremu 3.1 slijedi da se sve okomice na pravac $AB$ sijeku i u točki $O$ i u točki $O'$. Očito je tada $O = O'$, jer bi u suprotnom došli u kontradikciju s aksiomom $(E - I_2)$ (a znamo da postoji beskonačno mnogo okomica na dani pravac). Dakle, $\overline{AO'}/Z \equiv \underset{U}{\overline{OA}}$, pa je $\underset{U}{\overline{OA}}$ kongruentna polarnoj dužini.

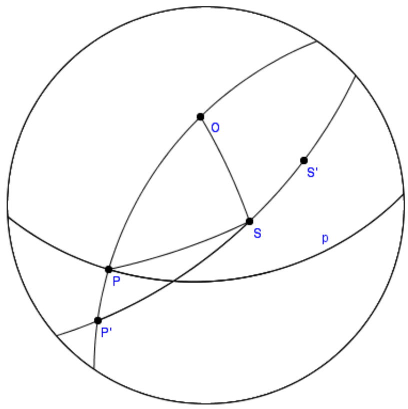



U slučaju da dana dužina nije kongruentna polarnoj dužini, dokaz se može svesti na sličan dokaz koristeći aksiome $(E - III_1)$ i $(E - III_3)$, te Teorem

2.41, Teorem 2.53 i Teorem 2.55. ■

**Teorem 3.7** *Neka je $p$ pravac s pripadnim polom $O$, te neka je $P$ bilo koja točka pravca $p$. Tada je $P$ jedinstvena točka pravca $OP$ za koju je dužina $\overline{OP}/U$ kongruentna polarnoj dužini.*

**Dokaz.** Pretpostavimo suprotno, odnosno neka je $P'$ točka na pravcu $OP$ različita od $P$ za koju je dužina $\overline{OP'}/U'$ kongruentna polarnoj dužini. Neka je $S$ točka koja ne leži na pravcima $OP$ i $p$ (takva postoji jer uvijek možemo uzeti unutrašnju točku jednog od kutova koje određuju ova dva pravca). Sada su dobro definirani trokuti $\triangle OPS$ i $\triangle OP'S$. Po aksiomu $(E-III_7)$ postoji dužina $\overline{P'S}/S'$ takva da je $\triangle OPS \equiv \triangle OP'S$. Tada je $\angle OSP \equiv \angle OSP'$.
$P'$ je očito različita od $O$, pa je $P'$ ili unutrašnja ili vanjska točka dužine $\overline{OP}/U$. Ako je $P'$ unutrašnja točka dužine $\overline{OP}/U$, onda je ona i unutrašnja točka kuta $\angle OSP$, pa je $\angle OSP' < \angle OSP$, što je kontradikcija s prethodno dokazanim. Ako je $P'$ vanjska točka dužine $\overline{OP}/U$, onda je $\angle OSP < \angle OSP'$, što je ponovo kontradikcija s prethodno dokazanim.




Dakle, $P$ jedinstvena točka pravca $OP$ za koju je dužina $\overline{OP}/U$ kongruentna polarnoj dužini. ■

**Teorem 3.8** *Za svaku točku postoji jedinstveni pravac kojemu je ona pol.*

**Dokaz.** Neka je $O$ proizvoljna točka. Po aksiomu $(E-I_1)$ postoji pravac $p$ koji prolazi točkom $O$. Po aksiomu $(E-I_3)$ postoje točke $A$ i $U$ na pravcu $p$ različite od $O$. Po aksiomu $(E-III_1)$ postoji točka $P$ na $\overrightarrow{OA}/U$ takva da je $\overline{OP}/U$ kongruentna polarnoj dužini. Konstruirajmo okomicu $q$ u točki $P$ na pravac $p$. Neka je $Q$ proizvoljna točka na pravcu $q$ različita od $P$. Konstruirajmo okomicu $m$ u točki $Q$ na pravac $q$. $q$ je pravac kojemu je $O$ pol.

Dokažimo jedinstvenost tog pravca. Pretpostavimo suprotno, odnosno neka je $q' \neq q$ pravac kojemu je $O$ pol. Po aksiomu $(E-I_7)$ postoji točka $T$ u kojoj se sijeku pravci $q$ i $q'$. Konstruirajmo okomice $t$ i $t'$ u točki $T$ na pravce $q$ i $q'$ redom. $t$ i $t'$ prolaze točkom $O$ (jer im je ona pol) i točkom $T$, pa po aksiomu $(E-I_2)$ mora biti $t=t'$. Sada imamo da su pravci $q$ i $q'$ okomiti na pravac $t=t'$ i da prolaze točkom $T$ pravca $t=t'$, pa po Teoremu 2.61 mora biti $q=q'$.

Dakle, $p$ je jedinstveni pravac kojemu je točka $O$ pol. ■

Kako smo pokazali da svaka točka ima jedinstveni pripadni pravac kojemu je ona pol, ima smisla definirati *polaru točke.*

**Definicija 3.9** *Pravac $p$ nazivamo* ***polarom točke O*** *ako je za sve točke $P$ tog pravca dužina $\overline{OP}/P'$ kongruentna polarnoj dužini.*

Uočimo da se pomoću prethodnog teorema lako pokaže da dva različita pravca imaju različite polove. Dakle, moguće je definirati bijekciju između skupa svih točaka i skupa svih pravaca eliptičke ravnine na način da svakoj točki pridružimo njenu polaru.

