Funkcije u kurikulumu

Blažević, Katarina

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

KATARINA BLAŽEVIĆ

FUNKCIJE U KURIKULUMU

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2021.

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

FUNKCIJE U KURIKULUMU

DIPLOMSKI RAD

Neposredna voditeljica:
dr.sc. Ana Laštre

Studentica: Katarina Blažević

Mentor: doc.dr.sc. Goran Erceg

Split, rujan 2021.

Uvod

Pojam relacije je jedan od najvažnijih matematičkih pojmova. Strogo matematičko definiranje relacija zahtijeva visoku razinu apstraktnog mišljenja pa ih često pojednostavljeno shvaćamo kao pridruživanje.

Relacije imaju neka jako lijepa svojstva i omogućuju nam da uspostavimo odnose među skupovima. Funkcije su poseban i iznimno važan slučaj relacija. Očekivano je da tako važni pojmovi u matematici pronađu svoje mjesto u kurikulumu matematike, odnosno na nastavi u osnovnim i srednjim školama.

Cilj ovog diplomskog rada je istražiti kako i u kojoj količini su funkcije zastupljene u kurikulumu.

U prvom dijelu rada dana je teorijska podloga, odnosno teoremi i stroge matematičke definicije onih pojmova koji su vezani za funkcije i važni u kurikulumu. Teorijski dio nam služi kako bi usporedili definicije i teoreme s definicijama i teoremima s nastave te utvrdili njihovu korektnost.

U drugom dijelu rada navedeni su odgojno obrazovni ishodi iz kurikuluma za pojedini razred. Ishodi su iz domene Algebra i funkcije. U nastavku je detaljno opisano kad i kako se obrađuju funkcije po razredima.

Sadržaj

Poglavlje 1

1. Funkcije

1.1. Kartezijev umnožak

Definicija 1.1.1. *Neka su X i Y neprazni skupovi, te* $x \in X$ i $y \in Y$. *Uređeni par elemenata* x *i* y, *u oznaci* (x, y), *je skup*

$$(x, y) = \{\{x\}, \{x, y\}\}.$$

Važno svojstvo uređenih parova je da su uređeni parovi (x, y) i (x', y') jednaki ako i samo ako je $x = x'$ i $y = y'$.

Definicija 1.1.2. *Neka su X i Y neprazni skupovi. Skup* $\{(x, y): x \in X \wedge y \in Y\}$ *naziva se Kartezijev (ili direktni) umnožak skupova X i Y i označava s* $X \times Y$.

Skupovi X i Y nazivaju se faktori Kartezijeva umnoška.

Napomena Dogovorno se uzima da je $X \times Y = \emptyset$ ako i samo ako je barem jedan od skupova X i Y prazan skup.

Pojam Kartezijevog umnoška može se poopćiti na više od dva faktora. Kartezijev umnožak n skupova definiramo induktivno na sljedeći način

$$X_1 \times X_2 \times X_3 = (X_1 \times X_2) \times X_3$$

$$\vdots$$

$$X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1} \times X_n = (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1}) \times X_n$$

Elemente Kartezijevog umnoška skupova $X_1, X_2, \dots, X_n$ nazivamo uređenim n-torkama i označavamo $(x_1, \dots, x_n)$, gdje je $x_i \in X_i, i \in \{1, \dots, n\}$.

Napomena Ako je bilo koji od skupova $X_i, i \in \{1, \dots, n\}$, prazan, dogovorno se uzima da je $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_{n-1} \times X_n = \emptyset$.

Primjer 1.1.1. Poznati primjeri Kartezijevog umnoška koji se često spominju u nastavi matematike su:

- Koordinatna ravnina

$$\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y): x, y \in \mathbb{R}\}$$

- Koordinatni prostor

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z): x, y, z \in \mathbb{R}\}$$

1.2. Relacije

Kartezijev umnožak dva skupa je posebno zanimljiv jer se u tom skupu nalaze sve moguće kombinacije elemenata iz dana dva skupa. To nam omogućuje da promatramo odnose između elemenata danih skupova.

Na taj način dolazimo do pojma *relacije,* jednog od najvažnijih pojmova u matematici.

Pogledajmo sljedeći primjer kako bismo bolje shvatili ideju relacije. Neka je Ž skup svih žena, a D skup sve djece u Splitu. Očito je da između ta dva skupa možemo uspostaviti nekakav odnos. Primjerice, neke žene su majke pa su one povezane sa svojim djetetom iz skupa D (ne nužno jer dijete ne mora živjeti u Splitu). Jasno je da skup $Ž \times D$ sadrži uređene parove (žena, dijete), a skup uređenih parova koji sadrže majku i njezino dijete je podskup tog skupa. Taj podskup sadrži uređene parove (majka, dijete).

Sada je jasno da nas posebno zanimaju određeni podskupovi Kartezijevog umnoška.

Definicija 1.2.1. *Neka su X i Y skupovi. Dvočlana (ili binarna) relacija iz skupa X u skup Y je svaki podskup $R \subseteq X \times Y$. Ako je $X = Y$ i $R \subseteq X \times X$ onda kažemo da je R dvočlana (binarna) relacija na skupu X.*

Za element $x \in X$ kažemo da je u relaciji R s elementom $y \in Y$ ako je $(x, y) \in R$. Umjesto $(x, y) \in R$ obično se piše xRy i čitamo „x je u relaciji R s y".

Skup $\{x \in X: (\exists y \in Y)\ xRy\}$ nazivamo domena relacije R i označavamo s $D(R)$, a skup $\{y \in Y: (\exists x \in X)\ xRy\}$ nazivamo slika relacije R i označavamo s $K(R)$.

Neka je $R \subseteq X \times Y$. Ako je $X \neq Y$ onda kažemo da je R heterogena relacija, a ako je $X = Y$ onda kažemo da je R homogena relacija na skupu X.

Definicija 1.2.2. *Neka je $R \subseteq X \times Y$ neprazna relacija. Inverzna (suprotna) relacija relaciji R je relacija $R^{-1} \subseteq Y \times X$ definirana sa $R^{-1} = \{(y, x): (x, y) \in R\}$.*

Definicija 1.2.3. *Neka su* X, Y *i* Z *neprazni skupovi te* $R \subseteq X \times Y$ *i* $S \subseteq Y \times Z$. *Kompozicija relacija* R *i* S *je relacija* $S \circ R \subseteq X \times Z$ *definirana sa* $S \circ R = \{(x,z) \colon (\exists y \in Y)((x,y) \in R \wedge (y,z) \in S)\}$.

1.3. Funkcije

Važno je naglasiti da ćemo se u daljnjim poglavljima baviti binarnim relacijama i njih ćemo nazivati „relacije" (osim ako nije drugačije naglašeno).

Relacije mogu imati mnoga lijepa svojstva, posebno homogene relacije. Među tim lijepim svojstvima nalazimo refleksivnost, simetričnost, tranzitivnost, antisimetričnost, irefleksivnost, asimetričnost. Ta svojstva i relacije koje posjeduju ovakva svojstva su jako važan dio matematike, no nažalost nisu zastupljene u školskom kurikulumu pa za ovaj rad nisu bitne. Nas trenutno zanimaju svojstva koja mogu imati heterogene relacije, a samim time i homogene relacije kao poseban slučaj heterogenih. Ova svojstva se obrađuju u srednjim školama i koriste se pri rješavanju zadataka pa ćemo na njih posebno obratiti pažnju i pomoću njih definirati poseban slučaj relacije *funkcije.*

Definicija 1.3.1. *Neka su* X *i* Y *neprazni skupovi te* $R \subseteq X \times Y$. *Kažemo da je relacija R:*

a) *Injektivna (injekcija) ako iz* $(x,y) \in R$ *i* $(x',y) \in R$ *slijedi* $x = x'$.
b) *Funkcionalna ako iz* $(x,y) \in R$ *i* $(x,y') \in R$ *slijedi* $y = y'$.
c) *Totalna ako vrijedi* $(\forall x \in X)(\exists y \in Y) xRy$.
d) *Surjektivna (surjekcija) ako vrijedi* $(\forall y \in Y)(\exists x \in X) xRy$.

Definicija 1.3.2. *Neka su* X *i* Y *skupovi te* $f \subseteq X \times Y$ *relacija. Ako je relacija* f *funkcionalna i totalna onda kažemo da je* f *funkcija s domenom X i kodomenom Y.*

Drugim riječima, f je funkcija ako za svaki $x \in X$ postoji jedinstveni $y \in Y$ takav da $(x,y) \in f$.

Napomena. U nekim literaturama možemo pronaći manje formalnu definiciju funkcije koja kaže da je funkcija pridruživanje koje svakom elementu jednog skupa pridruži točno jedan element drugog skupa. Ovakva definicija se u strogom matematičkom kontekstu izbjegava zbog pojma *pridruživanja* koji nigdje nije strogo definiran. Tada koristimo zapis $f \colon X \to Y$ ili funkciju zapisujemo kao uređenu trojku (X, Y, f). Funkcija se na nastavi definira kao pridruživanje.

Razumijevanje navedenih svojstava i definicije funkcije nužno je da bi učenici razumjeli korake pri traženju domene funkcije i rješavanju sličnih zadataka. Čest je slučaj da učenici samo zapišu „pravila“ pomoću kojih dolazimo do domene, no ne razumiju zašto stvar ne bi funkcionirala kad bi „problematična mjesta“ ostala u domeni. Ne razumiju da takva relacija ne bi bila totalna pa samim time ni funkcija.

Nakon što smo definirali funkciju uvesti ćemo uobičajene oznake koje se koriste kad je dana relacija funkcija.

Za funkciju umjesto $f \subseteq X \times Y$ pišemo $f: X \to Y$. Umjesto $(x, y) \in f$ pišemo $f(x) = y$ te element x nazivamo argumentom funkcije, a element y slikom elementa x. Domenu funkcije f označavamo sa D_f.

Već smo spominjali kompoziciju relacija u prethodnom poglavlju. Sada ćemo nešto reći o kompoziciji funkcija.

Teorem 1.3.1. Neka su relacije $f \subseteq X \times Y$ i $g \subseteq Y \times Z$ funkcije. Tada je i kompozicija $g \circ f \subseteq X \times Z$ funkcija.

Dokaz. Pokažimo prvo da je $g \circ f$ totalna. Neka je $x \in X$ proizvoljan. f je funkcija pa postoji $y \in Y$ takav da je $(x, y) \in f$. Nadalje, g je funkcija pa postoji $z \in Z$ takav da je $(y, z) \in g$. Slijedi da je $(x, z) \in g \circ f$ čime je dokazano da je kompozicija funkcija f i g totalna.

Pokažimo još da je $g \circ f$ funkcionalna. Neka su $(x, z) \in g \circ f$ i $(x, z') \in g \circ f$. Tada postoje y i y' takvi da je $(x, y) \in f$, $(x, y') \in f$, $(y, z) \in g$, $(y', z') \in g$. Kako su f funkcionalna slijedi da je $y = y'$, a kako je i g funkcionalna slijedi konačno $z = z'$ čime je dokazana funkcionalnost kompozicije, a time i tvrdnja teorema.

■

Napomena Iz prethodnog dokaza se lako vidi da je $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Za kompozicije funkcija vrijedi:

- $g \circ f \neq f \circ g$ (nije komutativna)
- $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$ (asocijativna)

U nastavku ćemo definirati poseban slučaj funkcije koji igra važnu ulogu u svijetu funkcija. Govoriti ćemo o bijekciji o kojoj učenici slušaju u srednjoj školi, a omogućuje nam da uvedemo pojam inverzne funkcije.

Definicija 1.3.3. *Za funkciju kažemo da je bijekcija ako je injektivna i surjektivna.*

Napomena Lako se dokaže da je kompozicija dviju bijekcija isto bijekcija.

Teorem 1.3.2. Neka je dana funkcija $f: X \to Y$. Relacija f^{-1} je funkcija ako i samo ako je f bijekcija.

Dokaz. Pretpostavimo da je f^{-1} funkcija. Treba dokazati da je tada f bijekcija.

Injektivnost: Neka su $(x,y) \in f$ i $(x',y) \in f$. Tada su $(y,x) \in f^{-1}$ i $(y,x') \in f^{-1}$. Kako je f^{-1} funkcija, slijedi da je $x = x'$ čime je dokazana injektivnost.

Surjektivnost: Neka je $y \in Y$ proizvoljan. f^{-1} je funkcija pa postoji $x \in X$ takav da je $(y,x) \in f^{-1}$ iz čega slijedi $(x,y) \in f$ pa je f surjekcija.

Slijedi da je f bijekcija.

Obratno, pretpostavimo da je f bijekcija. Treba dokazati da je f^{-1} funkcija.

Funkcionalnost: Neka su $(y,x) \in f^{-1}$ i $(y,x') \in f^{-1}$. Tada su $(x,y) \in f$ i $(x',y) \in f$ pa je $x = x'$ jer je f bijekcija.

Totalnost: Neka je $y \in Y$ proizvoljan. f je bijekcija pa postoji $x \in X$ takav da je $(x,y) \in f$, dakle $(y,x) \in f^{-1}$ pa je teorem dokazan.

■

Napomena Može se pokazati da je u tom slučaju i f^{-1} bijekcija.

Primjer 1.3.1. Identiteta na skupu X $id_X : X \to X$ je funkcija koja svakom elementu iz skupa X pridruži samog sebe, odnosno $id_X(x) = x, x \in X$. Lako se provjeri da je ova funkcija ujedno i bijekcija. Ona ima vrlo zanimljiva svojstva. Naime, za proizvoljnu funkciju $f: X \to Y$ vrijedi $f \circ id_X = f \;\; i \;\; id_Y \circ f = f$.

Sljedeći teorem će nam dati moćni alat za traženje inverza zadane funkcije.

Teorem 1.3.3. Neka je $f: X \to Y$ bijekcija. Vrijedi $f \circ f^{-1} = id_Y$ i $f^{-1} \circ f = id_X$.

Dokaz. Iz Teorema 1.3.1. i Teorema 1.3.2. slijedi da su kompozicije $f \circ f^{-1}$ i $f^{-1} \circ f$ funkcije, a iz prethodne dvije Napomene možemo zaključiti da su i bijekcije. Neka su $x \in X \; i \; y \in Y$ proizvoljni. Vrijedi:

$(f \circ f^{-1})(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = y$ ($f \; i \; f^{-1}$ bijekcije) = $id_Y(y)$ pa je $f \circ f^{-1} = id_Y$.

$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = x = id_X(x)$ pa je $f^{-1} \circ f = id_X$.

■

Napomena Može se pokazati da je f^{-1} jedinstvena funkcija s ovim svojstvom.

Neke funkcije koje nisu bijekcije možemo „srezati“ da postanu bijekcije. Tada govorimo o restrikciji funkcije.

Definicija 1.3.4. *Funkcija g je restrikcija (suženje) funkcije f ako vrijedi* $D(g) \subseteq D(f) \; i \; \big(\forall x \in D(g)\big) g(x) = f(x)$ *i pišemo* $g = f|_{D(g)}$.

Primjer 1.3.2. Kvadratna funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana s $f(x) = x^2$ nije injekcija pa prema tome nema inverznu funkciju. Ipak, moguće je definirati inverz na restrikciji $g = f|_{[0,+\infty\rangle}$. Inverzna funkcija funkcije g je $g^{-1}: [0, +\infty\rangle \to [0, +\infty\rangle$ definirana s $f(x) = \sqrt{x}$.

1.4. Graf funkcije

Naglašavam da se u ovom poglavlju bavimo isključivo realnim funkcijama realne varijable, odnosno funkcijama oblika $f: X \to \mathbb{R}$ gdje je $X \subseteq \mathbb{R}$.

Definicija grafa funkcije se poklapa s definicijom funkcije u ovom radu. Inače, na nastavi se funkcije definiraju kao „pridruživanja“ pa se graf definira posebno kao skup svih točaka (x, y) gdje je x iz domene, a za y vrijedi $f(x) = y$ i označavamo ga s Γ_f.

Sa grafovima osnovnih elementarnih funkcija (Poglavlje 1.5.) učenici se susreću još na početku srednje škole. Tu su pravila vrlo jasna i nije teško nacrtati traženi graf.

