Primjena fizikalnih koncepata i Monte Carlo metoda u procjeni financijskih opcija

Pavičić Donkić, Mihaela

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet

Primjena fizikalnih koncepata i Monte Carlo metoda u procjeni financijskih opcija

Diplomski rad

Mihaela Pavičić Donkić

Split, rujan 2021.

Veliko hvala mom mentoru doc. dr. sc. Petru Stipanoviću na strpljenju i podršci u istraživanju novog, potpuno nepoznatog područja. Hvala i na svakom komentaru, sugestiji i korekciji, kako za vrijeme pisanja rada, tako i za vrijeme cijelog studija.

Zahvaljujem se i doc. dr. sc. Ivani Weber na komentarima i sugestijama, kao i podršci za vrijeme pisanja istraživačkog i diplomskog rada. Hvala i doc. dr. sc. Žarku Kovaču na korekcijama i komentarima te na preporučenim knjigama o primjeni fizike u financijama. Hvala i svim profesorima na prenesenom znanju, kao i svim kolegama na međusobnoj podršci i suradnji tijekom studiranja.

Mojoj obitelji i bližnjima, hvala na strpljenju i svakom obliku podrške sve ove godine studiranja. Bez Vas ovaj uspjeh ne bi bio moguć.

I na kraju, veliko hvala Josipu. Hvala na strpljenju, podršci, motivaciji i svakom "ti to možeš". Hvala ti i na slušanju mojih brojnih priča te pokušajima razumijevanja istih.

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet
Odjel za fiziku
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Diplomski rad

Primjena fizikalnih koncepata i Monte Carlo metoda u procjeni financijskih opcija

Mihaela Pavičić Donkić

Sveučilišni diplomski studij Fizika, smjer Računarska fizika

Sažetak:
U radu se istražuju metode određivanja cijena različitih vrsta financijskih opcija u svrhu istraživanja primjene Brownovog gibanja i Monte Carlo simulacija u financijama. Cijene opcija ovise o cijenama dionica te je stoga potrebno simulirati njihovo kretanje. Usporedbom simulacije Brownovog gibanja s cijenama dionice, pokaže se da je Brownovo gibanje uistinu dobar kandidat za opisivanje kretanja cijena dionica. U svrhu određivanja cijena opcija koristi se nekoliko metoda, a neke od njih uključuju i promatranje kretanja cijena kao Brownovog gibanja. Metode se primjenjuju na primjeru te se uspoređuju cijene dobivene različitim metodama. Pokaže se da sve metode daju približno jednaku cijenu, te se stoga mogu koristiti u prikladnim slučajevima.

Ključne riječi: Brownovo gibanje, Monte Carlo, financijski instrument, opcije, Wienerov proces

Rad sadrži: 61 stranicu, 24 slike, 4 tablice, 10 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku

Mentor: doc. dr. sc. Petar Stipanović

Ocjenjivači: doc. dr. sc. Petar Stipanović
doc. dr. sc. Ivana Weber
doc. dr. sc. Žarko Kovač

Rad prihvaćen: 22. rujna 2021.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

Basic documentation card

University of Split
Faculty of Science
Department of Physics
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Master thesis

Application of Physical Concepts and Monte Carlo Methods for Pricing Financial Options

Mihaela Pavičić Donkić

University graduate study programme Physics, orientation Computational Physics

Abstract:
This thesis investigates the methods of evaluating the prices of different types of financial options with the purpose of researching the application of the Brownian motion and Monte Carlo simulations in finance. Option prices depend on stock prices, and it is therefore necessary to simulate their movement. Comparing the simulation of Brownian motion with stock prices, it turns out that Brownian motion is indeed a good candidate for describing stock price movements. For option pricing purposes, the thesis uses several methods, some of which include observing price movement as Brownian motion. The methods are applied on an example and the prices obtained by different methods are compared. It turns out that all methods give approximately the same price and can therefore be used in appropriate cases.

Keywords: Brownian motion, Monte Carlo, financial instrument, options, Wiener process

Thesis consists of: 61 pages, 24 figures, 4 tables, 10 references. Original language: Croatian

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Petar Stipanović

Reviewers: Assist. Prof. Dr. Petar Stipanović
Assist. Prof. Dr. Ivana Weber
Assist. Prof. Dr. Žarko Kovač

Thesis accepted: September 22nd, 2021

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

Sadržaj

Popis crteža

Popis tablica

1 Uvod

Primjena fizikalnih koncepata u svakodnevnom životu nema granica, od hodanja i vožnje automobila do korištenja telefona ili jednostavne radnje paljenja svjetla. Zato nije začuđujuće da su fizikalni koncepti „pronašli“ svoju primjenu i u financijama. Naime, 1900. godine, skokovito kretanje cijena dionica podsjetilo je studenta matematike Louisa Bacheliera na Brownovo gibanje. Tako je u svom doktoratu, *The Theory od Speculation*, postavio nekoliko temeljnih pretpostavki u financijama koje se temelje na analogiji između Brownovog gibanja i cijena dionica. Pokazalo se, a pokazati će se i u ovom radu, da je Brownovo gibanje doista jako dobar model za simuliranje kretanja cijena dionica. Zbog mogućnosti simuliranja velikog broja različitih događaja, Monte Carlo metode također imaju iznimno široku paletu mogućih primjena, od fizike, inženjerstva i statistike, do računalne grafike i igara.

Ideja ovog rada je proučavanje jedne od primjena Brownovog gibanja i Monte Carlo simulacija u financijama. U tu svrhu, proučavaju se opcije kao financijski instrument te se procjenjuje njihova cijena. Opcije su vrlo moćan i kompleksan alat na tržištu kapitala te dobro razumijevanje njihovog ponašanja uvelike pomaže u manipulaciji rizika. One su izvedeni financijski instrument čime njihova cijena ovisi o cijenama dionica. Stoga se u radu uvelike proučava i simulira kretanje cijena dionica. Postoji nekoliko vrsta opcija, a u radu se promatraju dvije osnovne vrste, tzv. *vanilija* opcije.

S obzirom da su opcije kompleksan financijski instrument, u radu se prvo objašnjavaju osnovni pojmovi u financijama, te potom pojam opcija kao financijskog instrumenta. U trećem se poglavlju uvodi slučajan hod i Brownovo gibanje, te se usporedbom sa primjerom kretanja cijena dionica pokazuje kako je ono iznimno dobar kandidat za opis kretanja cijena dionica. Uvodi se i matematički okvir za Brownovo gibanje, poznat kao i Wienerov proces te se odatle grade aritmetički i geometrijski slučajni hod. Promatra se i distribucija konačnih cijena dionica kao temelj za neke od metoda određivanja cijene opcije.

U četvrtom se poglavlju objašnjavaju osnovne metode određivanja cijene najosnovnije vrste opcija, tzv. europskih opcija. Objašnjava se često korišten model binomnog stabla za opis kretanja dionica te njegova primjena u određivanju cijene opcije, te se navodi Black-Scholes formula kao vrlo koristan i jednostavan alat u određivanju cijene europske opcije. U petom se poglavlju navode tri metode određivanja cijene europske opcije u kojima se koriste Monte Carlo simulacije: numeričko integriranje, premošćivanje binomnog stabla, te simulacija geometrijskog slučajnog hoda. U šestom se poglavlju objašnjavaju metode za određivanje malo kompleksnije vrste opcija, tzv. američkih opcija. Metode koje se koriste su primjena modela binomnog stabla, Longstaff-Schwartz metode, te se spominje numeričko rješavanje Black-Scholes parcijalne diferencijalne jednadžbe koja je kompleksnija metoda te se u ovom radu ne koristi. Na kraju se, u sedmom poglavlju opisuje primjena svih metoda na primjeru. U zaključku se uspoređuju dobivene vrijednosti za različite metode te se navodi na koji se način metode mogu poboljšati.

U dodatku su navedeni kodovi korišteni za simuliranje slučajnih hodova kao i za određivanje cijena različitim metodama. Kodovi su pisani u C jeziku. Crteži na kojima su prikazani grafikoni izrađeni su u Gnuplot-u, dok su dijagrami toka izrađeni pomoću alata draw.io.

2 Opcije kao financijski instrument

2.1 Osnovni pojmovi u financijama

Tržište kapitala je organizacija financijskih tvrtki i posrednika, a obuhvaća trgovanje dionicama tvrtki i ostalim financijskim instrumentima [3]. **Financijski instrument** predstavlja dokument o legalnom dogovoru koji uključuje bilo koji oblik novčane vrijednosti [5], odnosno predstavlja svaki ugovor na temelju kojeg nastaje financijska imovina jednog subjekta i financijska obveza ili vlasnički instrument drugog subjekta. Ako za financijski instrument postoji dobro razvijeno tržište, naziva se **vrijednosnicom** (eng. *security*) [9]. **Portfelj** je skup financijskih imovina, odnosno vrijednosnica [3]. Kako bi se umanjio rizik, portfelj se često sastoji od različitih vrijednosnica koje nisu korelirane.

Financijski instrumenti dijele se na osnovne/novčane instrumente te izvedenice. Osnovni instrumenti dijele se na nerizične (novac, državne obveznice) i rizične (strane valute, dionice…) [1]. Tržišni **rizik** odnosi se na mogućnost gubitka ili čak povrata manjeg od očekivanog kao rezultat neočekivanih kretanja na nekom tržištu [9]. Uklanjanje rizika u ulaganju naziva se *hedging* [3]. **Obveznice** su dužničke vrijednosnice koje su uglavnom manje rizične i predstavljaju dugovanje određenog novčanog iznosa uvećanog za kamatu. **Dionice** su vrijednosnice koje predstavljaju udio u vlasništvu dioničkog društva. **Izvedenice** su financijski instrumenti koji svoju vrijednost izvode iz vrijednosti nekog drugog osnovnog instrumenta [4]. Pod izvedenice spadaju budućnosnice (eng. *futures*) , opcije (eng. *options*), zamjene (eng. *swaps*),… [1] Među njima detaljnije će se obraditi opcije u sljedećem potpoglavlju.

Kamatna stopa vrijednosnice predstavlja stopu povrata uloženog novca. Kamatna stopa na nerizično ulaganje naziva se **bezrizična kamatna stopa** r_f. Bezrizična stopa vrlo je važan alat u financijama te služi kao osnova za usporedbu svih ostalih ulaganja.

Kada se promatraju uplate i isplate u budućnosti, odnosno kada se uspoređuje izvršavanje transakcija u različitim trenutcima, a s istim bazama, potrebno je provesti diskontiranje. Naime, posjedovanje količine novca P danas vrijedi više nego posjedovanje P količine novca nekada u budućnosti. Ako su novci uloženi po bezrizičnoj stopi r_f, pokaže se ([9], poglavlje 2.2, stranice 35-40) da će u trenutku t taj novac poprimiti vrijednost

$$V = Pe^{r_f t}. \tag{2.1}$$

Odavde se lako dobije da je današnja vrijednost P u odnosu na vrijednost V dana s

$$P = Ve^{-r_f t}. \tag{2.2}$$

Ovo se naziva **diskontiranjem** budućeg novca u sadašnjem trenutku. Na P u izrazu (2.2) često se referira kao na sadašnju vrijednost od V [9].

Još jedan od ključnih pojmova u financijskoj matematici je **arbitraža**. Predstavlja strategiju trgovanja na financijskom tržištu kojom netko ostvaruje zaradu bez rizika [1]. Pretpostavka nepostojanja arbitraže jedna je od ključnih pretpostavki u odrađivanju cijena financijskih instrumenata.

2.2 Opcije

Opcije predstavljaju vrhunski alat za suočavanje s rizikom u investicijama. One su izvedeni financijski instrument (financijska izvedenica), odnosno pismeni ugovor koji vlasniku (kupcu opcije, eng. *buyer/holder*) daje pravo, ali ne i obvezu kupovine ili prodaje vezane imovine (eng. *underlying asset*) po unaprijed ugovorenoj **cijeni izvršenja** (eng. *strike price*) na **dan dospijeća** (eng. *expiry, expiration date*) za **europske opcije**, ili prije ili na sam dan dogovorenog datuma za **američke opcije** [1,7]. Prodavatelj (pisac, eng. *seller/writer*) opcije pristaje na takav ugovor i obvezuje se ispuniti ga ako to zatraži kupac ugovora. Dakle, vlasnik B ima pravo, ali ne i obavezu, a prodavatelj W ima potencijalnu obavezu. U većini slučajeva, kupac i prodavatelj se nikada ne susreću, već transakciju obavlja treća stranka, odnosno posrednik (eng. *exchange*). Posrednik je taj koji postavlja pravila ugovora, a time i određuje cijenu ugovora.

Kupovna (pozivna, eng. *call*) **opcija** daje pravo, ali ne i obvezu da B kupi dogovorenu količinu vezane imovine od W-a. **Prodajna** (eng. *put*) **opcija** daje pravo, ali ne i obvezu da B proda dogovorenu količinu vezane imovine W-u. Zbog učestalosti engleskih naziva u stručnoj literaturi, u nastavku će se također koristiti engleski nazivi put i call. Naravno, prodavatelj naplaćuje uslugu. Glavna tema ovog rada je određivanje koja bi bila poštena cijena takvog ugovora. Ta cijena je točna kvantifikacija rizika.

Primjer: Banka, koja trenutno posjeduje dionice u vrijednosti od 50 kn, planira za tri mjeseca prodati dionice, ali u tom trenutku želi dobiti najmanje 45 kn po dionici. Banka sklapa ugovor put opcije s drugom strankom koja pristaje kupiti dionice po cijeni od 45 kn za tri mjeseca, bez obzira na tržišnu cijenu. Ako se dogodi da tržišna cijena za tri mjeseca premaši ovu vrijednost, banka nije obvezna prodati dionice po cijeni od 45 kn, već može slobodno prodati dionice po tržišnoj cijeni [9].

2.3 Funkcija isplate opcija

Pozicija opcije obzirom na kretanje cijena može biti:

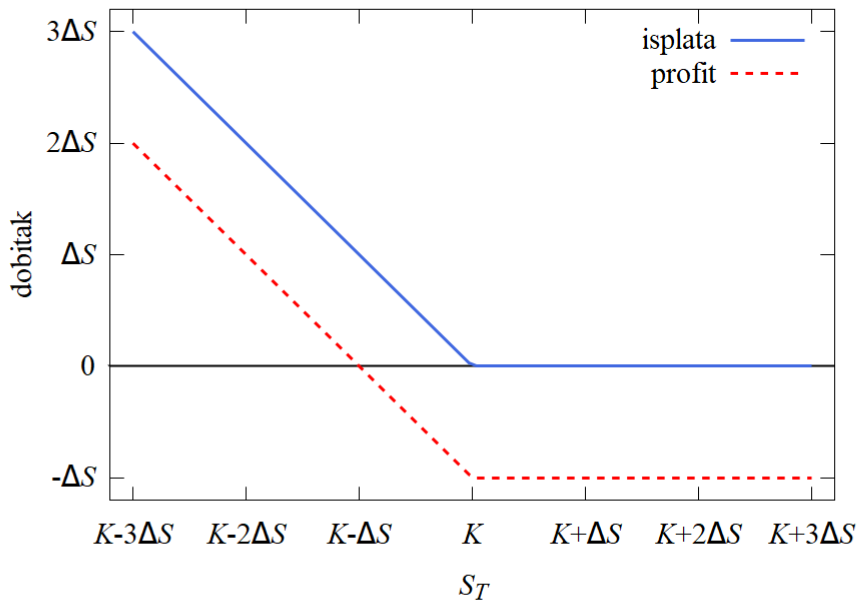
- van novca (eng. *out-of-the-money*, OTM) kad se opcija ne izvršava jer nema zarade;
- kod novca (eng. *at-the-money*, ATM) kad je ista ugovorena cijena i ona na tržištu;
- u novcu (eng. *in-the-money*, ITM) kad je opciju povoljno izvršiti jer donosi zaradu.

Neka je cijena izvršenja put opcije K. Ako cijena dionice u trenutku dospijeća, S_T, prelazi cijenu izvršenja za iznos ΔS, odnosno $S_T = K + \Delta S$, vlasnik prodajom na tržištu može dobiti ΔS više novca nego iskorištavanjem opcije. Stoga ne iskorištava opciju, odnosno opcija nema vrijednost ako cijena dionice premašuje cijenu izvršenja u trenutku dospijeća; ona je van novca i ističe bez vrijednosti. Opcija ističe bez vrijednosti i ako je cijena dionice u trenutku dospijeća jednaka cijeni izvršenja, tj. $S_T = K$. Tada je opcija kod novca.

No, ako je cijena dionice u trenutku dospijeća manja od cijene izvršenja, $S_T = K - \Delta S$, tada vlasnik iskorištava opciju te prodaje dionice po cijeni K. U ovom slučaju, opcija ima vrijednost od $\Delta S = K - S_T$ po dionici, te je u novcu. Slijedi matematički izraz za **funkciju isplate** put opcije

$$P = \max(K - S_T, 0). \tag{2.3}$$

Na crtežu 1, punom linijom prikazana je funkcija isplate za vrijednost put opcije na datum dospijeća. Međutim, do sada nije uzeto u obzir da je vlasnik trebao platiti trošak ugovora. Neka takav ugovor košta npr. ΔS. Isprekidana linija na crtežu 1 je **funkcija profita** [9]. Može se zaključiti da vlasnik ne iskorištava put opciju čak ni kada je cijena dionice $K - \Delta S$; to jest gdje krivulja profita siječe x os.

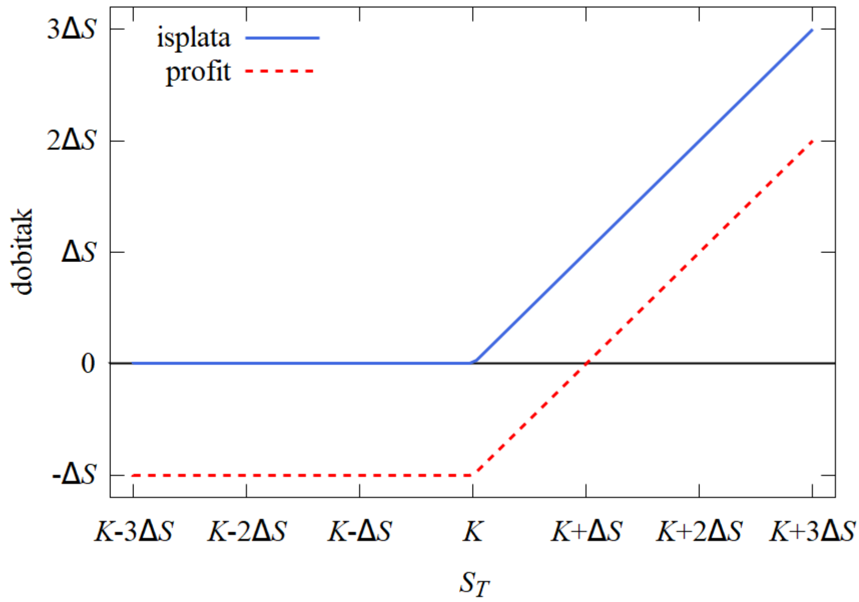


Crtež 1: Grafikon isplate za put opciju s cijenom izvršenja K

Na sličan se način odredi funkcija isplate za call opcije

$$C = \max(S_T - K, 0), \tag{2.4}$$

koja je prikazana punom linijom na crtežu 2, dok je isprekidanom linijom prikazana funkcija profita.



Crtež 2: Grafikon isplate za call opciju s cijenom izvršenja K

3 Brownovo gibanje

1827. botaničar Robert Brown mikroskopom je uočio cik-cak gibanje zrnaca peludi u vodi. Takvo se gibanje danas naziva Brownovo gibanje te je poznato da je ono posljedica slučajnog utjecaja molekula vode na zrnca peludi. Ovo je objašnjenje razjasnio Albert Einstein 1905. pokazavši da čestice koje vrše Brownovo gibanje moraju zadovoljavati parcijalnu diferencijalnu jednadžbu

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}, \tag{3.1}$$

gdje je p distribucija čestica u prostoru i vremenu, a D je fizikalna konstanta [9]. Jednadžba (3.1) naziva se difuzijska jednadžba, a konstanta D naziva se koeficijent difuzije.

Kao što je već spomenuto u uvodu, 1900. godine, Louis Bachelier je, nakon što ga je kretanje cijena dionica podsjetilo na Brownovo gibanje, postavio nekoliko temeljnih pretpostavki u financijama koje se temelje na analogiji između Brownovog gibanja i cijena dionica. Kasnije je Norbert Wiener definirao matematički okvir Brownovog gibanja. Iako bi Brownovo gibanje u prirodi trebalo imati ograničenu brzinu, matematički model dopušta neograničenu brzinu prijelaza s jednog mjesta na drugo s malom, ali pozitivnom vjerojatnošću. Stoga se, kada je potrebno razlikovati matematičku definiciju Brownova gibanja od fizičkog Brownova gibanja, koristi naziv **Wienerov proces** umjesto Brownova gibanja [3].

3.1 Slučajni hod

Kada bi se moglo promatrati gibanje jedne čestice peluda kroz vodu, uočila bi se komplicirana putanja. U kratkom periodu između dva sudara s molekulama vode, čestica se giba po pravcu, a svaki sudar uzrokuje promjenu brzine čestice. Potrebno je pronaći statistički opis gibanja čestica peludi u vodi, pritom ne mareći za putanju svake čestice. Ukoliko je broj promatranih čestica velik, prosječne vrijednosti su dobro definirane te je moguće izračunati i odstupanja od srednjih vrijednosti. Iz tog razloga se stvarni, deterministički procesi modeliraju slučajnim ili stohastičkim procesom koji ima iste prosječne vrijednosti fizikalnih veličina. [10]

Modeliranje putanje čestice naziva se **slučajnim hodom** te tada čestica preuzima ulogu tzv. šetača. U slučajnom hodu, šetač se giba jedan korak u zadanom vremenu, prema nekim pravilima. U ovom slučaju, gibanje čestice između sudara predstavljeno je koracima šetača, dok se promjena brzine prilikom sudara modelira tako da se smjer svakog koraka u hodu bira na slučajan način. Stoga slučajni šetač slijedi cik-cak putanju koja je slična naizgled slučajnoj trajektoriji čestice peluda, te se često naziva kao hod pijanca.

Neka je vremenski raspon podijeljen u diskretne periode Δt i neka se u svakom takvom periodu šetač pomakne korak u desno ili lijevo za udaljenost Δx, nasumično birajući smjer. Neka je početni položaj šetača $x_0 = 0$. Nakon n vremenskih perioda, novi položaj šetača biti će između $-n(\Delta x)$ i $n(\Delta x)$.

Jedna od važnih vrijednosti je vjerojatnost da se šetač u određenom trenutku nalazi u točno određenom položaju. Neka je $p(X, t)$ vjerojatnost da se šetač nalazi u $X = m\Delta x$, m koraka u desno od ishodišta, nakon n vremenskih perioda, $t = n(\Delta t)$. Neka je r broj napravljenih koraka u desno, a l broj napravljenih koraka u lijevo, tako da je $n = r + l$. Da bi šetač bio u položaju $m\Delta x$, mora vrijediti $m = r - l$. Iz prethodna se dva izraza može dobiti

$$r = \frac{1}{2}(n + m) \qquad l = \frac{1}{2}(n - m). \tag{3.2}$$

Broj načina na koji je moguće odabrati r koraka u desno od ukupnih n mogućnosti naziva se kombinacija i dan je binomnim koeficijentom

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n - r)!}. \tag{3.3}$$

Ako su vjerojatnosti da šetač napravi korak u desno i da šetač napravi korak u lijevo jednake, odnosno $1/2$, onda je vjerojatnost da šetač završi u položaju $X = m\Delta x$ jednaka

$$p(X) = \frac{1}{2^n} C(n, r) = \frac{1}{2^n} \frac{n!}{r!\,(n - r)!} \tag{3.4}$$

pri čemu je $r = (n + m)/2$. [9]

Neka su vjerojatnosti koraka u desno i koraka u lijevo jednake. **Očekivanje** varijable X ekvivalentno je srednjoj vrijednosti položaja, $\mathbb{E}(X)$, te je za hod od jednog koraka

$$(-\Delta x)\frac{1}{2} + (+\Delta x)\frac{1}{2} = 0.$$

Za hod od n nezavisnih koraka, očekivanje je n puta ovaj izraz, tj. $\mathbb{E}(X) = 0$. No, očekivanje ne daje informaciju koliko bi mogla biti udaljena konačna vrijednost. Stoga je korisno promatrati kvadrate položaja. Srednja vrijednost kvadrata položaja, $\mathbb{E}(X^2)$ za jedan korak je

$$(-\Delta x)^2 \frac{1}{2} + (+\Delta x)^2 \frac{1}{2} = (\Delta x)^2.$$

Za n koraka, $\mathbb{E}(X^2) = n(\Delta x)^2$. Po definiciji, **varijanca** je očekivanje kvadrata odstupanja od srednjih vrijednosti

$$\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}\{[X - \mathbb{E}(X)]^2\} = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2. \tag{3.5}$$

Korijen ove vrijednosti je **standardna devijacija** σ i predstavlja mjeru koliko daleko se čestica pomakla od početnog položaja, te je za hod od n koraka $\sqrt{\mathbb{E}(X^2)} = \sqrt{n}\Delta x$ [9].