**Teorem 3.10** *Svi pravci koji prolaze kroz pol su okomiti na njegovu polaru.*

**Dokaz.** Neka je $O$ proizvoljni pol i $p$ njegova polara. Neka je $q$ proizvoljni pravac koji prolazi točkom $O$. Po aksiomu $(E-I_3)$ postoje točke $A$ i $U$ na pravcu $q$ različite od $O$. Po aksiomu $(E - III_1)$ postoji točka $P$ na $\overrightarrow{OA}/U$ takva da je $\overline{OP}/U$ kongruentna polarnoj dužini. Konstruirajmo okomicu $m$ u točki $P$ na pravac $q$. Neka je $Q$ proizvoljna točka na pravcu $m$ različita od $P$. Konstruirajmo okomicu $n$ u točki $Q$ na pravac $m$. Pravci $q$ i $n$ se sijeku u točki $O$, jer bi u suprotnom došli u kontradikciju s pretpostavkom da je $\overline{OP}/U$ kongruentna polarnoj dužini. Dakle, $m$ je pravac kojemu je $O$ pol. Sada po Teoremu 3.8 slijedi da je $m = p$, a kako je pravac $q$ okomit na $m$, slijedi da je pravac $q$ okomit na $p$, što je i trebalo dokazati. ∎

Iz prethodnog teorema slijedi da je za dvije različite točke pravac koji njima prolazi zajednička okomica njihovih polara.

Još jedna zanimljivost koja očito postoji iz prethodnog teorema je da postoji trokut s tri prava kuta. Naime, kako su svi pravci koji prolaze polom okomiti na njegovu polaru, konstruiramo li u polu dva međusobno okomita pravca, dobit ćemo jednakostraničan trokut kojemu su stranice kongruentne polarnoj dužini, a kutovi pravi.

**Teorem 3.11** *Neka je $O$ pol nekog pravca $p$. Ako za točku $P$ vrijedi da je dužina $\overline{OP}$ kongruentna polarnoj dužini, onda je točka $P$ na pravcu $p$.*

**Dokaz.** Neka je $p$ proizvoljni polupravac i $O$ njegov pol. Neka je $P$ proizvoljna točka za koju je dužina $\overline{OP}/P'$ kongruentna polarnoj dužini. Po Teoremu 3.10 je pravac $OP$ okomit na pravac $p$. Kako se po aksiomu $(E - I_7)$ pravci $OP$ i $p$ sijeku u nekoj točki $R$ i kako je $O$ pol pravca $p$, slijedi da je dužina $\overline{OR}/R'$ kongruentna polarnoj dužini. No, po Teoremu 3.7 mora biti $P = R$, pa je $P$ točka pravca $p$. ∎

Iz svega prethodno dokazanog je očito da kada god imamo neki pravac i njegov pripadni pol možemo birati pogodne predstavnike.

**Teorem 3.12** *Neka je $\triangle ABC$ proizvoljni trokut s pravim kutom $\angle CAB$. Tada vrijedi:*

*(i)* *kut $\angle ABC$ ($\angle BCA$) je manji od pravog kuta ako i samo ako je dužina $\overline{AC}/Z$ ($\overline{AB}/U$) manja od polarne dužine,*

*(ii)* *kut $\angle ABC$ ($\angle BCA$) je kongruentan pravom kutu ako i samo ako je dužina $\overline{AC}/Z$ ($\overline{AB}/U$) kongruentna polarnoj dužini,*

*(iii)* *kut $\angle ABC$ ($\angle BCA$) je veći od pravog kuta ako i samo ako je dužina $\overline{AC}/Z$ ($\overline{AB}/U$) veća od polarne dužine.*

**Dokaz.** Neka je $O$ pol pravca $AB$. Konstruirajmo okomice u točkama $A$ i $B$ na pravac $AB$. $\angle OBA$ je pravi kut.

(i) Ako je $\angle ABC < \angle OBA$, onda se $\overrightarrow{BC}/V$ nalazi između $\overrightarrow{BA}/U$ i $\overrightarrow{BO}/B'$, pa $\overrightarrow{BC}/V$ siječe dužinu $\overline{AO}/A'$ u unutrašnjoj točki $C$. Slijedi da je $\overline{AC}/Z < \overline{AO}/A'$.
Obratno, ako je $\overline{AC}/Z < \overline{AO}/A'$, onda je po Teoremu 2.27 $C$ unutrašnja točka kuta, pa je $\overrightarrow{BC}/V$ između $\overrightarrow{BA}/U$ i $\overrightarrow{BO}/B'$. Slijedi da je $\angle ABC < \angle OBA$.

(ii) Ako je $\angle ABC$ kongruentan pravom kutu, onda je $O = C$ pa je dužina $\overline{AC}/Z$ kongruentna polarnoj dužini.
Obratno, ako je dužina $\overline{AC}/Z$ kongruentna polarnoj dužini, onda je $O = C$, pa je $\angle ABC \equiv \angle OBA$.