U četvrtom razredu srednje škole u igru ulaze složenije funkcije pa se stvar malo zakomplicira. Važno je napomenuti da se na nastavi prethodno obrade limesi i derivacije i da su učenici dobro upoznati s njima (u ovom radu se nećemo baviti njima, ali ćemo ih koristiti).

U ovom poglavlju ćemo definirati pojmove i iskazati teoreme (bez dokaza) koji će nam uvelike pomoći da nacrtamo graf bilo koje realne funkcije.

Napomena U poglavlju 1.3. smo definirali inverznu funkciju. Obzirom na to da je graf funkcije $f: X \to Y$ zapravo skup uređenih parova iz $X \times Y$, kao i sama funkcija, lako se vidi da su grafovi funkcije f i njenog inverza f^{-1} simetrični obzirom na pravac $y = x$.

Pri crtanju grafa dane funkcije prvi korak je odrediti domenu funkcije, a zatim nultočke.

Definicija 1.4.1. *Neka je $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, funkcija. Ako za $x_0 \in X$ vrijedi $f(x_0) = 0$ onda kažemo da je x_0 nultočka funkcije f.*

Zatim određujemo tok funkcije (intervale rasta, pada, lokalne ekstreme, konveksnost, konkavnost i točke infleksije).

Definicija 1.4.2. *Za funkciju $f: X \to \mathbb{R}$ gdje je $X \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je na skupu X*

a) *Rastuća ako* $(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 < x_2 \to f(x_1) \leq f(x_2)$

b) *Strogo rastuća ako* $(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 < x_2 \to f(x_1) < f(x_2)$

c) *Padajuća ako* $(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$

d) *Strogo padajuća ako* $(\forall x_1, x_2 \in X) x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Za rastuće ili padajuće funkcije kažemo da su monotone, a za strogo rastuće i strogo padajuće kažemo da su strogo monotone funkcije.

O monotonosti funkcije puno nam mogu reći vrijednosti derivacije u točki. Naime, derivacija funkcije u danoj točki predstavlja nagib tangente na tu funkciju u danoj točki. Poveznica monotonosti i derivacije je iskazana u sljedećem teoremu.

Teorem 1.4.1. Neka je funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna na intervalu $I \subseteq X$. Funkcija f je rastuća (padajuća) na I ako i samo ako je $f'(x) \geq 0$ $(f'(x) \leq 0)$ za svaki $x \in I$.

Korolar 1.4.1. Neka je funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna na intervalu $I \subseteq X$. Ako je $f'(x) > 0$ $(f'(x) < 0)$ za svaki $x \in I$, onda je funkcija f strogo rastuća (strogo padajuća) na I.

Definicija 1.4.3. *Kažemo da funkcija* $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, *ima u točki* $x_0 \in X$ *lokalni minimum (lokalni maksimum) ako postoji* $\varepsilon > 0$ *i interval* $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle \subseteq X$ *tako da je* $f(x_0) < f(x)$ $(f(x_0) > f(x))$ *za svaki* $x \in \langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle \setminus \{x_0\}$. *Pritom vrijednost* $f(x_0)$ *nazivamo lokalnim ekstremom, a točku* x_0 *točkom lokalnog ekstrema.*

Odredimo li tok funkcije na intervalima, možemo lako zaključiti u kojim točkama funkcija ima lokalni minimum (maksimum). Ipak, u praksi postoje lakši načini da pronađemo točke u kojima bi funkcija mogla imati lokalni ekstrem.

Definicija 1.4.4. *Neka je* $X \subseteq \mathbb{R}$ *interval i* $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ *funkcija. Kažemo da je točka* $x_0 \in X$ *stacionarna točka funkcije f ako je f neprekidna u* x_0 *i uz to je* $f'(x_0) = 0$.

Teorem 1.4.2. (Dovoljan uvjet za lokalni ekstrem) Neka je funkcija $f: X \rightarrow \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$, derivabilna na intervalu $I \subseteq X$ i dvaput derivabilna u svojoj stacionarnoj točki $x_0 \in I$. Ako je $f''(x_0) \neq 0$ onda f ima u x_0 lokalni ekstrem (lokalni minimum za $f''(x_0) > 0$, a lokalni maksimum za $f''(x_0) < 0$).

Sada imamo sve što nam je potrebno da bi odredili lokalne ekstreme funkcije.

Ipak, kad ispitamo monotonost i odredimo točke ekstrema, još uvijek ne znamo skicirati graf funkcije. Potrebno je provjeriti gdje je funkcija konveksna (konkavna) i odrediti točke infleksije.

Definicija 1.4.5. *Neka je A konveksan podskup skupa* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Kažemo da je funkcija* $f: X \to \mathbb{R}$ *konveksna na A ako ima sljedeće svojstvo:*

$$(\forall x_1, x_2 \in A)(\forall t \in [0,1])\ f\big((1-t)x_1 + tx_2\big) \leq (1-t)f(x_1) + tf(x_2).$$

Ako za $x_1 \neq x_2$ *i* $t \in \langle 0,1 \rangle$ *vrijedi stroga nejednakost, onda kažemo da je funkcija f strogo konveksna na A.*

Definicija 1.4.6. *Neka je* $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, *i neka je* $A \subseteq X$ *konveksan podskup od X. Kažemo da je funkcija f (strogo) konkavna na A ako je funkcija* $-f: X \to \mathbb{R}$ *(strogo) konveksna na A.*

Teorem 1.4.3. Neka je funkcija $f: X \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$, dvaput derivabilna na intervalu $I \subseteq X$. Funkcija f je konveksna (konkavna) na I ako i samo ako je $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) za svaki $x \in I$.

Definicija 1.4.7. *Kažemo da funkcija* $f: X \to \mathbb{R}$, $X \subseteq \mathbb{R}$, *ima u točki* $x_0 \in X$ *infleksiju (pregib) ako postoji* $\varepsilon > 0$ *i interval* $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon \rangle \subseteq X$ *tako da je* f *na* $\langle x_0 - \varepsilon, x_0 \rangle$ *strogo konkavna, a na* $\langle x_0, x_0 + \varepsilon \rangle$ *strogo konveksna ili obratno. Točku* $(x_0, f(x_0))$ *nazivamo točkom infleksije grafa funkcije f.*

Dakle, graf u točki $(x_0, f(x_0))$ prelazi iz konveksnog u konkavni oblik ili obratno. Jedan važan primjer gdje je iznimno važno odrediti točke infleksije je funkcija $f(x) = x^3$ jer funkcija na cijeloj domeni raste, ali ima točku infleksije u ishodištu pa se u toj točki mijenja tok funkcije.

Teorem 1.4.4. Neka je funkcija $f: X \to \mathbb{R}, X \subseteq \mathbb{R}$, dvaput derivabilna na intervalu $I \subseteq X$ i triput derivabilna u točki $x_0 \in I$. Ako je $f''(x_0) = 0\ i\ f'''(x_0) \neq 0$ onda f ima u x_0 infleksiju.

Da bismo skicirali graf funkcije potrebno je provjeriti ima li asimptota (pravci kojima se funkcija približava, ali ih nikad ne dotakne).

Definicija 1.4.8. *Neka je* $X \subseteq \mathbb{R}$ *neomeđen skup i* $f: X \to \mathbb{R}$ *funkcija. Kažemo da graf funkcije f ima za desnu (lijevu) asimptotu pravac* $y = kx + l$ *ako je*

$$\lim_{x \to +\infty} |f(x) - (kx + l)| = 0 \quad (\lim_{x \to -\infty} |f(x) - (kx + l)| = 0)$$

Ako je pritom $k = 0$ *govorimo o horizontalnoj asimptoti, a ako je* $k \neq 0$ *o kosoj asimptoti. Ako je* x_0 *gomilište skupa X,* $x_0 \notin X$ *i* $\lim_{x_0^+} f = \pm\infty$ $(\lim_{x_0^-} f = \pm\infty)$ *onda kažemo da je pravac* $x = x_0$ *desna (lijeva) vertikalna asimptota grafa funkcije f.*

U slučaju da je pravac $y = kx + l$ kosa ili horizontalna asimptota vrijedi

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} \ i\ l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx).$$

Definirati ćemo još nekoliko pojmova koji nam mogu uvelike pomoći pri crtanju grafa funkcije.

Definicija 1.4.9. *Za funkciju f kažemo da je periodična ako postoji realan broj $T > 0$ takav da za sve $x \in D_f$ vrijedi $x + T \in D_f$ i $f(x) = f(x + T)$. T zovemo period funkcije f, a najmanji pozitivni period zovemo temeljni period funkcije f.*

Definicija 1.4.10. *Za funkciju f kažemo da je parna ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = f(x)$. Ako za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(-x) = -f(x)$ kažemo da je f neparna funkcija.*

Napomena Graf parne funkcije je osnosimetričan obzirom na os y, a graf neparne funkcije je centralnosimetričan obzirom na ishodište.

Očito je da će nam graf periodične funkcije biti znatno lakše nacrtati jer, ugrubo rečeno, odredimo dio grafa (ovisno o temeljnom periodu) i samo ponavljamo taj dio.

1.5. Elementarne funkcije

U nastavi se učenici susreću s nekim elementarnim funkcijama već u prvom razredu srednje škole. U ovom poglavlju ćemo definirati elementarne funkcije i detaljno opisati osnovne elementarne funkcije od kojih se one sastoje.

Osnovne elementarne funkcije su:

- Konstanta
- Eksponencijalne funkcije
- Logaritamske funkcije
- Opća potencija
- Trigonometrijske funkcije
- Ciklometrijske funkcije

Definicija 1.5.1. *Elementarne funkcije su funkcije koje se mogu dobiti iz osnovnih elementarnih funkcija ili njihovih restrikcija pomoću konačnog broja zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i konačnog broja njihovih kompozicija.*

Elementarne funkcije se dijele na:

- Polinome
- Racionalne funkcije
- Algebarske funkcije
- Transcendentne funkcije

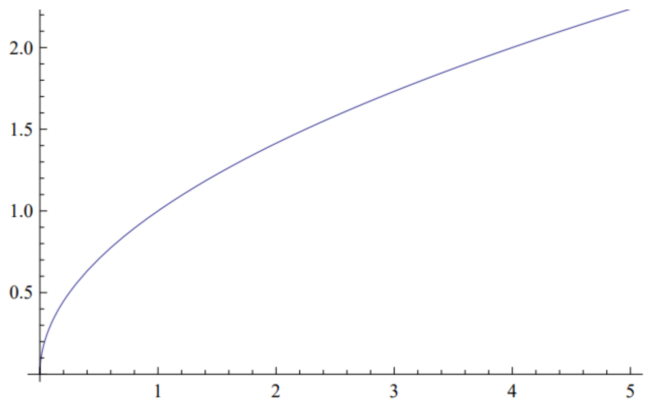
Konstanta i opća potencija

Definicija 1.5.2. *Funkciju $f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$ nazivamo konstantom.*

Graf ove funkcije je pravac $y = c$ i paralelan je sa x-osi.

Definicija 1.5.3. *Funkcija $f: X \to \mathbb{R}$ definirana izrazom $f(x) = x^r, r \in \mathbb{R}$ za sve $x \in X$, zove se opća potencija.*

Posebno, $f(x) = x^q, q \in \mathbb{Q}$, zove se iracionalna funkcija. Iracionalna funkcija koja se obrađuje na nastavi je $f(x) = \sqrt{x}$ gdje je $x \in [0, +\infty\rangle$ (Slika 1)



Slika 1

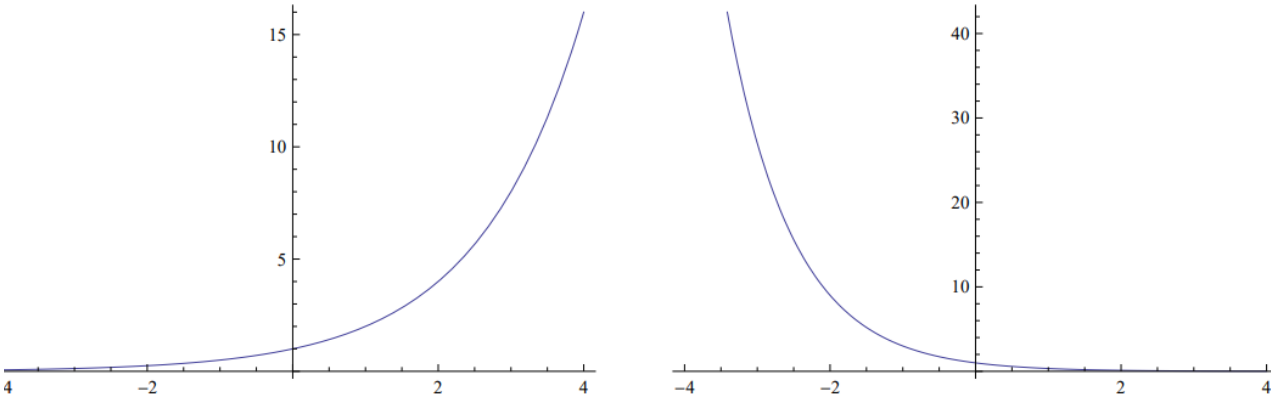
Ova funkcija je inverzna kvadratnoj funkciji ako kvadratnu funkciju restringiramo na $[0, +\infty\rangle$ jer kvadratna funkcija na $\mathbb{R}$ nije bijekcija pa nema inverz.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Definicija 1.5.4. *Funkcija* $f: \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ *definirana izrazom* $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ *naziva se eksponencijalna funkcija, a se naziva baza, a x eksponent.*

Eksponencijalna funkcija je strogo rastuća za a>1, a strogo padajuća za 0<a<1 i nema nultočaka (Slika 2).

Slika 2



$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

Eksponencijalna funkcija je bijekcija što znači da postoji jedinstvena funkcija koja joj je inverzna. Tu funkciju nazivamo *logaritamska funkcija*.

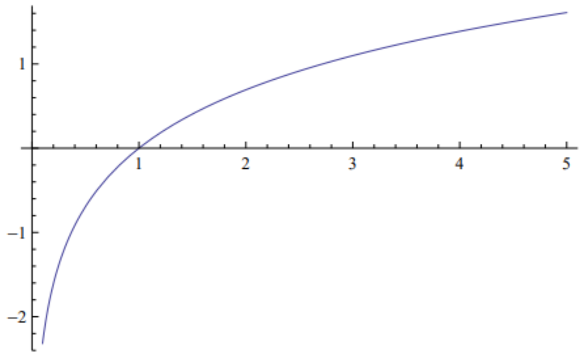
$$\log_a : \langle 0, +\infty \rangle \to \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1, \qquad \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

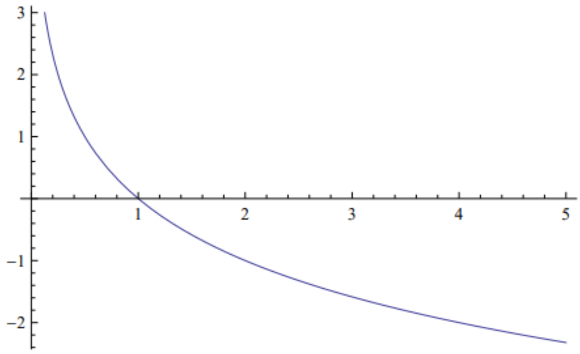
Vrijedi $\log_a a^x = x$ i $a^{\log_a x} = x$.

Posebno važni su logaritam s bazom 10 (dekadski logaritam, oznaka log) i logaritam s bazom e (prirodni logaritam, oznaka ln).

Logaritamska funkcija je također bijekcija. Slično kao i eksponencijalna funkcija, logaritamska funkcija je rastuća za $a > 1$ i padajuća za $0 < a < 1$ i ima jednu nultočku $N(1,0)$ jer je $\log_a 1 = 0$.