U zaključku, za hod od n koraka vrijedi:

$$\mathbb{E}(X) = 0 \qquad \sigma = \sqrt{\mathbb{E}(X^2)} = \sqrt{n}\Delta x \qquad \mathrm{var}(X) = n(\Delta x)^2. \tag{3.6}$$

Graf vjerojatnosti $p(X,t)$ opisane izrazom (3.4) iznimno je sličan normalnoj distribuciji. Normalna distribucija sa srednjom vrijednosti μ i varijancom σ^2 uobičajeno se označava kao $\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$. Gustoća vjerojatnosti takve distribucije je

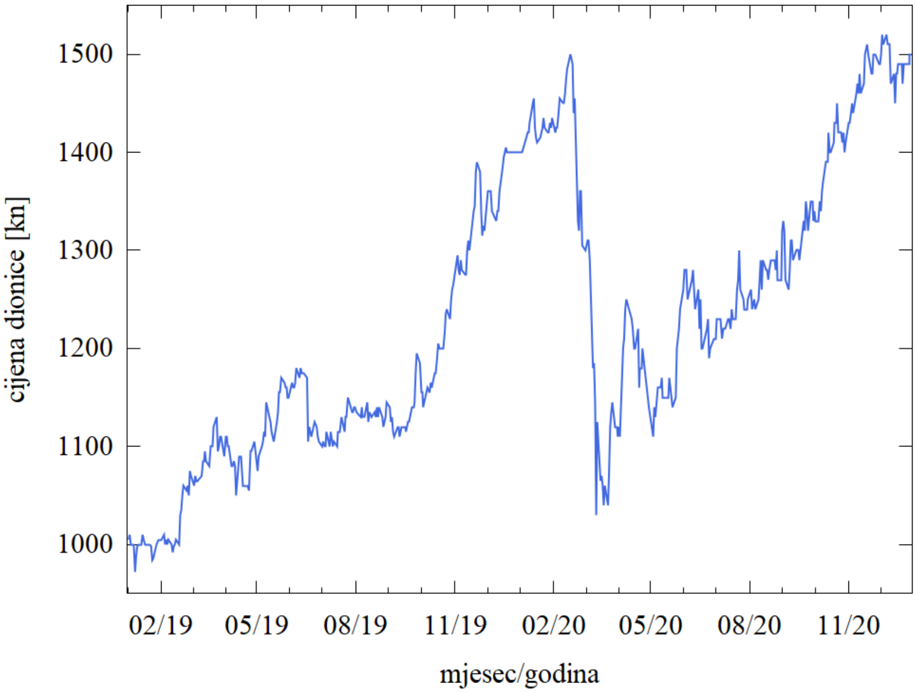
$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{3.7}$$

Prema centralnom graničnom teoremu[1] vjerojatnosti, distribucija slučajnog hoda čestica zapravo će težiti u normalnu distribuciju. Primjenom ove aproksimacije te korištenjem $t = n\Delta t$, $X = m\Delta x$, $\mu = 0$, i $\sigma^2 = n(\Delta x)^2$ i uvođenjem pokrate $D = (\Delta x)^2/(2\Delta t)$, dobije se

$$p(x,t) \approx \frac{1}{\sqrt{4\pi t D}} e^{-\frac{x^2}{4tD}}. \tag{3.8}$$

D u ovom izrazu jednak je onom u (3.1), a lako se pokaže da (3.8) uistinu zadovoljava (3.1).

Na crtežu 3 prikazan je tipični grafikon cijena dionica. U ovom slučaju, prikazane su cijene dionica tvrtke *Ericsson Nikola Tesla d.d.* Lako se može uočiti da cijene rastu i padaju na nasumičan način iz dana u dan. I na većim vremenskim skalama, reda mjeseci, cijene imaju trend rasta i pada, stoga je očito kako je slučajan hod dobar kandidat za opis kretanja cijena dionica. Iako su cijene dionica u budućnosti naizgled slučajne, one ipak slijede raspodjelu vjerojatnosti, te se stoga na temelju iste moraju donositi financijske odluke.



Crtež 3: Cijene dionica tvrtke *Ericsson Nikola Tesla d.d.* u 2019. i 2020. godini. Podaci su preuzeti iz baze zse.hr

[1] Centralni granični teorem: Neka su X_1, X_2,…X_n nezavisni slučajni uzorci iz distribucije sa srednjom vrijednosti μ i konačnom varijancom σ^2. Tada distribucija sume $Y = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}$ postaje $N(0,1)$ kako $n \to \infty$.

3.2 Wienerov proces

Matematički okvir kojeg je Norbert Wiener definirao glasi: Neka je W_t, $t \geq 0$, položaj Brownove čestice u trenutku t, s $W_0 = 0$.

Aksiom 1. Svaki prirast $W_{t+h} - W_t$ je normalno distribuiran sa srednjom vrijednosti 0 i varijancom $\sigma^2 h$ gdje je σ fiksni parametar.

Aksiom 2. Za svaki par disjungiranih vremenskih intervala $[t_1, t_2]$ i $[t_3, t_4]$, prirasti $W_{t_4} - W_{t_3}$ i $W_{t_2} - W_{t_1}$ su nezavisne slučajne varijable s distribucijama kao u aksiomu 1.

Aksiom 3. W_t je kontinuiran u $t = 0$ [9].

Iz navedenih aksioma slijedi niz svojstava Wienerovog procesa, no u ovom slučaju najzanimljivije je sljedeće. Sukladno aksiomu 1 može se pisati

$$W_t = \sigma\sqrt{t}Z, \tag{3.9}$$

gdje je Z slučajna varijabla koja je uzorak iz normalne distribucije $\mathcal{N}(0,1)$, što se uobičajeno označava kao $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Ova jednadžba implicira da kako prirasti vremena između skokova teže u nulu, tako teži i veličina skokova. Iz ovog je razloga putanja Brownovog gibanja kontinuirana. Po svojoj definiciji, Wienerov proces ima parametar σ. Varijanca od W_t je $\sigma^2 t$ čime σ kontrolira stupanj raspršenosti procesa. Istu ulogu igra i u svojoj primjeni na cijene dionica i u tom slučaju naziva se **volatilnost** [9]. Ona mjeri tendenciju cijene dionice da oscilira, odnosno da odskoči od konstantne vrijednosti.

Wienerov proces opisan preko (3.9) ima srednju vrijednost 0. Međutim, može se uvesti proširenje koje uvjetuje smjer definiranjem

$$X_t = \mu t + W_t = \mu t + \sigma\sqrt{t}Z. \tag{3.10}$$

Konstantni parametar μ u svijetu financija naziva se **drift** te se ovakav proces naziva Wienerov proces s driftom. Učinak drifta je pomicanje srednje vrijednosti položaja Brownove čestice iz 0 u μt u trenutku t, odnosno [9]:

$$\begin{gathered}\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\mu t + W_t) = \mu t + \mathbb{E}(W_t) = \mu t + 0 = \mu t, \\ \operatorname{var}(X_t) = \operatorname{var}(\mu t + W_t) = \operatorname{var}(\mu t) + \operatorname{var}(W_t) = 0 + \sigma^2 t = \sigma^2 t = \operatorname{var}(W_t).\end{gathered} \tag{3.11}$$

3.3 Aritmetički i geometrijski slučajni hod

Aritmetički slučajni hod (eng. *arithmetical random walk,* ARW) definira se kao simulacija $\{X_0, X_{\Delta t}, X_{2\Delta t}, \dots, X_{n\Delta t}\}$ Brownovog gibanja s driftom. Pritom je dopušteno da početna vrijednost, X_0, bude proizvoljna, ne nužno nula [9]. Koristi se naziv aritmetički jer su svi koraci istih veličina, u smislu da imaju istu srednju vrijednost $\mu\Delta t$ i istu standardnu devijaciju $\sigma\sqrt{\Delta t}$. Algoritam aritmetičkog slučajnog hoda korišten je u kodu u dodatku A.

Međutim, ideja korištenja ARW za modeliranje cijena dionica ima dvije mane:

1. Hod može poprimiti negativne vrijednosti što nije poželjno za cijene dionica
2. U stvarnosti, dionice koje se prodaju po niskim cijenama često imaju male priraste u cijeni, dok dionice koje se prodaju po visokim cijenama imaju znatno veće priraste u cijeni.

Rješenje [9] za ove probleme ponudio je Paul Samuelson idejom da prirast cijene dionice mora biti proporcionalan trenutnoj cijeni. Drugim riječima, ako je S_t trenutna cijena dionice, onda je infinitezimalna promjena cijene, $\mathrm{d}S$, dana s

$$\mathrm{d}S = S_t(\mu \mathrm{d}t + \mathrm{d}W_t), \tag{3.12}$$

gdje su $\mathrm{d}W_t$ prirasti Wienerovog procesa. S ovom promjenom, cijena dionice nikada ne može poprimiti negativne vrijednosti jer kada je $S_t = 0$, veličina skoka je također 0.

Korištenjem (3.9), izraz (3.12) može se zapisati kao

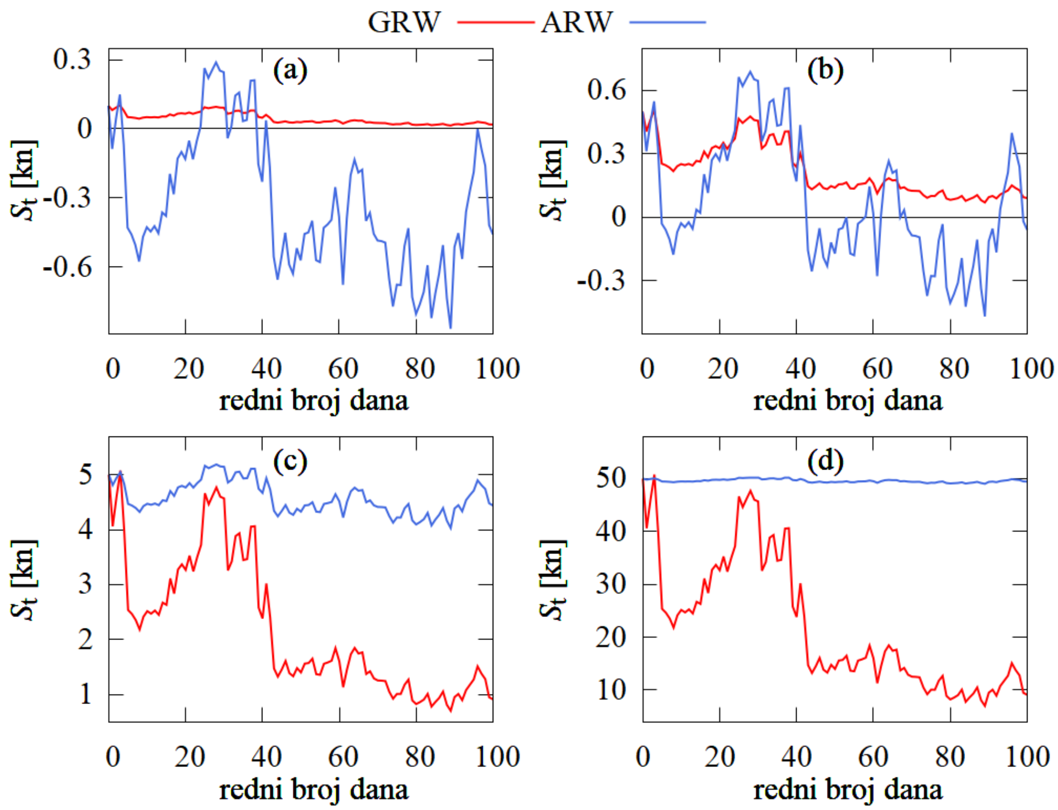
$$\mathrm{d}S = S_t\left(\mu \mathrm{d}t + \sigma\sqrt{\mathrm{d}t} Z_t\right). \tag{3.13}$$

Ovaj se model naziva geometrijsko Brownovo gibanje (eng. *geometric Brownian motion*, GBM) za cijene dionica. Radi se o kontinuiranom gibanju, te se često naziva i drift-difuzija model.

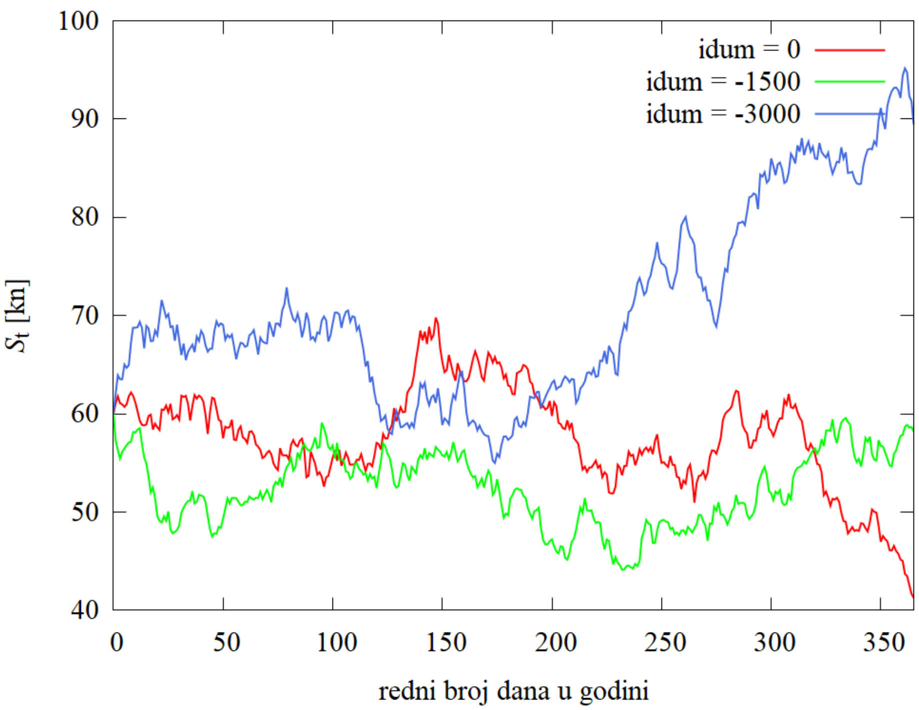
Kada se simulira diskretno geometrijskog Brownovo gibanje, simulacija se naziva geometrijski slučajni hod (eng. *geometric random walk*, GRW). Na crtežu 4 prikazana je usporedba ARW i GRW za različite početne cijene dionica. Iz crteža (a) lako je uočljiva prva navedena mana ARW, tj. poprimanje negativnih vrijednosti, dok za GRW cijena približna nuli iznimno malo oscilira te nikada ne poprima negativne vrijednosti. Također je, na sva četiri crteža, uočljiva ovisnost veličine koraka GRW o cijeni dionice, te ne postojanje takve ovisnosti kod ARW.

Na crtežu 5 prikazana su tri različita rezultata simulacije procesa (3.13) dobivenih korištenjem istih parametara. Podaci su generirani korištenjem koda u dodatku B. Crtež pokazuje da geometrijsko Brownovo gibanje pruža velik broj varijacija po pitanju promjena cijena.

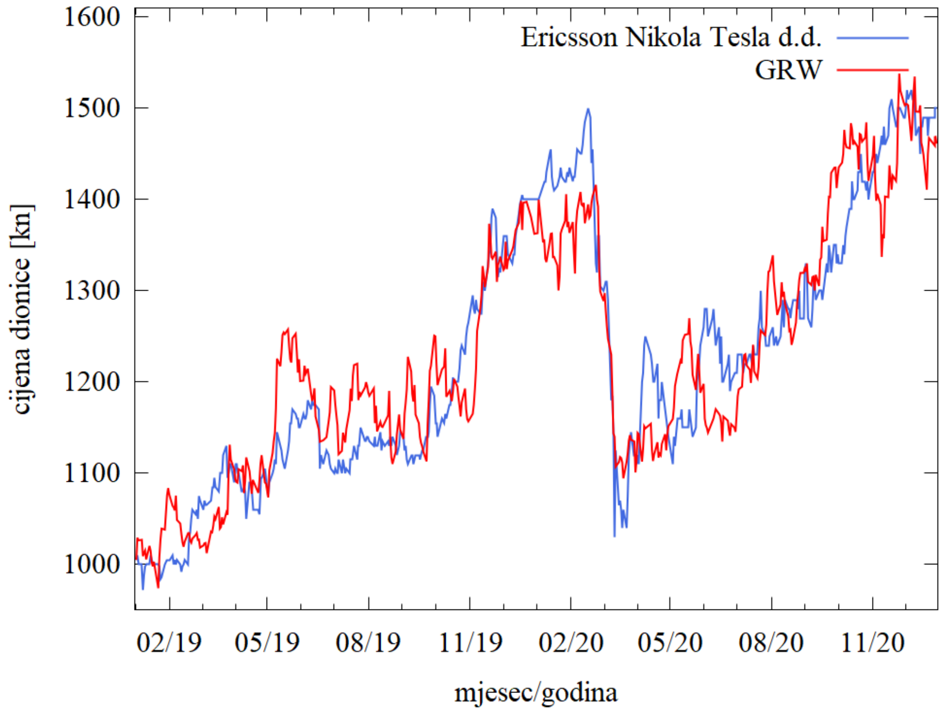
Na crtežu 6 prikazan je rezultat simulacije geometrijskog slučajnog hoda, usporedno s cijenama dionica prikazanima na crtežu 3. Podaci su dobiveni korištenjem koda u dodatku B. Lako je uočljivo da je Brownovo gibanje, odnosno slučajni hod doista dobar kandidat za opisivanje kretanja cijena na tržištu.



Crtež 4: Usporedba geometrijskog i aritmetičkog slučajnog hoda na skali od 100 dana s parametrima $\sigma = 300\%, \mu = 0{,}1$, te ulazom za funkciju *ran1* idum $= -2$. Korištene su različite početne cijene: (a) $S_0 = 0{,}1$ kn, (b) $S_0 = 0{,}5$ kn, (c) $S_0 = 5$ kn, (d) $S_0 = 50$ kn



Crtež 5: Tri rezultata simulacije geometrijskog slučajnog hoda na skali od jedne godine s parametrima $S_0 = 60$, $\sigma = 30\%$, $\mu = 0{,}1$ s različitim ulazima za funkciju *ran1*



Crtež 6: Usporedba cijena dionica tvrtke *Ericsson Nikola Tesla d.d.* i rezultata simulacije geometrijskog slučajnog hoda (GRW) s parametrima $S_0 = 1005$ kn, $\mu = 0{,}1$, $\sigma = 30\%$, idum $= -7621313$ na skali od dvije godine

Ukoliko se u izraz (3.8), koji predstavlja gustoću vjerojatnosti za slučajni hod u jednoj dimenziji, uvrsti $D = \sigma^2/2$, gustoća postaje normalna distribucija $\mathcal{N}(0, \sigma^2 t)$ [9]. Iz (3.9) i prvog aksioma Wiener-ovog procesa, slijedi da je ta gustoća ekvivalentna gustoći Wienerovog procesa, čime je pokazana veza između volatilnosti i difuzijskog Brownovog gibanja.

U GBM modelu, član s driftom vodi do eksponencijalnog rasta srednje vrijednosti sa stopom rasta μ. U slučaju kada nema procesa difuzije, diferencijalna jednadžba poprima oblik $\mathrm{d}S/S = \mu dt$, a njeno rješenje je

$$S = S_0 e^{\mu t}, \tag{3.14}$$

pri čemu je S_0 početna vrijednost od S.

3.4 Distribucija cijena dionica u trenutku dospijeća

Iako individualne realizacije mogu dati nekakvu ideju kako se cijene dionica ponašaju, važnija informacija je distribucija konačne cijene, S_T, preko svih mogućih realizacija. Oblik distribucije dobije se ponavljanjem većeg broja simulacija i potom prikazivanjem podataka u histogramu. Tako je na crtežu 7 prikazan histogram za 10^6 pokretanja algoritma za GRW s parametrima kao na crtežu 5 te različitim ulazom za funkciju *ran1* u svakom pokretanju, kako bi se svaki put dobilo različito kretanje cijena dionica. Uočljivo je da distribucija nije normalna, odnosno rep s desne strane duži je nego rep s lijeve strane. Ovo je posljedica tog što su cijene ograničene na ne-negativne vrijednosti. Pokaže se ([9], poglavlje 1.5.2, str. 13-16) da je logaritam od S_T normalno distribuiran i vrijedi

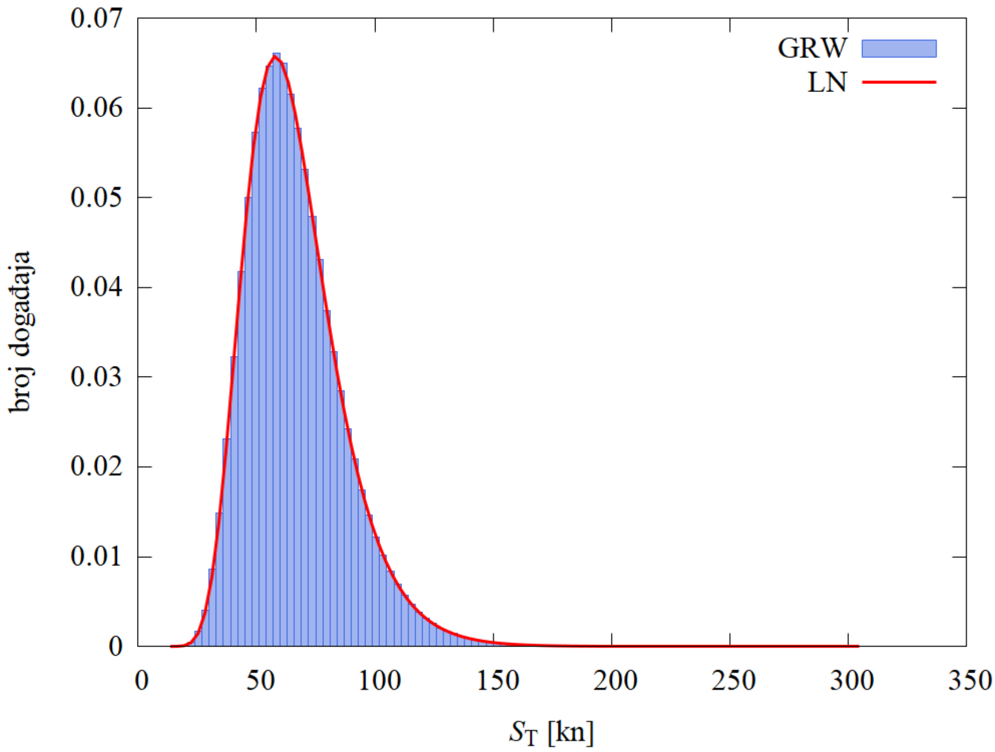
$$\ln S_T \sim \ln S_0 + \mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \sigma\sqrt{T}Z\,. \tag{3.15}$$

Ovakva se distribucija naziva log-normalna. Odatle slijedi:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\ln S_T) &= \ln S_0 + \mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \\ \mathrm{var}(\ln S_T) &= \sigma^2 T. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Znajući da je $\ln S_T$ normalno distribuiran, moguće je odrediti distribuciju od S_T. Ako je X normalno distribuirana vrijednost, $X \sim \mathcal{N}(\alpha, \beta^2)$, onda se log-normalno distribuirana vrijednost može zapisati kao $R = e^X$ (tako da je $\ln R = X$). Učestala oznaka je $R \sim \mathcal{Ln}(\alpha, \beta^2)$. Potom se odredi funkcija gustoće vjerojatnosti od R, $g(y)$ kao derivacija njene kumulativne distribucijske funkcije, te se dobije

$$g(y) = \frac{1}{y\beta\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln y - \alpha)^2}{2\beta^2}}\,. \tag{3.17}$$



Crtež 7: Distribucija S_T GRW-a s parametrima $S_0 = 60$, $\sigma = 30\%$, $\mu = 0{,}1$ i slučajnim vrijednostima ulaza idum za funkciju *ran1*. Crvena linija predstavlja fit funkcije gustoće vjerojatnosti log-normalne distribucije (3.17). Dobiveni parametri fit-a su: $\alpha = 4{,}14963$, $\beta = 0{,}300274$, te koeficijent normalizacije $A = 2{,}99953$

Korištenjem dobivene gustoće vjerojatnosti odrede se očekivana vrijednost $\mathbb{E}(R)$ i varijanca $\mathbb{E}(R^2) - \mathbb{E}(R)^2$. U dobivene se izraze uvrsti $R = S_T$ te se, uzevši u obzir da je $X \sim \mathcal{N}(\alpha, \beta^2)$, odnosno $\alpha = \mathbb{E}(\ln S_T), \beta^2 = \mathrm{var}(\ln S_T)$ dobije:

$$\begin{gathered} \alpha = \ln S_0 + \mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \\ \beta^2 = \sigma^2 T. \end{gathered} \tag{3.18}$$

U konačnici slijede parametri distribucije varijable S_T:

$$\begin{gathered} \mathbb{E}(S_T) = e^{\ln S_0 + \mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T + \frac{1}{2}\sigma^2 T} = S_0 e^{\mu T} \\ \mathrm{var}(S_T) = \left(e^{\sigma^2 T} - 1\right) e^{2\ln S_0 + 2\mu T - \sigma^2 T + \sigma^2 T} = S_0^2 \left(e^{\sigma^2 T} - 1\right) e^{2\mu T}. \end{gathered} \tag{3.19}$$

Dobiveni izraz za $\mathbb{E}(S_T)$ ekvivalentan je (3.14). Dakle, S_T je distribuirana kao $S_T \sim \mathcal{Ln}(\alpha, \beta^2)$ s α i β^2 zadanima prema (3.18).