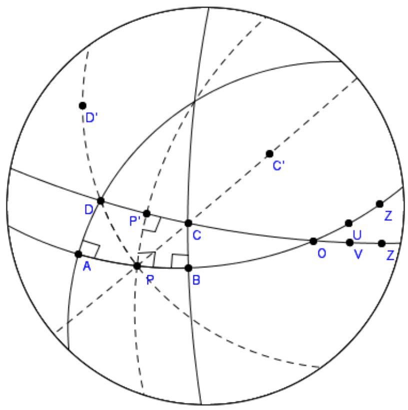
(iii) Slijedi iz (*i*) i (*ii*).

■

U Poglavlju 1 smo spomenuli Saccherijev i Lambertov četverokut. Sljedeći teoremi će potvrditi da u eliptičkoj geometriji vrijedi *hipoteza tupog kuta*.

**Teorem 3.13** *U Saccherijevom četverokutu su kutovi vrha tupi kutovi.*

**Dokaz.** Neka je $ABCD$ Saccherijev četverokut s osnovicom $\overline{AB}/U$. Neka su $P$ i $P'$ polovišta dužina $\overline{AB}/U$ i $\overline{CD}/V$ redom.
Kako su krakovi Sachherijevog četverokuta kongruentni, po aksiomu $(E-III_7)$ postoji jedinstveni izbor stranice $\overline{PC}/C'$ tako da je $\triangle DAP \equiv \triangle PBC$, pa je posebno $\overline{PD}/D' \equiv \overline{PC}/C'$. Sada je po Teoremu 2.65 $\triangle DPP' \equiv \triangle P'PC$, pa je $\angle PP'D \equiv \angle CP'P$, a kako su $D, C$ i $P'$ kolinearne točke, $\angle PP'D$ i $\angle CP'P$ su suplementarni kutovi, pa moraju biti pravi kutovi.




Uočimo da su $AB$ i $CD$ okomice na $PP'$ pa se sijeku u polu $O$. Sada su dužine $\overline{PO}/Z$ i $\overline{P'O}/Z'$, birajući točku $Z$ tako da točka $B$ bude točka dužine $\overline{PO}/Z$, kongruentne polarnoj dužini, pa su po aksiomu $(E-III_2)$ i međusobno kongruentne. Zbog definicije četverokuta se očito pravci $AB$ i $CD$ ne sijeku u unutrašnjim točkama dužina $\overline{AB}/U$ i $\overline{CD}/V$, pa $B$ mora biti unutrašnja točka dužine $\overline{PO}/Z$. Iz toga slijedi da je $\overline{BO}/Z < \overline{PO}/Z$, pa je po Teoremu 3.12 $\angle BCO$ manji od pravog kuta. Kako su $D, C$ i $O$ kolinearne točke, to su $\angle BCD$ i $\angle BCO$ suplementarni kutovi, pa $\angle BCD$ mora biti veći od pravog kuta. ■

**Propozicija 3.14** *Četvrti kut Lambertovog četverokuta je tupi kut.*

**Dokaz.** Direktno iz prethodnog teorema. ■

Uočimo da činjenica da je četvrti kut Lambertovog četverokuta tupi kut povlači da u eliptičkoj geometriji ne postoji pravokutnik. Kasnije će se to pokazati i kroz zbroj kutova u četverokutu.

**Teorem 3.15** *U Lambertovom četverokutu su stranice koje leže na krakovima četvrtog kuta manje od njima pripadnih nasuprotnih stranica.*

**Dokaz.** Neka je $ABCD$ proizvoljni Lambertov četverokut s tupim kutom $\angle BCD$. Po Teoremu 2.53 je ili $\overline{AD}/U \equiv \overline{BC}/V$ ili $\overline{AD}/U < \overline{BC}/V$ ili $\overline{AD}/U > \overline{BC}/V$.

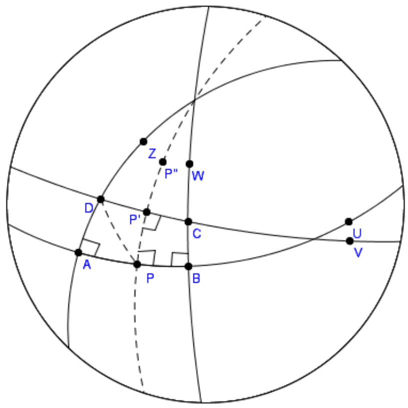
Pretpostavimo da je $\overline{AD}/U < \overline{BC}/V$. Tada postoji unutrašnja točka $D'$ dužine $\overline{BC}/V$ tako da je $\overline{BD'}/V \equiv \overline{AD}/U$. Sada je $ABD'D$ Saccherijev četverokut, pa je po Teoremu 3.13 je kut $\angle D'DA$ tupi kut. Točka $D'$ je unutrašnja točka dužine $\overline{BC}/V$, pa je to i unutrašnja točka kuta $\angle CDA$, pa je $\angle D'DA < \angle CDA$. Kut $\angle CDA$ je po pretpostavci pravi kut, pa slijedi da je $\angle D'DA$ manji od pravog kuta, što je kontradikcija s prethodno dokazanim da je $\angle D'DA$ tupi kut.