Slika 3



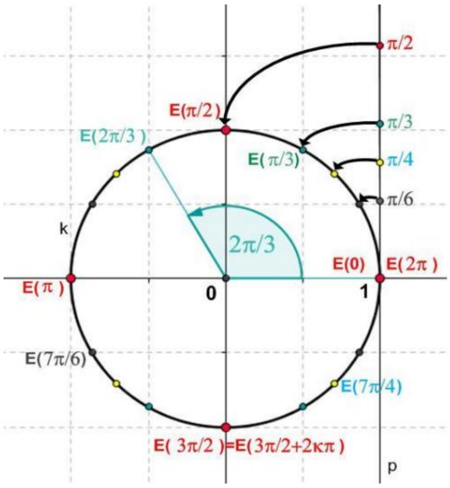


$a > 1$ $\qquad$ $0 < a < 1$

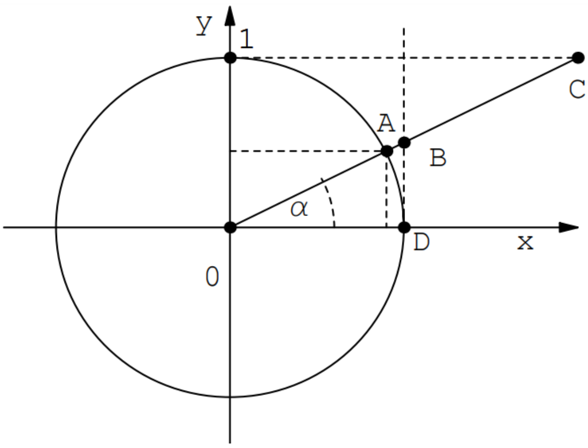
Trigonometrijske funkcije

Trigonometrijske funkcije su većini učenika najteže funkcije s kojima se susreću u školi. One su po mnogočemu posebne i drugačije od drugih funkcija koje smo dosad spomenuli u ovom poglavlju. Imaju razna lijepa svojstva od kojih se jedno posebno ističe, a to je periodičnost. Periodičnost je posebna jer prethodne elementarne funkcije nisu imale i to je učenicima nešto novo. Pri rješavanju zadataka pojavljuje se period čiju važnost i funkciju učenici često ne uočavaju. Iz tog razloga je iznimno važno da učenici usvoje značenje, definiciju, graf i svojstva trigonometrijskih funkcija.

Prvo što se definira je eksponencijalno preslikavanje $E: \mathbb{R} \to k(0,1)$ koje svakom realnom broju pridruži točku na jediničnoj kružnici $k(0,1)$. Ovo se preslikavanje još naziva namatanje pravca na kružnicu i to je upravo ono što radimo. Promotrimo Sliku 4. Pravac koji namatamo je paralelan s y-osi i prolazi kroz točku (1,0). Svakom realnom broju x pridružimo točku na kružnici k tako da duljina kružnog luka od točke (1,0) do E(x) bude jednaka $|x|$ (primijetimo da je tada i mjera kuta $\measuredangle E(0)OE(x)$ u radijanima jednaka x). Na slici je prikazano namatanje pozitivnog dijela pravca, ali negativan dio bismo preslikali analogno samo na drugu stranu (u smjeru kazaljke na satu). Kako je pravac beskonačan, a jedinična kružnica ima opseg jednak 2π, logično je da će se u svaku točku na kružnici smjestiti beskonačno mnogo točaka pravca i to u razmaku od 2π, odnosno vrijedi $E(x) = E(x + 2\pi)$ za sve realne brojeve x. Iz ovoga zaključujemo da je E periodično preslikavanje s temeljnim periodom 2π.



Slika 4



Slika 5

Definiramo

$$E(\alpha) = A = (\cos\alpha\,, \sin\alpha)$$

$$B = (1, tg\alpha)$$

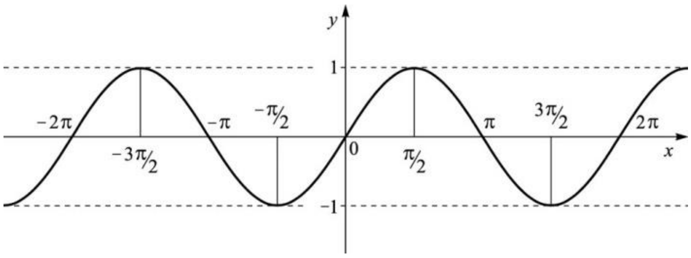
$$C = (ctg\alpha, 1)$$

a sa slike se lako vidi (sličnost trokuta) da je $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ (u udžbenicima su tangens i kotangens definirani na ovaj način).

Sinus, kosinus, tangens i kotangens se više ne gledaju kao omjeri stranica pravokutnog trokuta već kao funkcije. Zapišimo ih formalno.

$$\sin: \mathbb{R} \to [-1,1]$$

Funkcija sinus je periodična s periodom $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, a temeljni period je 2π. Njezin graf lako možemo nacrtati koristeći poznate vrijednosti i periodičnost (Slika 6). Sinus je neparna funkcija jer vrijedi $\sin(-x) = -\sin x$ (slijedi iz toga da su točke $E(x)$ i $E(-x)$ simetrične obzirom na x-os).

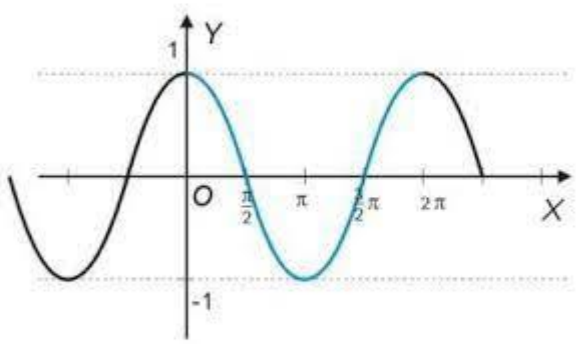


Slika 6 Sinusoida

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1,1]$$

Funkcija kosinus je također periodična s istim periodom kao i sinus. Za razliku od sinusa, kosinus je parna funkcija što se lako može vidjeti ako promotrimo $E(x)$ i $E(-x)$ na brojevnoj kružnici. Dakle, vrijedi $\cos(-x) = \cos x$.

Usporedimo li graf funkcije cos (Slika 7) i sinusoidu (Slika 6) primjećujemo da vrijedi $\sin x = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.



Slika 7

Najvažnija poveznica između sinusa i kosinusa je osnovni trigonometrijski identitet

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

kojeg se lako izvede direktnom primjenom Pitagorina poučka na pravokutni trokut sa Slike 5 (katete $\sin \alpha$ i $\cos \alpha$ i hipotenuza duljine 1).

Na nastavi se iskazuju i dokazuju adicijske formule. Budući da sve adicijske formule proizlaze jedna iz druge dovoljno je dokazati osnovni adicijski teorem za funkciju kosinus.

Teorem 1.5.1. *Vrijedi* $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Dokaz.

Promotrimo Sliku 8. Zapišimo koordinate danih točaka.

$A(\cos\beta, -\sin\beta)$ jer je sinus neparna funkcija.

$B(1,0)$, $C(\cos\alpha, \sin\alpha)$, $D(\cos(\alpha+\beta), \sin(\alpha+\beta))$

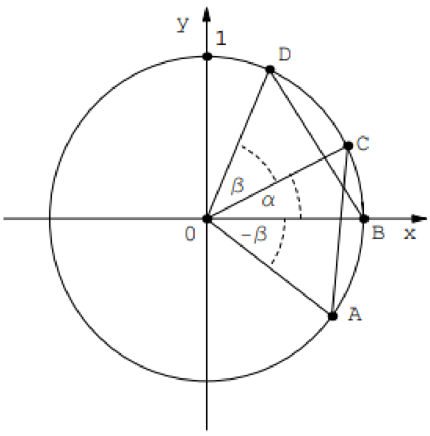
Prema S-K-S poučku trokuti $\triangle OAC$ i $\triangle OBD$ su sukladni pa je $|AC| = |BD|$. Primjenimo li formulu za udaljenost točaka imamo:

$$(\cos\alpha - \cos\beta)^2 + (\sin\alpha + \sin\beta)^2 = (1 - \cos(\alpha+\beta))^2 + (-\sin(\alpha+\beta))^2$$

$$\cos^2\alpha - 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\beta + \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\sin\beta + \sin^2\beta$$
$$= 1 - 2\cos(\alpha+\beta) + \cos^2(\alpha+\beta) + \sin^2(\alpha+\beta)$$

$$2 - 2\cos\alpha\cos\beta + 2\sin\alpha\sin\beta = 2 - 2\cos(\alpha+\beta)$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$



Slika 8

■

Definirajmo sad tangens i kotangens. Naime, kad smo ih definirali kao koordinate presječnih točaka na Slici 5 nismo uzeli u obzir slučaj kad te točke ne postoje. Naime, u tim slučajevima tangens (kotangens) ne možemo definirati pa te točke moramo izbaciti iz domene. Pogledajmo koje su to točke za tangens.

Presječna točka ne postoji kad se pravac $OE(\alpha)$ poklapa s y-osi. U tom slučaju točka $E(\alpha)$ leži na y-osi pa je $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\}$. Dakle, tangens nije definiran za elemente tog skupa pa je $tg \colon \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\right\} \to \mathbb{R}$. (Slika 10)

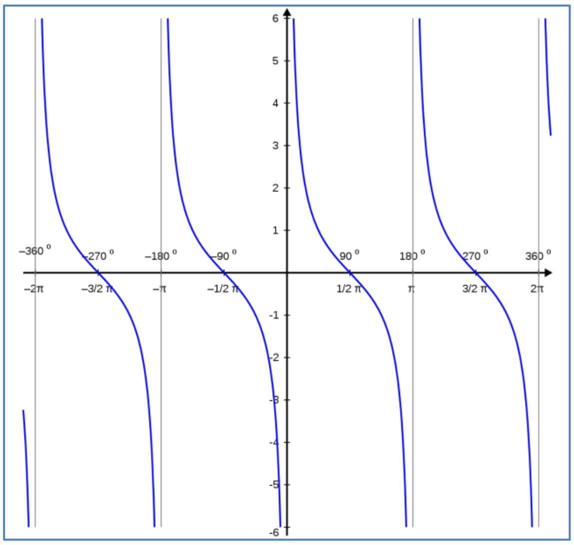
Na sličan način dobijemo da kotangens nije definiran na skupu $\{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\}$ (tamo gdje je $\sin\alpha = 0$) pa je $ctg \colon \mathbb{R} \backslash \{k\pi \colon k \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$. (Slika 9)

Tangens i kotangens su također periodične funkcije s temeljnim periodom $k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Lako se vidi da su tangens i kotangens neparne funkcije jer vrijedi

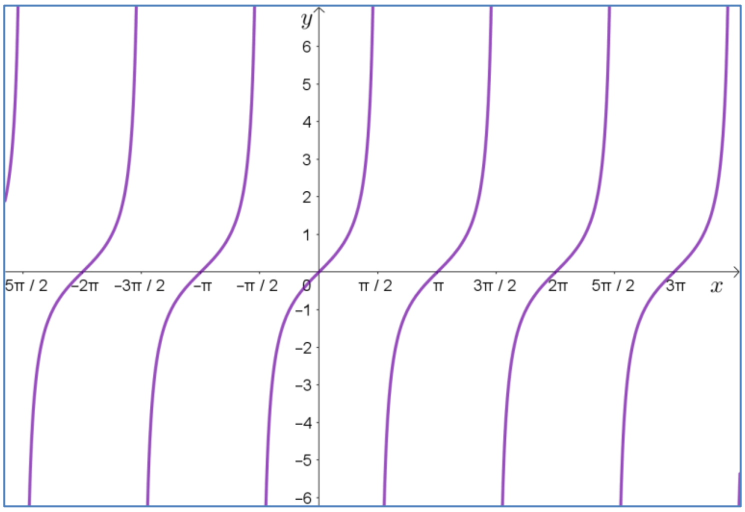
$$tg(-x) = -tgx \ i \ ctg(-x) = -ctgx$$

Očita poveznica tangensa i kotangensa koju valja istaknuti je identitet

$$ctgx = \frac{1}{tgx}, x \in D_{tg} \cap D_{ctg}$$



Slika 9



Slika 10

Iz adicijskog teorema o kosinusu proizlaze adicijski teoremi za sinus, tangens i kotangens koji se također izvode na nastavi. Izvode ćemo izostaviti iz ovog rada.

Ciklometrijske funkcije

Ciklometrijske funkcije su funkcije koje su inverzne trigonometrijskim funkcijama. Ipak, da bi došli do toga prvo moramo malo srediti naše trigonometrijske funkcije. Naime, sve one su surjekcije, ali su i periodične što automatski znači da nisu injektivne pa nisu ni bijekcije. Dakle, nemaju inverz. Iz tog razloga će inverzne funkcije ustvari biti inverzi restrikcija naših trigonometrijskih funkcija.

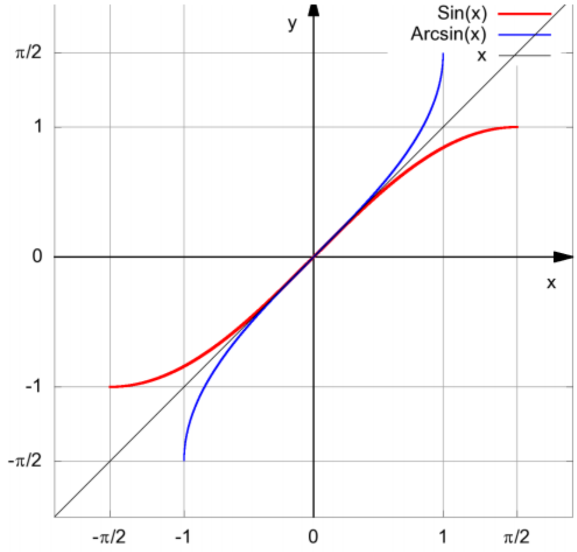
Funkciju sinus ćemo suziti na interval $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ jer je na tom intervalu injektivna i surjektivna pa i bijekcija. Naravno, mogli smo odabrati bilo koji drugi interval, ali ovo je najčešći i najzgodniji izbor zbog skiciranja grafa.

$$\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1,1]$$

Ova funkcija ima inverz i to je funkcija *arkus sinus*

$$\left(\sin|_{\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} = \arcsin: [-1,1] \to \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$$

Važno je naglasiti da su sinus i arkus sinus inverzne samo na intervalu $[-1,1]$ jer učenici često djeluju na sinus arkus sinusom u jednadžbama i izgube beskonačno mnogo rješenja jednadžbe.



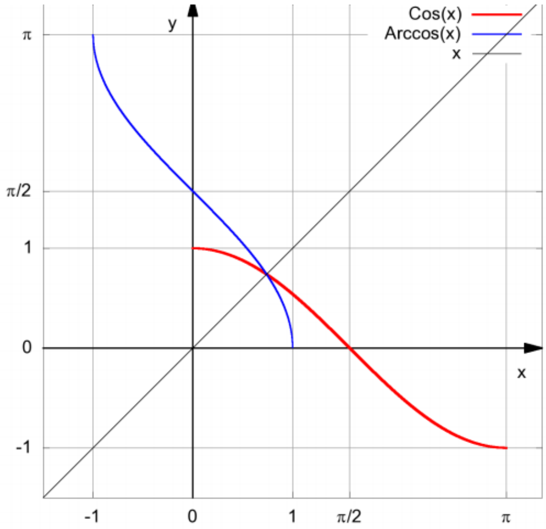
Slika 11

Analogno napravimo za ostale trigonometrijske funkcije (restringiramo ih na intervale na kojima su injektivne) pa imamo

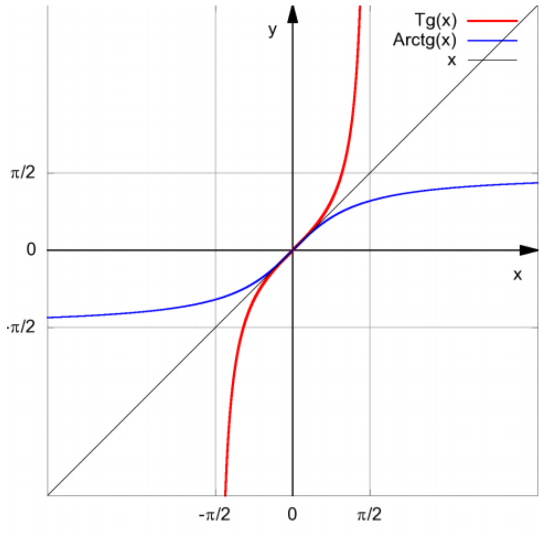
$\left(\cos|_{[0,\pi]}\right)^{-1} = \arccos: [-1,1] \to [0,\pi]$ (Slika 12)

$\left(\mathrm{tg}|_{\left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle}\right)^{-1} = \mathrm{arctg}: \mathbb{R} \to \left\langle-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right\rangle$ (Slika 13)

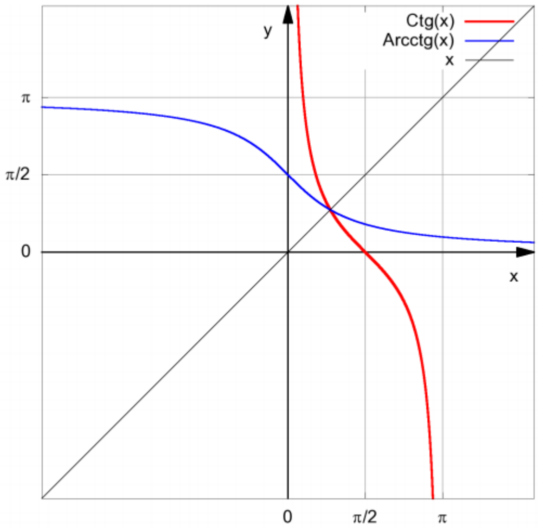
$\left(\mathrm{ctg}|_{\langle 0,\pi\rangle}\right)^{-1} = \mathrm{arcctg}: \mathbb{R} \to \langle 0,\pi\rangle$ (Slika 14)



Slika 12



Slika 13



Slika 14

Polinomi

Prve funkcije s kojima se učenici susreću su one najjednostavnije, polinomi.