4 Određivanje cijene opcije

Tehnika slučajnog hoda daje precizan alat za izračun ostvarenih cijena dionica i koristi se u mnogo prilika. Međutim, mora se izvršiti nekoliko tisuća realizacija kako bi se postigli dobri rezultati. Postoji nekoliko aproksimacijskih tehnika koje daju dobre, a brze rezultate.

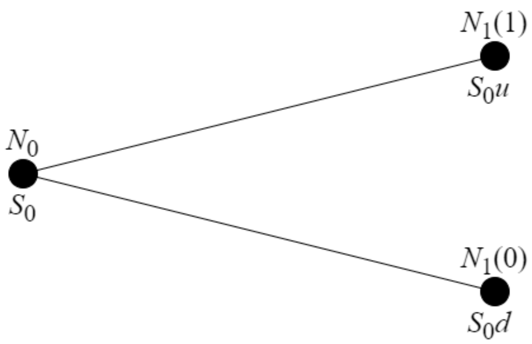
4.1 Model binomnog stabla

Binomni model sastoji se od rešetkaste strukture koja predstavlja cijene koje se razvijaju u vremenu. Deterministički je, jednostavno ga je konstruirati, te daje odgovore u gotovo svim slučajevima. Štoviše, kako se binomno stablo profinjuje, njegovi se rezultati poboljšavaju. U graničnom slučaju, cijene binomnog stabla slažu se s cijenama geometrijskog Brownovog gibanja (pokazano u [9], dodatak C).

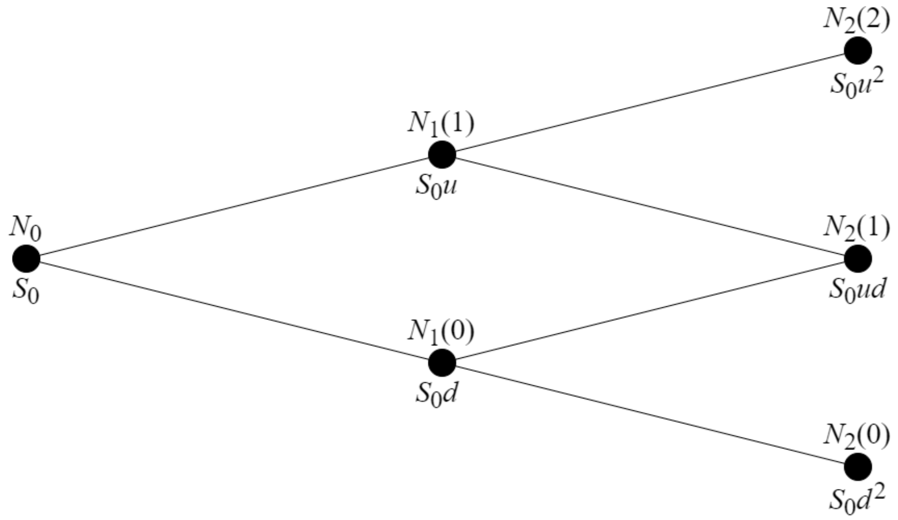
U binomnom modelu, vremenski interval $[0, T]$ podijeljen je u diskretne periode Δt. Broj takvih perioda je $n = T/\Delta t$. Potom se konstruira graf binomnog stabla s čvorovima u svakom trenutku $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, n\Delta t = T$. Na prvom, početnom nivou 0, vrijeme je 0, odnosno $0\Delta t$ te graf ima samo jedan čvor, N_0, s cijenom S_0. Model postulira da se odavde cijena može povećati za neki faktor, $u \geq 1$ (grana prema gore), ili smanjiti za neki faktor, $0 < d \leq 1$ (grana prema dolje). Stoga u trenutku $1\Delta t$ postoje dva čvora, kao što je prikazano na crtežu 8, označena kao $N_1(1)$ i $N_1(0)$, s cijenama $S_0 u$ za $N_1(1)$ i $S_0 d$ za $N_1(0)$. Indeks k čvora N_k predstavlja vrijeme $k = t/\Delta t$, a argumenti redni broj cijene u poretku od najniže (0) prema najvećoj (k).

Postupak se ponavlja u svakom čvoru te se cijene računaju u svakom sljedećem vremenskom periodu. Stoga u trenutku 2, kao što je prikazano na crtežu 9, postoje tri čvora $N_2(2)$, $N_2(1)$ i $N_2(0)$ s odgovarajućim cijenama:

$$N_2(2):\quad S_1(u)u = S_0 u^2,$$
$$N_2(1):\quad S_1(u)d = S_0 ud,$$
$$N_2(0):\quad S_1(d)d = S_0 d^2.$$



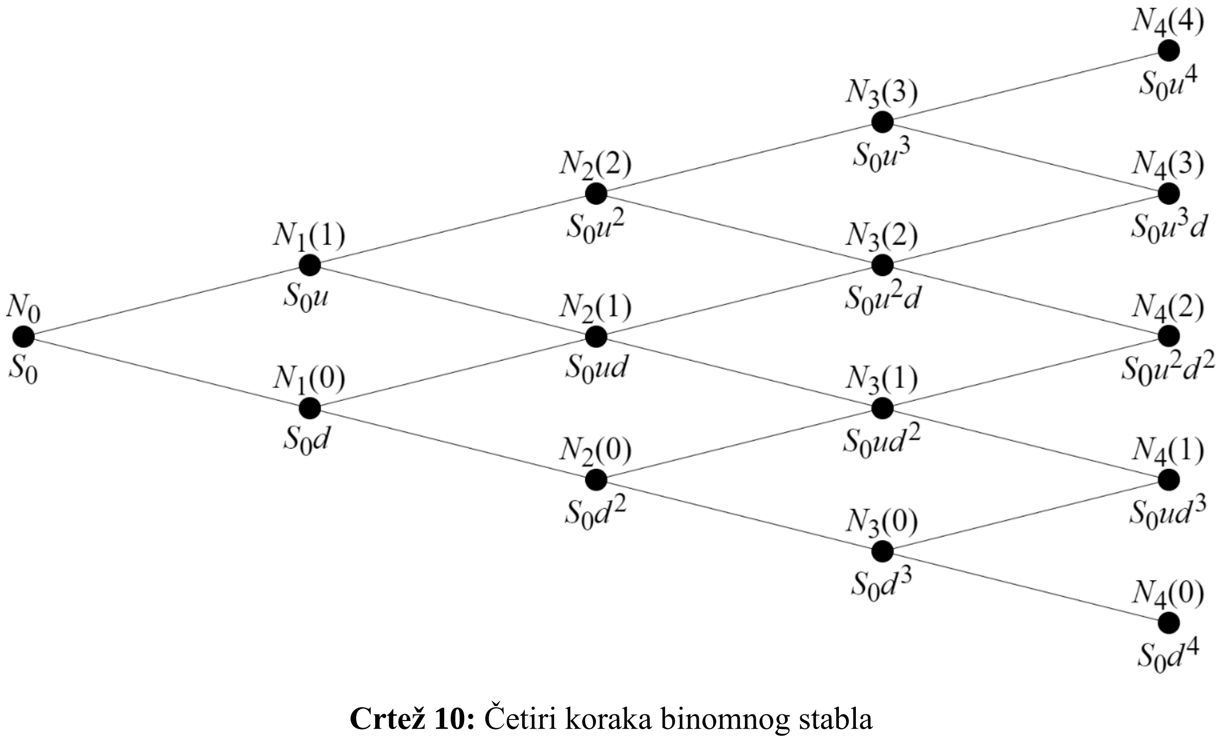
Crtež 8: Prvi korak binomnog stabla



Crtež 9: Dva koraka binomnog stabla

Primjetno je da gornja cijena od $N_1(0)$ iznosi $u(S_0d) = S_0ud$ i jednaka je donjoj cijeni od $N_1(1)$; drugim riječima graf se ponovno spaja tako da u trenutku 2 postoje samo tri čvora, a ne četiri. Kako se dodaje više perioda, stablo se širi aritmetički, ne geometrijski, kao na crtežu 10.

Pored faktora cijena u i d, postoji i vjerojatnost da će cijena ići gore i pripadna vjerojatnost da će cijena ići dolje. Stoga je za svaki čvor grafa vezana i vjerojatnost. Neka je q vjerojatnost porasta (koraka prema gore) i $1-q$ vjerojatnost pada (koraka prema dolje). Vjerojatnost dolaska u čvor $N_1(1)$ je q i dolaska u $N_1(0)$ je $1-q$. Na kraju drugog perioda,



Crtež 10: Četiri koraka binomnog stabla

čvor $N_2(2)$ događa se s vjerojatnošću q^2, $N_2(0)$ s vjerojatnošću $(1-q)^2$, a vjerojatnost za $N_2(1)$ je $2q(1-q)$ jer postoje dva moguća načina dolaska do $N_2(1)$. Općenito, na kraju k-tog perioda

$$N_k(i) \quad \text{događa se s vjerojatnošću } \binom{k}{i} q^i (1-q)^{k-i}. \tag{4.1}$$

U ovom modelu, faktori u i d kao i njihove vjerojatnosti q i $1-q$ konstantni su duž cijelog vremenskog intervala.

Konačne cijene i vjerojatnosti ovise izravno o u, d i q te ih je potrebno prikladno odrediti, ovisno o μ i σ. Očekivana vrijednost i varijanca od S_1 preko binomnog modela su:

$$\mathbb{E}(S_1) = quS_0 + (1-q)dS_0$$
$$\mathrm{var}(S_1) = q(uS_0)^2 + (1-q)(dS_0)^2 - \mathbb{E}^2(S_1) = S_0^2\left(qu^2 + (1-q)d^2 - e^{2\mu\Delta t}\right).$$

S druge strane, iz (3.19) slijedi:

$$\mathbb{E}(S_1) = S_0 e^{\mu\Delta t}$$
$$\mathrm{var}(S_1) = S_0^2\left(e^{\sigma^2\Delta t} - 1\right)e^{2\mu\Delta t}.$$

Izjednačavanjem prethodnih izraza dobije se:

$$\begin{aligned} qu + (1-q)d &= e^{\mu\Delta t} \\ qu^2 + (1-q)d^2 &= e^{(2\mu+\sigma^2)\Delta t}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Zadovoljavanje ovih dviju jednadžbi za tri parametra u, d i q odgovarat će statističkim karakteristikama dvaju pristupa. Stoga se može napraviti proizvoljni odabir za treću jednadžbu. Uobičajeni odabir je ili $u = 1/d$ ili $q = 1/2$. Promotrimo oba slučaja:

Slučaj $u = 1/d$

Neka vrijedi $u = 1/d$. Izražavanjem q preko ostalih parametara u izrazima (4.2) te izjednačavanjem dobivenih izraza dobije se

$$d^2 - \left(e^{-\mu\Delta t} + e^{(\mu+\sigma^2)\Delta t}\right)d + 1 = 0.$$

Uvođenjem pokrate

$$2A = e^{-\mu\Delta t} + e^{(\mu+\sigma^2)\Delta t} \tag{4.3}$$

i rješavanjem kvadratne jednadžbe $d^2 - 2Ad + 1 = 0$, dobije se:

$$\begin{aligned} d &= A - \sqrt{A^2-1} \\ u &= A + \sqrt{A^2-1} \\ q &= \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Ukoliko se ispostavi ili $q \leq 0$ ili $q \geq 1$, onda se ova metoda ne može upotrijebiti te je potrebno pokušati s metodom $q = 1/2$.

Slučaj $q = 1/2$

Neka je $q = 1/2$. Iz (4.2) slijedi

$$u + d = 2e^{\mu\Delta t}$$

$$u^2 + d^2 = 2e^{(2\mu+\sigma^2)\Delta t}.$$

Kombiniranjem gornjih izraza i rješavanjem kvadratne jednadžbe za d, dobije se:

$$\begin{aligned} d &= e^{\mu\Delta t}\left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right) \\ u &= e^{\mu\Delta t}\left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2\Delta t} - 1}\right) \\ q &= \frac{1}{2}. \end{aligned} \tag{4.5}$$

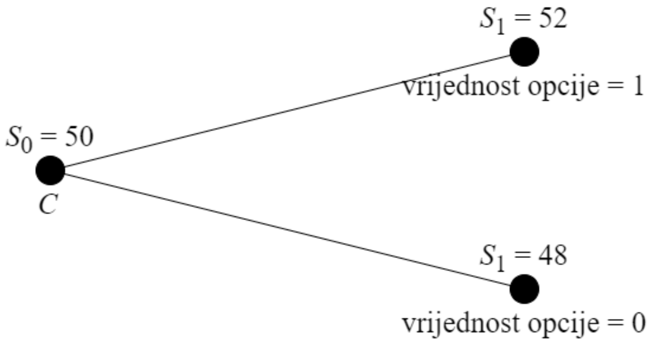
U primjeni ovog rješenja, d mora ostati pozitivna vrijednost.

Osim pružanja konačnih vjerojatnosti, stablo se može koristiti i za račun vjerojatnosti da je odabran specifični put kroz stablo. Takva vjerojatnost jednostavno se dobije kao umnožak vjerojatnosti duž svake etape puta. Za svaki pomak prema gore, množi se s q, a za svaki prema dolje s $1 - q$. Na primjer, na crtežu 10, put od čvora N_0 do čvora $N_4(2)$ preko čvorova $N_1(1)$, $N_2(1)$ i $N_3(2)$ ima vjerojatnost $q^2(1-q)^2$. To se također odražava i na konačnu cijenu u tom čvoru, $S_0u^2d^2$. Na ovaj način, binomno stablo može se koristiti za izračun financijskih instrumenata koji ovise o odabranom putu kao što su američke opcije.

4.2 Primjena binomnog stabla za određivanje cijene opcije

4.2.1 Binomno stablo s jednim korakom

Najjednostavniji slučaj je binomno stablo s jednim vremenskim korakom, kao na crtežu 11. Neka je trenutno, $t = 0$, cijena dionice $S_0 = 50$ kn. U trenutku dospijeća, $t = 1$, cijena dionice može ili narasti na 52 kn ili pasti na 48 kn. Posrednik želi prodati call opciju s cijenom izvršenja 51 kn. Odnosno, posrednik je stranka koja garantira ugovor te, ako se od nje zatraži, prodaje imovinu po cijeni izvršenja u trenutku dospijeća [9].



Crtež 11: Cijene dionica (gornja vrijednost) i vrijednosti call opcije (donja vrijednost) u kunama za binomno stablo od jednog koraka

Obzirom da postoji mogućnost da će posrednik trebati prodati dionice u trenutku dospijeća, on kupuje dio, Δ, dionica danas kako bi ih kasnije lakše prodao. Mogući način određivanja cijene opcije je konstruiranje bezrizičnog portfelja. Portfelj posrednika sastoji se od call opcije, čiju se vrijednost C treba odrediti, i Δ udjela referentnih dionica. Vrijednost takvog portfelja jednaka je cijeni dionica, odnosno $S_0 \cdot \Delta$, umanjenoj za vrijednost opcije, odnosno cijenu takvog ugovora. Stoga je u ovom slučaju vrijednost portfelja

$$S_0\Delta - C = 50 \text{ kn} \cdot \Delta - C.$$

U trenutku dospijeća, ukoliko je cijena dionice narasla, odnosno iznosi 52 kn, vrijednost call opcije je $C = \max(S_T - K, 0) = \max(52 \text{ kn} - 51 \text{ kn}, 0) = 1 \text{ kn}$, sukladno (2.4), pa vrijednost portfelja postaje

$$52 \text{ kn} \cdot \Delta - 1 \text{ kn}.$$

Ukoliko je cijena pala, vrijednost call opcije je $C = \max(49 \text{ kn} - 51 \text{ kn}, 0) = 0 \text{ kn}$, pa je vrijednost portfelja

$$48 \text{ kn} \cdot \Delta.$$

Izjednačavanjem ovih dviju vrijednosti, i na taj način određivanjem Δ, može se otkloniti neodređenost položaja posrednika, tj.

$$52 \text{ kn} \cdot \Delta - 1 \text{ kn} = 48 \text{ kn} \cdot \Delta \quad \Longrightarrow \quad \Delta = 1/4.$$

Slijedi da je vrijednost portfelja u trenutku dospijeća 12 kn, neovisno o tome je li cijena dionice narasla ili pala. Ova se vrijednost portfelja diskontira kako bi se dobila vrijednost portfelja u trenutku $t = 0$, što prema (2.2) iznosi

$$50 \text{ kn} \cdot \Delta - C = 12 \text{ kn} \cdot e^{-r_f},$$

a za $\Delta = 1/4$ opcija poprima vrijednost

$$C = 12{,}50 \text{ kn} - 12 \text{ kn} \cdot e^{-r_f}. \tag{4.6}$$

U prethodnom izvodu vjerojatnost nije imala nikakvu ulogu. Neka je stoga q statistička vjerojatnost za pomak prema gore generirana iz nedavnih cijena dionica. Intuitivno je pomisliti da ako je vjerojatnost za pomak prema gore velika, opcija bi trebala koštati više. Međutim, cijene call opcije različite od (4.6) rezultiraju mogućnošću arbitraže. Arbitraža se ne može održati jako dugo te će se cijene brzo prilagoditi tako da ju eliminiraju. Umjesto toga, velika vjerojatnost pomicanja prema gore rezultira visokim očekivanjima dobitka za vlasnika opcije. No, postoji vjerojatnost za koju je očekivanje jednako nuli.

Ako je q vjerojatnost pomicanja cijene prema gore, tada vlasnik opcije zarađuje 1 kn s vjerojatnošću q ili 0 kn s vjerojatnošću $1 - q$. Očekivanje zarade je stoga $q \cdot 1$ kn. Kupac plaća

$12{,}50\text{ kn} - 12\text{ kn} \cdot e^{-r_f}$ u trenutku 0, ili, ekvivalentno tome, $12{,}50\text{ kn} \cdot e^{r_f} - 12\text{ kn}$ u trenutku 1 (kada dođe do isplate). Vjerojatnost pokrića (eng. *break-even probability*) je dakle

$$q \cdot 1\text{ kn} = 12{,}50\text{ kn} \cdot e^{r_f} - 12\text{ kn},$$

odnosno

$$q = 12{,}50 \cdot e^{r_f} - 12 \tag{4.7}$$

i naziva se **vjerojatnost neutralna na rizik** [9]. Da je bezrizična stopa jednaka 0, vjerojatnost neutralna na rizik bila bi $q = 1/2$. Kada bi vjerojatnost neutralna na rizik koraka prema gore bila stvarna vjerojatnost koraka prema gore, onda bi kupac opcije imao isto očekivanje zarade kao da je izvršio ulaganje s bezrizičnom stopom.

Još jedna karakteristika vjerojatnosti neutralne na rizik je da čini isplatu poštenom u smislu očekivanja za obje stranke u ugovoru opcije. Drugim riječima, očekivana diskontirana promjena vrijednosti portfelja od $t = 0$ do $t = T$ je 0

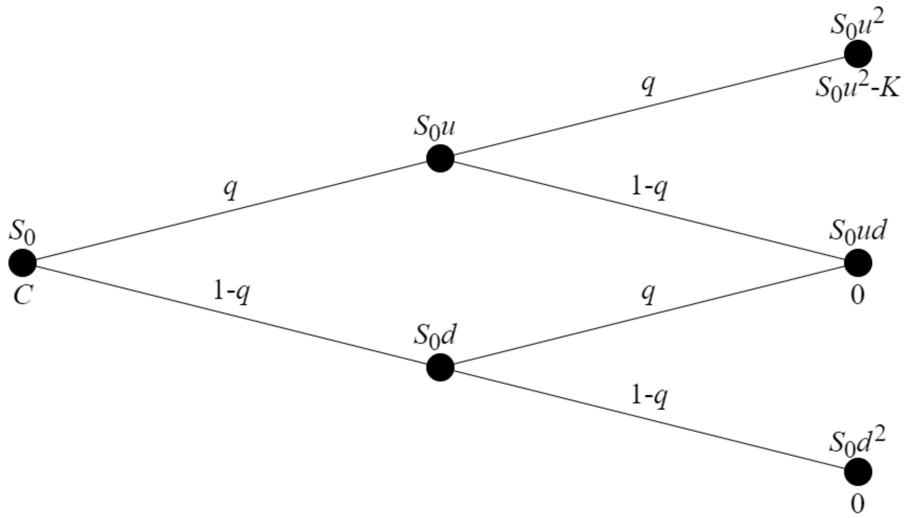
$$\mathbb{E}_q(\text{diskontirana promjena u vrijednosti portfelja}) = 0. \tag{4.8}$$

Očekivanje je izračunato s obzirom na q.

Vjerojatnost koja ima svojstvo da je očekivana buduća vrijednost slučajne varijable jednaka njenog trenutnoj vrijednosti naziva se **martingal**. Martingal pruža još jedan način određivanja cijene opcije. To je jedno od najvažnijih načela u određivanju cijena imovine koja svoju vrijednost crpi iz vrijednosti druge, temeljne, vrijednosnice. Radi se o **rizik-neutralnom načelu određivanja vrijednosti opcije** koje tvrdi: „*Cijena opcije jednaka je diskontiranom očekivanju isplate opcije, pri čemu je očekivanje izračunato s obzirom na vjerojatnost neutralnu na rizik*.“ Pritom je definicija za vjerojatnost neutralnu na rizik: „*Vjerojatnost neutralna na rizik je vjerojatnost za koju se očekivani rast referentne vrijednosnice odvija po bezrizičnoj stopi*.“ [9].