Pretpostavimo da je $\overline{AD}/U \equiv \overline{BC}/V$. Tada je četverokut $ABCD$ Saccherijev četverokut, pa je kut $\angle CDA$ tupi kut, što je kontradikcija s pretpostavkom. Dakle, mora biti $\overline{AD}/U > \overline{BC}/V$. Slično se pokaže za preostali par stranica četverokuta $ABCD$. ■

**Teorem 3.16** *U Saccherijevom četverokutu je gornja baza manja od donje baze, a spojnica polovišta baza je veća od krakova.*

**Dokaz.** Neka je $ABCD$ Saccherijev četverokut s osnovicom $\overline{AB}/U$ i i neka su $P$ i $P'$ polovišta stranica $\overline{AB}/U$ i $\overline{CD}/V$ redom. Četverokuti $APP'D$ i $PBCP'$ su Lambertovi četverokuti, pa po Teoremu 3.15 vrijedi da je $\overline{DP'}/V$

$< \overline{AP}/U$ i $\overline{P'C}/V < \overline{PB}/U$, pa po Teoremu 2.59 slijedi da je $\overline{CD}/V <$ $\overline{AB}/U$.




Po Propoziciji 3.15 također slijedi da je $\overline{AD}/Z < \overline{PP'}/P''$ i $\overline{BC}/W <$ $\overline{PP'}/P''$. ■

Proučimo sada što se događa sa zbrojem kutova u trokutima i četverokutima u eliptičkoj geometriji. U sljedećim teoremima će biti naglašeno da su stranice manje ili kongruentne polarnoj dužini. U literaturi se obično pod definicijom trokuta ili bilo kojeg mnogokuta u eliptičkoj geometriji zahtijeva da stranice udovoljavaju tome uvjetu jer se tada mogu pokazati razne tvrdnje, kao što se i za dužinu, kad god je to moguće, uzima manja od dviju dužina određenih dvjema točkama. U ovom radu su takvi uvjeti bitni tek sada pri kraju rada, te se željelo što općenitije obraditi eliptičku geometriju, pa se stoga definicija dužine i mnogokuta ostavila u općem obliku.

**Teorem 3.17** *Zbroj kutova u svakom pravokutnom trokutu je veći od dva prava kuta.*

**Dokaz.** Neka je proizvoljni $\triangle ABC$ pravokutni trokut s pravim kutom $\angle BCA$. Ako je jedna od kateta veća od polarne dužine, onda je po Teoremu 3.12 nasuprotni kut tupi kut, a kako je zbroj pravog i tupog kuta veći od dva prava kuta, to je onda i zbroj kutova trokuta $\triangle ABC$ veći od dva prava kuta.

Ako je jedna od kateta kongruentna polarnoj dužini, onda je po Teoremu 3.12 nasuprotni kut pravi kut, pa $\triangle ABC$ ima dva prava kuta. Sada zbroj dva prava kuta i trećeg kuta trokuta $\triangle ABC$ mora biti veći od dva prava kuta.

Prepostavimo da su katete manje od polarne dužine. Neka je $D$ polovište stranice $\overline{AB}/U$. Konstruirajmo okomicu $p$ iz točke $D$ na pravac $AC$. $p$ očito ne prolazi točkama $A, B$ i $C$. $p$ siječe dužinu $\overline{AB}/U$, pa po Teoremu 2.17 za dane dužine $\overline{AC}/Z$ i $\overline{BC}/V$ $p$ siječe ili $\overline{AC}/Z$ ili $\overline{BC}/V$.

Pretpostavimo da $p$ siječe $\overline{BC}/V$ u točki $T$. Tada su $BC$ i $p$ dvije okomice na pravac $AC$ koje prolaze točkom $T$, pa je $T$ pol pravca $AC$. Kako je $T$ unutrašnja točka dužine $\overline{BC}/V$, to je $\overline{TC}/V < \overline{BC}/V$. Kako je $\overline{TC}/V$ kongruentna polarnoj dužini, a $\overline{BC}/V$ manja od polarne dužine, to po Teoremu 2.53 slijedi da je polarna dužina manja od polarne dužine, što je kontradikcija.

Dakle, $p$ siječe $\overline{AC}/Z$ u unutrašnjoj točki $E$.

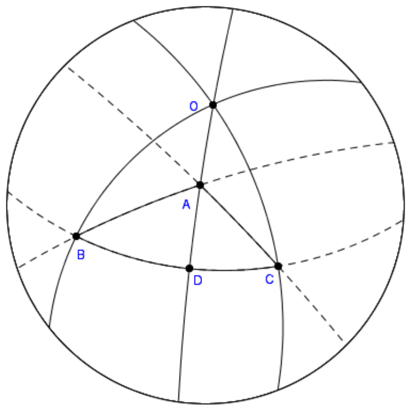
Neka je $Q$ točka pravca $DE$ koja ne leži u unutrašnjosti trokuta $\triangle ABC$ i koja je različita od $D$ i $E$. Po aksiomu $(E - III_1)$ postoji točka $E'$ na polupravcu $\overrightarrow{DQ}/E$ takva da je $\overline{DE}/Q \equiv \overline{DE'}/Q$. Kutovi $\angle ADE$ i $\angle E'DB$ su vršni kutovi pa su kongruentni. Sada je $\triangle EAD \equiv \triangle BDE'$ po aksiomu $(E - III_7)$, pa je posebno $\angle E'BD \equiv \angle EAD$ i $\angle DE'B \equiv \angle DEA$. Kako je $\angle DEA$ pravi, to je $\angle DE'B$ pravi kut, pa je $CEE'B$ Lambertov četverokut, pa je po Teoremu 3.14 $\angle E'BC$ tupi kut. Sada je $\angle BCA + \angle CAB + \angle ABC \equiv R + \angle DBE' + \angle ABC \equiv R + \angle E'BC > R + R \equiv 2R$, što je i trebalo pokazati. ■

**Teorem 3.18** *Zbroj kutova u svakom trokutu je veći od dva prava kuta.*

**Dokaz.** Neka je $\triangle ABC$ proizvoljni trokut.

Ako je jedan od kutova pravi kut, tvrdnja slijedi po Teoremu 3.17. Ako $\triangle ABC$ ima dva tupa kuta, tvrdnja očito vrijedi.