Definicija 1.5.5. *Neka je* $n \in \mathbb{N}_0$ *i neka su* $a_0, \dots, a_n$ *realni brojevi. Funkcija* $p_n: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *definirana izrazom* $p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ *za sve* $x \in \mathbb{R}$ *zove se polinom. Brojeve* $a_0, \dots, a_n$ *nazivamo koeficijentima polinoma* p_n. *Ako je* $a_n \neq 0$ *onda kažemo da je polinom* p_n *stupnja n, broj* a_n *vodeći koeficijent polinoma* p_n, *a koeficijent* a_0 *još nazivamo i slobodnim* *koeficijentom. U slučaju da je* $a_n = 1$ *kažemo da je polinom* p_n *normiran. Svaki realni broj* $x \in \mathbb{R}$ *za koji je* $p_n(x) = 0$ *nazivamo nultočka polinoma* p_n.

Polinom oblika $p_n(x) = 0, x \in \mathbb{R}$, nazivamo nul-polinom i to je jedini polinom nedefiniranog stupnja.

Definicija 1.5.6. *Polinom stupnja 1 nazivamo linearna funkcija i zapisujemo u obliku* $f(x) = kx + l$, *gdje su k i l realni brojevi i* $k \neq 0$. *Vodeći koeficijent nazivamo koeficijentom smjera, a slobodni koeficijent predstavlja odsječak na y-osi.*

Graf linearne funkcije je pravac $y = kx + l$. Pravac je rastući za k>0, a padajući za k<0. Linearna funkcija ima jednu i samo jednu nultočku.

Definicija 1.5.7. *Polinom stupnja 2 nazivamo kvadratna funkcija i zapisujemo u obliku* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *gdje su* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *i* $a \neq 0$.

Nultočke kvadratne funkcije računamo po formuli $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, gdje radikand zovemo diskriminantom i označavamo $D = b^2 - 4ac$.

Ova jednadžba, ovisno o diskriminanti, može imati dva, jedno ili nula rješenja. Prema tome, kvadratna funkcija može imate dvije, jednu ili nula nultočaka.

Graf kvadratne funkcije je parabola $y = ax^2 + bx + c$ čija je os paralelna y-osi. Kada je a>0 parabola je okrenuta prema gore, a za a<o parabola je okrenuta prema dolje.

Tjeme parabole je točka $T(x_0, y_0)$ gdje je $x_0 = -\frac{b}{2a}$ *i* $y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}$. To je točka u kojoj kvadratna funkcija ima ekstrem (minumum za a>0, a maksimum za a<0).

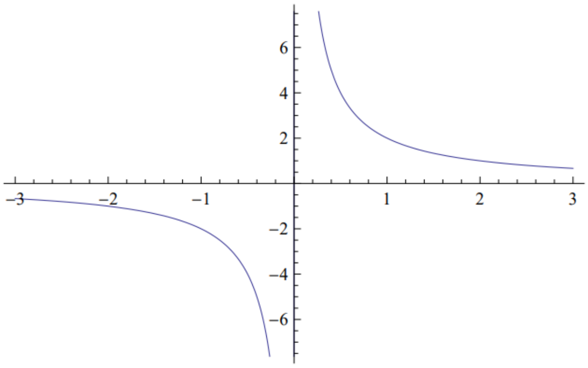
Polinomi višeg stupnja nisu toliko zastupljeni u školskoj matematici pa ih nije potrebno detaljno opisivati.

Racionalne funkcije

Definicija 1.5.8. *Funkcija* $f: X \to \mathbb{R}$ *koja je za sve* $x \in X$ *definirana izrazom* $f(x) = \frac{p_n(x)}{q_m(x)}$ *pri čemu je* $X = \{x \in \mathbb{R}: q_m(x) \neq 0\}$, p_n *i* q_m *su polinomi stupnja n i m redom te* q_m *nije nul-polinom, naziva se racionalna funkcija. Ako je n<m f je prava racionalna funkcija. U suprotnom se naziva neprava racionalna funkcija.*

Napomena Nepravu racionalnu funkciju moguće je prikazati kao zbroj polinoma i prave racionalne funkcije.

Primjer 1.5.1. Funkcija $f(x) = \frac{1}{x}$ je jedna od najjednostavnijih racionalnih funkcija i njezin graf (Slika 15) učenici uče već u drugom razredu srednje škole.



Slika 15

Poglavlje 2

2. Funkcije u kurikulumu

2.1. Kurikulum nastavnog predmeta Matematika

U ovom poglavlju ćemo navesti što je propisano u Kurikulumu za domenu Algebra i funkcije po razredima. Domene su podijeljene po srodnim područjima matematike pa su algebra i funkcije jedna domena. To znači da sljedeći odgojno obrazovni ishodi neće biti vezani samo za funkcije, već i za algebru.

1. razred

1.	**MAT OŠ B.1.2.** **Prepoznaje uzorak i nastavlja niz.**	Uočava uzorak nizanja. Objašnjava pravilnost nizanja. Objašnjava kriterije nizanja. Niže po zadanome kriteriju. Korelacija s Hrvatskim jezikom, Likovnom kulturom, Glazbenom kulturom, Prirodom i društvom, Tjelesnom i zdravstvenom kulturom.

2. razred

1.	**MAT OŠ B.2.1.** **Prepoznaje uzorak i kreira niz objašnjavajući pravilnost nizanja.**	Uočava pravilnosti nizanja brojeva, objekata, aktivnosti i pojava. Određuje višekratnike kao brojevni niz. Kreira nizove. Objašnjava kriterije nizanja. Korelacija s Likovnom kulturom i Prirodom i društvom.
2.	**MAT OŠ B.2.2.** **Određuje vrijednost nepoznatoga člana jednakosti.**	Određuje vrijednost nepoznatoga člana u jednakosti i dobiveno rješenje provjerava. Primjenjuje svojstva računskih operacija. Primjenjuje veze među računskim operacijama. Prošireni sadržaji: Rabi slovo kao oznaku za broj.

3. razred

1.	**MAT OŠ B.3.1.** **Rješava zadatke s jednim nepoznatim članom koristeći se slovom kao oznakom za broj.**	Koristi se slovom kao oznakom za broj. Uvrštava zadani broj umjesto slova. Određuje vrijednost nepoznatoga člana jednakosti/nejednakosti. Primjenjuje svojstva računskih operacija. Primjenjuje veze među računskim operacijama.

4. razred

1.	**MAT OŠ B.4.1.** **Određuje vrijednost nepoznate veličine u jednakostima ili nejednakostima.**	Razlikuje jednakosti i nejednakosti. Koristi se slovom kao oznakom za nepoznati broj u jednakostima i nejednakostima. Računa vrijednost nepoznate veličine primjenjujući veze između računskih operacija. Korelacija s Informatikom.

5. razred

1.	**MAT OŠ B. 5. 1** **Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.**	Prepoznaje nepoznanicu u problemskoj situaciji. Problemsku situaciju zapisuje linearnom jednadžbom. Rješava linearnu jednadžbu oblika ax=b gdje su a i b prirodni ili decimalni brojevi, provjeravajući točnost dobivenoga rješenja. Izražava nepoznatu veličinu iz jednostavne linearne jednadžbe koristeći se vezom među računskim operacijama. Koristi se opsegom i površinom geometrijskih likova za računanje duljina njihovih stranica. Korelacija s Geografijom i Prirodom.
2.	**MAT OŠ B. 5. 2** **Prikazuje skupove i primjenjuje odnose među njima za prikaz rješenja problema.**	Oblikuje i prikazuje skupove (brojeva, podataka) i njihove odnose pomoću Vennovih dijagrama (presjek, unija, podskup). Određuje broj elemenata skupa. Prepoznaje prazan skup. Koristi se matematičkim simbolima u zapisu skupova i njihovih odnosa. Skupovnim zapisom prikazuje rješenja jednostavne nejednadžbe u skupu prirodnih brojeva s nulom. Prošireni sadržaji: Ispisuje i prebrojava elemente skupa u kombinatornim zadatcima.

6. razred

1.	**MAT OŠ B. 6. 1** **Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu.**	Analizira problemsku situaciju u skupovima Q+ i Z i zapisuje ju linearnom jednadžbom. Rješava jednadžbu koja se svodi na oblik ax+b=0, gdje su a i b nenegativni racionalni ili cijeli brojevi, primjenjujući ekvivalentnost jednadžbi. Odnos dviju veličina prikazanih omjerom u problemskoj situaciji prikazuje razlomkom. Primjenjuje ekvivalentnost razlomaka za određivanje nepoznatoga brojnika ili nazivnika. Koristi se opsegom i površinom geometrijskih likova za računanje duljina njihovih stranica. Računa mjeru nepoznatoga kuta u trokutu i četverokutu. Rješava jednostavne jednadžbe s apsolutnom vrijednošću. Provjerava točnost rješenja jednadžbe. Preispituje smislenost rješenja i tumači dobiveno rješenje u kontekstu problema. Prošireni sadržaj: Rješava jednostavnu linearnu nejednadžbu. Korelacija s Geografijom i Prirodom

7. razred

1.	**MAT OŠ B. 7. 1** **Računa s algebarskim izrazima u Q.**	Opisuje monom i binom. Pojednostavnjuje algebarske izraze (eksponenata u rezultatu ne većih od 3) u skupu racionalnih brojeva zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem, primjenjujući svojstva računskih operacija. Množi monom binomom i binom binomom
2.	**MAT OŠ B. 7. 2** **Rješava i primjenjuje linearnu jednadžbu**	Analizira problemsku situaciju i zapisuje ju linearnom jednadžbom. Rješava jednadžbu koja se svodi na oblik ax+b=0, gdje su a i b racionalni brojevi, primjenjujući ekvivalentnost jednadžbi. Odnos dviju veličina prikazanih omjerom prikazuje razlomkom. Primjenjuje ekvivalentnost razlomaka za određivanje nepoznatog brojnika ili nazivnika. Koristi se opsegom i površinom geometrijskih likova za računanje duljina njihovih stranica, visina, polumjera i promjera kruga. Računa mjeru nepoznatoga kuta u trokutu i četverokutu. Računa elemente postotnoga računa. Rješava jednostavne jednadžbe s apsolutnom vrijednosti. Provjerava točnost i preispituje smislenost rješenja. Izražava nepoznatu veličinu iz jednostavne linearne jednadžbe oblika ax = b, gdje su a i b racionalni brojevi, koristeći se vezom između računskih operacija. Prošireni sadržaj: Rješava jednostavnu linearnu nejednadžbu. Korelacija s Geografijom, Fizikom, Kemijom i Biologijom.

3.	**MAT OŠ B. 7. 3 Primjenjuje proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost.**	Prepoznaje i opisuje proporcionalne i obrnuto proporcionalne veličine. U situacijama iz stvarnoga života prepoznaje i objašnjava proporcionalnost i obrnutu proporcionalnost. Određuje i tumači koeficijent proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti. Povezuje koeficijent proporcionalnosti s omjerom dviju proporcionalnih veličina. Koristi se svojstvima proporcionalnosti i obrnute proporcionalnosti pri rješavanju problemskih situacija. Preispituje smislenost rješenja s obzirom na kontekst. Korelacija s Geografijom, Fizikom, Kemijom, Biologijom i Hrvatskim jezikom (stručni tekstovi).
4.	**MAT OŠ B. 7. 4 Primjenjuje linearnu ovisnost.**	Prepoznaje i objašnjava linearnu ovisnost veličina iz stvarnoga života. Oblikuje tablicu pridruženih vrijednosti linearno zavisnih podataka. Povezuje zavisnu i nezavisnu veličinu u problemskoj situaciji. Zapisuje linearnu ovisnost formulom y=ax+b, gdje su a i b racionalni brojevi. Prikazuje linearnu ovisnost grafički u pravokutnome koordinatnom sustavu u ravnini. Analizira promjenu u linearnoj ovisnosti. Uspoređuje i diskutira prikaze dviju različitih linearnih ovisnosti na istom grafu. Linearnom ovisnošću modelira i rješava probleme. Prošireni sadržaj: Povezuje linearnu ovisnost s linearnom funkcijom. Korelacija s Informatikom i Fizikom.

8. razred

1.	**MAT OŠ B. 8. 1** **Računa s algebarskim izrazima u R.**	Pojednostavnjuje algebarske izraze u skupu R zbrajanjem, oduzimanjem, množenjem i dijeljenjem, primjenjujući svojstva računskih operacija. Množi monom binomom i binom binomom. Računa vrijednosti jednostavnih algebarskih izraza. Izlučuje zajednički faktor. Pojednostavnjuje algebarske izraze. Prikazuje veličine matematičkim formulama.
2.	**MAT OŠ B. 8. 2** **Primjenjuje razmjer.**	Opisuje razmjer (proporciju) kao ekvivalentnost dva omjera. Razlikuje vanjske i unutarnje članove razmjera te računa bilo koji nepoznati član razmjera. Primjenjuje razmjer u rješavanju problema iz matematike, drugih područja i stvarnoga života. Korelacija s Geografijom, Fizikom, Kemijom i Biologijom.
3.	**MAT OŠ B. 8. 3** **Rješava i primjenjuje linearnu**	Analizira problemsku situaciju i zapisuje ju linearnom jednadžbom. Koristi se opsegom, površinom, oplošjem, volumenom, razmjerom, Pitagorinim poučkom, Talesovim poučkom za računanje nepoznatih elemenata likova, tijela, oblika, mjerivih

	jednadžbu.	obilježja. Raspravlja o rješenju s obzirom na postavljene uvjete. Korelacija s Geografijom, Fizikom, Kemijom i Biologijom.
4.	**MAT OŠ B. 8. 4** **Rješava i primjenjuje sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama**	Analizira rješenje sustava te ga uvrštavanjem dobivenih vrijednosti provjerava. Rješenje prikazuje uređenim parom brojeva. U zadanim problemima prepoznaje mogućnost rješavanja sustavom dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama. Ako je sustav složeniji, svodi ga na standardni oblik i rješava zadanom/proizvoljnom metodom. Raspravlja o egzistenciji dobivenog rješenja (jedinstvenost, nepostojanje, beskonačno mnogo rješenja).
5.	**MAT OŠ B. 8. 5** **Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu**	Opisuje kvadratnu jednadžbu oblika $x^2 = k$, gdje je k nenegativan racionalni broj i razlikuje je od linearne jednadžbe. Primjenjuje kvadratnu jednadžbu za rješavanje problemskih situacija i u svrhu prikazivanja veličina matematičkim formulama.