4.2.2 Binomno stablo od dva koraka

Sljedeće proširenje binomnog stabla je na stablo s dva koraka. Neka je početna cijena S_0. Tijekom prvog vremenskog perioda Δt, cijena može porasti na $S_0 u$ ili se spustiti na $S_0 d$. U drugom vremenskom periodu događa se ista stvar, te su stoga cijene u trenutku $t = 2\Delta t$ sljedeće: $S_0 u^2$, $S_0 ud$, i $S_0 d^2$, a vjerojatnosti su redom q^2, $2q(1-q)$, i $(1-q)^2$, kao na crtežu 12. Neka cijena izvršenja K leži između $S_0 ud < K < S_o u^2$. Stoga su vrijednosti isplate u trenutku dospijeća, sukladno funkciji isplate (2.4), jednake 0 osim u najgornjem čvoru u kojem je vrijednost isplate $S_0 u^2 - K$. Neka je cijena call opcije ponovno označena s C.



Crtež 12: Cijene dionica i vrijednosti call opcije za binomno stablo od dva koraka

Vjerojatnost neutralna na rizik odredi se izjednačavanjem očekivanih vrijednosti, kao što je pokazano za dolazak do izraza (4.2). Međutim, u ovom slučaju je potrebno uračunati i rast s bezrizičnom stopom te stoga vrijedi:

$$qu + (1-q)d = e^{-r_f \Delta t},$$

odakle slijedi:

$$q = \frac{e^{-r_f \Delta t} - d}{u - d}. \tag{4.9}$$

Poznavajući q, u trenutku dospijeća očekivana vrijednost call opcije je

$$(S_0u^2 - K) \cdot q^2 + 0 \cdot 2q(1-q) + 0 \cdot (1-q)^2 = (S_0u^2 - K) \cdot q^2,$$

te stoga iz rizik-neutralnog načela određivanja vrijednosti opcija slijedi da je cijena call opcije jednaka ovom iznosu diskontiranom na $t = 0$, odnosno

$$C = (S_0u^2 - K)q^2 e^{-2r_f \Delta t} = (S_0u^2 - K)\left(\frac{e^{-r_f \Delta t} - d}{u - d}\right)^2 e^{-2r_f \Delta t}. \tag{4.10}$$

4.2.3 Binomno stablo s n koraka

Neka sada binomno stablo ima n vremenskih koraka, tako da $t = n$ predstavlja dospijeće. U bilo kojem trenutku $t = k, 0 \leq k \leq n$, postoji $k + 1$ čvorova $N_k(i)$ za $0 \leq i \leq k$. Cijena dionice u čvoru $N_k(i)$ jednaka je

$$S_k(i) = S_0 u^i d^{k-i}, \tag{4.11}$$

dok je vjerojatnost dolaska do čvora $N_k(i)$ dana s (4.1), odnosno

$$\binom{k}{i} q^i (1-q)^{k-i}.$$

Postoje dva načina za određivanje vrijednosti opcije: rizik-neutralno određivanje vrijednosti opcije, te određivanje vrijednosti opcije korak po korak. 1. način je direktniji i računski jednostavniji, međutim pristup korak po korak ima prednost što se može koristiti za određivanje cijene drugih opcija, na primjer onih koje ovise o odabranom putu kao što su američke opcije.

Rizik-neutralno određivanje cijene

Neka cijena izvršenja call opcije leži između čvorova $N_n(m-1)$ i $N_n(m)$

$$S_0 u^{m-1} d^{n-m+1} \leq K \leq S_0 u^m d^{n-m}.$$

S obzirom da je u čvorovima $i < m$ vrijednost opcije jednaka 0, sukladno (2.4), isplata call opcije je suma preko čvorova $i \geq m$ umnožaka isplata $S_0 u^i d^{n-1} - K$ i vjerojatnosti dolaska do čvora $N_n(i)$

$$\binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \left(S_0 u^i d^{n-i} - K\right).$$

Cijena europske call opcije je ova suma diskontirana n vremenskih koraka do $t = 0$

$$C = e^{-r_f n \Delta t} \sum_{i=m}^{n} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \left(S_0 u^i d^{n-i} - K\right). \tag{4.12}$$

Na sličan se način dođe do cijene put opcija. Jedina je razlika u funkciji isplate te indeksima sumacije (put opcija ima vrijednost različitu od 0 za čvorove $i < m$). Dobije se da je cijena europske put opcije

$$P = e^{-r_f n \Delta t} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \left(K - S_0 u^i d^{n-i}\right). \tag{4.13}$$

Određivanje cijene korak po korak

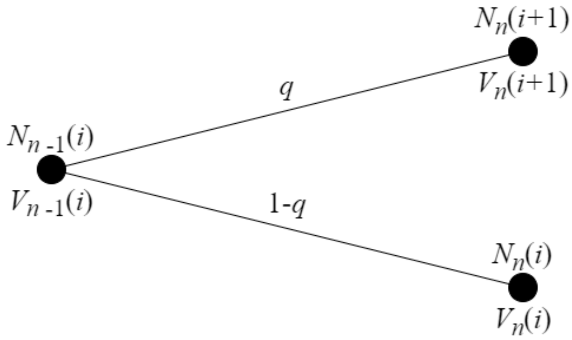
Neka su cijene u trenutku izvršenja $t = n$ zadane s (4.11). Za sve čvorove u trenutku izvršenja izračuna se vrijednost opcije koja je za $t = n$ jednaka isplati odnosno:

$V_n(i) = \max(S_n(i) - K, 0)$ za call opcije ili $V_n(i) = \max(K - S_n(i), 0)$ za put opcije.

Potom se za svaki par pridruženih čvorova $N_n(i)$ i $N_n(i+1)$, naznačenih na crtežu 13, računa vrijednost opcije u čvoru $N_{n-1}(i)$. Za njen izračun koristi se rizik-neutralno načelo. Potrebno je uračunati i vjerojatnosti q i $(1-q)$ te diskontirati vrijednost za $1\Delta t$. Stoga je vrijednost opcije u čvoru $N_{n-1}(i)$ dana kao

$$V_{n-1}(i) = e^{-r_f \Delta t} [q V_n(i+1) + (1-q) V_n(i)]. \tag{4.14}$$

Nakon što se na ovaj način izračunaju sve vrijednosti opcija u $t = n - 1$, postupak se ponavlja za čvorove u $t = n - 2$. Ovi koraci se ponavljaju dok se ne dođe do vrijednosti opcije u N_0.



Crtež 13: Oznake u određivanju cijene korak po korak

Kao što je već rečeno, pristup korak po korak može se koristiti za određivanje cijene američkih opcija. Za američke opcije nije moguće koristiti rizik-neutralno određivanje cijene. O tome će se više diskutirati u poglavlju 6. Primjena modela binomnog stabla za izračun cijene europske opcije prikazana je na primjeru u potpoglavlju 7.1.2 te u kodu u dodatku C.2.

Metoda određivanja cijene korištenjem binomnog stabla obično je dovoljno točna ukoliko se koristi dovoljna podjela vremenskog raspona. Međutim, ima svojih nedostataka. Konačne cijene dionica su diskretne i samo su aproksimacija kontinuirane prirode stvarnih cijena. Također, distribucija konačnih cijena je binomna, što je samo aproksimacija log-normalne distribucije stvarnih cijena. No, možda je najveća mana metode to što ne pruža jednostavnu formulu za račun cijene dionice, već samo rekurzivni postupak.

4.3 Black-Scholes formula

Znajući da je u GBM modelu buduća cijena dionice distribuirana log-normalno, trebalo bi biti moguće iskoristiti to znanje u svrhu određivanja cijena opcija. Ukoliko je $g(y)$ gustoća raspodjele log-normalne distribucije konačne cijene, zadana s (3.17), a $G(y)$ funkcija isplate s obzirom na tu gustoću (za call opcije $G(S) = \max(S - K, 0)$, a za put opcije $G(S) = \max(K - S, 0)$), očekivanje isplate je integral

$$\mathbb{E}(\text{isplata}) = \int_0^\infty G(y)g(y)\mathrm{d}y. \tag{4.15}$$

Parcijalnom integracijom te uvođenjem pokrata (detaljno u [9], poglavlje 3.6.1), dobije se da je za europsku call opciju očekivanje isplate

$$\mathbb{E}(\text{isplata}) = S_0 e^{r_f T}\Phi(d_1) - K\Phi(d_2).$$

Pritom je $\Phi(d)$ kumulativna distribucijska funkcija standardne normalne distribucije dana s

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x \tag{4.16}$$

i predstavlja vjerojatnost da je varijabla x, koja je uzorak standardne normalne distribucije, manja od vrijednosti d. Varijable d_1 i d_2 predstavljaju sljedeće pokrate:

$$d_{1,2} = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_f \pm \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \tag{4.17}$$

Diskontiranjem očekivanja vrijednosti isplate na $t = 0$ dobije se Black-Scholes formula za cijenu europske call opcije

$$C = S_0\Phi(d_1) - Ke^{-r_f T}\Phi(d_2). \tag{4.18}$$

Na sličan se način, korištenjem prikladne funkcije isplate, dobije formula za cijenu europske put opcije

$$P = -S_0\Phi(-d_1) + Ke^{-r_f T}\Phi(-d_2). \tag{4.19}$$

Primjena ovog načina izračuna cijene opcije prikazana je na primjeru u potpoglavlju 7.1.1 te u kodu u dodatku C.3.

Pri detaljnom izvodu Black-Scholes formule može se uočiti da je vjerojatnost da call opcija završi u novcu jednaka

$$\Pr(\text{call završava u novcu}) = \Phi(d_2), \tag{4.20}$$

te slično za put opciju

$$\Pr(\text{put završava u novcu}) = \Phi(-d_2). \tag{4.21}$$

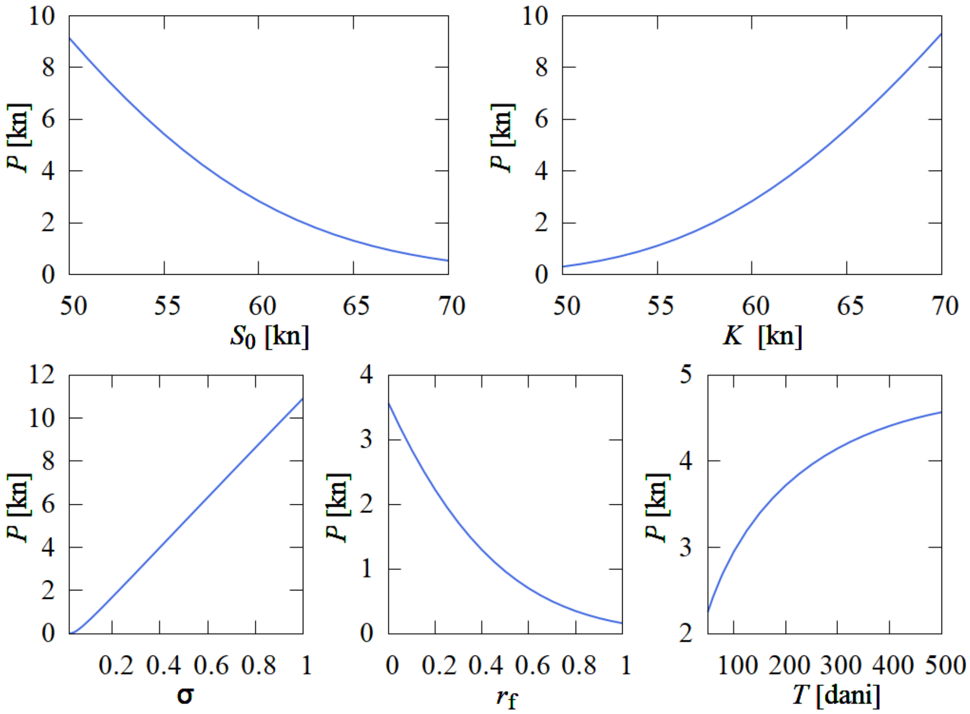
Na crtežu 14 prikazana je ovisnost cijene europske put opcije dobivene korištenjem Black-Scholes formule (4.19) o ulaznim parametrima. Za prikaz ovisnosti o parametru, jedan je parametar variran dok su ostali fiksirani. Uočljivo je da porastom početne cijene dionice S_0, cijena opcije pada. Naime, pri nižim vrijednostima S_0, drugi član formule, $Ke^{-r_f T}\Phi(-d_2)$, poprima veće vrijednosti od prvog, $S_0\Phi(-d_1)$, dok se porastom S_0 njihova razlika smanjuje, čime se smanjuje i cijena opcije. Pri promjeni cijene izvršenja K događa se „zrcalna“ situacija od ovisnosti o S_0. Pri nižim vrijednostima K, dva člana imaju slične vrijednosti, pa je cijena opcije mala, dok porastom K drugi član poprima veće vrijednosti te cijena raste.

Na crtežu 15 prikazana je ovisnost dijelova formule (4.19) o parametru σ koji se pojavljuje i u brojniku i u nazivniku izraza za $d_{1,2}$. Može se uočiti da za niske vrijednosti parametra, d_1 i d_2 naglo padaju te poprimaju slične vrijednosti, dok porastom parametra, vrijednosti varijable d_1 u nekom trenutku ponovno počinju rasti, dok vrijednosti varijable d_2 kontinuirano padaju te poprimaju negativne vrijednosti. Posljedično, porastom parametra σ, vrijednosti CDF rastu i to na način da za d_2 vrijednost kontinuirano raste, dok za d_1 u nekom trenutku vrijednost počinje padati. Obzirom da su S_0, K, r_f i T, konstante, oblici pribrojnika u

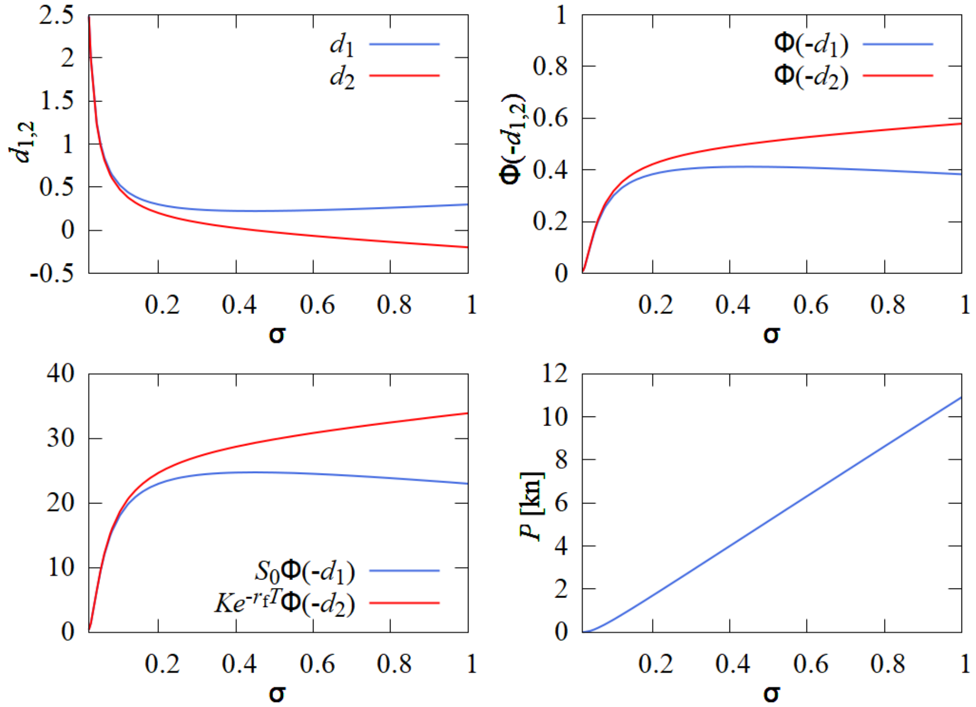
Black-Scholes formuli (4.19) proporcionalni su CDF te stoga podjednako ovise o parametru σ. Zbrajanjem doprinosa dvaju pribrojnika dobije se linearna ovisnost cijene opcije o parametru, osim za vrijednosti $\sigma < 0.05$ za koje krivulja poprima naizgled parabolični oblik.

Ovisnost cijene opcije o parametru r_f slična je ovisnosti o S_0. Konačno, pri nižim vrijednostima parametra T, dva pribrojnika u Black-Scholes formuli poprimaju približno jednake vrijednosti. Povećanjem parametra, vrijednosti oba pribrojnika se smanjuju, no vrijednosti drugog pribrojnika smanjuju se sporije od vrijednosti prvog. Stoga povećanjem parametra nastaje sve veća razlika između dvaju pribrojnika, čime se povećava i cijena opcije.

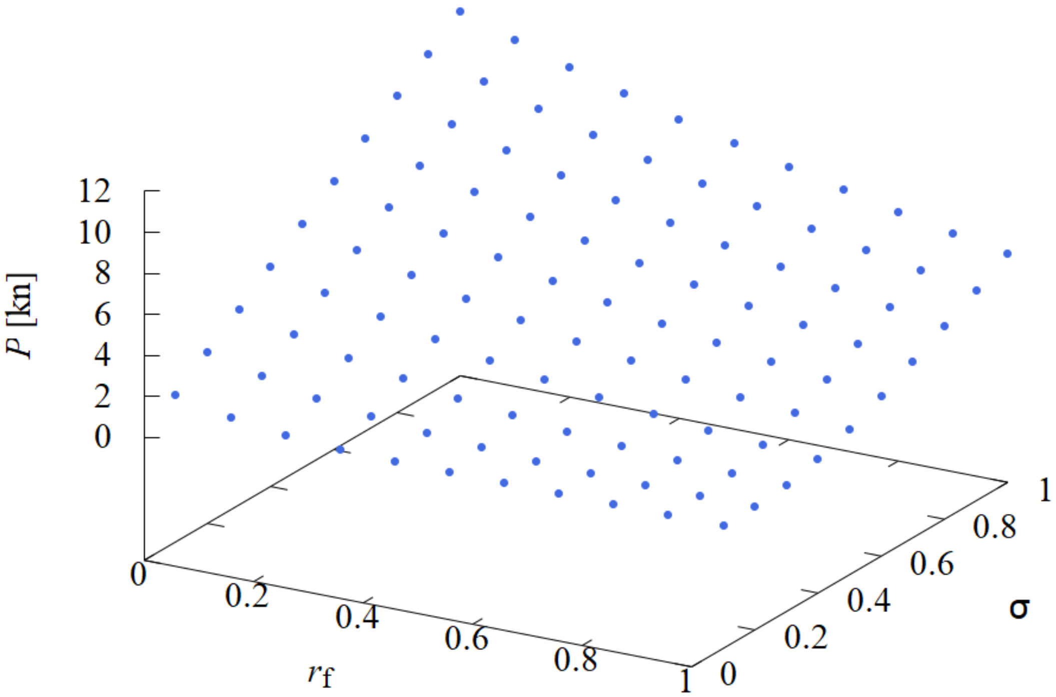
Na crtežu 16 prikazana je ovisnost cijene europske put opcije dobivene Black-Scholes formulom o simultanoj promjeni parametara r_f i σ kako bi se promotrilo postoji li lokalni ekstrem. Međutim, doprinos parametra σ prevladava te je ovisnost cijene opcije monotona i u ovom slučaju postiže maksimum za $\sigma = 1$ i $r_f = 0$.



Crtež 14: Ovisnost cijene europske put opcije dobivene Black-Scholes formulom (4.19) o parametrima S_0, K, σ, r_f i T. Pri prikazivanju ovisnosti, jedan se parametar varira dok se ostali drže konstantnima pri vrijednostima $S_0 = 60$ kn, $K = 60$ kn, $\sigma = 0.3, r_f = 0.1, T = 90$ dana



Crtež 15: Ovisnost dijelova Black-Scholes formule za cijenu europske put opcije (4.19) o parametru σ. Pritom su preostali parametri $S_0 = 60$ kn, $K = 60$ kn, $r_f = 0.1, T = 90$ dana



Crtež 16: Ovisnost cijene europske put opcije dobivene Black-Scholes formulom (4.19) o simultanoj promjeni parametara σ i r_f. Pritom su preostali parametri konstantni s vrijednostima $S_0 = 60$ kn, $K = 60$ kn, $T = 90$ dana

5 Monte Carlo metode za europske opcije

Analitička rješenja, odnosno Black-Scholes formule, prikazane u prošlom potpoglavlju lako se koriste te se stoga koriste najčešće, ponekad pri uvjetima na rubu njihove primjenjivosti. Na primjer, jedna od pretpostavki Black-Scholes modela je da su volatilnost i bezrizična stopa konstantne. Suprotno tome, Monte Carlo (MC) je uvijek primjenjiv, bez obzira na to što u nekim slučajevima njegovo rješenje zahtijeva određenu dozu opreza. Jedan od tih slučajeva događa se kada je potrebno znanje o budućnosti kako bi se u sadašnjem trenutku donijela odluka, kao u slučaju američkih opcija. No, većina ne-europskih opcija su samo ovisne o putu, ne zahtijevajući napredno znanje, i mogu se jednostavno razriješiti.

Ako cijena opcije nije ovisna o putu, onda je dovoljno samo odraditi simulaciju konačne cijene S_T, odrediti vrijednost opcije za tu cijenu i potom diskontirati vrijednost opcije do trenutka $t = 0$. Cijena opcije je prosječna vrijednost tako dobivenih cijena usrednjena po dovoljno velikom broju uzoraka, odnosno šetača. Za ovakav izračun postoje tri načina: numeričko integriranje, binomno stablo, te simulacija geometrijskog slučajnog hoda. Metode se razlikuju po načinu odabira konačne cijene dionice S_T.

5.1 Numeričko integriranje

Prema rizik-neutralnom načelu, cijena opcije jednaka je diskontiranom očekivanju isplate opcije. U kontinuiranom slučaju, očekivanje isplate je integral isplate opcije u trenutku dospijeća, $G(y)$, integrirane u odnosu na gustoću vjerojatnosti u trenutku dospijeća, kao u (4.15). No, prema zakonu velikih brojeva, očekivanje može biti aproksimirano empirijski. Ako su $X_1, X_2, \ldots X_n$ ishodi n događaja, onda je aproksimacija očekivanja funkcije $G(X)$

$$\mathbb{E}\big(G(X)\big) \approx \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} G(X_i). \tag{5.1}$$

Izraz teži u točnu vrijednost kako $n \to \infty$ [9].

U slučaju određivanja cijene opcije, ulogu ishoda preuzimaju cijene dionica u trenutku dospijeća, S_T. Kao što je pokazano u potpoglavlju 3.4, cijene S_T distribuirane su kao $S_T \sim \mathcal{Ln}(\alpha, \beta^2)$ s α i β^2 zadanima s (3.18):

$$\alpha = \ln S_0 + \mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \qquad\qquad \beta^2 = \sigma^2 T.$$

Pritom se za μ uzima bezrizična stopa r_f, a σ je volatilnost. Stoga se log-normalni uzorci mogu dobivati uzorkovanjem $X \sim \mathcal{N}(\alpha, \beta^2)$, odnosno $X = \alpha + \beta Z,\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, te potom izračunom $Y = e^X$, ili jednostavnije

$$Y = e^{\alpha + \beta Z}. \tag{5.2}$$

Za call opciju s cijenom izvršenja K, funkcija isplate je $G(Y) = \max(Y - K, 0)$, a za put opciju je $G(Y) = \max(K - Y, 0)$. Primjena ovog način izračuna prikazana je na primjeru u potpoglavlju 7.1.3 te u kodu u dodatku C.5.