Pretpostavimo da trokut $\triangle ABC$ ima barem dva šiljasta kuta i da mu nijedan kut nije pravi kut. Neka su kutovi $\angle ABC$ i $\angle BCA$ šiljasti kutovi. Konstruirajmo okomice $p$ i $q$ na pravac $AB$ u točkama $A$ i $B$ redom i neka se one sijeku u točki $O$. Kako su kutovi $\angle ABC$ i $\angle BCA$ po pretpostavci šiljasti




kutovi, to su oni manji od pravih kutova $\angle OBC$ i $\angle BCO$ redom, pa se točka $A$ nalazi unutar kutova $\angle OBC$ i $\angle BCO$. $A$ je također u unutrašnjosti kuta $\angle BOC$, jer bi u suprotnom došli u kontradikciju s činjenicom da su $\angle ABC$ i $\angle BCA$ šiljasti kutovi. Po Teoremu 2.35 i Teoremu 2.27 pravac $OA$ siječe dužinu $\overline{BC}/V$ u unutrašnjoj točki $D$. Sada su dobivena dva pravokutna trokuta $\triangle BDA$ i $\triangle DCA$. Po Teoremu 3.17 je zbroj kutova u svakom od njih veći od dva prava kuta, pa je po Teoremu 2.59 zbroj zbrojeva kutova tih trokuta veći od dva prava kuta, što je upravo zbroj kutova trokuta $\triangle ABC$.

■

Kako je po prethodnom teoremu zbroj kutova u svakom trokutu veći od dva prava kuta i kako po Teoremu 2.46 možemo oduzimati kutove, možemo promatrati razliku zbroja kutova u trokutu i dva prava kuta.

**Definicija 3.19** *Neka je dan trokut $\triangle ABC$. Kut kongruentan razlici zbroja kutova trokuta $\triangle ABC$ i $2R$ nazivamo* ***viškom trokuta*** *$\triangle ABC$.*

Očekivano, za četverokut vrijedi da je zbroj njegovih kutova veći od četiri prava kuta.

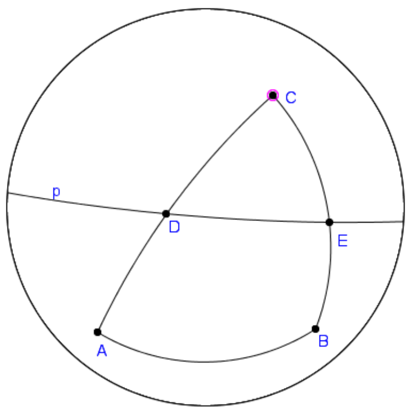
**Korolar 3.20** *U svakom četverokutu je zbroj kutova veći od četiri prava kuta.*

**Dokaz.** Neka je $ABCD$ proizvoljni četverokut. $ABCD$ se može podijeliti na dva trokuta $\triangle ABC$ i $\triangle CDA$. Zbroj kutova u četverokutu $ABCD$ je jednak zbroju kutova u trokutima $\triangle ABC$ i $\triangle BCD$, pa po Teoremu 3.18 i Teoremu 2.59 slijedi da je zbroj kutova u četverokutu $ABCD$ veći od četiri prava kuta. ■

**Definicija 3.21** *Neka je dan četverokut $ABCD$. Kut kongruentan razlici zbroja kutova četverokuta $ABCD$ i $4R$ nazivamo* ***viškom četverokuta*** *$ABCD$.*

**Teorem 3.22** *Neka je $\triangle ABC$ proizvoljan trokut i $p$ pravac koji siječe njegove stranice $\overline{AC}/Z$ i $\overline{BC}/V$ u njihovim unutrašnjim točkama $D$ i $E$ redom. Tada je višak trokuta $\triangle ABC$ kongruentan zbroju viška trokuta $\triangle CDE$ i viška četverokuta $ABED$*

**Dokaz.**



Višak trokuta $\triangle ABC$ je kongruentan $\angle ABC + \angle BCA + \angle CAB - 2R + 4R - 4R \equiv \angle ABC + \angle BCA + \angle CAB - 2R + \angle CDE + \angle EDA + \angle DEC + \angle BED - 4R$ što je kongruentno zbroju viška trokuta $\triangle CDE$ i viška četverokuta $ABCD$.

■

Uočimo da tvrdnja prethodnog teorema vrijedi i u slučaju da točke $D$ i $E$ nisu unutrašnje točke stranica. U tom slučaju neće biti dobro definiran četverokut, pa će višak trokuta $\triangle ABC$ u slučaju da je jedna od točaka $D$ ili $E$ vrh trokuta biti kongruentan zbroju viškova dva novonastala trokuta, a u slučaju da su obe vrhovi trokuta će višak trokuta $\triangle ABC$ biti kongruentan samom sebi.