1. razred

1.	**MAT SŠ B. 1. 2** **Računa s algebarskim izrazima i algebarskim razlomcima.**	Za zadani izraz računa konkretne vrijednosti, pojednostavljuje izraz, primjenjuje formule za kvadrat i kub binoma, razliku kvadrata, zbroj i razliku kubova, faktorizira izraze, krati, množi, dijeli i zbraja algebarske razlomke.
2.	**MAT SŠ B. 1. 3** **Primjenjuje proporcionalnost, postotke, linearne jednadžbe i sustave.**	Primjenjuje postotni račun za obračun poreza, carine, promjene cijena, opise udjela i druge probleme iz života. Primjenjuje omjere, račun diobe i proporcionalnost u primjerima iz života. Rješava tekstualne zadatke iz matematike, drugih područja i života. Rješava linearne jednadžbe i sustave jednadžbi određujući postojanje rješenja. Izražava jednu veličinu pomoću drugih primjenjujući svojstva jednakosti. Diskutira postojanje rješenja jednadžbe ovisno o parametru. Rješava jednostavne linearne jednadžbe s apsolutnom vrijednošću.
3.	**MAT SŠ B. 1. 4** **Primjenjuje linearne**	Rješava linearne nejednadžbe i sustave nejednadžbi te rješenje zapisuje pomoću intervala. Primjenjuje linearne nejednadžbe u problemskim situacijama. Rješava jednostavne linearne nejednadžbe s apsolutnom

	nejednadžbe	vrijednošću
4.	**MAT SŠ B. 1. 5** **MAT SŠ D. 1. 1** **Povezuje različite prikaze linearne funkcije.**	Zadanu linearnu funkciju prikazuje tablično i grafički, opisuje utjecaj koeficijenata na položaj grafa, definira i određuje nultočku, iz grafa čita argumente i vrijednosti te određuje koeficijente i funkciju, iz zadanih elemenata (argumenta i vrijednosti, točke grafa, koeficijenta) određuje funkciju. Crta graf funkcije apsolutne vrijednosti
5.	**MAT SŠ B. 1. 6** **Primjenjuje linearnu funkciju pri rješavanju problema.**	U problemskim situacijama prepoznaje linearnu ovisnost, zapisuje ju kao funkciju te primjenjuje za analizu problema. Analizira problem iz grafičkoga prikaza.
6.	**MAT SŠ B. 1. 7** **Prikazuje operacije sa skupovima i rješenja nejednadžbi pomoću intervala**	Nejednakosti zapisuje pomoću intervala i obrnuto te prikazuje na brojevnome pravcu. Primjenjuje i prikazuje podskup, uniju, presjek i razliku skupova realnih brojeva zapisujući ih matematičkim simbolima.

2. razred

1.	**MAT SŠ B. 2. 1** **Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu**	Bira metodu i rješava kvadratne jednadžbe s realnim koeficijentima. Rješava jednadžbe koje se svode na kvadratnu jednadžbu. Faktorizira trinom. Modelira problemsku situaciju te određuje rješenja. Korelacija s Fizikom i Informatikom.
2.	**MAT SŠ A. 2. 2** **MAT SŠ B. 2. 2** **Primjenjuje diskriminantu kvadratne jednadžbe i Vièteove formule.**	Određuje diskriminantu kvadratne jednadžbe. Argumentira prirodu rješenja. Primjenjuje Vièteove formule i diskriminantu u složenijim zadatcima određivanja koeficijenata.
3.	**MAT SŠ B. 2. 3** **Analizira funkciju**	Računa funkcijsku vrijednost zadane funkcije uvrštavanjem broja. Računski određuje domenu jednostavnih racionalnih i iracionalnih funkcija.

		Određuje sliku funkcije za linearnu i kvadratnu funkciju. Na primjeru skupa prepoznaje bijekciju.
4.	**MAT SŠ B. 2. 4** **MAT SŠ C. 2. 1** **Analizira grafički prikaz funkcije.**	Grafički prikazuje funkcije $f(x)$=1/x i $f(x)$=√x. Na grafu funkcije određuje domenu, kodomenu, sliku funkcije i objašnjava bijekciju. Skicira inverznu funkciju.
5.	**MAT SŠ B. 2. 5** **MAT SŠ C. 2. 2** **Primjenjuje kvadratnu funkciju.**	Određuje nultočke, sjecište s ordinatom, tjeme, os simetrije, tijek funkcije. Grafički prikazuje kvadratnu funkciju s racionalnim koeficijentima. Očitava točke s grafa funkcije. Objašnjava oblik kvadratne funkcije u ovisnosti o diskriminanti i vodećemu koeficijentu. Određuje funkcije iz grafa. Rješava kvadratne nejednadžbe.

3. razred

1.	**MAT SŠ B. 3. 2** **MAT SŠ C. 3. 1** **Analizira eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.**	Određuje domenu, kodomenu, sliku, rast i pad, inverznu funkciju eksponencijalne i logaritamske funkcije ($f(x)=ax, f(x)=ax+c, f(x)=ax+c, f(x)=b\cdot ax$, $(x)=logax, f(x)=logax+c$, $f(x)=loga(x+c)$) i crta graf. Prošireni sadržaj: Baza prirodnoga logaritma (e), crtice iz povijesti: Euler, Napier.
2.	**MAT SŠ B. 3. 3** **MAT SŠ C. 3. 2** **Primjenjuje eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.**	Modelira problemsku situaciju, određuje i provjerava rješenja te im utvrđuje smislenost. Prošireni sadržaj: Crtice iz povijesti: Briggsove i Napierove logaritamske tablice Korelacija s Kemijom i Biologijom.
3.	**MAT SŠ B. 3. 4** **Modelira eksponencijalnom i logaritamskom jednadžbom i nejednadžbom.**	Navodi i primjenjuje svojstva potencija i logaritama, računa vrijednosti logaritamskih izraza, prelazi iz logaritamskoga u eksponencijalni oblik i obrnuto. Rješava jednostavne eksponencijalne i logaritamske jednadžbe nejednadžbe. Modelira problemsku situaciju, određuje i provjerava rješenja te im utvrđuje smislenost.
4.	**MAT SŠ B. 3. 5** **MAT SŠ C. 3. 3** **Primjenjuje svojstva trigonometrijskih funkcija.**	Definira trigonometrijske funkcije broja na brojevnoj kružnici, otkriva svojstva i koristi ih za računanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija. Rabi džepno računalo. Prošireni sadržaj: Trigonometrijski identiteti. Crtice iz povijesti: podrijetlo imena trigonometrijskih funkcija. Korelacija s Fizikom.
5.	**MAT SŠ B. 3. 6** **MAT SŠ C. 3. 4**	Prepoznaje i opisuje grafove osnovnih trigonometrijskih funkcija.

	Analizira graf trigonometrijske funkcije.	Grafički prikazuje trigonometrijske funkcije: $f(x)=sinx$, $f(x)=cosx$, $f(x)=tgx$, $f(x)=A\sin(bx+c)+d$, $f(x)=A\cos(bx+c)+d$ Korelacija s Fizikom
6.	**MAT SŠ B. 3. 7** **MAT SŠ C. 3. 5** **Primjenjuje trigonometrijske funkcije.**	Analizira probleme opisane trigonometrijskom funkcijom i primjenjuje trigonometrijske funkcije za modeliranje
7.	**MAT SŠ B. 3. 8** **Primjenjuje trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe.**	Trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe rješava grafički ili na brojevnoj kružnici

4. razred

1.	**MAT SŠ B. 4. 2** **Primjenjuje aritmetički i geometrijski niz i red.**	Opisuje aritmetički i geometrijski niz i geometrijski red, zapisuje opći član niza, povezuje s aritmetičkom i geometrijskom sredinom, računa zbroj prvih n članova niza, računa zbroj geometrijskoga reda, rješava probleme iz svakodnevnoga života primjenom aritmetičkoga i geometrijskoga niza i geometrijskoga reda, posebno složeni kamatni račun.
2.	**MAT SŠ B. 4. 3** **Računa limes niza.**	Opisuje pojam limesa, uočava rast ili pad članova niza i postojanje granice, tj. konvergentnost ili divergentnost. Prošireni sadržaj: Neprekidno ukamaćivanje
3.	**MAT SŠ B. 4. 4** **Analizira svojstva funkcija.**	Nabraja elementarne funkcije i navodi njihova svojstva (domenu, kodomenu, sliku, rast/ pad, parnost/neparnost, periodičnost, monotonost i ograničenost) funkcije, asimptote. Povezuje graf funkcije i svojstva i objašnjava na grafu proizvoljne funkcije zadane različitim zapisima.
4.	**MAT SŠ B. 4. 5** **Tumači značenje limesa funkcije u točki.**	Opisuje i grafom prikazuje funkciju koja je neprekidna, odnosno koja nije, objašnjava pojam limesa funkcije. Određuje limes funkcije Povezuje limes funkcije s pojmom asimptote.
5.	**MAT SŠ B. 4. 6.** **Povezuje definiciju derivacije funkcije u točki s problemom tangente i brzine.**	Grafički prikazuje i objašnjava problem tangente, označava prirast varijable i prirast funkcije, povezuje s pojmom limesa. Objašnjava vezu derivacije i trenutne brzine (prijelaz iz prosječne u trenutnu). Navodi definiciju derivacije. Korelacija s Kemijom.

6.	**MAT SŠ B. 4. 7** **Primjenjuje derivaciju funkcije u problemskim zadatcima.**	Izvodi derivaciju po definiciji, navodi pravila deriviranja zbroja, umnoška i kvocijenta. Određuje derivaciju složene funkcije. Određuje tangentu na graf funkcije. Rješava problemske zadatke koristeći derivaciju.
7.	**MAT SŠ B. 4. 8** **Povezuje derivaciju funkcije i crtanje grafa funkcije.**	Određuje domenu, nultočke, stacionarne točke, intervale pada i rasta funkcije, konveksnost/konkavnost, ekstreme, asimptote. Određuje tijek funkcije i crta graf.
8.	**MAT SŠ B. 4. 9** **MAT SŠ D. 4. 1** **Primjenjuje računanje površine ispod grafa funkcije.**	Izračunava površinu ispod grafa linearne funkcije, složene funkcije (linearna, zadana po dijelovima). Povezuje pojam površine ispod grafa s prijeđenim putom u v-t dijagramu

Ishodi propisani kurikulumom nam daju okvirnu sliku o tome što se obrađuje na nastavi. U nastavku ćemo detaljno, po razredima, opisati na koji način se obrađuju funkcije na nastavi.

2.2. Funkcije u nastavi Matematike

1. – 4. RAZRED

U razrednoj nastavi matematika se većinom svodi na aritmetiku i geometriju te su ostale domene dosta zanemarene pa tako i funkcije. Ipak, učenici se upoznaju s nizovima koji su, prema strogoj matematičkoj definiciji, funkcije. Pojam funkcije se još uvijek ne spominje što je, po mom mišljenju, za ovu dob učenika primjereno. Ipak, pridruživanje prikazano na životnim primjerima bi učenicima bilo u potpunosti razumljivo i moglo bi se povezati s nizovima. Na taj način bi se postepeno uvodio pojam funkcije što je i cilj.

5. RAZRED

U petom razredu učenici se još ne susreću s pojmom funkcije ili preslikavanja. Ipak, postavljaju se iznimno važni temelji. Obrađuju se skupovi i operacije na skupovima. Iznimno je važno da se djeca upoznaju s pojmom skupa, nauče označavati skupove te izvoditi operacije na njima.

Osim skupova, prema kurikulumu se obrađuju i linearne jednadžbe kao poveznica između množenja i dijeljenja.

Važno je naglasiti da u petom razredu učenici znaju samo za skup prirodnih brojeva i prošireni skup prirodnih brojeva $\mathbb{N}_0$. Međutim, upoznaju se s decimalnim brojevima i razlomcima koje će tek u kasnijim razredima „smjestiti“ u odgovarajuće skupove brojeva.

Prema [URL4] glavni problem u obradi funkcija u nastavi je taj što se one ne uvode postupno iako je to moguće i učenici se konstantno susreću s njima u obrazovnom procesu (npr. zbrajanje u skupu prirodnih brojeva, određivanje opsega ili površine), a da toga nisu ni svjesni.

Primjerice, kad se obrađuju operacije na skupovima valjalo bi istaknuti da elementima jednog skupa možemo pridruživati elemente drugog skupa. Koristimo li životne primjere i grafičke prikaze, djeci će takva pridruživanja biti vrlo intuitivna i lako razumljiva. Na taj način već u petom razredu spominjemo pridruživanje čiji će poseban slučaj kasnije biti funkcija. Tako bi poštovali načelo postupnosti i sistematičnosti i izbjegli bismo uvođenje pojma funkcije kao nečeg potpuno novog i apstraktnog.

6. RAZRED

U ovom razredu proširuju se horizonti i učenici se upoznaju sa skupom pozitivnih racionalnih brojeva $\mathbb{Q}^+$ i skupom cijelih brojeva $\mathbb{Z}$ te operacijama nad njima.

Linearne jednadžbe se također proširuju na te skupove. Odnosno, nepoznanica više ne mora biti prirodan broj. Ipak, linearna jednadžba je još uvijek samo jednadžba i ne spominju se funkcije.

Primjećujemo da je u 5. i 6. razredu fokus na algebri, a funkcije su potpuno zanemarene što nikako nije dobro jer su funkcije jedan od osnovnih matematičkih pojmova.

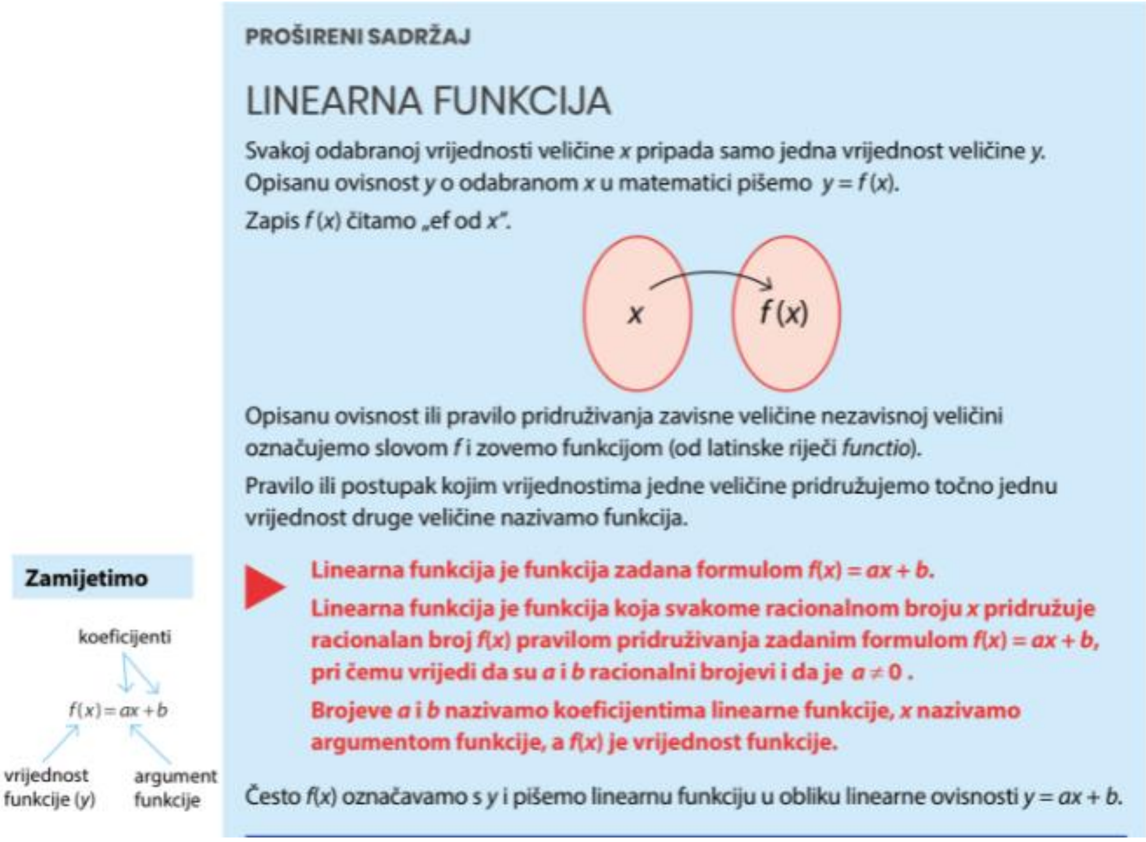
7. RAZRED

Ovdje dolazi do pomaka i napokon se približavamo pojmu funkcije. Ipak, linearna funkcija prema kurikulumu spada u prošireni sadržaj, dok je linearna ovisnost obavezna (MAT OŠ B. 7. 4. Primjenjuje linearnu ovisnost.). Navesti ćemo definiciju linearne ovisnosti iz udžbenika Školske knjige Matematika 7.