5.2 Binomno stablo

Rizik-neutralno načelo određivanja cijene može biti implementirano korištenjem Monte Carlo simulacije na način da se simuliraju putanje kroz binomno stablo. U modelu binomnog stabla, korištena je pretpostavka da su volatilnost i bezrizična stopa konstantne. No ako nisu, nisu konstantni ni parametri u, d i q. U tom slučaju, čvorovi stabla se ne spajaju pa broj čvorova raste eksponencijalno s brojem koraka te metoda postaje neodrživa u nekom trenutku. No, Monte Carlo metoda može dopuštati da parametri u, d i q ovise o čvoru, bez pretjeranog produljenja vremena izračuna.

Počevši iz početnog čvora s $S = S_0$ simulira se putanja kroz stablo odabirom smjera gore ili dolje u svakom sljedećem čvoru ovisno o vjerojatnosti q. Mogu se i računati parametri u, d i q u slučaju da postoji njihova ovisnost o čvoru. Pri dolasku do kraja stabla, S predstavlja cijenu vrijednosnice u trenutku dospijeća za tu putanju. Tada je moguće izračunati isplatu opcije korištenjem (2.3) ili (2.4), ovisno o vrsti opcije. Ovaj izračun se ponavlja N puta, te se isplate akumuliraju. Potom se procijeni očekivana isplata dijeljenjem akumulirane vrijednosti s N te se cijena opcije diskontira na vrijeme 0. Primjena ovog načina izračuna prikazana je na primjeru u potpoglavlju 7.1.4 te u kodu u dodatku C.6.

5.3 Simulacija GRW

Još jedan mogući način generiranja konačne cijene S_T je korištenjem geometrijskog slučajnog hoda. Polazeći od cijene S_0, generira se GRW duž vremenskog perioda, pomoću (3.13), kako bi se izračunala instanca S_T. Također se mora pretpostaviti da je drift ekvivalentan bezrizičnoj stopi. Primjenjuje se funkcija isplate na S_T kako bi se izračunala isplata za tu instancu. Očekivana isplata je srednja vrijednost N takvih instanci, a cijena opcije je očekivana isplata diskontirana do sadašnjeg trenutka. Funkcije isplate ponovno su dane s (2.3) ili (2.4), ovisno o vrsti opcije. Primjena ovog načina izračuna prikazana je na primjeru u potpoglavlju 7.1.5 te u kodu u dodatku C.7.

6 Metode za američke opcije

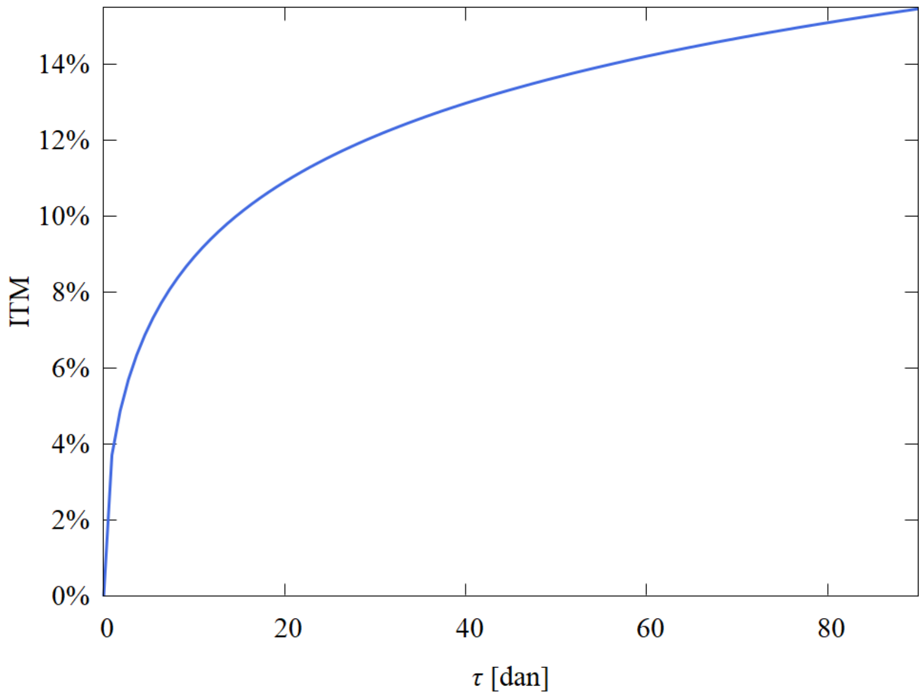
Kao što je već rečeno, američke opcije razlikuju se od europskih po tome što imaju mogućnost izvršenja u bilo kojem trenutku do dana dospijeća, uključujući i taj dan. Intuitivno je da su stoga američke opcije skuplje od europskih, te da je njihovu cijenu teže odrediti. Potrebno je dodati da su cijene američke call opcije i europske call opcije jednake ako imaju isti datum dospijeća i istu cijenu izvršenja [3].

Pri određivanju cijene američke opcije potrebno je uzeti u obzir mogućnost ranijeg iskorištavanja opcije. U svim metodama koje su spomenute do sada (osim metode korak po korak u modelu binomnog stabla), ne postoji način prilagodbe metode za američku opciju. Naime, rizik-neutralno određivanje cijene u modelu binomnog stabla koristi samo cijene opcija u trenutku dospijeća. Isto tako, sve tri Monte Carlo metode koriste cijene u trenutku dospijeća za određivanje cijene opcije. Ne može se primijeniti ni Black-Scholes formula jer izvod formule polazi od ideje da su cijene u trenutku dospijeća distribuirane log-normalno, tj. nije moguće implementirati rano iskorištavanje opcije.

Dakle, od dosada spomenutih metoda preostaje jedino račun korak po korak. Pritom je potrebno napraviti jednostavnu modifikaciju; vrijednost opcije u svakom čvoru treba se usporediti s vrijednošću isplate u slučaju da se opcija iskoristi u datom trenutku. Ukoliko je vrijednost isplate u danom trenutku veća od vrijednosti same opcije, tada ona postaje njena prava vrijednost. Primjena ove metode prikazana je na primjeru u potpoglavlju 7.2.1 te u kodu u dodatku D.1. Postoji nekoliko metoda određivanja vrijednosti američkih opcija, a neke od njih su numeričko rješavanje Black-Scholes parcijalne diferencijalne jednadžbe te Longstaff-Schwartz metoda najmanjih kvadrata.

6.1 Numeričko rješavanje Black-Scholes parcijalne diferencijalne jednadžbe

Iako nije moguće znati postoji li u budućnosti neki trenutak, prije dana dospijeća, u kojem će biti isplativo iskoristiti opciju ranije, postoji područje u kojem je, ukoliko je opcija dovoljno „duboko“ u novcu, ovisno o preostalom vremenu do dana dospijeća, potrebno iskoristiti opciju ranije. Ta ideja dovela je do koncepta **granice izvršenja** (eng. *exercise boundary*). Na crtežu 17 prikazan je primjer granice izvršenja za američku put opciju. Na ordinati je prikazan relativni iznos koliko je opcija u novcu, $\frac{K-S_t}{K}$, dok je na apscisi prikazano vrijeme do dospijeća, $\tau = T - t$. U samom dospijeću, $\tau = 0$, granica je ekvivalentna cijeni izvršenja. To jest, ako $K - S_T \geq 0$, opcija treba biti iskorištena. Kako se vrijeme do dana



Crtež 17: Primjer granice izvršenja za američku put opciju

dospijeća povećava, granica poprima logaritamski oblik. Važno je spomenuti da ne postoji analitički izraz za granicu izvršenja, a kada bi postojao, makar do na dobru aproksimaciju, bilo bi moguće konstruirati metodu prema naprijed za određivanje cijene opcije. Jedan od mogućih pristupa je tretiranje granice izvršenja kao problema slobodne granice u numeričkom rješenju Black-Scholes diferencijalne jednadžbe [9]. Granica izvršenja često se prikazuje na grafu na kojem ordinata predstavlja cijenu dionice, a apscisa proteklo vrijeme. U tom slučaju poprima oblik polinoma drugog stupnja s pozitivnom domenom.

Teorem: [3] *Neka je $P(S,t)$ cijena američke put opcije s danom dospijeća T i cijenom izvršenja K. Tada za svaki $t \in [0,T]$ postoji broj $S_t^* \in \langle 0,\infty\rangle$ takav da za $0 \leq S \leq S_t^*$ i $0 \leq t \leq T$, vrijedi*

$$P(S,t) = K - S \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + r_f S \frac{\partial P}{\partial S} < r_f P, \tag{6.1}$$

dok za $S_t^* < S$ i $0 \leq t \leq T$ vrijedi

$$P(S,t) > \max(K - S, 0) \qquad \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} + r_f S \frac{\partial P}{\partial S} = r_f P. \tag{6.2}$$

Rubni uvjet u $S = S_t^*$ je da je cijena opcije kontinuirano diferencijabilna s obzirom na S, kontinuirana u t, i vrijedi

$$P(S_t^*,t) = \max(K - S_t^*, 0) \qquad \frac{\partial P}{\partial S}(S_t^*,t) = -1. \tag{6.3}$$

Optimalna granica izvršenja za američku put opciju je krivulja dana s $\{(t, S_t^*) : 0 \leq t \leq T\}$. U području danom s $\{(t, S) : S > S_t^*\}$ bolje je pričekati da se cijena dionice spusti te ne iskoristiti opciju u ranijem trenutku. U tom području, nejednadžba (6.1) postaje jednadžba. U tom se slučaju uzima rubni uvjet $\frac{\partial P}{\partial S} = -1$ duž optimalne granice izvršenja te se rješava Black-Scholes-Merton parcijalna diferencijalna jednadžba (7.2). Problem slobodne granice korištenjem nekoliko supstitucija svodi se na problem koji sadrži jednadžbu topline oblika

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \tag{6.4}$$

gdje je $U = U(x, t)$, a k je konstanta. Zbog kompleksnosti određivanja granice izvršenja te rubnih uvjeta parcijalne diferencijalne jednadžbe, u radu se neće koristiti ova metoda.

6.2 Longstaff-Schwartz metoda

Longstaff-Schwartz metoda [6] kombinira Monte Carlo metodu s jednostavnom regresijom najmanjih kvadrata. Ako je američka opcija u novcu na dan dospijeća T, optimalna strategija za vlasnika američke opcije je njezino iskorištavanje. Međutim, prije dana dospijeća, potrebno je u svakom trenutku usporediti vrijednosti isplate izvršenja opcije u tom trenutku s očekivanom vrijednosti isplate u budućnosti, odnosno nastavkom vlasništva nad opcijom. Opciju je potrebno izvršiti ako je trenutna isplata veća. U tom smislu je optimalna strategija izvršenja određena očekivanjem isplate u slučaju ne izvršavanja opcije. Ključna ideja Longstaff-Schwartz metode je da se očekivanje isplate može procijeniti iz presjeka simulacije korištenjem najmanjih kvadrata.

Za primjenu metode, prvo je potrebno diskretizirati vrijeme, odnosno postaviti broj vremenskih koraka $n = T/\Delta t$, slično kao u modelu binomnog stabla. Potom se za željeni broj šetača N korištenjem geometrijskog slučajnog hoda (3.13) određuju cijene za svaki šetač u svakom vremenskom koraku $S_{t=j\Delta t, N=i} \equiv S_{j,i}$. Na taj se način dobije polje cijena dimenzije $N \times (n+1)$. Pod uvjetom da opcija nije izvršena prije trenutka dospijeća $t = n\Delta t = T$, isplata u dospijeću dana je s (2.3). Sljedeći korak u metodi je izračun isplata opcije u trenutku dospijeća, Y_n, za svaki od šetača.

Ako je u trenutku $t = (n-1)\Delta t$ opcija u novcu, vlasnik treba odlučiti hoće li odmah izvršiti opciju ili će nastaviti vlasništvo do konačnog trenutka dospijeća u $t = n\Delta t$. Stoga se uzimaju u obzir oni šetači za koje je, u trenutku $t = (n-1)\Delta t$, opcija u novcu. Skup cijena tih šetača, označava se s $X = \{S_{(n-1),i}\}$. Za šetače za koje je cijena u novcu, računaju se pripadajuće diskontirane isplate koje će se dobiti u $t = n\Delta t$ u slučaju da se opcija ne izvrši u trenutku $t =$

$(n-1)\Delta t$ kao $Y_{n-1} = e^{-r_f \Delta t} Y_n$. Skup takvih isplata označava se s $Y = \{Y_{n-1,i}\}$. U stvarnosti, u trenutku $t = (n-1)\Delta t$ nije poznata buduća cijena dionice S_n u trenutku dospijeća kao ni pripadajuća vrijednosti opcije. U tu svrhu se provodi prilagodba (eng. *fit*) polinoma drugog stupnja na skup uređenih parova $\{(x_i, y_i): x_i \in X, y_i \in Y\}$ korištenjem metode najmanjih kvadrata kako bi se odredila funkcija očekivane isplate od nastavka vlasništva nad opcijom u trenutku $t = (n-1)\Delta t$. Korištenjem dobivenog polinoma, označenog s $p_{n-1}(x)$, moguće je odrediti hoće li se opcija izvršiti ili nastaviti vlasništvo nad njom. Ako šetač nije u novcu u trenutku $t = (n-1)\Delta t$, vlasništvo se nastavlja. Vrijednost izvršenja u danom trenutku jednaka je $K - S_{n-1}$ za šetače koji su u novcu, dok je vrijednost nastavka vlasništva dana s $p_{n-1}(S_{n-1})$. Ako vrijedi $K - S_{n-1} > p_{n-1}(S_{n-1})$, opcija se izvršava, inače se nastavlja. U slučaju da se opcija izvršava u $t = (n-1)\Delta t$, isplata u $t = n\Delta t$ postaje nula jer nema buduće isplate s obzirom da je opcija izvršena.

Dalje je potrebno vidjeti treba li se opcija izvršiti u trenutku $t = (n-2)\Delta t$. Ponovno se uzimaju u obzir samo oni šetači za koje je u tom trenutku opcija u novcu te se konstruira skup cijena dionica X ta te šetače, te skup isplata Y. Međutim, u konstruiranju skupa isplata Y, potrebno je uzeti u obzir isplate u oba buduća trenutka, $t = (n-1)\Delta t$ i $t = n\Delta t$. Isplate koje se dobivaju u $t = (n-1)\Delta t$ diskontiraju se za jedan vremenski period te se računaju kao $Y_{n-2} = e^{-r_f \Delta t} Y_{n-1}$, dok se isplate koje se dobivaju u $t = n\Delta t$ diskontiraju za dva vremenska perioda te se računaju kao $Y_{n-2} = e^{-2r_f \Delta t} Y_n$. Ponovno se provodi fit polinoma drugog stupnja, $p_{n-2}(x)$ na odabrane podatke te se na isti način kao i za prethodni trenutak određuje izvršava li se opcija ili ne. Odnosno, ako vrijedi $K - S_{n-2} > p_{n-2}(S_{n-2})$, opcija se izvršava, inače se nastavlja, te se u slučaju izvršenja buduće isplate za taj šetač postavljaju na nulu.

Postupak se ponavlja do trenutka $t = 1\Delta t$ (za kojeg se također provodi). Nakon određivanja isplata u svim trenutcima $t = 1\Delta t, \dots n\Delta t$ za svih N šetača, moguće je odrediti cijenu američke opcije. Cijena opcije dobije se diskontiranjem svih isplata na $t = 0$ te usrednjavanjem po svim šetačima, odnosno

$$P = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{n} e^{-j r_f \Delta t}\, Y_j. \tag{6.5}$$

Primjena ove metode detaljno je prikazana na primjeru u potpoglavlju 7.2.2 te u kodu u dodatku D.2.

7 Primjena na primjeru

Za primjer će se procijeniti vrijednosti europske i američke put opcije za tvrtku *Ericsson Nikola Tesla d.d.* čije su cijene dionica prethodno prikazane na crtežima 3 i 6. Neka je početna cijena dionice ona od 2. siječnja 2019. godine te iznosi $S_0 = 1005{,}00$ kn. Neka je cijena izvršenja opcije jednaka početnoj cijeni dionice, odnosno $K = 1005{,}00$ kn. Sa crteža 6 uočljivo je da odabrane vrijednosti volatilnosti i bezrizične kamatne stope za simulaciju dobro odgovaraju stvarnom stanju pa neka su stoga njihove vrijednosti $r_f = 0{,}1, \sigma = 30\%$. Neka je dospijeće $T = 100$ dana.

7.1 Određivanje vrijednosti europske put opcije

Prvo će se primijeniti Black-Scholes formula koja se i koristi u većini slučajeva određivanja cijena europskih opcija. Također, kako se u ostalim metodama se broj šetača i/ili broj vremenskih perioda povećavaju, tako se cijena dobivena metodom približava onoj dobivenom korištenjem Black-Scholes metodom (detaljnije u [3], potpoglavlje 2.4). Stoga je prikladno i koristiti vrijednost dobivenu Black-Scholes metodom kao referentnu za usporedbu vrijednosti dobivenih ostalim metodama.

7.1.1 Primjena Black-Scholes formule

Black-Scholes formula za cijenu put opcije dana je s (4.19)

$$P = -S_0\Phi(-d_1) + Ke^{-r_f T}\Phi(-d_2).$$

Dakle, prvo je potrebno izračunati koeficijente d_1 i d_2 korištenjem (4.17):

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_f + \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0{,}252988$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r_f - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}} \approx 0{,}095961.$$

Potom je potrebno odrediti vrijednosti kumulativne distribucijske funkcije (CDF) za $-d_1$ i $-d_2$ računanjem integrala (4.16)

$$\Phi(d) = \int_{-\infty}^{d} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\mathrm{d}x.$$

U tu svrhu korištena je Monte Carlo integracija metodom temeljenom na teoremu srednje vrijednosti [10]

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a)\langle f\rangle, \tag{7.1}$$

gdje je $\langle f\rangle$ prosječna vrijednost funkcije $f(x)$, dana izrazom

$$\langle f\rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{7.2}$$

Pritom su x_i slučajni brojevi kao uzorci jednolike raspodjele od a do b. Stoga je Monte Carlo procjena integrala (7.1) dana s

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx (b-a)\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i). \tag{7.3}$$

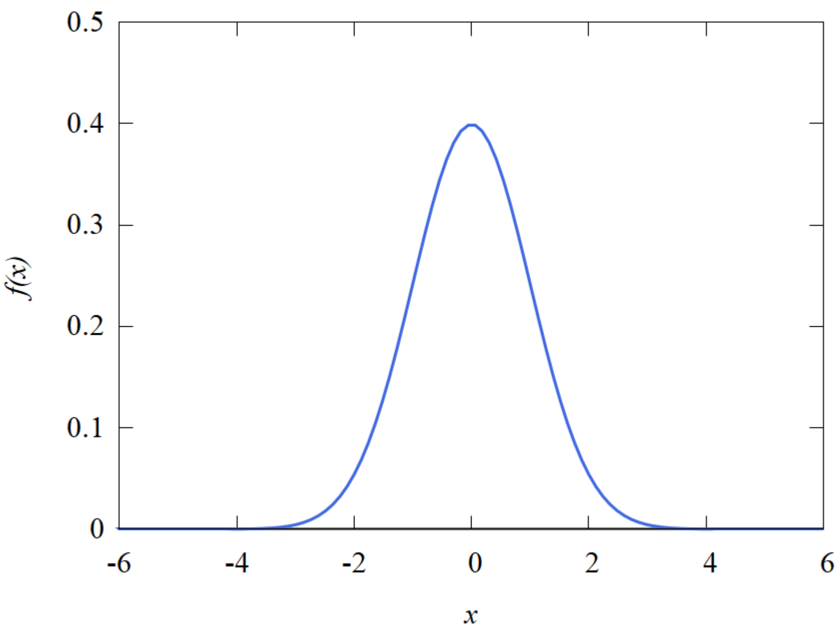
Međutim, CDF je izražena preko nepravog integrala. Na grafu podintegralne funkcije,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

prikazanom na crtežu 18 uočljivo je da je već za vrijednosti manje od $x = -4$, vrijednost podintegralne funkcije približna nuli. Točnije,

$$f(-4) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}4^2} \approx 0{,}0001.$$

Stoga se u izračunu integrala postavlja „cut-off“ vrijednost na -5 (tada vrijednost podintegralne funkcije postaje reda 10^{-6}).



Crtež 18: Podintegralna funkcija kumulativne distribucijske funkcije

Pri korištenju Monte Carlo metoda, korisno je i provesti analizu greške. Moguća mjera greške je varijanca

$$\sigma^2 = \langle f^2 \rangle - \langle f \rangle^2, \tag{7.4}$$

gdje je

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [f(x_i)]^2. \tag{7.5}$$

Međutim, na ovaj se način dobiva greška koja je veća od stvarne, te je važnije promatrati varijancu srednjih vrijednosti koja procjenjuje koliko prosjek od n mjerenja odstupa od egzaktnog prosjeka [10]

$$\sigma_m^2 = \frac{\sigma^2}{n}. \tag{7.6}$$

Pri izračunu vrijednosti CDF, broj šetača bira se na način da varijanca bude što manja. U ovom slučaju, za broj šetača odabrano je $N = 10^8$. Dobije se:

$$\Phi(-d_1) = 0{,}400158 \quad \sigma_m[\Phi(-d_1)] = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$$

$$\Phi(-d_2) = 0{,}461797 \quad \sigma_m[\Phi(-d_2)] = 1{,}3 \cdot 10^{-5}.$$

Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti CDF u Black-Scholes formulu (4.19), dobije se da je cijena europske put opcije $\boldsymbol{P = 49{,}40458}$ **kn**. Iz izraza (4.21) zna se da je vjerojatnost da put opcija završi u novcu jednaka $\Phi(-d_2)$ te je stoga u ovom slučaju ta vjerojatnost $\mathbf{46{,}18}\%$. Kod u kojem je implementiran izračun cijene opcije pomoću Black-Scholes formule i kod za funkciju za izračun kumulativne distribucijske funkcije navedeni su u dodacima C.3 i C.4, redom.

7.1.2 Primjena modela binomnog stabla

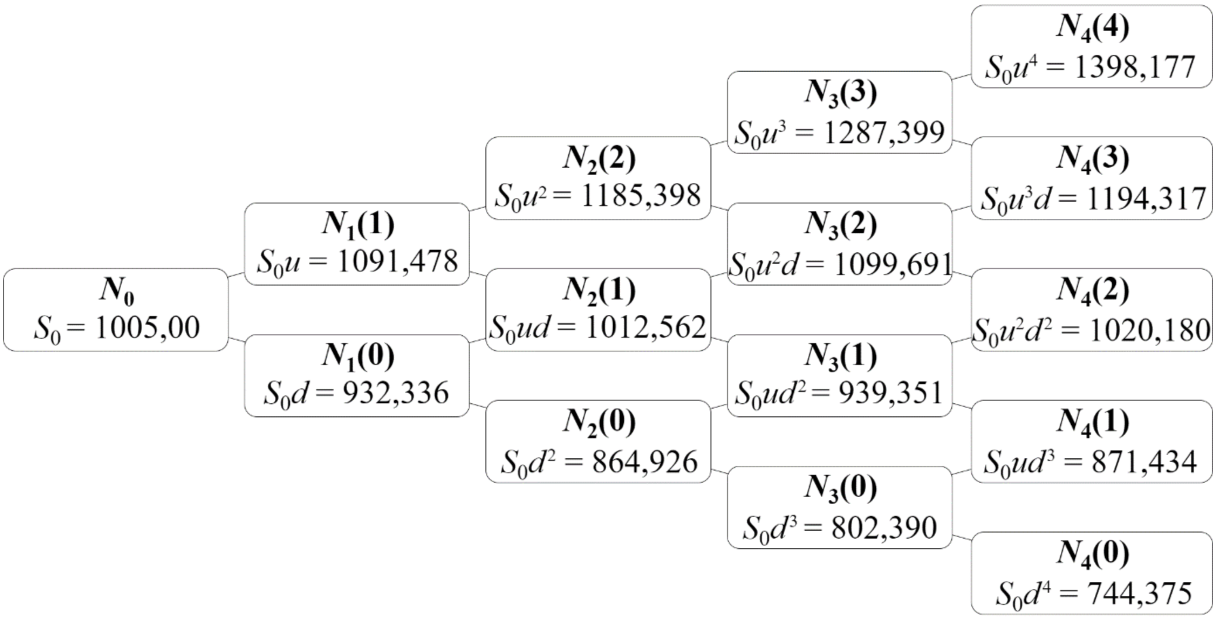
Neka se stablo sastoji od 4 koraka. S obzirom da se promatra europska put opcija, moguće je koristiti i rizik-neutralno određivanje cijene, kao i određivanje cijene korak po korak. U svakom slučaju, potrebno je prvo izračunati koeficijente u, d i q. No, prije tog potrebno je izračunati vremenski korak Δt izražen preko godina. Dobije se

$$\Delta t = \frac{T/365}{n} = \frac{100/365}{4} \approx 0{,}068493.$$

Potom se računaju koeficijenti u, d i q. Neka je $q = 1/2$. U tom slučaju vrijede relacije (4.5) odnosno:

$$d = e^{r_f \Delta t}\left(1 - \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}\right) \approx 0{,}927698 \qquad u = e^{r_f \Delta t}\left(1 + \sqrt{e^{\sigma^2 \Delta t} - 1}\right) \approx 1{,}086048.$$

Dobivena je pozitivna vrijednost za koeficijent d te se stoga mogu koristiti ovi koeficijenti. Sada se mogu računati cijene opcija u čvorovima pomoću (4.11), odnosno $S_k(i) = S_0 u^i d^{k-i}$. Dobivene cijene dionica u svim čvorovima prikazane su na crtežu 19.