**Teorem 3.23** *Svaka dva kongruentna trokuta imaju kongruente viškove.*

**Dokaz.** Kako dva kongruentna trokuta imaju u parovima kongruentne kutove, to im je i zbroj kutova kongruentan, pa je onda i njihov višak kongruentan. ■

Za kraj ćemo pokazati teorem koji je zajednički hiperboličkoj i eliptičkoj geometriji, odnosno teorem koji vrijedi u neeuklidskim geometrijama.

**Teorem 3.24 (K-K-K)** *Dva trokuta kojima su odgovarajući kutovi kongruentni su kongruentni.*

**Dokaz.** Neka su $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ dva trokuta za koje vrijedi $\angle CAB \equiv \angle C'A'B'$, $\angle BCA \equiv B'C'A'$ i $\angle ABC \equiv \angle A'B'C'$.

Ako je jedan od parova odgovarajućih stranica kongruentan, onda po Teoremu 2.62 slijedi da je $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C'$.

Pretpostavimo da nijedan par odgovarajućih stranica nije kongruentan. Tada su u jednom trokutu sigurno barem dvije stranice veće od pripadnih stranica iz drugog, pa bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su stranice $\overline{AB}/U$

i $\overline{AC}/Z$ veće od $\overline{A'B'}/U'$ i $\overline{A'C'}/Z'$ redom. Tada po aksiomu $(E-III_1)$ postoje točke $B''$ i $C''$ na $\overrightarrow{AB}/U$ i $\overrightarrow{AC}/Z$ redom takve da je $\overline{AB''}/U \equiv \overline{A'B'}/U'$ i $\overline{AC''}/Z \equiv \overline{A'C'}/Z'$. Sada je po aksiomu $(E-III_7)$ za stranicu $\overline{B''C''}/V''$ čije se unutrašnje točke nalaze u nutrini trokuta $\triangle ABC$ vrijedi $\triangle AB''C'' \equiv \triangle A'B'C'$. Tada po Teoremu 3.23 $\triangle AB''C''$ i $\triangle A'B'C'$ imaju kongruentne viškove, a kako po po pretpostavci $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imaju kongruentne viškove, po aksiomu $(E-III_6)$ slijedi da $\triangle ABC$ i $\triangle AB''C''$ imaju kongruentne viškove. No, tada bi po Teoremu 3.22 slijedilo da četverokut $B''BCC''$ ima višak kongruentan praznom kutu, što je kontradikcija s izborom točaka $B''$ i $C''$. Slično bi se pokazalo u ostalim slučajevima.
Dakle, trokuti $\triangle ABC$ i $\triangle A'B'C'$ imaju u parovima kongruente stranice, pa su po Teoremu 2.62 kongruentni. ■
Dakle, u eliptičkoj geometriji sličnost ne postoji.

# Poglavlje 4

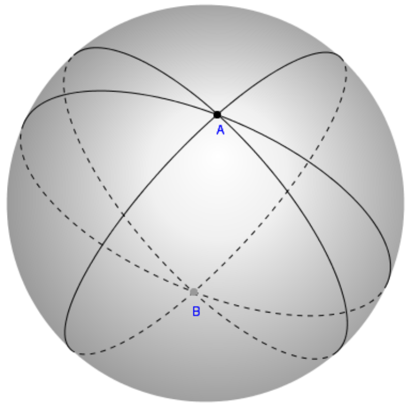
# Modeli eliptičke geometrije

Postoje razni modeli eliptičke geometrije koji su vezani za razna polja matematike. Mi ćemo za kraj ukratko predstaviti dva modela eliptičke geometrije koja su jednostavno shvatljiva: sfernu geometriju i stereografsku projekciju sfere. Cilj je da ovi modeli pomognu ilustrirati prethodno spomenute pojmove i tvrdnje, te da se napokon objasni koji smo model koristili prilikom ilustracija kroz rad. Također, izgradnjom modela u euklidskoj geometriji ćemo pokazati da, ako je euklidska geometrija konzistentna, onda je i eliptička.

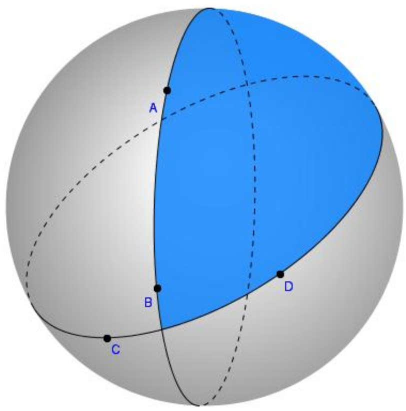
## 4.1 Sferna geometrija

Već na početku rada uveo se model pravca kao kružnice, a kasnije u Poglavlju 3 je postalo jasnije zašto bi kružnica bila dobar model pravca. Napomenuto je i da pravci ne bi trebali biti bilo kakve kružnice, obzirom da u euklidskoj geometriji dvije različite točke određuju beskonačno mnogo kružnica.
Model koji se intuitivno nameće kao logičan izbor za model eliptičke geometrije je sfera. Obzirom da prethodno komentiramo, stavimo da su pravci velike kružnice sfere (kružnice sa središtem u središtu sfere promjera jedna-

kog promjeru sfere), odnosno presjeci sfere i ravnina koje prolaze kroz središte sfere.
Pogledajmo sada što su točke. Očekivano bi točke trebale biti bilo koje točke sfere. No, treba razmisliti o eventualnim problemima vezanim za aksiome incidencije. Vrijedi li aksiom $(E - I_2)$? Prolazi li kroz svake dvije različite točke najviše jedan pravac?