Linearnu ovisnost zapisujemo formulom $y = ax + b$, pri čemu vrijedi da je $a \neq 0$. Racionalne brojeve a i b nazivamo koeficijentima linearne ovisnosti. Veličinu x nazivamo nezavisna veličina, a veličinu y zavisna veličina.

Slika 16 MATEMATIKA 7, Školska knjiga

Očito se ovo vrlo lako i prirodno može povezati s linearnom funkcijom, no pojam funkcije se ne definira i ne spominje osim ako nastavnik obradi dio proširenog sadržaja. U istom udžbeniku stoji:


PROŠIRENI SADRŽAJ

LINEARNA FUNKCIJA

Svakoj odabranoj vrijednosti veličine *x* pripada samo jedna vrijednost veličine *y*. Opisanu ovisnost *y* o odabranom *x* u matematici pišemo $y = f(x)$.
Zapis $f(x)$ čitamo „ef od *x*".

Opisanu ovisnost ili pravilo pridruživanja zavisne veličine nezavisnoj veličini označujemo slovom *f* i zovemo funkcijom (od latinske riječi *functio*).
Pravilo ili postupak kojim vrijednostima jedne veličine pridružujemo točno jednu vrijednost druge veličine nazivamo funkcija.

Zamijetimo

Linearna funkcija je funkcija zadana formulom $f(x) = ax + b$.
Linearna funkcija je funkcija koja svakome racionalnom broju *x* pridružuje racionalan broj $f(x)$ pravilom pridruživanja zadanim formulom $f(x) = ax + b$, pri čemu vrijedi da su *a* i *b* racionalni brojevi i da je $a \neq 0$.
Brojeve *a* i *b* nazivamo koeficijentima linearne funkcije, *x* nazivamo argumentom funkcije, a $f(x)$ je vrijednost funkcije.

Često $f(x)$ označavamo s *y* i pišemo linearnu funkciju u obliku linearne ovisnosti $y = ax + b$.

Slika 17 MATEMATIKA 7, Školska knjiga

Nakon ovog dijela slijedi nastavna podtema Grafički prikaz linearne ovisnosti, a u proširenom sadržaju se nalazi Graf linearne funkcije.

Vidimo da se u kurikulumu za 7. razred odlučilo izbjegavati pojam funkcije, osim ako se nastavnik odluči na prošireni sadržaj. Možda je takav način na intuitivnoj razini primjereniji djeci toj dobi. Ipak, bilo bi dobro da se kurikulum i udžbenici više fokusiraju na pojam funkcije u ovom dijelu nastavnog procesa jer se on prirodno nameće. Djeca su u toj dobi potpuno sposobna razumjeti pojam pridruživanja i crtanja pripadnog grafa.

Svakako, ovaj dio gradiva se obrađuje u dobro vrijeme jer u 7. razredu učenici imaju predmet Fizika u kojem se često susreću s linearnom ovisnosti.

8. RAZRED

U osmom razredu učenici se upoznaju sa skupom realnih brojeva te operacijama kvadriranja i korjenovanja. Naglasimo opet da se ovdje radi o operacijama, ne spominju se funkcije što nikako nije dobro. Glavni razlog je taj što se pri rješavanju kvadratne jednadžbe pojavljuju pravila, a pravila bez objašnjenja nikad nisu dobra. Uzmimo za primjer $\sqrt{a}^2 = a,\ a >$

$0\ i\ \sqrt{(a^2)} = |a|, a \in \mathbb{R}$. Ovo su pravila koja se lako mogu objasniti na primjerima. Ipak, djeci je puno lakše ako nešto vizualiziramo. Koristeći grafove funkcije i inverzne funkcije, puno je lakše razumjeti zašto ova pravila vrijede i zašto neka rješenja „izgubimo“. Sve te probleme mogli smo izbjeći da smo u ranijim stadijima nastavnog procesa uvodili pojmove pridruživanje, funkcija, injektivnost… Ti pojmovi nisu apstraktni ako ih uvedemo na životnim primjerima kojih ima u izobilju.

Ipak, prema sadašnjem kurikulumu, sve se servira kao formula ili pravilo što djecu dovodi do toga da matematiku shvate kao niz pravila koja im ništa ne znače. Takav stav prema matematici nije poželjan i nužne su neke promjene da bi se to izbjeglo.

Zaključak je da se u osnovnoj školi funkcije obrađuju skoro pa nikako. Vidimo da se približavamo pojmu funkcije, ali svakako nije dovoljno. Funkcije se ozbiljnije obrađuju tek u srednjoj školi.

U nastavku ćemo opisati kako se funkcije po razredima obrađuju u srednjoj školi. Naglašavam da ćemo se ograničiti na sadržaj koji se obrađuje npr. u općim i matematičkim gimnazijama.

1. RAZRED

U prvom razredu srednje škole se definira pojam funkcije i detaljno se obrađuje linearna funkcija. U kurikulumu nalazimo dva odgojno obrazovna ishoda o linearnoj funkciji:

- Povezuje različite prikaze linearne funkcije
- Primjenjuje linearnu funkciju pri rješavanju problema

Funkcija se definira na sljedeći način.

Definicija. Neka su D i K neprazni skupovi. Pridruživanje$f: D \to K$ koje svakom elementu x skupa D pridružuje jedan i samo jedan element y skupa K nazivamo funkcija i pišemo $f(x) = y$ gdje x nazivamo nezavisnom varijablom (argument funkcije), a y zavisnom varijablom (vrijednost funkcije).

Zatim se ova definicija zapiše simbolički.

Prvo na što valja obratiti pozornost je to da se pojam *pridruživanje* ne definira i koristi u definiciji funkcije kao nešto što je intuitivno jasno. U strogom matematičkom kontekstu tako ne možemo definirati funkciju pa je potpuno jasno zašto se definicija funkcije u teorijskom dijelu ovog rada razlikuje od definicije na nastavi.

Pokazalo se da je ovaj pojam uistinu intuitivno jasan većini učenika i da ovakva definicija ima smisla.

Drugo što ćemo istaknuti je da se u ovoj definiciji krije svojstvo funkcionalnosti i totalnosti što čini ovu definiciju korektnom (ako zanemarimo da pojam pridruživanja nije nigdje strogo definiran).

Možemo reći da pojam pridruživanja u školskoj nastavi predstavlja relaciju pa se tako na Vennovim dijagramima i na životnim primjerima pokazuje da postoje pridruživanja koja nisu funkcije. Još uvijek se ne spominju injektivnost i surjektivnost.

Učenici moraju prepoznati funkciju među zadanim pridruživanjima koja su prikazana Vennovim dijagramima, tekstualno (pravilom), grafički ili analitički (npr. $D = \mathbb{N}, K = \mathbb{N}, x \mapsto x - 2$).

U ovom uvodnom dijelu koje govori općenito o funkcijama preostalo je još definirati graf funkcije. Već smo naglasili da u teorijskom dijelu ovog rada graf funkcije nije definiran jer bi se definicija podudarala s definicijom funkcije. Kako je na nastavi funkcija definirana kao pridruživanje situacija je drugačija pa se na nastavi posebno definira graf funkcije na sljedeći način.

Definicija. Graf funkcije $f: D \to K$, u oznaci Γ_f, je skup svih točaka (x, y) gdje je x iz domene, a za y vrijedi $f(x) = y$. Odnosno

$$\Gamma_f = \{(x, y): x \in D, y = f(x)\}.$$

Linearna funkcija

Tako dolazimo do, po kurikulumu, najvažnijeg pojma u domeni funkcija za 1. razred srednje škole.

Definicija. Funkcija $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ oblika $f(x) = ax + b$ gdje su a i b realni brojevi i $a \neq 0$ zove se linearna funkcija. Graf linearne funkcije $f(x) = ax + b$ je pravac s jednadžbom $y = ax + b$.

U ovom trenutku bi se bilo dobro nadovezati na priču o linearnoj ovisnosti iz 7. razreda.

Dodatno se još definira vodeći koeficijent i slobodni koeficijent.

Istražuje se utjecaj vodećeg koeficijenta i slobodnog koeficijenta na izgled grafa funkcije i donose se zaključci da za a>0 pravac raste, a za a<0 pravac pada. Slobodni koeficijent predstavlja odsječak na y-osi.

Definicija. Nultočka funkcije f je onaj broj x za koji je $f(x) = 0$.

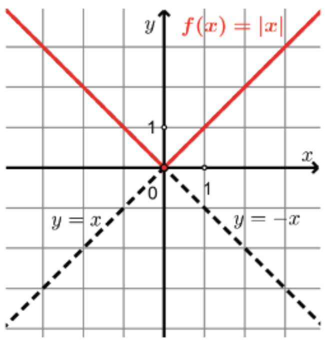
Postupci koje učenici trebaju napraviti i koji su propisani kurikulumom su:

- Odrediti vrijednost funkcije
- Odrediti argument za zadanu vrijednost funkcije
- Crtati graf pomoću tablice i crtati graf pomoću koeficijenata linearne funkcije.
- Očitati vrijednosti i argument zadane vrijednosti s grafa linearne funkcije (zadano s kvadratnom mrežom)
- Odrediti funkciju pomoću danih točaka grafa funkcije

Sad ćemo navesti kako se u udžbeniku Školske knjige obrađuje graf apsolutne vrijednosti

Prisjetimo se definicije apsolutne vrijednosti $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$.

Što je graf funkcije apsolutne vrijednosti?



Graf se sastoji od dvaju pravaca $y = x$, za $x \geq 0$ i $y = -x$, za $x < 0$.

Kako je $|x| \geq 0$, tada je očito da će graf funkcije biti **iznad osi apscisa** te da će sadržavati ishodište u kojem će se nalaziti nul-točka funkcije. Budući da je $|-x| = |x|$, graf je **simetričan s obzirom na os *y*.**

Slika 18 MATEMATIKA 1, Školska knjiga

Očito je da se ovdje prešutno koristi svojstvo parnosti funkcije apsolutne vrijednosti te činjenica da je graf parne funkcije simetričan obzirom na os y.

Nadalje, učenici crtaju graf apsolutne vrijednosti u malo kompliciranijim situacijama i dolaze do pravila:

Graf funkcije $f(x) = |x - a| + b$ crta se translacijom grafa $|x|$ po osi x za vrijednost a i po osi y za vrijednost b.

Ovim pravilom je zaokružena cjelina Linearna funkcija, a time i obrada funkcija u prvom razredu srednje škole.

2. RAZRED

U drugom razredu srednje škole naglasak je na kvadratnoj funkciji. Osim kvadratne, obrađuju se i neke druge osnovne funkcije, a posebno su zanimljive inverzne funkcije.

Definicija. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$ gdje su a,b i c realni brojevi i $a \neq 0$ zove se kvadratna funkcija. Graf kvadratne funkcije $f(x) = x^2$ nazivamo parabola. Jednadžba te parabole je $y = x^2$.

Definira se još kvadratni koeficijent pa se u sljedećoj nastavnoj temi istražuje kako promjena koeficijenata utječe na izgled parabole. Za taj sat bi bilo korisno koristiti neku aplikaciju, npr. GeoGebra, kako bi djeca mogla sama istraživati i donositi zaključke.

Definicija. Tjeme parabole $y = ax^2 + bx + c$ je točka $T(x_0, y_0)$ gdje je $x_0 = -\frac{b}{2a}$ i $y_0 = \frac{4ac-b^2}{4a}$. Os simetrije parabole je pravac $x = x_0$ koji je okomit na os x i prolazi tjemenom parabole T.

Naravno, treba spomenuti i formulu za računanje nultočaka kvadratne funkcije. Učenici već znaju što je nultočka i znaju rješavati kvadratne jednadžbe. U ovom slučaju treba vrijediti $ax^2 + bx + c = 0$ pa je $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Uz razne primjere se dolazi do zaključka da broj rješenja ovisi o diskriminanti $D = b^2 - 4ac$. Za D>0 funkcija ima dvije nultočke, za D=0 funkcija ima jednu nultočku, a za D<0 funkcija nema nultočaka.

Navesti ćemo formulu za računanje koordinata tjemena pomoću nultočaka iz udžbenika Školske knjige:

Nultočke kvadratne funkcije $f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ su $x = x_1$ i $x = x_2$.
Koordinate tjemena $T(x_0, y_0)$ možemo računati po formulama
$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ i $y_0 = f(x_0)$.

Slika 19 MATEMATIKA 2, Školska knjiga

Slijedi obrnuti postupak, odnosno određivanje formule kvadratne funkcije na osnovi grafa. U zadatcima se moraju jasno vidjeti koordinate potrebnih točaka (npr. može biti zadano kvadratnom mrežom). Postupak se može skratiti tako da odredimo formulu samo pomoću tjemena i jedne točke na grafu.

Veoma važan dio pri obradi kvadratne funkcije je tok funkcije. U tom dijelu se prvi put crta tablica koju će učenici vrlo često koristiti pri rješavanju kompliciranih zadataka (npr. nejednadžbe pri traženju domene funkcija i slično).

Zanimljivo je da se u ovom dijelu gradiva već govori o lokalnim ekstremima funkcije iako oni nisu strogo matematički definirani, već samo intuitivno. Ovo je kvadratna funkcija pa je ekstrem uvijek u tjemenu parabole. Posebno se naglasi da kvadratna funkcija za $a>0$ ima minimum u tjemenu, a za $a<0$ maksimum.

Posebno važan algebarski dio koji prirodno slijedi nakon ove cjeline je rješavanje kvadratnih nejednadžbi. To je opet jedan od ključnih alata za traženje domene proizvoljne realne funkcije.

Na kraju cjeline Kvadratna funkcija obrađuje se primjena kvadratne funkcije gdje pronalazimo korelaciju s drugim nastavnim predmetima, posebno s fizikom.

Polinomi, racionalne i iracionalne funkcije

Učenici su u prethodnim razredima naučili posebne slučajeve polinoma (linearna i kvadratna funkcija). Ipak, u udžbenicima se polinomi općenito definiraju tek nakon kvadratne funkcije što nije baš prirodan slijed. Definicija je ista kao definicija u teorijskom dijelu ovog rada, a dodatno su spomenuti samo polinomi trećeg stupnja.

Definicija. Racionalna funkcija definirana je formulom $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$, gdje su g i h polinomi, $h(x) \neq 0$. Ako je stupanj polinoma u brojniku manji od stupnja polinoma u nazivniku, tada govorimo o pravoj racionalnoj funkciji.

Ovakva definicija je matematički korektna.

U drugom razredu promatraju se samo one racionalne funkcije koje u brojniku i nazivniku imaju polinome stupnja najviše dva.

Jedina racionalna funkcija čija svojstva se dodatno proučavaju je $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$. Ono što se za ovu funkciju dodatno obrađuje je graf te se s grafa očitava domena i slika funkcije. Bilo bi dobro kad bi učenici istraživajući samostalno došli do grafa te funkcije.

Također bi bilo korisno dodatno istražiti funkciju $f(x) = \frac{k}{x}, k \in \mathbb{R}$ i njezin graf. Dođe se do zaključka da je npr. graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ osnosimetričan obzirom na y-os grafu funkcije $g(x) = -\frac{1}{x}$.

Nakon toga slijede translacije grafa. Dolazimo do pravila koja vrijede općenito i za druge funkcije:

Graf funkcije $g(x) = f(x - a)$ dobit ćemo pomakom grafa funkcije $f(x)$ za a udesno ako je a>0, odnosno za a ulijevo ako je a<0.