Crtež 19: Cijene dionica u kunama u svim čvorovima binomnog stabla za odabrani primjer

Za rizik-neutralno određivanje cijene, sada je potrebno odrediti koeficijent m koji se određuje prema položaju cijene izvršenja u odnosu na konačne cijene dionica

$$S_0 u^{m-1} d^{n-m+1} \leq K \leq S_0 u^m d^{n-m}.$$

S obzirom da je cijena izvršenja $1005{,}00$ kn, ona leži između čvorova $N_4(2) \equiv N_n(m)$ i $N_4(1) \equiv N_n(m-1)$. Slijedi da je $m = 2$ te se odavde se može primijeniti formula za račun cijene put opcije (4.13), tj.

$$P = e^{-r_f n\Delta t} \sum_{i=0}^{m-1} \binom{n}{i} q^i (1-q)^{n-i} \left(K - S_0 u^i d^{n-i}\right).$$

Uvrštavanjem svih vrijednosti, dobije se da je cijena put opcije $\boldsymbol{P = 48,33795}$ **kn**.

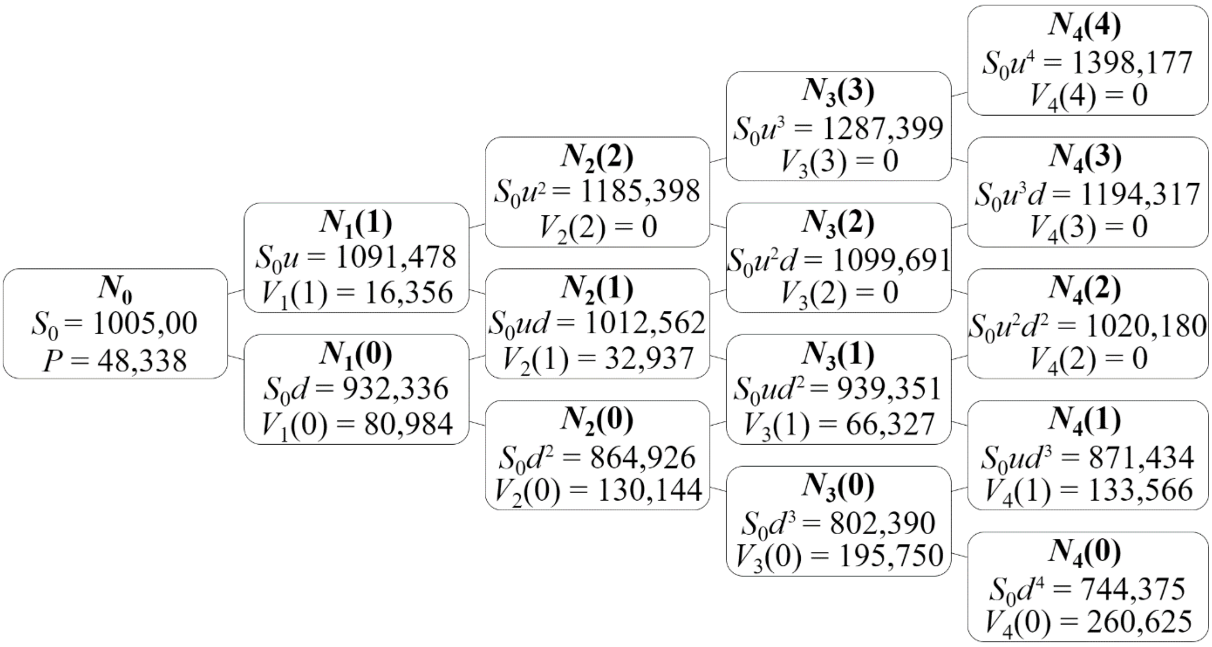
Za određivanje cijene korak po korak, prvo se računaju isplate u trenutku dospijeća korištenjem (2.3), odnosno

$$P = \max(K - S_T, 0).$$

Dobije se $V_4(4) = V_4(3) = V_4(2) = 0$, $V_4(1) = 133{,}566$ kn, te $V_4(0) = 260{,}625$ kn. Potom se korištenjem (4.14), odnosno

$$V_{n-1}(i) = e^{-r_f \Delta t}[qV_n(i+1) + (1-q)V_n(i)],$$

korak po korak računaju vrijednosti opcija u svakom čvoru. Dobivene vrijednosti prikazane su na crtežu 20. Vrijednost opcije koja se dobije u čvoru N_0 predstavlja cijenu opcije, te u ovom slučaju iznosi $\boldsymbol{P = 48,33795}$ **kn**. Uočljivo je da su cijene dobivene na dva načina jednake. Sve navedene vrijednosti dobivene su korištenjem koda u dodatku C.2.



Crtež 20: Cijene dionica i vrijednosti europske put opcije u kunama u svakom čvoru binomnog stabla za odabrani primjer

Razlika između cijene dobivene Black-Scholes formulom i cijene dobivene korištenjem binomnog stabla približno je jednaka 1,07, što čini razliku od 2,16%. Međutim, rezultat se može popraviti povećanjem broja koraka binomnog stabla. Ukoliko je broj koraka 10, cijena opcije korištenjem obje metode postaje $\boldsymbol{P = 49,48496}$ **kn** čime je razlika između cijene dobivene Black-Scholes formulom otprilike 0,08 kn, odnosno 0,16%. Daljnjim povećanjem broja koraka, na 10^4, program nije u mogućnosti izračunati cijenu korištenjem rizik-neutralnog određivanja cijene jer je potrebno izračunati $n!$ čime dolazi do opterećenja. No, moguće je izvršiti račun korak po korak te se dobije cijena opcije $\boldsymbol{P = 49,40375}$ **kn** čime je razlika s cijenom dobivenom Black-Scholes formulom reda 10^{-4}.

7.1.3 Primjena Monte Carlo metode numeričkog integriranja

U metodi numeričkog integriranja, uzorkuju se konačne cijene dionica S_T kao uzorci log-normalne distribucije $S_T \sim \mathcal{Ln}(\alpha, \beta^2)$. Stoga je prvo potrebno odrediti parametre α i β^2 korištenjem (3.18):

$$\alpha = \ln S_0 + \mu T - \frac{1}{2}\sigma^2 T \approx 6,927811 \qquad \beta^2 = \sigma^2 T \approx 0,024658.$$

Sada je potrebno uzorkovati cijene iz log-normalne distribucije korištenjem (5.2)

$$S_T = e^{\alpha + \beta Z}, Z \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Međutim, generatori pseudoslučajnih brojeva generiraju brojeve po uniformnoj distribuciji. U tu svrhu koristi se Box-Muller transformacija koja iz dva nezavisna uzorka uniformne distribucije $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0,1)$[2] daje dva nezavisna uzorka normalne distribucije $Z_1, Z_2 \sim Z(0,1)$ korištenjem:

$$\begin{aligned} Z_1 &= \cos(2\pi U_1)\sqrt{-2\ln U_2} \\ Z_2 &= \sin(2\pi U_1)\sqrt{-2\ln U_2}. \end{aligned} \tag{7.7}$$

Potom se računa vrijednost uzorka S_T, te isplata u trenutku dospijeća korištenjem (2.3)

$$P = \max(K - S_T, 0).$$

Isplate se akumuliraju u N koraka. Očekivanje isplate dobije se računanjem srednje vrijednosti isplata, odnosno dijeljenjem akumulirane vrijednosti s N, te se konačna cijena dionice dobije diskontiranjem očekivanja isplate. U ovoj se metodi može računati varijanca, odnosno drugi korijen varijance koji predstavlja standardnu devijaciju, na isti način kao i u prethodnom računu kumulativne distribucijske funkcije. Za ovaj se primjer, za $N = 10^8$ dobiju vrijednosti:

$$\boldsymbol{P = 49,41141\ \mathbf{kn}} \qquad \sigma_m(P) = 7{,}7 \cdot 10^{-3}\ \text{kn}.$$

Kod u kojem je implementirana ova metoda i koji je korišten za dobivanje ovih podataka prikazan je u dodatku C.5. Razlika cijene dobivene ovom metodom te cijene dobivene Black-Scholes formulom reda je 10^{-3} te iznosi 0,01%.

7.1.4 Primjena Monte Carlo metode za binomno stablo

Kao i u primjeni klasičnog modela binomnog stabla, neka je broj koraka stabla 4. Prvo je potrebno izračunati vremenski korak Δt izražen preko godina, te koeficijente u, d i q. S obzirom da navedene vrijednosti ovise samo o ulaznim parametrima, one su jednake kao u i primjeni modela binomnog stabla:

$$\Delta t \approx 0{,}068493 \qquad q = 1/2 \qquad d \approx 0{,}927698 \qquad u \approx 1{,}086048.$$

Potom se kreće od početne cijene S_0 te se generira slučajan broj iz raspona $[0,1\rangle$. S obzirom na to da koeficijent q predstavlja vrijednost porasta cijene, ukoliko je generirani broj manji od q, cijena se povećava za faktor u, dok se u suprotnom slučaju smanjuje za d. Cijena se na ovaj način mijenja za odabrani broj koraka binomnog stabla, te konačna cijena predstavlja cijenu u trenutku dospijeća, S_T za koju se računa isplata korištenjem (2.3).

Postupak se ponavlja za N šetača te se isplate akumuliraju. Očekivanje isplate dobije se računanjem srednje vrijednosti isplata, a konačna cijena dionice dobije se diskontiranjem očekivanja isplate. Također je moguće, kao i u prethodnom primjeru, računati varijancu. Vrijednosti koje se dobiju za $N = 10^8$ i $n = 4$ su:

$$\boldsymbol{P = 48,34285\ \mathbf{kn}} \qquad \sigma_m(P) = 7{,}9 \cdot 10^{-3}\ \text{kn}.$$

[2] $\mathcal{U}(a,b)$ označava uniformnu distribuciju na segmentu $[a,b]$

Kod koji je korišten za dobivanje ovih podataka prikazan je u dodatku C.6. Razlika između vrijednosti dobivene korištenjem klasičnog modela binomnog stabla s 4 koraka i Monte Carlo metode s istim brojem koraka je $5 \cdot 10^{-3}$ kn, čime je pokazana iznimna sličnost dvaju metoda. No, kao i kod klasične metode, razlika između cijene dobivene Black-Scholes formulom i cijene dobivene korištenjem Monte Carlo metode nije zanemariva; približno je jednaka $1{,}06$, što u ovom slučaju čini razliku od $2{,}15\%$. Ponovno se rezultat može popraviti povećanjem broja koraka binomnog stabla. Međutim, povećanjem broja vremenskih koraka dolazi do znatnog produljenja trajanja izračuna te se stoga smanjuje broj šetača. Povećanjem broja vremenskih koraka s $n = 4$ na $n = 10$ i smanjenjem broja šetača s $N = 10^8$ na $N = 10^7$ cijena postaje $\boldsymbol{P = 49,47828}$ **kn** čime se razlika smanjuje na $0{,}15\%$.

7.1.5 Primjena Monte Carlo simulacije GRW

U ovoj metodi, konačne cijene dionica S_T promatraju se kao konačni položaji geometrijskog slučajnog hoda. Polazi se od početne cijene dionice S_0, te se u koracima od jednog dana cijena dionice pomiče sukladno (3.13)

$$\mathrm{d}S = S_t\left(r_f \mathrm{d}t + \sigma\sqrt{\mathrm{d}t} Z_t\right).$$

Pritom je potrebno koristiti uzorke iz normalne distribucije pa se ponovno koristi Box-Muller transformacija, kao u metodi numeričkog integriranja. Potom je postupak ekvivalentan prethodnom: računa se isplata, postupak se ponavlja N puta, isplate se akumuliraju, te se računa srednja vrijednost isplata, kao i varijanca. Konačna cijena opcije dobije se diskontiranjem. Vrijednosti koje se dobiju za $N = 10^7$ su:

$$\boldsymbol{P = 49,41633}\ \mathbf{kn} \qquad \sigma_m(P) = 2{,}4 \cdot 10^{-2}\ \text{kn}.$$

Primjena ove metode u kodu prikazana je u dodatku C.7. Razlika između cijene dobivene ovom metodom i cijene dobivene Black-Scholes formulom je $2{,}4 \cdot 10^{-2}$ kn, odnosno 0,02%.

7.2 Određivanje vrijednosti američke put opcije

S obzirom na to da je broj metoda koje će se koristiti za određivanje vrijednosti američke opcije malen te stoga nema dovoljno argumenata za raspravu, za referentnu će se vrijednost uzeti vrijednost $\boldsymbol{P} = \mathbf{52,0544kn} \equiv \boldsymbol{P}_{\mathbf{ref}}$ koju se dobije korištenjem kalkulatora na portalu optionseducation.org kao što je prikazano na crtežu 21. Pritom se izračun zasniva na stvarnim podacima o volatilnosti i prethodnim cijenama trgovanja dionicama na tržištu.

7.2.1 Primjena modela binomnog stabla

Kao i kod primjene za europsku put opciju, neka se stablo sastoji od 4 koraka. Promatra se američka put opcija, pa nije moguće koristiti rizik-neutralno određivanje cijene, već samo određivanje cijene korak po korak. Prvo je potrebno izračunati koeficijente u, d i q, te vremenski korak Δt izražen preko godina. Ulazni parametri jednaki su kao i za europsku opciju, pa se dobiju jednake vrijednosti, odnosno

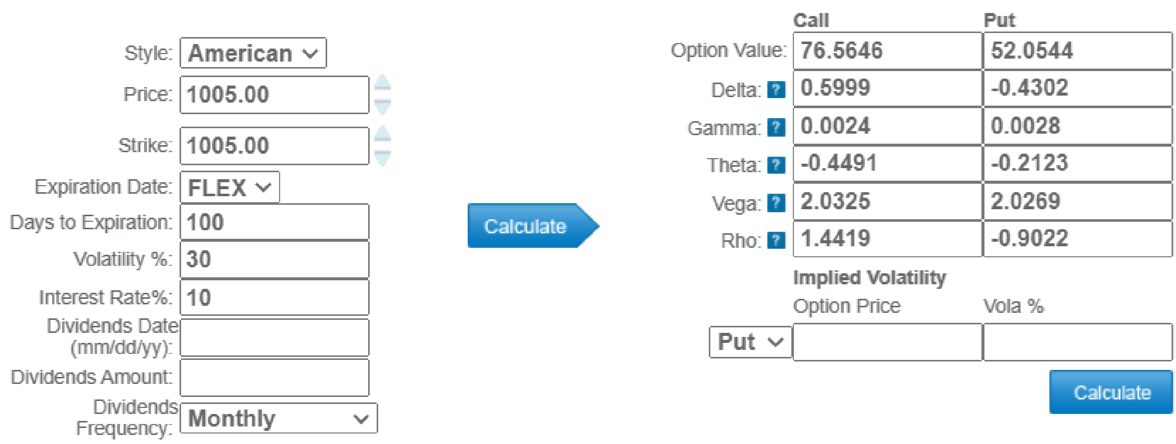
$$\Delta t = 0{,}068493, \qquad q = 1/2, \qquad d = 0{,}927698, \qquad u = 1{,}086048.$$

Isto tako i cijene u svim čvorovima su jednake kao i kod europske opcije te su njihovi iznosi prikazani na crtežu 19. Potom se računaju isplate u trenutku dospijeća koje su također jednake kao i za europsku put opciju te iznose $V_4(4) = V_4(3) = V_4(2) = 0$, $V_4(1) = 133{,}566$ kn, i $V_4(0) = 260{,}625$ kn. Sljedeći korak je određivanje vrijednosti opcija u svakom čvoru. Međutim, za američku put opciju nije dovoljno samo koristiti (4.14), odnosno

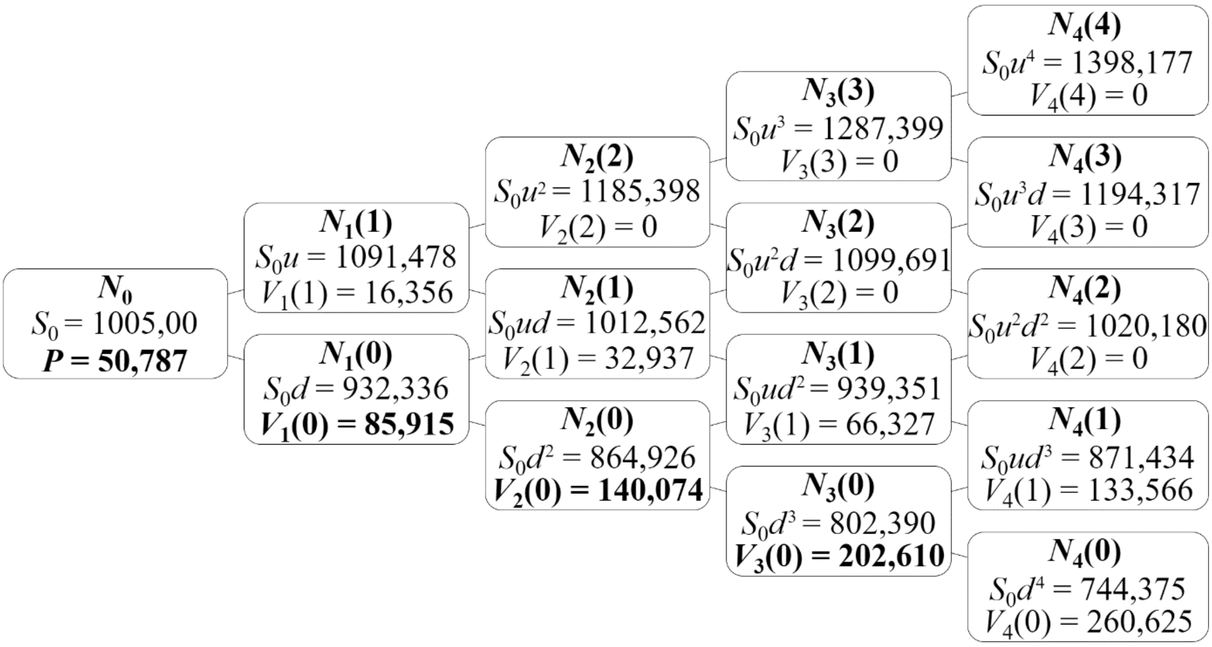
$$V_{n-1}(i) = e^{-r_f \Delta t}[qV_n(i+1) + (1-q)V_n(i)],$$

već je potrebno dobivenu vrijednost usporediti sa isplatom opcije u slučaju da se ona izvrši u danom trenutku. Stoga je vrijednost opcije u svakom čvoru dana s

$$V_{n-1}(i) = \max\{e^{-r_f \Delta t}[qV_n(i+1) + (1-q)V_n(i)], K - S_0 u^i d^{n-i}\}.$$



Crtež 21: Vrijednost američke call i put opcije dobivena korištenjem kalkulatora na portalu optionseducation.org



Crtež 22: Cijene dionica i vrijednosti američke put opcije u kunama u svakom čvoru binomnog stabla za odabrani primjer

Dobivene vrijednosti prikazane su na crtežu 21. Uočljiva je razlika u čvoru $N_3(0)$ u odnosu na europsku opciju. Naime, vrijednost isplate u slučaju da se opcija izvrši u danom trenutku veća je od vrijednosti dobivene izrazom (4.14) te stoga vrijednost isplate postaje vrijednost opcije. Ta se razlika proteže u čvorovima $N_2(0), N_1(0)$ i konačno u N_0 te se dobije da je cijena opcije $\boldsymbol{P = 50,78661}$ **kn**. Dobivena cijena veća je od cijene europske opcije, kao što je i očekivano. Sve navedene vrijednosti dobivene su korištenjem koda u dodatku D.1.

Razlika između dobivene vrijednosti i vrijednosti odabrane kao referentne iznosi oko 1,27 kn, odnosno 2,44%. Stoga se, kao i u slučaju europske opcije, povećava broja koraka na $n = 10^4$. U tom se slučaju dobije cijena opcije $\boldsymbol{P = 52,02243}$ **kn**, čime je razlika smanjena na 0,03 kn, odnosno na 0,06%.

7.2.2 Primjena Longstaff-Schwartz metode

Neka je, jednostavnosti radi, broj šetača $N = 8$, a broj koraka $n = 3$. Prvi korak je određivanje cijena u svim čvorovima. Cijene se generiraju korištenjem (3.13), te se u jednoj od simulacija dobiju vrijednosti prikazane u prvih pet stupaca tablice 1. Potom se korištenjem (2.3), odnosno

$$P = \max(K - S_T, 0)$$

računa isplata opcije u trenutku dospijeća, Y_3. Dobivene vrijednosti prikazane su u zadnjem stupcu tablice 1.

Tablica 1: Simulacija cijena dionica u 3 koraka i isplata u trenutku dospijeća u kunama

šetač	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$	Y_3
1	1005,00	1153,17	1143,13	1155,73	0,00
2	1005,00	1031,90	1055,81	1005,94	0,00
3	1005,00	981,11	917,36	902,58	102,42
4	1005,00	844,99	1023,34	1142,01	0,00
5	1005,00	1006,42	1225,93	1285,47	0,00
6	1005,00	945,79	943,90	934,51	70,49
7	1005,00	868,41	856,58	810,38	194,62
8	1005,00	985,25	1023,29	1084,10	0,00

Sljedeći korak je određivanje treba li se opcija izvršiti u trenutku $t = 2$. Iz cijena dionica u tablici 1, uočljivo je da su samo tri šetača, treći, šesti i sedmi, u novcu. Neka njihove cijene tvore skup X, a njihove isplate, $Y_2 = e^{-r_f \Delta t} Y_3$ neka tvore skup Y, kao u drugom i trećem stupcu tablice 2. Sada je potrebno izvršiti fit polinoma drugog stupnja na tri uređena para $\left(S_{2,i}, Y_{2,i}\right)$ za šetače koji su u novcu. Fit se izvršava korištenjem metode najmanjih kvadrata (više u dodatku E), te se dobije

$$p_2(x) = 0{,}0036x^2 - 7{,}8183x + 4277{,}8193.$$

Korištenjem dobivenog polinoma, računaju se vrijednosti polinoma za elemente skupa X te se uspoređuju s vrijednostima opcije u slučaju trenutnog izvršenja opcije. Vrijednosti su navedene u četvrtom i petom stupcu tablice 2. U svakom je slučaju vrijednost polinoma veća od vrijednosti trenutnog izvršenja, što implicira da za nijednog šetača nije isplativo izvršenje opcije te se vlasništvo nad opcijom nastavlja. Stoga su isplate u trenutku $t = 2$ nula, dok isplate u trenutku dospijeća, $t = 3$, ostaju nepromijenjene, kao što je prikazano u posljednja dva stupca tablice 2.