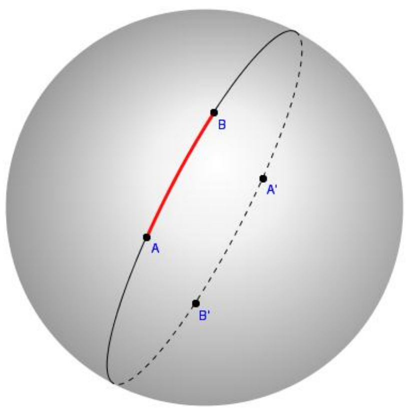



Vidimo da aksiom $(E - I_2)$ ne vrijedi. Također, uočimo da se svaka dva pravca sijeku u dvije različite točke, što je također kontradiktorno. Dakle, trebamo malo promijeniti model točke.
Uočimo da se dvije točke u kojima se sijeku različiti pravci nalaze na sferi dijametralno suprotno jedna drugoj. Takve točke nazivamo *antipodalnim točkama*. Stoga se za eliptičke točke uzimaju parovi antipodalnih točaka.
Eliptička točka će ležati na pravcu $p$ ako bilo koja od točaka antipodalnog para leži na pravcu $p$.
Uočimo odmah jednu zanimljivost. U euklidskoj i hiperboličkoj geometriji potrebna su barem tri međusobno nekolinearna pravca da bi se dobio poligon. U eliptičkoj geometriji dovoljna su dva različita pravca. Područje na sferi koje oni omeđuju naziva se *mjesecom* ili *dvokutom*.



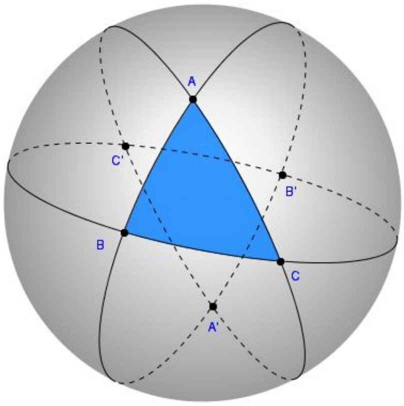

Slika 4.1: Mjesec ili dvokut određen pravcima $AB$ i $CD$

Može se uočiti da tehnički dva pravca određuju četiri mjeseca ili dvokuta, od kojih su po dva u parovima kongruentna.
U ovom modelu se pod pojmom dužine određene točkama $A$ i $B$ uzima manja od dužina određenih njima ako te dužine nisu kongruentne, a ako su kongruentne, izbor je proizvoljan.




Slika 4.2: Dužina $\overline{AB}$

Tri nekolinearne točke na sferi tehnički određuju šesnaest trokuta, no obično se pod sfernim trokutima podrazumijevaju oni kojima je stranica manja od polarne dužine i čiji su svi kutovi manji od dva prava kuta.

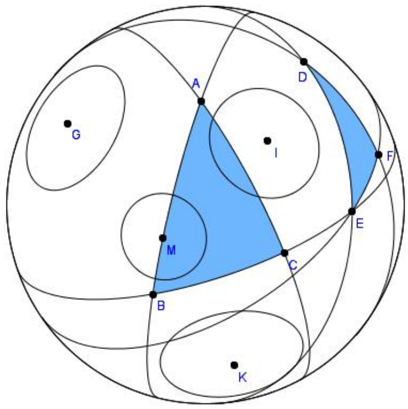



Slika 4.3: Trokut $\triangle ABC$

Prolazeći kroz aksiome eliptičke geometrije može se vidjeti da ovakav model doista jest model eliptičke geometrije.

## 4.2 Stereografska projekcija sfere na kompleksnu ravninu

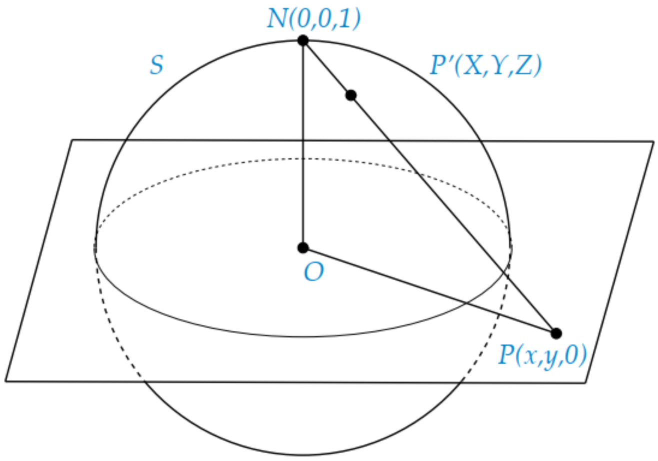
Sfera je bila eliptička ravnina smještena u trodimenzionalnom euklidskom prostoru. Pokažimo sada eliptičku ravninu u dvodimenzionalnom euklidskom prostoru. Za takvo nešto bi bilo logično pogledati neku od projekcija sfere. Kada pričamo o projekciji sfere, prvo što bi nam palo napamet je obična projekcija sfere na $X - Y$ ravninu.
Promotrimo zašto možda to nije idealna projekcija, iako je ispravna. Na sljedećoj slici pogledajmo što se dogodi s objektima prilikom $X - Y$ projekcije sfere.