Graf funkcije $g(x) = f(x) + a$ dobiti ćemo pomakom grafa funkcije $f(x)$ za a prema gore ako je a>0, odnosno prema dolje ako je a<0.

Sljedeće funkcije su iracionalne funkcije za koje u udžbeniku Školske knjige ne postoji općenita definicija, već je samo rečeno da su to funkcije koje pod korjenom imaju neki polinom.

Od iracionalnih funkcija pažnja se posvećuje samo funkciji $f(x) = \sqrt{x}$. Analogno kao za racionalnu funkciju tablično se odredi nekoliko točaka, nacrta se graf te se odredi domena. Nakon toga slijedi proučavanje grafova kad nastupe neke modifikacije (translacije grafa).

Prirodna domena i slika funkcije

Definicija. Domena realne funkcije, po dogovoru, je skup svih realnih brojeva x za koje dano pridruživanje ima smisla. Takvu domenu zovemo prirodna domena D_f.

Slika funkcije je skup Im_f na koji funkcija f preslikava svoju domenu.

Zanimljivo je da se tek sada spominje domena polinoma iako je ona navedena u definiciji linearne funkcije iz prvog razreda. Također, domene i slike racionalne i iracionalne funkcije su navedene prije nego što se skiciraju grafovi tih funkcija. Ta rascjepkanost gradiva može dovesti do konfuzije. Nastavnici trebaju prilikom obrade tog gradiva pripaziti na redoslijed kako bi on bio matematički korektan.

Nakon ove definicije slijedi uvježbavanje određivanja domene i slike funkcije na zadatcima.

Kompozicija funkcija, bijekcija i inverzna funkcija

Definicija. Neka su $f: D_f \to \mathbb{R}, g: D_g \to \mathbb{R}$ bilo koje realne funkcije i vrijedi $Im_f \subseteq D_g$. Tada postoji funkcija $h: D_f \to \mathbb{R}$, u oznaci $h = g \circ f$, takva da vrijedi $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$. Funkciju h zovemo kompozicija funkcija f i g.

Vennovim dijagramima se zorno može prikazati zašto je potreban uvjet $Im_f \subseteq D_g$ i kako cijela stvar funkcionira.

Navedu se svojstva kompozicije funkcija, odnosno da nije komutativno i da je asocijativno.

Vidimo da se lagano približavamo pojmu inverzne funkcije. Za to nam je još potrebno definirati bijekciju.

Definicija. Funkcija je injekcija ako različite elemente domene preslikava u različite elemente kodomene. Odnosno, ako vrijedi

$$f: D \to K, \qquad (\forall x_1, x_2 \in D) x_1 \neq x_2 \to f(x_1) \neq f(x_2).$$

Nakon definicije obradi se i karakterizacija:

Funkcija je injekcija ako vrijedi

$$f: D \to K, \qquad (\forall x_1, x_2 \in D) f(x_1) = f(x_2) \to x_1 = x_2.$$

Ipak, glavna tehnika kojom učenici provjeravaju je li funkcija injekcija je grafički, odnosno horizontalnim testom (paralele s osi x).

Definicija. Funkcija je surjekcija ako za svaki y iz kodomene postoji x iz domene takav da je $f(x) = y$. Odnosno, ako vrijedi

$$f: D \to K, \qquad (\forall y \in K)(\exists x \in D) f(x) = y.$$

Definicija. Funkcija je bijekcija ako je injekcija i surjekcija.

Definicija. Neka je funkcija $f: D \to K$ bijekcija. Funkcija $g: K \to D$ takva da za svaki $y \in K$ vrijedi $g(y) = x$ ako za $x \in D$ vrijedi $f(x) = y$ naziva se inverzna funkcija funkcije f i označava f^{-1}. Kažemo da su f i f^{-1} međusobno inverzne.

Karakterizacija:

Funkcija $f: D \to K$ ima inverznu funkciju $f^{-1}: K \to D$ ako i samo ako je f bijekcija.

Nakon ovoga važno je prokomentirati zašto je važno da funkcija bude bijekcija.

Vrijedi $(f^{-1} \circ f)(x) = x \; i \; (f \circ f^{-1})(x) = x$.

Grafovi inverznih funkcija su simetrični s obzirom na simetralu I i III kvadranta. Skiciranje grafa inverzne funkcije prema kurikulumu je nešto što učenici svakako moraju usvojiti.

Jedan od najbitnijih koraka je prepoznati bijekciju prema grafu dane funkcije, a zatim skicirati graf inverzne funkcije.

U udžbeniku ne postoji definicija restrikcije funkcije. Ona bi ovdje bila korisna jer neke funkcije imaju inverz na djelovima gdje su injektivne.

3. RAZRED

Funkcije su u trećem razredu zastupljene više nego u prethodnim razredima. Cijeli prvi dio udžbenika Matematika 3, Školska knjiga je posvećen eksponencijalnoj, logaritamskoj i trigonometrijskim funkcijama. U kurikulumu također prevladavaju funkcije u domeni Algebre i funkcije.

Eksponencijalna i logaritamska funkcija

Definicija. Funkcija oblika $f(x) = a^x$, gdje je a realan broj i $a > 0, a \neq 1$ naziva se eksponencijalna funkcija u skupu realnih brojeva.

Nakon što se definira eksponencijalna funkcija, da bi definicija bila potpuna, potrebno je odrediti domenu i sliku te funkcije. Promatraju se grafovi eksponencijalnih funkcija s različitim bazama i dolazimo do zaključka da općenito za eksponencijalnu realnu funkciju vrijedi $D_f = \mathbb{R}\ i\ Im_f = \langle 0, +\infty \rangle$. Ono što također uočavamo je da svaka eksponencijalna funkcija prolazi točkom (0,1) te da je eksponencijalna funkcija $f: \mathbb{R} \to \langle 0, +\infty \rangle$ bijekcija (injektivnost se lako provjeri horizontalnim testom).

Posebno se obrati pažnja na crtanje grafa za $a \in \langle 0,1 \rangle$ (padajući) i za a>1 (rastući). Os x je asimptota jer joj se funkcija približava, ali je nikad ne siječe. Pojam asimptote se pojavio još u 2. razredu kod racionalnih funkcija. Još uvijek je nemoguće strogo definirati asimptotu jer nam za to trebaju limesi koji se rade u 4. razredu, ali potrebno je da učenici steknu nekakvu predodžbu o tome što je asimptota (iako je to sve „mahanje rukama“ na ovom nivou). Pojam rasta i pada funkcije je također još u zraku i baziramo se na osjećaju bez stroge definicije.

Posebno važna eksponencijalna funkcija u praksi je $f(x) = e^x$.

Definicija. Logaritam pozitivnog realnog broja b po bazi a $(a > 0, a \neq 1)$ je eksponent kojim treba potencirati bazu da bi se dobilo b.

Učenicima se na nastavi obično ne servira činjenica da su eksponencijalna i pripadna logaritamska funkcija međusobno inverzne već se polako dođe do toga. Dakle, imamo vrijednost eksponencijalne funkcije i tražimo x kojim smo trebali potencirati bazu a da dobijemo danu vrijednost. Ovo je prvi znak da su eksponencijalna i pripadna logaritamska funkcija međusobno inverzne.

Nadalje se uvede oznaka i simbolički zapiše ova definicija ($\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$). U definiciji jasno piše da je domena logaritamske funkcije skup pozitivnih realnih brojeva, ali i da nije pisalo jasno se vidi da mora biti tako jer je b potencija od a koji je pozitivan realan broj. Dakle, $\log_a : \langle 0, +\infty\rangle \to \mathbb{R}$. Lako se vidi da vrijedi $\log_a a^x = x$ i $a^{\log_a x} = x$ (ovo je drugi znak da su logaritamska i eksponencijalna funkcija inverzne).

Nakon toga slijedi uvježbavanje na zadatcima kako bi učenicima „sjela“ definicija.

Posebno se obrađuju dekadski i prirodni logaritmi te njihova povijest.

Slijedi crtanje grafa logaritamske funkcije $f(x) = \log_a x, a > 0, a \neq 1$ preko tablice vrijednosti. Promatrajući grafove za različite baze dolazimo do zaključka da svaki graf logaritamske funkcije siječe os x u točki (1,0) i to joj je jedina nultočka i os y joj je asimptota. Funkcija pada za $a \in \langle 0,1\rangle$ i raste za a>1.

U konačnici se nacrtaju grafovi eksponencijalne i pripadne logaritamske funkcije (tu bi bilo zgodno koristiti GeoGebru da se pokaže da to vrijedi za svaku bazu) kako bi učenici uočili simetriju obzirom na pravac $y = x$. Nakon što uoče simetriju učenici bi trebali povezati da je tu riječ o inverznim funkcijama.

Nakon ovoga se popisuju svojstva logaritama koja mogu biti korisna u računu i prelazi se na algebarski dio ove cjeline.

Trigonometrijske funkcije

Ovaj dio se u nastavi izvodi kao što je obrađeno u teorijskom dijelu ovog rada. Prvo se ponove kutovi, smjer vrtnje, mjera kuta… Zatim se rješavaju zadatci pretvorbe iz stupnjeva u radijane i obratno, ponavlja se formula za duljinu luka kružnice.

Trigonometrija se uvodi eksponencijalnim preslikavanjem, odnosno namatanjem pravca na jediničnu kružnicu. Taj dio je potrebno jako dobro i sistematično objasniti jer mnogim učenicima predstavlja problem.

Trigonometrijske funkcije sinus i kosinus se definiraju kao koordinate točke na jediničnoj kružnici, a tangens i kotangens kao $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ i $ctg\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$. Za trigonometriju su učenici već prije čuli i dosta su radili sa trigonometrijskim funkcijama, no nisu ih gledali kao funkcije već kao omjere stranica u pravokutnom trokutu. Iznimno je važno da učenici shvate da se sad ne nalazimo samo u pravokutnom trokutu, već da su to funkcije kojima treba odrediti domenu, sliku i graf.

Pri određivanju domene i slike funkcija dolazi se do zaključka da su sinus i kosinus omeđene funkcije, a tangens i kotangens u nekim točkama nisu definirane.

Za razliku od teorijskog dijela ovog rada, na nastavi se nakon definicija radi geometrijski prikaz tangensa i kotangensa (u ovom radu je to definicija).

Od svojstava trigonometrijskih funkcija obrađuje se parnost, neparnost i periodičnost. Mjesto na kojem se učenici često zbune je temeljni period jer se za npr. sinus i tangens on razlikuje. Ovo je prvi put da se definira parnost i periodičnost. Za periodičnost to ima smisla jer se dosad nismo susretali s periodičnim funkcijama (osim možda konstante koja je trivijalni primjer), ali parne i neparne funkcije su učenici susretali i koristili su svojstvo da je graf parne funkcije simentričan obzirom na os y. Iz tog razloga nema smisla da se taj pojam definira tek kod trigonometrijskih funkcija.

Slijedi svođenje kutova na I kvadrant, izvod i argumentacija formula koje predstavljaju vezu između trigonometrijskih funkcija, primjena na zadatcima i dokazivanju drugih trigonometrijskih identiteta, izvod i argumentacija adicijskih formula, formula za polovični i dvostuki kut te formule pretvorbe.

Vidimo da u ovom dijelu ima puno formula i izvoda. Trigonometrija se često svede na rješavanje nezgrapnih zadataka i mnoštvo izvoda formula koji učenicima predstavljaju veliko opterećenje i dosadni su im. Ipak, pokazalo se da će učenici lakše zapamtiti formulu ako znaju odakle je došla ili će je pak sami izvesti ako je zatrebaju. Učenicima je puno korisnije baviti se izvodima nego da im je sve servirano na papiru u tablici. Na taj način koriste prethodno naučeno gradivo i svojstva trigonometrijskih funkcija u izvodima pa sve skupa lakše pamte.

Tek nakon ovog iscrpnog dijela na red dolaze grafovi koji su, prema mom mišljenju, trebali ići prije izvoda formula.

U kurikulumu jasno stoji kakve grafove učenici moraju znati skicirati (vidi MAT SŠ B. 3. 6 MAT SŠ C. 3. 4).

Definicija. Graf funkcije sinus $f(x) = Asin(Bx + C) + D$ nazivamo sinusoida. Realni broj A naziva se amplituda, B kružna frekvencija, a C fazni pomak.

Prvo se obrade najjednostavniji oblici $f(x)$=$sinx$, $f(x)$=$cosx$, $f(x)$=tgx, $f(x)$=ctgx , zatim se postepeno uvode kružna frekvencija, fazni pomak, amplituda i na kraju realni broj D koji samo translatira cijeli graf duž osi y. Na taj način učenici mogu pratiti kako se graf mijenja i zaključiti kako promjene parametara utječu na izgled grafa.

Nakon toga preostaje još obraditi trigonometrijske jednadžbe i nejednadžbe.

Očito je da je trenutno naglasak više na algebarskom dijelu i da učenici uporno rješavaju gomilu jednadžbi i nejednadžbi. Ipak, trigonometrijske funkcije su matematički korektno i strogo uvedene i definirane te ih se obradi temeljito što je i primjereno na ovoj razini obrazovanja.

4. RAZRED

U četvrtom razredu srednje škole matematika postaje malo ozbiljnija nego u prethodnim razredima. U ovom dijelu obrazovnog procesa mnogi pojmovi koji su se dosad koristili se strogo matematički definiraju. Također, u ovom razredu su obrađuju općenito elementarne funkcije, a ne samo specijalni slučajevi jer sad djeca raspolažu svim potrebnim znanjima kako bi analizirali svojstva tih funkcija.

Za početak, učenici se upoznaju s limesima, neprekidnosti i derivacijama. Limesi i derivacije su veoma važni sami po sebi, ali nama su posebno zanimljivi jer ih učenici mogu koristiti da bi razumjeli funkciju koja je zadana formulom, a ne grafom. Neprekidnost je također važno svojstvo funkcija koje se nije moglo strogo definirati dok se ne obrade limesi.

Dosad su učenici svojstva funkcija obično čitali s danog grafa. U četvrtom razredu prvi put iz funkcije zadane formulom otkrivamo svojstva dane funkcije i koristimo ih kako bi skicirali graf funkcije. Iz tog razloga je ovo puno naprednija razina.

Neke definicije iz udžbenika Matematika 4 Školske knjige ćemo navesti ovdje kako bi se stekao dojam strogoće definicija na ovoj razini.

Na početku je potrebno ponoviti neka svojstva funkcija koja su naučena u prethodnim razredima kao što je parnost i periodičnost te pojam kompozicije i inverzne funkcije. Monotonost funkcije je pojam koji u ovom trenutku treba strogo definirati (Slika 20). Razlog zbog kojeg se ovaj pojam nije prije strogo definirao je taj što su učenici očitavali svojstva monotonosti s grafa pa im stroga definicija nije bila potrebna. Sad će učenici za proizvoljnu elementarnu funkciju samo iz njene formule morati odrediti intervale rasta i pada.

Omeđenost funkcije je također nešto što se samo spominjalo, a sad se strogo definira (Slika 21).

Neka je interval I podskup domene D_f funkcije f.

Funkcija f je **rastuća** na intervalu I ako za svaka dva realna broja $x_1, x_2 \in I$ za koje je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$.

Funkcija f je **padajuća** na intervalu I ako za svaka dva realna broja $x_1, x_2 \in I$ za koje je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$.

Funkcija f je **konstanta** na intervalu I ako za svaka dva realna broja $x_1, x_2 \in I$ vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$.

Za funkcije koje su ili samo rastuće ili samo padajuće kažemo da su **monotone** funkcije.

Slika 20 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Funkcija f **omeđena** je **odozgo** ako postoji realni broj M takav da za svaki $x \in D_f$ vrijedi $f(x) \leq M$.

Funkcija f **omeđena** je **odozdo** ako postoji realni broj m takav da za svaki $x \in D_f$ vrijedi $m \leq f(x)$.

Slika 21 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Nizovi se na nastavi spominju još od 1. razreda osnovne škole. Učenicima je jasan pojam niza na intuitivnoj razini, ali još uvijek nije strogo definiran. Nizovi se u prvom polugodištu četvrtog razreda srednje škole strogo definiraju kao funkcije (Slika 22).