Tablica 2: Cijene i isplate u kunama šetača koji su u novcu u trenutku $t = 2$, vrijednosti isplata u slučaju izvršenja, vrijednosti isplata u slučaju nastavka vlasništva, odluke o izvršenju ili nastavku vlasništva, te dosadašnja saznanja o isplatama

šetač	$X = S_2$	$Y = e^{-r_f \Delta t} Y_3$	$K - S_2$	$p_2(S_2)$	odluka	Y_2	Y_3
3	917,36	101,49	87,64	101,49	nastavak	0,00	102,42
6	943,90	69,85	61,10	69,85	nastavak	0,00	70,49
7	856,58	192,85	148,42	192,85	nastavak	0,00	194,62

Još preostaje odrediti treba li se opcija izvršiti u trenutku $t = 1$. Iz tablice 1, vidljivo je da je u trenutku $t = 1$, pet šetača u novcu: treći, četvrti, šesti, sedmi i osmi. Njihove cijene tvore skup X, a njihove se isplate sada računaju kao $Y_1 = e^{-r_f \Delta t} Y_2 + e^{-2r_f \Delta t} Y_1$ te tvore skup Y, kako je prikazano u drugom i trećem stupcu tablice 3. Ponovnim fitanjem polinoma drugog reda na podatke, dobije se polinom

$$p_1(x) = -0{,}0248x^2 + 45{,}1740x - 20435{,}4998.$$

Potom se računaju vrijednosti polinoma za elemente skupa X te se uspoređivanjem s vrijednostima opcije u slučaju trenutnog izvršenja opcije, donosi odluka od izvršenju opcije ili nastavku vlasništva. Dobivene vrijednosti prikazane su u četvrtom i petom stupcu tablice 3. Za četvrti i sedmi šetač, vrijednost isplate u slučaju trenutnog izvršenja veća je od vrijednosti polinoma te se u tim slučajevima donosi odluka o izvršenju opcije. Za ostale se šetače nastavlja vlasništvo nad opcijom. Zbog izvršenja opcije za četvrti i sedmi šetač, potrebno je promijeniti i vrijednosti isplata, te isplate za ta dva šetača u trenutku $t = 1$ poprimaju vrijednosti $K - S_1$, dok u ostalim trenutcima postaju nula.

Konačne vrijednosti isplata za sve šetače u svim trenutcima prikazane su u tablici 4. Sada je moguće odrediti cijenu opcije diskontiranjem svih vrijednosti isplata na trenutak $t = 0$ te usrednjavanjem po svim šetačima, tj. primjenom (6.5). Pritom se može računati i varijanca te se konačno dobiju vrijednosti:

$$\boldsymbol{P = 57,76736\ \mathrm{kn}} \qquad \sigma_m(P) = 22{,}15\ \mathrm{kn}.$$

Razlika između vrijednosti dobivene ovom metodom i referentne vrijednosti iznosi $5{,}71$ kn odnosno $10{,}97\%$ referentne vrijednosti što je poprilično velika greška, no to je bilo i očekivano s obzirom na to da je korišten mali broj šetača kao i mali broj koraka. Navedene vrijednosti dobivene su korištenjem koda u dodatku D.2.

Tablica 3: Cijene i isplate u kunama šetača koji su u novcu u trenutku $t = 3$, vrijednosti isplata u slučaju izvršenja, vrijednosti isplata u slučaju nastavka vlasništva i odluke o izvršenju ili nastavku vlasništva

šetač	$X = S_1$	$Y = e^{-r_f \Delta t} Y_2 + e^{-2r_f \Delta t} Y_3$	$K - S_1$	$p_1(S_1)$	odluka
3	981,11	100,57	23,89	40,93	nastavak
4	844,99	0,00	160,01	49,22	izvršenje
6	945,79	69,21	59,21	131,27	nastavak
7	868,41	191,10	136,59	113,17	izvršenje
8	985,25	0,00	19,75	26,29	nastavak

Tablica 4: Konačne vrijednosti isplata u kunama za sve šetače u svim trenutcima

šetač	Y_1	Y_2	Y_3
1	0,00	0,00	0,00
2	0,00	0,00	0,00
3	0,00	0,00	102,42
4	160,01	0,00	0,00
5	0,00	0,00	0,00
6	0,00	0,00	70,49
7	136,59	0,00	0,00
8	0,00	0,00	0,00

Neka je sada broj koraka jednak broju dana do trenutka izvršenja, $n = 100$, kako bi se opcija mogla izvršiti svaki dan. Za $n = 100$ i $N = 8$ dobiju se vrijednosti

$$\boldsymbol{P = 48,13174}\ \textbf{kn} \qquad \sigma_m(P) = 11{,}94\ \text{kn}$$

čime se razlika smanjila na 7,54%. Kako bi simulacija bila reprezentativna, potrebno je koristiti i znatno veći broj šetača. Tako se za $n = 100$ i $N = 10^3$ dobiju vrijednosti

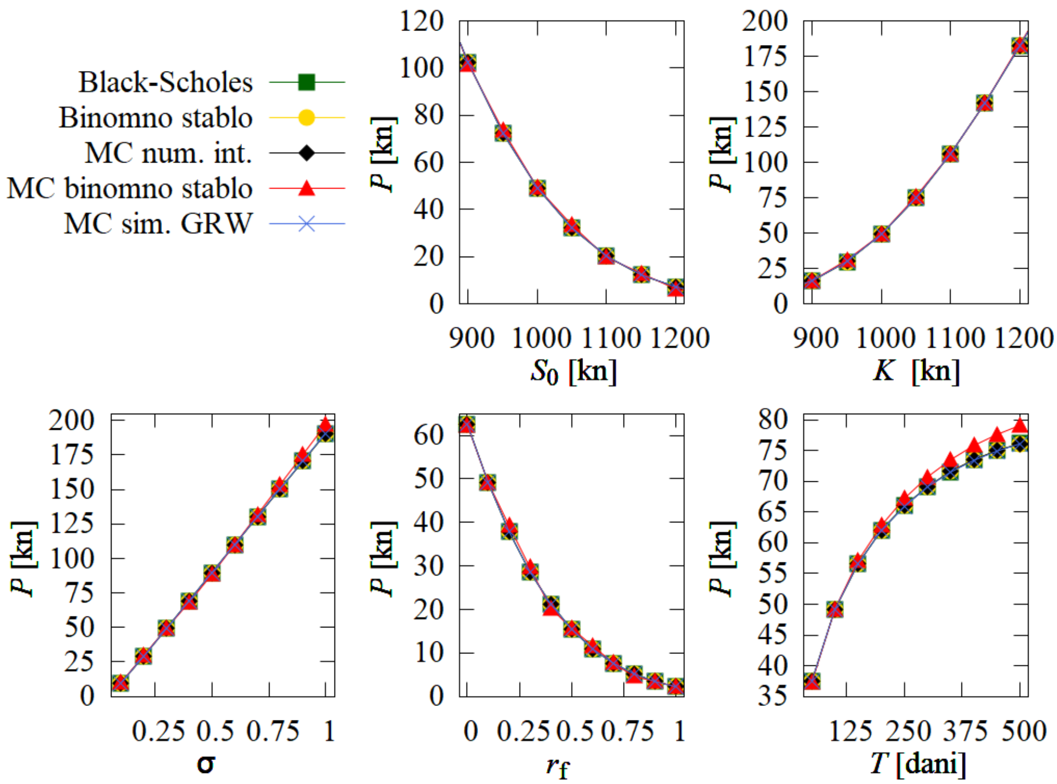
$$\boldsymbol{P = 52,29919}\ \textbf{kn} \qquad \sigma_m(P) = 1{,}86\ \text{kn}$$

čime se razlika dodatno smanjila na 0,47%, no i dalje je varijanca poprilično velika. Za još točnije rezultate trebalo bi dodatno povećati broj šetača, no tada dimenzije polja postaju prevelike te dolazi do preopterećenja.

8 Zaključak

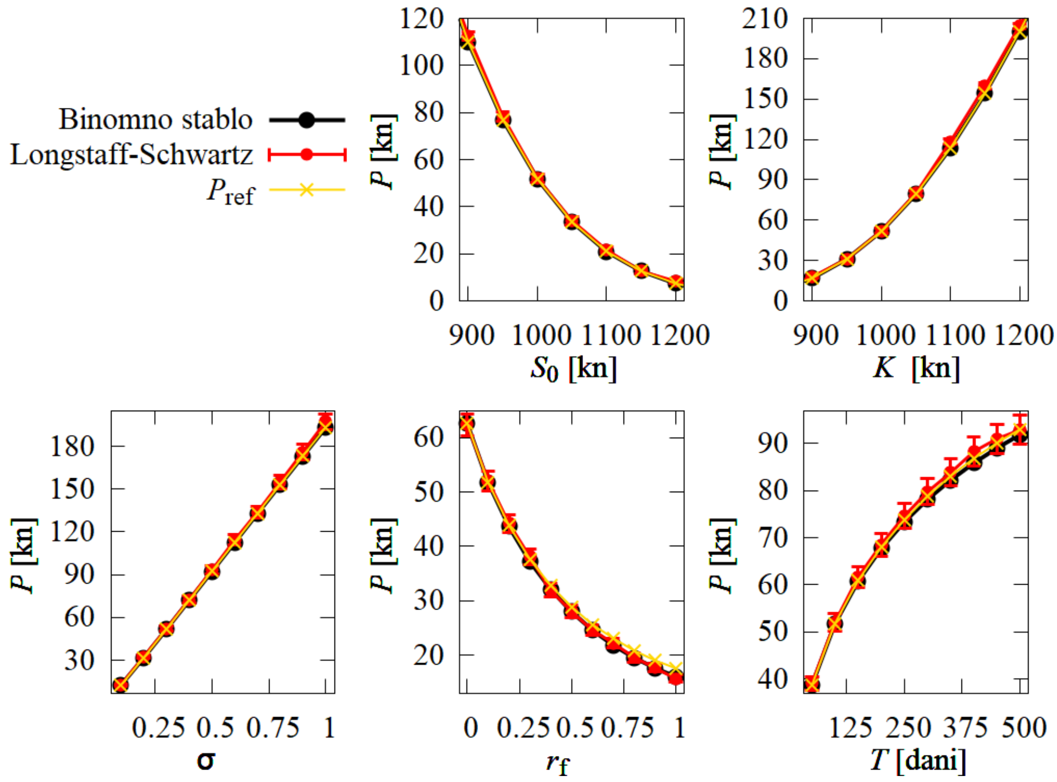
Na crtežu 23 prikazana je usporedba metoda korištenih za određivanje vrijednosti europske put opcije. Može se uočiti da se rezultati jako dobro slažu, osim za Monte Carlo simulaciju binomnog stabla. Intuitivno je za pretpostaviti da bi se povećanjem broja šetača rezultati uvelike poboljšali. Ta metoda ima prednost promjenjive volatilnosti i bezrizične kamatne stope u svakom od čvorova stabla, te se stoga ne smije „otpisati“ zbog ovakvog odstupanja već je potrebno pronaći način kako popraviti rezultate, odnosno povećati broj šetača. Može se zaključiti da su cijene dobivene različitim metodama približne te su stoga sve korištene metode dobre. Izbor željene metode ovisi o uvjetima tržišta i kretanju cijena dionica.

Na crtežu 24 prikazana je usporedba metoda korištenih za određivanje vrijednosti američke put opcije te su s P_{ref} označene referentne vrijednosti dobivene korištenjem kalkulatora na portalu optionseducation.org. Lako je uočljivo da postoji poprilično odstupanje vrijednosti dobivenih Longstaff-Schwartz metodom. Intuitivno je pretpostaviti da bi se



Crtež 23: Usporedba metoda korištenih za određivanje vrijednosti europske put opcije ovisno o promjenama parametara. Jedan se parametar varira dok se ostali drže konstantnima pri vrijednostima $S_0 = 1000{,}00$ kn, $K = 1000{,}00$ kn, $\sigma = 0.3, r_f = 0.1, T = 100$ dana

povećanjem broja šetača rezultati poboljšali. Na grafikonu ovisnosti cijene opcije o datumu dospijeća, može se uočiti da se referentne vrijednosti nalaze između cijena dobivenih korištenjem dviju metoda. Stoga se može zaključiti da bi se optimalan rezultat mogao dobiti usrednjavanjem vrijednosti dobivenih korištenjem dviju metoda.



Crtež 24: Usporedba metoda korištenih za određivanje vrijednosti američke put opcije ovisno o promjenama parametara. Jedan se parametar varira dok se ostali drže konstantnima pri vrijednostima $S_0 = 1000{,}00$ kn, $K = 1000{,}00$ kn, $\sigma = 0.3, r_f = 0.1, T = 100$ dana

9 Literatura

[1] B. Basrak, *Matematičke financije*, 2009.

[2] M. Capinski, T. Zastawniak, *Mathematics for Finance: An Introduction to Financial Engineering*, Springer, 2003.

[3] C.H. Geon, *Stochastic Analysis for Finance with Simulations*, Springer, 2016.

[4] HANFA, Tržište kapitala,
URL: https://www.hanfa.hr/getfile.ashx/?fileId=42497 (03.04.2021.)

[5] W. Kenton, Investopedia, Financial Instrument,
URL: https://www.investopedia.com/terms/f/financialinstrument.asp (03.04.2021.)

[6] F.A. Longstaff, E.S. Schwartz, *Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach*, The Review of Financial Studies, **14**, 113-147, (2001.)

[7] W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery, *Numerical Recipes in C*, Cambridge University Press, 2002.

[8] M. Sharma, *Polynomial Fitting – C PROGRAM*,
URL: https://www.bragitoff.com/2018/06/polynomial-fitting-c-program/ (20.08.2021.)

[9] R.W. Shonkwiler, *Finance with Monte Carlo*, Springer, 2013.

[10] L. Vranješ Markić, P. Stipanović: *Stohastičke simulacije u klasičnoj i kvantnoj fizici*, Split, 2016.

Dodatak

A. Kod za aritmetički slučajni hod

Ideja koda preuzeta je iz [9], algoritam 1. U kodu se poziva program „*ran1.c*“ kao generator slučajnih brojeva korišten na kolegiju „Stohastičke simulacije u klasičnoj i kvantnoj fizici“, a ideja koda preuzeta je iz [7]. Output je datoteka s vremenima i položajima aritmetičkog slučajnog hoda.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include "ran1.c" //program koji daje pseudoslucajne brojeve
#define PI 3.14159265

#define       X0            5
#define       T             10
#define       dt            1.0 //korak od 1 dana
#define       mi            0.05
#define       sigma         1.0

int main() {
       srand(time(0));
       FILE* dat;
       dat = fopen("ARW.txt", "w");
       long idum; //pocetna vrijednost za ran1 - generira se nasumicno kako ne bi
uvijek imali isti niz brojeva
       idum = rand() % (3000 + 1); //nasumican odabir ulaznog parametra za ran1
       idum = (-1.0) * idum;
       double U1, U2; //brojevi kao uzorci uniformne distribucije
       double Z0, Z1 = 0; //brojevi kao uzorci normalne distribucije
       double Zt;
       double n = T / dt;
       double dXt;
       double Xt = X0;
       fprintf(dat, "0\t%f\n", Xt);
       for (int t = 1; t <= n; t++) {
              //transformiranje U1 i U2 u Z0 i Z1 koristenjem Box-Muller transformacije
              if (t % 2 == 1) {
                     U1 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
                     U2 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
                     Z0 = cos(2 * PI * U2);
                     Z0 = Z0 * sqrt(-2 * log(U1));
                     Z1 = sin(2 * PI * U2);
                     Z1 = Z1 * sqrt(-2 * log(U1));
                     Zt = Z0;
              }
              else
                     Zt = Z1;
              dXt = mi * dt + sigma * sqrt(dt) * Zt;
              Xt += dXt;
              fprintf(dat, "%d\t%f\n", t, Xt);
       }
       fclose(dat);
       return 0;
}
```

B. Kod za geometrijski slučajni hod

Ideja koda preuzeta je iz [9], algoritam 2. Output je datoteka s vremenima i položajima geometrijskog slučajnog hoda.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include "ran1.c" //program koji daje pseudoslucajne brojeve
#define PI 3.14159265

#define       S0            5
#define       T             10/365.0
#define       mi            0.05
#define       sigma         1.0

int main() {
       srand(time(0));
       FILE* dat;
       dat = fopen("GRW.txt", "w");
       long idum = (-3000);
       fprintf(dat, "#idum = %d\n", idum);
       double U1, U2; //brojevi kao uzorci uniformne distribucije
       double Z0, Z1 = 0; //brojevi kao uzorci normalne distribucije
       double Zt;
       double dt = 1.0 / 365.0;
       double n = T / dt;
       double dSt;
       double St = S0;
       fprintf(dat, "%d\t%f\n", 0, St);
       for (int t = 1; t <= n; t++) {
              //transformiranje U1 i U2 u Z0 i Z1 koristenjem Box-Muller transformacije
              if (t % 2 == 1) {
                     U1 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
                     U2 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
                     Z0 = cos(2 * PI * U2);
                     Z0 = Z0 * sqrt(-2 * log(U1));
                     Z1 = sin(2 * PI * U2);
                     Z1 = Z1 * sqrt(-2 * log(U1));
                     Zt = Z0;
              }
              else
                     Zt = Z1;
              dSt = St * (mi * dt + sigma * sqrt(dt) * Zt);
              St += dSt;
              fprintf(dat, "%d\t%f\n", t, St);
       }
       fclose(dat);
       return 0;
}
```

C. Kod za europsku put opciju

U nastavku je naveden ključni dio koda (*main*) u kojem se pozivaju funkcije za izračun cijene europske put opcije korištenjem različitih metoda. U zaglavlju su uključene datoteke u kojima se nalaze funkcije za metode, te datoteka u kojoj je jednostavna funkcija koja vraća isplatu europske put opcije prikazana u dodatku C.1. U zaglavlju su također definirani ulazni parametri za dani problem te ulazni parametri za metode. Vrijednost dobivena korištenjem Black-Scholes formule sprema se u varijablu *BS* koja je ulazni parametar za sve ostale funkcije te služi kao referentna vrijednost za usporedbu.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include "ran1.c"
#include "EU_put_payoff.c"
#include "EU_put_1_Black-Scholes_formula.c"
#include "EU_put_2_Binomno_stablo.c"
#include "EU_put_3_MC_numericko_integiranje.c"
#include "EU_put_4_MC_binomno_stablo.c"
#include "EU_put_5_MC_simulacija_GRW.c"

//Ulazni parametri za dani problem
#define   S0        1005.0 //trenutna cijena dionice
#define   K         1005.0 //cijena izvrsenja
#define   rf        0.1    //bezrizicna kamatna stopa
#define   sigma     0.3    //volatilnost
#define   nDani     100.0  //dospijece (u danima)

//Ulazni parametri za metode
#define   NCDF      pow(10,8)     //broj vremenskih koraka za izracun CDF
#define   Koraci1   pow(10,4)     //broj vremenskih koraka za metodu binomnog stabla
#define   NMC1      pow(10,8)     //broj ponavljanja za MC numericko integriranje
#define   Koraci2   10            //broj vremenskih koraka za MC binomno stablo
#define   NMC2      pow(10,7)     //broj ponavljanja za MC binomno stablo
#define   NMC3      pow(10,7)     //broj ponavljanja za MC simulaciju GRW

int main() {
       double T = nDani / 365.0; //dospijece u godinama
       double BS = 0.0; //vrijednost dobivena Black-Scholes formulom

       BS = Black_Scholes(S0, K, rf, sigma, T, NCDF);
       binomno_stablo(S0, K, rf, sigma, Koraci1, T, BS);
       MC_numericko_integriranje(S0, K, rf, sigma, NMC1, T, BS);
       MC_binomno_stablo(S0, K, rf, sigma, Koraci2, NMC2, T, BS);
       MC_simulacija_GRW(S0, K, rf, sigma, nDani, NMC3, T, BS);

       return 0;
}
```

C.1 Funkcija za izračun isplate europske put opcije

```
double payoff(double Y, double K) { //funkcija isplate put opcije
       if (K - Y < 0.0)          return 0.0;
       else          return K - Y;
}
```

C.2 Funkcija za model binomnog stabla

U funkciji je implementirano računanje vrijednosti put opcije korištenjem binomnog stabla s n koraka. Koristi se i rizik-neutralno određivanje cijene, kao i određivanje cijene korak po korak. Pritom se koriste dvije pomoćne funkcije, jedna za računanje faktorijele, a druga za računanje binomnog koeficijenta. Prvo se provodi račun cijene dionice korištenjem rizik-neutralnog određivanja cijene. Ispiše se vrijednost koeficijenta m te izračunata cijena opcije i njena razlika u odnosu na referentnu vrijednost *BS*. Potom se provodi račun cijene dionice korak po korak, te se ispisuje cijena opcije i njena razlika u odnosu na referentnu vrijednost *BS*.

```
int fact(int n) {
	int rez = 1;
	for (int i = n; i > 0; i--) rez = rez * i;
	return rez;
}

double binkoef(int n, int i) {
	return fact(n) / (fact(i) * fact(n - i));
}

void binomno_stablo(double S0, double K, double rf, double sigma, int nKoraci, double
T, double BS){
	printf("METODA BINOMNOG STABLA\n");
	double dt = T / nKoraci; //vremenski koraci u godinama

	//izracun koeficijenata u, d, q
	double u, d, q;
	//izracun preko q = 1/2
	q = 1.0 / 2;
	d = exp(rf * dt) * (1 - sqrt(exp(pow(sigma, 2) * dt) - 1));
	u = exp(rf * dt) * (1 + sqrt(exp(pow(sigma, 2) * dt) - 1));

	printf("\ta) Rizik-neutralno odredivanje cijene opcije\n");
	double P1 = 0.0;
	if (nKoraci > 12) //13! = 6 227 020 800
		printf("\t\tBroj koraka prevelik za racunanje faktorijele.");
	else {
		int m = 0;
		for (int i = nKoraci; i >= 0; i--) { //odredivanje m
			if (S0 * pow(u, i) * pow(d, (nKoraci - i)) < K) {
				m = i + 1;
				break;
			}
		}
		printf("\t\tm = %d\n", m);
		for (int i = 0; i < m; i++)
			P1 += binkoef(nKoraci, i) * pow(q, i) * pow(1 - q, nKoraci - i) *
(K - S0 * pow(u, i) * pow(d, (nKoraci - i)));
		P1 *= exp(-rf * nKoraci * dt);
		printf("\t\tP = %.5f", P1);
		if (BS > 0.0)
			printf("\t|P - BS| = %.0e", fabs(P1 - BS));
	}

	printf("\n\tb) Odredivanje cijene opcije korak po korak\n");
	double* V, * Vpom; //vrijednosti opcije u cvorovima
	V = (double*)malloc((nKoraci + 1) * sizeof(double));
```

```
        Vpom = (double*)malloc((nKoraci + 1) * sizeof(double));
        if (V == NULL || Vpom == NULL) {
                printf("Memory not allocated.\n");
                exit(0);
        }
        for (int i = nKoraci; i >= 0; i--) { //izracun vrijednosti opcija u dospijecu
                V[i] = payoff(S0 * pow(u, i) * pow(d, (nKoraci - i)), K);
                Vpom[i] = V[i];
        }
        for (int k = nKoraci - 1; k >= 0; k--) { //racun unazad
                for (int i = k; i >= 0; i--)
                        V[i] = exp(-rf * dt) * (q * Vpom[i + 1] + (1 - q) * Vpom[i]);
                for (int i = nKoraci; i >= 0; i--)
                        Vpom[i] = V[i];
        }
        printf("\t\tP = %.5f", V[0]);
        if (BS > 0.0) //ako se poziva funkcija za izracun koristenjem Black-Scholes
formule
                printf("\t|P - BS| = %.0e", fabs(V[0] - BS));
        printf("\n");
        free(V);
        free(Vpom);
}
```

C.3 Funkcija za Black-Scholes formulu

Funkcija računa cijenu put opcije korištenjem Black-Scholes formule te vjerojatnost da ista završi u novcu. Prvo se računaju koeficijenti d_1 i d_2, a potom se pozivanjem funkcije za CDF, navedene u dodatku C.4, računaju $\mathrm{CDF}(-d_1)$ te $\mathrm{CDF}(-d_2)$. U konačnici se računa cijena put opcije te se ispisuju cijena kao i vjerojatnost da opcija završi u novcu.