Slika 4.4: $X - Y$ projekcija sfere

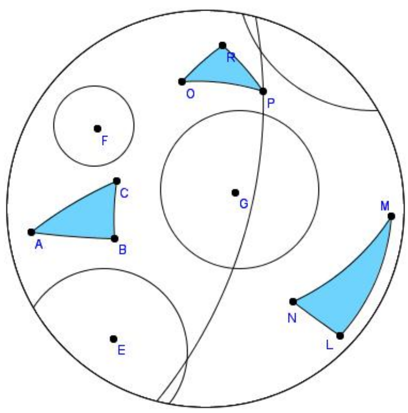
Točke, pravci i dužine izgledaju u redu. Pogledamo li trokute i kružnice, možemo uočiti da ti objekti izgledaju poprilično normalno u centru eliptičke ravnine, no što su bliži rubovima eliptičke ravnine (odnosno sfere) njihove slike postaju spljoštenije te malo smetaju pogledu. Stoga bi bilo poželjno pronaći projekciju sfere u kojoj će kružnice izgledati kao normalne kružnice. Takva projekcija je stereografska projekcija sfere na kompleksnu ravninu. Taj model je ujedno i model koji se koristio kroz rad za ilustracije.

Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je sfera jedinična. Smjestimo ju u koordinatni sustav tako da je središte u ishodištu koordinatnog sustava. Tada gornjem polu sfere odgovaraju koordinate $N(0, 0, 1)$. Ravnina $X-Y$ dijeli sferu na dvije jednake polusfere. Sada za svaku točku $P'$ različitu od $N$ pravac $NP'$ siječe ravninu $X - Y$ u točki $P$. Uočimo da će se točke gornje polusfere preslikati u točke ravnine $X - Y$ koje su izvan jedinične kružnice, a točke donje polusfere u točke unutar jedinične kružnice. Takvo preslikavanje naziva se *stereografska projekcija sfere na kompleksnu ravninu.*




Slika 4.5: Stereografska projekcija sfere na kompleksnu ravninu
(Slika preuzeta iz [1])

Ovakva projekcija pravce i kružnice sfere preslika u pravce i kružnice ravnine.




Slika 4.6: Kružnice, trokuti i pravci u stereografskoj projekciji sfere

Ovo preslikavanje je konformno (čuva kutove), no ne čuva udaljenosti i površine likova, pa stoga valja biti oprezan pri korištenju modela.

# Literatura

[1] Hvidsten, M. (2017). *Exploring Geometry.* Drugo izdanje. Boca Raton: CRC Press

[2] Hvidsten, M. (2017). *Exploring Geometry: Web Chapters.* Preuzeto 10. studenog 2021. godine s internetske stranice: `http://homepages.gac.edu/~hvidsten/geom-text/web-chapters.php`

[3] Červar, B., Erceg, G., Lekić, I. (2014). *Osnove geometrije.* Split: Prirodoslovno-matematički fakultet

[4] Coxeter, H.S.M. (1998). *Non-Euclidean Geometry* Washington, D.C.: The Mathematical Association of America (Incorporated)

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

# ELIPTIČKA GEOMETRIJA

Dominka Tadić

**Sažetak**:
U ovom radu su predstavljeni osnovni pojmovi, aksiomi, teoremi i modeli eliptičke geometrije. Obzirom na mali broj radova vezanih za aksiomatiku eliptičke geometrije u Hrvatskoj i u svijetu općenito, cilj ovog rada je sistematično popisati aksiome eliptičke geometrije i iz tih aksioma dokazati teoreme specifične eliptičkoj geometriji.

**Ključne riječi**:
aksiomi, incidencija, separacija, kongruencija, neprekidnost, polarna dužina, višak trokuta, sferna geometrija, stereografska projekcija

**Podatci o radu**:
85 stranica, 32 slike, 4 literaturna navoda, hrvatski jezik

**Mentor**: doc. dr. sc. Goran Erceg

**Članovi povjerenstva**:

izv. prof. dr. sc. Jurica Perić

dr. sc. Dino Peran

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad 11.04.2022.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

# ELLIPTIC GEOMETRY

Dominka Tadić

**Abstract**:

This paper presents the basic concepts, axioms, theorems and models of elliptic geometry. Given the small number of papers related to axiomatics of elliptic geometry in Croatia and the world in general, the goal of this paper is to systematically list the axioms of elliptic geometry and, using those axioms, prove theorems specific to elliptic geometry.

**Keywords**:

axioms, incidence, separation, congruence, continuity, polar segment, excess of triangle, spherical geometry, stereographic projection

**Specifications**:

85 pages, 32 pictures, 4 references, croatian language

**Mentor**: Assistant professor Goran Erceg

**Committee**:

Associate professor Jurica Perić

Postdoctoral researcher Dino Peran

This thesis was approved by a Thesis commettee on 11.04.2022.