Funkcija $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ koja svakome prirodnom broju n pridružuje realni broj a_n naziva se **niz realnih brojeva**.

Broj $a(n) = a_n$ jest **opći** ili ***n*-ti član** niza.

Slika 22 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Nakon toga se obrađuju važni nizovi kao što su aritmetički i geometrijski niz. Slijedi definicija limesa niza (Slika 23) i uvježbavanje na zadatcima.

Realni broj a je limes ili granična vrijednost niza realnih brojeva (a_n) ako za svaki broj $\varepsilon > 0$ postoji prirodni broj n_0 takav da za sve $n > n_0$ vrijedi $|a_n - a| < \varepsilon$.

Slika 23 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Slijedi ponavljanje funkcija te se skreće pažnja na problem neprekidnosti funkcije koji se već spominjao na intuitivnoj razini. Za definiciju neprekidnosti i točki prekida potrebni su nam limesi pa se prvo obrade limesi funkcije (Slika 24). Zatim se definira neprekidnost (Slika 25) i proširenje funkcije po neprekidnosti.

Realni broj L je **limes funkcije** f u točki a ako za svaki niz (x_n) koji teži broju a niz funkcijskih vrijednosti $\left(f\left(x_n\right)\right)$ teži broju L. Tada pišemo

$$L = \lim_{x \to a} f(x).$$

Ako niz $\left(f\left(x_n\right)\right)$ teži u beskonačnost za svaki niz (x_n) koji teži broju a, tada pišemo $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$.

Slika 24 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Neprekidnost funkcije

Funkcija f neprekidna je u točki a u kojoj je definirana ako postoji limes funkcije f u toj točki koji je jednak vrijednosti funkcije u toj točki.

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Funkcija f neprekidna je funkcija ako je neprekidna u svakoj točki iz područja definicije.

Slika 25 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Nakon limesa funkcija prirodno se prelazi na problem tangente, odnosno derivacije. Derivacije su dobro zastupljene i veoma važne u kurikulumu, a njihova obrada po udžbenicima je temeljita i sistematična. Ovo je jako dobar trenutak gdje možemo saznati kako učenici razmišljaju i povezuju li gradivo. Nakon što se definiraju derivacije ne postoje više nikakve zapreke da se uvedu teoremi koji će biti iznimno važni za proučavanje svojstava danih funkcija.

Prvo što se definira su intervali monotonosti (Slika 26) na koje ćemo kasnije dijeliti domenu funkcije, a zatim se kroz diskusiju i, po mogućnosti, uz pomoć animacije u nekoj aplikaciji (GeoGebra) dolazi do karakterizacije koja nam omogućuje da na konkretnom primjeru funkcije odredimo intervale rasta i pada (Slika 27).

Za funkciju f kažemo da je po dijelovima monotona na intervalu $I = \langle a, b \rangle$, $I \subset D_f$ ako postoji konačno mnogo točaka takvih da je $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_n$ i da je funkcija monotona na svakom od intervala $\langle a, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle \ldots \langle x_n, b \rangle$. Interval na kojem funkcija raste ili pada nazivamo interval monotonosti.

Slika 26 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Neka je funkcija f derivabilna na intervalu $I = \langle a, b \rangle$, $I \subset D_f$.

Funkcija f raste na intervalu I ako i samo ako je $f'(x) > 0$ za svaki $x \in I$.

Funkcija f pada na intervalu I ako i samo ako je $f'(x) < 0$ za svaki $x \in I$.

Slika 27 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Primijetimo da je na Slici 27 definicija kriva. Naime, funkcija f raste na intervalu I ako i samo ako je vrijednost prve derivacije u točkama intervala I nenegativna. Greške u udžbenicima nisu rijetkost i na njih valja pripaziti. Slijedi definicija stacionarne točke (Slika 28).

Stacionarna točka funkcije je svaka točka x_0 u kojoj je tangenta na graf funkcije usporedna s osi x. Za stacionarnu točku vrijedi $f'(x_0) = 0$.

Slika 28 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

U drugom razredu se već spominju ekstremi kvadratne funkcije kao točke u kojima graf prestaje padati i počinje rasti ili obratno. Učenicima je na intuitivnoj razini jasno što je ekstrem i kako izgleda minimum i maksimum. Ipak, oni se još nisu strogo definirali. Također, u općenitom slučaju funkcija razlikujemo lokalni i globalni ekstrem i to je nešto novo (Slika 29 i Slika 30).

Funkcija f ima **lokalni minimum** u točki x_0 ako postoji interval $\langle a, b \rangle$ koji sadržava x_0 tako da za svaki $x \in \langle a, b \rangle$ vrijedi da je $f(x_0) < f(x)$.

Funkcija f ima **lokalni maksimum** u točki x_0 ako postoji interval $\langle a, b \rangle$ koji sadržava x_0 tako da za svaki $x \in \langle a, b \rangle$ vrijedi da je $f(x_0) > f(x)$.

Lokalni minimum ili lokalni maksimum funkcije nazivamo lokalnim **ekstremima funkcije**.

Slika 29 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Globalni maksimum funkcije najveća je vrijednost koju funkcija poprima na promatranome zatvorenom intervalu ili na njezinu području definicije, a globalni minimum je najmanja takva vrijednost.

Slika 30 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Još uvijek ne znamo odrediti je li neka točka lokalni ekstrem. Važno je da učenici razumiju razliku nužnog i dovoljnog uvjeta. U udžbeniku Školske knjige nema navedenog nužnog uvjeta za lokalni ekstrem. Ipak, bilo bi dobro da učenicima naglasimo da ako funkcija u točki x ima lokalni ekstrem onda je x stacionarna točka.

Nakon toga treba potaknuti diskusiju pitanjem „Jesu li sve stacionarne točke lokalni ekstremi?“ Funkcija $f(x) = x^3$ je klasičan primjer kojim bi pokazali učenicima da to ne vrijedi jer ona u 0 ima stacionarnu točku, ali nema lokalni ekstrem. Dakle, nužno je da x bude stacionarna točka, ali ne i dovoljno.

Tako dolazimo do zaključka da sad možemo lako dobiti kandidate za lokalne ekstreme (stacionarne točke), ali još uvijek nemamo dovoljan uvjet.

Slijedi, naravno, dovoljan uvjet da bi stacionarna točka bila ekstrem i on zahtjeva postojanje druge derivacije.

Ako u stacionarnoj točki x_0 funkcija ima drugu derivaciju i vrijedi $f''(x_0) \neq 0$, tada funkcija ima ekstrem u toj točki ako f' mijenja predznak u toj točki. Pri tome:

– ako je $f''(x_0) > 0$, tada je u x_0 lokalni minimum

– ako je $f''(x_0) < 0$, tada je u x_0 lokalni maksimum.

Slika 31 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Ova verzija drugog uvjeta nije dobra. Naime, nigdje prije ovog se ne spominje da prva derivacija u točki ekstrema mijenja predznak. Osim toga, taj dio je u potpunosti suvišan u ovom uvjetu. Činjenica da prva derivacija mijenja predznak u točki ekstrema nam može biti iznimno korisna pri skiciranju grafa funkcije, ali to se trebalo naglasiti drugdje.

Definicija konveksnosti i konkavnosti na nastavi se razlikuje od definicije u teorijskom dijelu ovog rada. Naime, definicija u ovom radu je kompleksnija dok je definicija na nastavi intuitivnija i primjerenija učenicima (Slika 32). Slijedi iskaz i dokaz dovoljnog uvjeta konveksnosti (konkavnosti) te definicija točke infleksije (Slika 33).

Neka na intervalu $\langle a, b\rangle$ postoji tangenta grafa funkcije f u svakoj točki intervala.

Funkcija je **konveksna** na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako je njezin graf iznad tangente u svakoj točki toga intervala.

Funkcija je **konkavna** na intervalu $\langle a, b\rangle$ ako je njezin graf ispod tangente u svakoj točki toga intervala.

Slika 32 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Neka funkcija f ima drugu derivaciju u svakoj točki intervala $\langle a, b\rangle$.

Ako je $f''(x) > 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, tada je funkcija konveksna na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Ako je $f''(x) < 0$ za svaki $x \in \langle a, b\rangle$, tada je funkcija konkavna na intervalu $\langle a, b\rangle$.

Točku u kojoj konveksnost prelazi u konkavnost ili obrnuto nazivamo **točkom pregiba** ili **točkom infleksije**. Za točku pregiba x_0 vrijedi $f''(x_0) = 0$.

Slika 33 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Preostaje još samo definirati asimptotu i vrste asimptota.

Asimptota grafa funkcije f je pravac sa svojstvom da udaljenost od točke T na grafu funkcije f do toga pravca teži nuli kada barem jedna od koordinata točke T teži u $-\infty$ ili u $+\infty$.

Slika 34 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Pravac $x = x_0$ **vertikalna** je asimptota grafa funkcije f u točki x_0 ako vrijedi $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$ ili $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ ili obrnuto $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$ i $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Slika 35 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Pravac $y = y_0$ **horizontalna** je asimptota grafa funkcije f ako vrijedi $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = y_0$.

Slika 36 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Pravac $y = kx + l$ **kosa** je asimptota grafa funkcije f ako postoje limesi konačnih vrijednosti

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} \text{ i } l = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right).$$

Slika 37 MATEMATIKA 4, Školska knjiga

Nakon ovoga imamo alat potreban za crtanje grafa dane funkcije. Obično se na nastavi napravi popis svih koraka koji su potrebni.

Vidimo da su na ovoj razini definicije velikim dijelom matematički korektne. Osim toga, puno se pažnje obraća na dokaze tvrdnji, pogotovo u matematičkim gimnazijama, što je dobra priprema za fakultet.

Zaključak

U kurikulumu i na nastavi glavnu ulogu ima aritmetika, a zatim geometrija. Čak se i geometrija često zanemaruje jer se obrađuje na kraju školske godine pa je nastavnici ponekad preskoče jer smatraju da je preteška i nebitna.

Školska matematika se tako svede na brojeve i račun. Brojevi su veliki dio matematike, ali matematika se ne bavi samo brojevima i računom već je puno šira. Konkretan primjer koji to pokazuje su funkcije koje su iznimno važne u matematici, a definiraju se tek u prvom razredu srednje škole što je jako loše. Kroz srednju školu funkcije su iznimno dobro i sistematično obrađene.

Prvo se obrade osnovne elementarne funkcije, njihova svojstva i grafovi, a tek u četvrtom razredu se obrađuju sve realne funkcije općenito što je sasvim korektno jer je za crtanje grafa potrebno definirati neke apstraktne pojmove kao što su limesi i derivacije.

Prema mom mišljenju, djeca su sposobna intuitivno shvatiti pojam pridruživanja još u razrednoj nastavi. Relacije bi se lako mogle vizualizirati i prikazati na primjerima iz stvarnog života. Tako bi počeli s upoznavanjem funkcija već u ranoj dobi. Naravno, još ih ne bismo definirali. Nakon toga bi postepeno uvodili simboliku i svojstva te bi do kraja osnovne škole došli do funkcije kao posebnog slučaja pridruživanja. Cilj ovakvog pristupa je da funkcije učenicima ne budu nešto apstraktno i novo, već da imaju dojam da ih spominjemo kroz cijelo školovanje. Također, ovakvim pristupom bi se funkcije definirale kao poseban slučaj pridruživanja, odnosno relacije.

Literatura

[1] A. Pletikosić, I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Njerš, R. Gortan, T. Srnec, Ž. Dijanić, MATEMATIKA 3, udžbenik matematike sa zadatcima za rješavanje u 3. razredu srednje škole – 5, 6 i 7 sati tjedno, 1. i 2. dio, Školska knjiga

[2] A. Pletikosić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, MATEMATIKA 1, udžbenik matematike sa zadatcima za rješavanje u 1. razredu srednje škole – 5 sati tjedno, 1. i 2. dio, Školska knjiga

[3] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Karlo, M. Kuliš, T. Rodiger, MATEMATIKA 7, udžbenik matematike u sedmom razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, 1. i 2. dio, Školska knjiga

[4] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Karlo, M. Kuliš, T. Rodiger, MATEMATIKA 8, udžbenik matematike u osmom razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, 1. i 2. dio, Školska knjiga

[5] B. Antunović Piton, A. Bogner Boroš, P. Brkić, M. Kuliš, T. Rodiger, N. Zvelf, MATEMATIKA 6, udžbenik matematike u šestom razredu osnovne škole sa zadatcima za rješavanje, 1. i 2. dio, Školska knjiga

[6] B. Antunović Piton, M. Kuliš, I. Matić, N. Zvelf, MATEMATIKA 5, udžbenik sa zbirkom zadataka iz matematike u petom razredu osnovne škole, 1. i 2. dio, Školska knjiga

[7] B. Guljaš, Matematička analiza I i II

[8] I. Matić, J. Barišin, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, R. Gortan, V. Vujasin Ilić, Ž. Dijanić, MATEMATIKA 2, udžbenik matematike sa zadatcima za rješavanje u 2. razredu srednje škole – 5, 6 i 7 sati tjedno, 1. i 2. dio, Školska knjiga

[9] I. Matić, Lj. Jukić Matić, M. Zelčić, M. Šujansky, T. Srnec, T. Vukas, Ž. Dijanić, MATEMATIKA 4, udžbenik matematike u 4. razredu srednje škole sa zadatcima za rješavanje – 5, 6 i 7 sati tjedno, 1. i 2. dio, Školska knjiga

[10] M. Klaričić Bakula, S. Braić, Uvod u matematiku

[11] Š. Ungar, Matematička analiza 3

[12] V. Matijević, Diferencijalni i integralni račun I

[13] V. Matijević, Uvod u teoriju skupova

[URL1] http://www.mathos.unios.hr/elementarna1/Vjezbe/elementarne.pdf

[URL2]

https://mapmf.pmfst.unist.hr/~pero/pripremni/2.Elementarne_funkcije_prezentacija.pdf

[URL3] https://www.pmf.unizg.hr/_download/repository/mat1-tjedan8.pdf

[URL4] file:///C:/Users/PC/Downloads/3_Culina_Vitaljic.pdf

[URL5] https://skolazazivot.hr/wp-content/uploads/2020/07/MAT_kurikulum_1_71.pdf

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

FUNKCIJE U KURIKULUMU

Katarina Blažević

Sažetak:

U ovom radu istraženo je koliko su funkcije zastupljene u kurikulumu osnovne i srednje škole te na koji način se uvode i obrađuju. Cilj je da se dobije jasan pregled zastupljenosti funkcija u kurikulumu uz komentare usmjerene na matematičku korektnost, postupnost i sistematičnost obrade funkcija na nastavi. Zaključak je da se funkcije ne obrađuju dovoljno u osnovnoj školi dok su u srednjoj školi funkcije velikim dijelom matematički korektno i postupno obrađene.

Ključne riječi:

Matematika relacije nastava škola

Podatci o radu:

54 stranice, 37 slike, 12 tablice, 1 literaturni navod, hrvatski)

Mentor: doc.dr.sc. Goran Erceg

Neposredna voditeljica: dr.sc. Ana Laštre

Članovi povjerenstva:

doc.dr.sc. Goran Erceg

dr.sc. Ana Laštre

Željka Zorić, viši pred.

Povjerenstvo za diplomske radove je prihvatilo ovaj rad 22.09.2021.

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

FUNCTIONS IN CURRICULUM

Katarina Blažević

Abstract:
In this paper I'll demonstrate how functions are represented in the primary and secondary school curriculum and how they are introduced and processed. The goal is to get a clear overview of the representation of functions in the curriculum with comments focused on the mathematical correctness, gradual and systematic processing functions in schools. Conclusion is that functions are not covered enough in primary school while in high school functions are largely mathematically correct and gradually processed.

Key words:
Mathematics relations class school
Specifications:
54 pages, 37 pictures, 12 tables, 1 literary citation, croatian

Mentor: doc.dr.sc. Goran Erceg
Supervisor: dr.sc. Ana Laštre
Committee:
doc.dr.sc. Goran Erceg
dr.sc. Ana Laštre
Željka Zorić, viši pred.

This thesis was approved by a Thesis commettee on 22.09.2021.