```
#include "CDF.c"

double Black_Scholes(double S0, double K, double rf, double sigma, double T, int N){
        printf("BLACK-SCHOLES FORMULA\n");
        double d1, d2, CDF1, CDF2, P;
        d1 = (log(S0 / K) + (rf + 0.5 * pow(sigma, 2)) * T) / (sigma * sqrt(T));
        d2 = (log(S0 / K) + (rf - 0.5 * pow(sigma, 2)) * T) / (sigma * sqrt(T));
        CDF1 = CDF(N, -d1);
        CDF2 = CDF(N, -d2);
        P = K * exp(-rf * T) * CDF2 - S0 * CDF1;
        printf("\tP = %.5f = BS\n", P);
        printf("\tPr(put zavrsava u novcu) = %.2f %%\n", CDF2*100.0);
        return P;
}
```

C.4 Funkcija za kumulativnu distribucijsku funkciju

U funkciji se provodi izračun kumulativne distribucijske funkcije za ulazni koeficijent. S obzirom da je integral CDF nepravi, napravljena je „cut-off" vrijednost uzevši u obzir oblik podintegralne funkcije. Račun se provodi metodom srednjih vrijednosti. U funkciji se računa i varijanca te se u konačnici ispisuju drugi korijen varijance te drugi korijen varijance srednjih vrijednosti. Glavnoj funkciji se vraća vrijednost CDF.

```
#define PI 3.14159265
```

```
#define a -5 //cut-off granica nepravog integrala

double fja(double x) { //podintegralna funkcija
	return (1 / sqrt(2 * PI)) * exp(-0.5 * x * x);
}

double CDF(int N, double b) {
	if (b <= -5 || b >= 5)	return 1.0;
	else {
		long idum = (-2578);
		double r, x;
		double Fn = 0.0;
		double sumkv = 0.0;
		double var2;
		for (int i = 0; i < N; i++) {
			r = ran1(&idum);
			x = a + r * (b - a);
			Fn += fja(x);
			sumkv += pow(fja(x), 2);
		}
		var2 = sumkv / N - pow(Fn / N, 2);
		Fn = (b - a) * Fn / N;
		printf("\tCDF: var = %f\t var/sqrt(N) = %.1e\n", sqrt(var2), sqrt(var2) /
sqrt(N));
		return Fn;
	}
}
```

C.5 Funkcija za numeričko integriranje

U funkciji je implementirana metoda numeričkog računanja za račun cijene put opcije. Prvo se računaju parametri distribucije, α i β^2. Potom se Box-Muller transformacijom transformira uzorak iz uniformne distribucije u uzorak iz normalne distribucije. Računa se cijena dionice u trenutku dospijeća, S_T, kao uzorak iz log-normalne distribucije. Očekivanje isplate računa se kao srednja vrijednost od N isplata, a cijena opcije računa se korištenjem rizik-neutralnog načela. Program ispisuje cijenu opcije, razliku u odnosu na referentnu vrijednost *BS*, drugi korijen varijance, te drugi korijen varijance srednjih vrijednosti.

```
#define PI 3.14159265

void MC_numericko_integriranje(double S0, double K, double rf, double sigma, int N,
double T, double BS){
	printf("MONTE CARLO NUMERICKO INTEGRIRANJE\n");
	long idum = (-2578);
	double U1, U2; //brojevi kao uzorci uniformne distribucije
	double Z0, Z1 = 0; //brojevi kao uzorci normalne distribucije
	double Z, alfa, beta2, Y, var2;
	double E = 0.0;
	double sumkv = 0.0;
	double P;
	alfa = log(S0) + rf * T - 0.5 * sigma * sigma * T;
	beta2 = sigma * sigma * T;
	for (int i = 1; i <= N; i++) {
		// Box-Muller transformacija
		if (i % 2 == 1) {
			U1 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
```

```
				U2 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
				Z0 = cos(2 * PI * U2);
				Z0 = Z0 * sqrt(-2 * log(U1));
				Z1 = sin(2 * PI * U2);
				Z1 = Z1 * sqrt(-2 * log(U1));
				Z = Z0;
			}
			else
				Z = Z1;
			Y = exp(sqrt(beta2) * Z + alfa);
			E += payoff(Y, K);
			sumkv += pow(payoff(Y, K), 2);
	}
	E = E / N;
	P = E * exp(-rf * T);
	var2 = sumkv / N - pow(E, 2);
	printf("\tP = %.5f", P);
	if (BS > 0.0) printf("\t|P - BS| = %.0e", fabs(P - BS));
	printf("\n");
	printf("\tvar = %f\t var/sqrt(N) = %.1e\n", sqrt(var2), sqrt(var2)/sqrt(N));
}
```

C.6 Funkcija za Monte Carlo metodu za binomno stablo

Ideja koda preuzeta je iz [9], algoritam 11. U kodu se provodi račun cijene put opcije korištenjem Monte Carlo simulacije prolaska kroz binomno stablo. Prvo se računaju i ispisuju vrijednosti vremenskog pomaka Δt, te koeficijenata q, u, d. Potom se, polazeći od početne cijene dionice, simulira rast ili pad cijene, do trenutka dospijeća. Računa se očekivanje isplate, te u konačnici cijena opcije kao i varijanca. Program ispisuje cijenu opcije, razliku u odnosu na referentnu vrijednost *BS*, drugi korijen varijance, te drugi korijen varijance srednjih vrijednosti.

```
MC_binomno_stablo(double S0, double K, double rf, double sigma, int nKoraci, int N,
double T, double BS){
	printf("MONTE CARLO BINOMNO STABLO\n");
	long idum = (-2578);
	double dt = T / nKoraci;
	//izracun koeficijenata u, d, q
	double u, d, q;
	//izracun preko q = 1/2
	q = 1.0 / 2;
	d = exp(rf * dt) * (1 - sqrt(exp(pow(sigma, 2) * dt) - 1));
	u = exp(rf * dt) * (1 + sqrt(exp(pow(sigma, 2) * dt) - 1));

	double E = 0.0; //ocekivanje
	double S, rand, var2;
	double sumkv = 0.0;
	double P;
	for (int i = 1; i <= N; i++) { //ponavljanje izracuna
		S = S0;
		for (int t = 1; t <= nKoraci; t++) {
			rand = ran1(&idum);
			if (rand < q) S = S * u;
			else   S = S * d;
		}
		E += payoff(S, K);
		sumkv += pow(payoff(S, K), 2);
	}
```

```
        E = E / N;
        P = E * exp(-nKoraci * rf * dt);
        var2 = sumkv / N - pow(E, 2);
        printf("\tP = %.5f", P);
        if (BS > 0.0) printf("\t|P - BS| = %.0e", fabs(P - BS));
        printf("\n");
        printf("\tvar = %f\t var/sqrt(N) = %.1e\n", sqrt(var2), sqrt(var2)/sqrt(N));
}
```

C.7 Funkcija za simulaciju GRW

U funkciji se simulira geometrijski slučajni hod kako bi se uzorkovale konačne cijene dionica S_T. Za izračun je potrebno uzorkovati iz normalne distribucije pa se koristi Box-Muller transformacija. Iz simulirane cijene dionice izračuna se isplata. Isplate se akumuliraju te se izračuna očekivanje isplate kao i varijanca. Cijena dionice dobije se diskontiranjem očekivanja isplate. Ispisuju se cijena opcije, razlika u odnosu na referentnu vrijednost *BS*, drugi korijen varijance, te drugi korijen varijance srednjih vrijednosti.

```
#define PI 3.14159265

void MC_simulacija_GRW(double S0, double K, double rf, double sigma, double nDani, int
N, double T, double BS) {
        printf("MONTE CARLO SIMULACIJA GRW\n");
        long idum = (-2578);
        double U1, U2, Z0, Z1 = 0.0; //brojevi kao uzorci uniformne i normalne dist.
        double dt = 1 / 365.0; //koraci od jednog dana
        double Zt, St, dSt;
        double E = 0.0; //ocekivanje
        double P = 0.0, sumkv = 0.0, var2; //cijena, suma kvadrata, kvadrat varijance
        for (int i = 1; i <= N; i++) {
                St = S0;
                for (int t = 1; t <= nDani; t++) {
                        // Box-Muller transformacija
                        if (t % 2 == 1) {
                                U1 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
                                U2 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
                                Z0 = cos(2 * PI * U2);
                                Z0 = Z0 * sqrt(-2 * log(U1));
                                Z1 = sin(2 * PI * U2);
                                Z1 = Z1 * sqrt(-2 * log(U1));
                                Zt = Z0;
                        }
                        else    Zt = Z1;
                        dSt = St * (rf * dt + sigma * sqrt(dt) * Zt);
                        St = St + dSt;
                }
                E += payoff(St, K);
                sumkv += pow(payoff(St, K), 2);
        }
        E = E / N;
        P = E * exp(-rf * T);
        var2 = sumkv / N - pow(E, 2);
        printf("\tP = %.5f", P);
        if (BS > 0.0) printf("\t|P - BS| = %.0e", fabs(P - BS));
        printf("\n");
        printf("\tvar = %f\t var/sqrt(N) = %.1e\n", sqrt(var2), sqrt(var2)/sqrt(N));
}
```

D. Kod za američku put opciju

U nastavku je naveden ključni dio koda (*main*) u kojem se pozivaju funkcije za izračun cijene američke put opcije korištenjem različitih metoda. U zaglavlju su uključene datoteke u kojima se nalaze funkcije za metode, te, kao i u kodu za europsku opciju, datoteka u kojoj je jednostavna funkcija koja vraća isplatu europske put opcije prikazana u dodatku C.1. Isplata europske i američke put opcije je jednaka pa se može koristiti ista funkcija. U zaglavlju je definiran broj koraka za model binomnog stabla, dok je broj šetača i broj koraka za Longstaff-Schwartz metodu potrebno definirati u zaglavlju funkcije za primjenu metode jer se koriste kao promjenjive dimenzije polja.

```
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>
#include <time.h>
#include <math.h>
#include "ran1.c"
#include "EU_put_payoff.c"
#include "AM_put_1_Binomno_stablo.c"
#include "AM_put_2_Longstaff-Schwartz.c"
#define   S0        1005.0 //trenutna cijena dionice
#define   K         1005.0 //cijena izvrsenja
#define   rf        0.1    //bezrizicna kamatna stopa
#define   sigma     0.3    //volatilnost
#define   nDani     100.0  //dospijece (u danima)
#define Koraci1     pow(10,4)     //broj vremenskih koraka za metodu binomnog stabla
//broj setaca i koraka za L-S metodu potrebno je definirati u zaglavlju funkcije

int main() {
       double T = nDani / 365.0; //dospijece u godinama
       binomno_stablo(S0, K, rf, sigma, Koraci1, T);
       Longstaff_Schwartz(S0, K, rf, sigma, T);
       return 0;
}
```

D.1 Funkcija za model binomnog stabla

Funkcija se razlikuje od one u dodatku C.2 po tome što se ne koristi rizik-neutralno određivanje cijene, te se u računu korak po korak mijenja način određivanja vrijednosti opcije u svakom čvoru. Tj. u svakom se čvoru vrijednost opcije dobivena korištenjem (4.14) uspoređuje s vrijednošću isplate u danom trenutku. Funkcija na kraju ispisuje cijenu opcije.

```
void binomno_stablo(double S0, double K, double rf, double sigma, int nKoraci, double
T) {
       printf("METODA BINOMNOG STABLA\n");
       double dt = T / nKoraci; //vremenski koraci u godinama
       //izracun koeficijenata u, d, q
       double u, d, q;
       q = 1.0 / 2;
       d = exp(rf * dt) * (1 - sqrt(exp(pow(sigma, 2) * dt) - 1));
       u = exp(rf * dt) * (1 + sqrt(exp(pow(sigma, 2) * dt) - 1));
       double* V, * Vpom; //vrijednosti opcije u cvorovima
       V = (double*)malloc((nKoraci + 1) * sizeof(double));
       Vpom = (double*)malloc((nKoraci + 1) * sizeof(double));
```

```
	if (V == NULL || Vpom == NULL) {
		printf("Memory not allocated.\n");
		exit(0);
	}
	for (int i = nKoraci; i >= 0; i--) { //izracun vrijednosti opcija u dospijecu
		V[i] = payoff(S0 * pow(u, i) * pow(d, (nKoraci - i)), K);
		Vpom[i] = V[i];
	}
	for (int k = nKoraci - 1; k >= 0; k--) { //racun unazad
		for (int i = k; i >= 0; i--)
			V[i] = max(K - S0 * pow(u, i) * pow(d, (k - i)), exp(-rf * dt) *
(q * Vpom[i + 1] + (1 - q) * Vpom[i]));
		for (int i = nKoraci; i >= 0; i--)	Vpom[i] = V[i];
	}
	printf("\tP = %.5f\n", V[0]);
	free(V);
	free(Vpom);
}
```

D.2 Funkcija za Longstaff-Schwartz metodu najmanjih kvadrata

U funkciji je implementiran račun cijene američke opcije korištenjem N šetača i n koraka. Prvo se postavljaju cijene svih šetača u $n + 1$ trenutaka korištenjem geometrijskog slučajnog hoda (3.13). Pritom se izvršava Box-Muller transformacija kako bi se dobili uzorci normalne distribucije. Nakon postavljanja cijena, računaju se isplate u trenutku dospijeća za sve šetače. Potom kreće petlja od trenutka $t = n - 1$ do $t = 1$. U petlji se u pomoćna polja X i Y spremaju cijene i isplate onih šetača koji su u novcu te se nad uređenim parovima provodi fit pozivanjem funkcije navedene u dodatku E. Potom se za one šetače koji su u danom trenutku u novcu računaju vrijednosti polinoma i uspoređuju se s vrijednostima isplate u tom trenutku kako bi se donijela odluka o izvršenju opcije ili nastavku vlasništva nad njom. U slučaju izvršenja opcije, mijenjaju se vrijednosti isplata. Nakon izlaska iz petlje po vremenskim koracima računa se cijena opcije i njena varijanca, te se na kraju ispisuju cijena opcije i drugi korijen varijance srednjih vrijednosti.

```
#include "Fit_Gauss_elimination.c"
#define PI 3.14159265
#define	N	1000
#define	n	100 //broj cvorova

void Longstaff_Schwartz(double S0, double K, double rf, double sigma, double T) {
	printf("LONGSTAFF-SCHWARTZ METODA\n");
	float dt = T / n; //vremenski koraci u godinama
	long idum = (-7621313);
	int i, j, k;		//i - indeks po granama, j - indeks po koracima
	float diskont = exp(-rf * dt);
	float U1, U2, Z0, Z1 = 0.0; //brojevi kao uzorci uniformne i normalne distr.
	float Zt, dSt;		// uzorak iz normalne distribucije, pomak cijene
	float St[N][n + 1];	//cijene u svim cvorovima
	float isplata[N][n];//vrijednost funkcije isplate u svim cvorovima
	double X[N], Y[N];	//pomocna polja
	float pol_val[N];	//vrijednosti fitanog polinoma u cvorovima
	double a2, a1, a0;	//koeficijenti fitanog polinoma
```

```
	float P = 0.0, sumkv = 0.0, var2; //cijena, suma kvadrata, kvadrat varijance

	for (i = 0; i < N; i++) //postavljanje cijena u svim cvorovima
		St[i][0] = S0; //t=0
	for (i = 0; i < N; i++) {
		for (j = 1; j < n + 1; j++) { //Box-Muller transformacija
			if (j % 2 == 1) {
				U1 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
				U2 = ran1(&idum); //uniformno generiranje brojeva od 0 do 1
				Z0 = cos(2 * PI * U2);
				Z0 = Z0 * sqrt(-2 * log(U1));
				Z1 = sin(2 * PI * U2);
				Z1 = Z1 * sqrt(-2 * log(U1));
				Zt = Z0;
			}
			else	Zt = Z1;
			dSt = St[i][j - 1] * (rf * dt + sigma * sqrt(dt) * Zt);
			St[i][j] = St[i][j - 1] + dSt;
		}
	}
	for (i = 0; i < N; i++) //izracun isplate u dospijecu
		isplata[i][n - 1] = payoff(St[i][n], K);

	for (j = 1; j < n; j++) { //petlja po koracima od t=n-1 do t=1
		for (i = 0; i < N; i++) { //petlja po granama
			if (payoff(St[i][n - j], K) > 0.0) { //provjera je li opcija ITM
				X[i] = St[i][n - j];
				Y[i] = 0.0;
				for (k = 1; k <= j; k++)
					Y[i] += pow(diskont, k) * isplata[i][n - j - 1 + k];
			}
			else { //ne uzimaju se u obzir situacije u kojima opcija nije ITM
				X[i] = 0.0;
				Y[i] = 0.0;
			}
		}
		fit(N, X, Y, &a2, &a1, &a0); //fitanje parova za koje je opcija ITM

		for (i = 0; i < N; i++) {
			if (X[i] != 0.0) //racun vrijednosti polinoma samo za ITM
				pol_val[i] = a2*pow(St[i][n-j], 2) + a1*St[i][n-j] + a0;
			else	pol_val[i] = 0.0;
			if (pol_val[i] == 0.0)	isplata[i][n - j - 1] = 0.0;
			else if (K - St[i][n - j] > pol_val[i]) { //iskoristavanje opcije
				for (k = 1; k <= j; k++) isplata[i][n - j + k - 1] = 0.0;
//izvrsenje - isplate u buducnosti postaju 0
				isplata[i][n - j - 1] = K - St[i][n - j];
			}
			else	isplata[i][n - j - 1] = 0.0; //odluka o ne izrvsavanju
		}
	}
	//suma svih diskontiranih isplata
	for (i = 0; i < N; i++) { //petlja po granama
		for (j = 1; j < n + 1; j++) { //petlja po koracima
			P += pow(diskont, j) * isplata[i][j - 1];
			sumkv += pow(pow(diskont, j) * isplata[i][j - 1], 2);
		}
	}
	P /= N;
	var2 = sumkv / N - pow(P, 2);
	printf("\tP = %.5f\tvar/sqrt(N) = %.2f\n", P, sqrt(var2) / sqrt(N));
}
```

E. Fit polinoma drugog stupnja korištenjem metode najmanjih kvadrata

Ideja koda kao i dio teoretske podloge preuzeti su s [8]. Neka je broj uređenih parova (x_i, y_i) na koje je potrebno izvršiti fit polinoma drugog reda označen s N, te neka su oznake u polinomu dane kao $p(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$. Korištenjem metode najmanjih kvadrata, problem izvršavanja fita svodi se na rješavanje sustava jednadžbi

$$\begin{bmatrix} N & \sum x_i & \sum x_i^2 \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 \\ \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \sum x_i^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i\, y_i \\ \sum x_i^2 y_i \end{bmatrix}.$$

Teoretska podloga za rješavanje sustava matrica uzeta je iz bilješki s kolegija „Programiranje u struci II“. Ideja je da se sustav jednadžbi svede na oblik $U \cdot x = b$ gdje je U gornja trokutasta matrica reda $n \times n$ i $u_{ii} \neq 0$, za sve $i = 1, \dots, n$, x je matrica rješenja, a b je matrica stupac čiji su elementi desna strana jednadžbi. Rješenje se može naći zamjenom unazad

$$x_i = b_i - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{u_{ij}x_j}{u_{ii}} \quad , \qquad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Za općenitu, ne-trokutastu matricu, koristi se metoda Gaussove eliminacije. Ideja metode je da se prva jednadžba dodaje drugima u svrhu poništavanja nepoznanice x_1 u preostalih $n-1$ jednadžbi. Onda se koristi druga jednadžba i dodaje sljedećim jednadžbama kako bi se eliminirala nepoznanica x_2 u preostalih $n-2$ jednadžbi. Tako se nakon $n-1$ oduzimanja dobije gornja trokutasta matrica. Pritom se sve operacije vrše na elementima matrice A i elementima matrice stupac b. Stoga je praksa uvođenje nove, proširene matrice dimenzije $n \times n + 1$, koja za prvih n stupaca ima elemente matrice A, dok se u zadnjem stupcu nalaze elementi matrice b. Nakon što se matrica svede na gornje trokutastu, moguće je primijeniti zamjenu unazad.

Međutim, u nekim se slučajevima može dogoditi da u koraku eliminacije element na dijagonali postane nula. Stoga se uvodi nova ideja – Gauss-Jordanova eliminacija u kojoj se stabilnost povećava korištenjem pivotiranja. Pivotiranje je postupak odabira optimalnog elementa matrice na dijagonali s kojim se vrši redukcija. Odabir pivota može se postići zamjenom redaka i stupaca. Pritom je nužno voditi računa o poretku pivotirajućih elemenata. Zamjena samo stupaca ili samo redaka naziva se parcijalno pivotiranje i ono se najčešće koristi.

U nastavku je navedena funkcija korištena u primjeni Longstaff-Schwartz metode za fit polinoma drugog stupnja. Fit se vrši primjenom prethodno objašnjenog načina.

```
void fit(int N, double xin[], double yin[], double* a2, double* a1, double* a0) {
	int i, j, k, N_ITM = 0; //brojaci, broj setaca za koje je opcija ITM
	double* x, * y; //polje cijena dionica, isplate za setace koji su ITM
	double X[5] = { 0.0 }; //polje za spremanje elemenata matrice s potencijama
	double Y[3] = { 0.0 }; //desna strana jednadzbe
	double B[3][4] = { 0.0 }; //prosirena matrica
	double A[3] = { 0.0 }; //matrica rjesenja
	double temp, term; //pomocna varijabla za pivotiranje, varijabla za Gaussovu el.
	x = (double*)malloc(N * sizeof(double));
	y = (double*)malloc(N * sizeof(double));
	if (x == NULL || y == NULL) {
		printf("Memory not allocated.\n");
		exit(0);
	}

	for (i = 0; i < N; i++) { //spremanje samo onih setaca koji su ITM
		if (xin[i] != 0.0) {
			x[N_ITM] = xin[i];
			y[N_ITM] = yin[i];
			N_ITM++;
		}
	}
	for (i = 0; i <= 4; i++) { //konstruiranje pomocnog polja X
		for (j = 0; j < N_ITM; j++)X[i] += pow(x[j], i);
	}
	for (i = 0; i <= 2; i++) { //konstruiranje matrice stupac Y
		Y[i] = 0;
		for (j = 0; j < N_ITM; j++)Y[i] += pow(x[j], i) * y[j];
	}
	for (i = 0; i <= 2; i++) { //kosntruiranje prosirene matrice
		for (j = 0; j <= 2; j++)   B[i][j] = X[i + j];
		B[i][3] = Y[i];
	}
	for (i = 0; i < 2; i++) {         //parcijalno pivotiranje
		for (k = i + 1; k < 3; k++) {
	//ako je abs() dijagonalnog elementa manja od elemenata ispod, zamijeni retke
			if (fabs(B[i][i]) < fabs(B[k][i])) {
				for (j = 0; j < 4; j++) {
					temp = B[i][j];
					B[i][j] = B[k][j];
					B[k][j] = temp;
				}
			}
		}
		for (k = i + 1; k < 3; k++) { //Gaussova eliminacija
			term = B[k][i] / B[i][i];
			for (j = 0; j < 4; j++)    B[k][j] = B[k][j] - term * B[i][j];
		}
	}
	for (i = 2; i >= 0; i--) { //zamjena unazad
		A[i] = B[i][3];
		for (j = i + 1; j < 3; j++)A[i] -= B[i][j] * A[j];
		A[i] = A[i] / B[i][i];
	}
	*a2 = A[2];
	*a1 = A[1];
	*a0 = A[0];
	free(x);
	free(y);
}
```