

# Točkovni procesi i njihove karakteristike

---

**Dujmović, Dijana**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:655681>

*Rights / Prava:* [Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International/Imenovanje-Nekomercijalno-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-17**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU

DIJANA DUJMOVIĆ

**TOČKOVNI PROCESI I NJIHOVE  
KARAKTERISTIKE**

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2020.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU  
ODJEL ZA MATEMATIKU

**TOČKOVNI PROCESI I NJIHOVE  
KARAKTERISTIKE**

DIPLOMSKI RAD

Komentorica:

doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš

Studentica:

Mentorica:

Dijana Dujmović

doc. dr. sc. Snježana Braić

Split, rujan 2020.

# Uvod

Slučajni točkovni uzorci ili matematički, točkovni procesi, imaju temeljnu ulogu u stohastičkoj geometriji i nastaju kao rezultat raznih istraživanja u prirodi i tehnologiji. Pomoću točkovnih uzoraka moguće je opisati i objasniti razne pojave, kao što su lokacije stabala u šumi, vremena dolazaka kupaca na blagajnu, vremena događaja kao što su potresi ili poplave u nekom određenom razdoblju. Zanimanje za metode analize takvih podataka se povećava na mnogim poljima znanosti, a posebno u području ekologije, epidemiologije, astronomije i slično. Motivacija za analizu točkovnih procesa često se može pronaći u ispitivanju međusobne ovisnosti točaka.

Postoje različite matematičke interpretacije točkovnih procesa, pa ih se tako, primjerice, može promatrati kao slučajnu brojeću mjeru ili slučajan skup. Cilj ovog rada je definirati točkovne procese i na primjerima pokazati njihovu primjenu.

Rad se sastoji od 3 poglavlja. U prvom poglavlju se definiraju i objašnjavaju osnovni pojmovi iz područja vjerojatnosti, statistike, mjere i integrala koji su potrebni za razumijevanje ostatka rada.

U drugom poglavlju matematički se definiraju točkovni proces i pomoću primjera se objašnjava njegova uloga u metodama za analizu podataka. Nadalje, definira se i karakterizira distribucija točkovnog procesa pomoću konačno-dimenzionalnih distribucija, vjerojatnosti praznine i funkcionala kapaciteta.

Također, navode se dva osnovna primjera točkovnih procesa - binomni i Poissonov točkovni proces te njihovi grafički prikazi pomoću programskog jezika R.

U trećem poglavlju objašnjavaju se najvažnije karakteristike točkovnih procesa. Definira se intenzitet ili prvi moment točkovnog procesa, mjera drugog momenta, te gustoća drugog momenta. Također, koristeći prethodne pojmove izvest će se definicije funkcije korelacije koja je analogna korelaciji slučajnih varijabli. Za stacionaran točkovni proces definirat će se K-funkcija i njezina transformacija u L-funkciju. Nadalje, objasnit će se procjena K-funkcije i jedna od metoda za rješavanje problema s rubom pri procjeni te će se ilustrirati primjena na 2 različita skupa podataka. Na kraju rada slijedi objašnjenje L-testa, koji se koristi za testiranje Poissonove hipoteze.

# Sadržaj

Uvod	iii
Sadržaj	v
<b>1 Teorijska pozadina</b>	<b>1</b>
<b>2 Točkovni procesi</b>	<b>9</b>
2.1 Motivacijski primjer . . . . .	9
2.2 Definicija . . . . .	11
2.3 Karakterizacija distribucije točkovnog procesa . . . . .	14
2.4 Binomni točkovni proces . . . . .	16
2.5 Poissonov točkovni proces . . . . .	19
2.5.1 Homogeni Poissonov točkovni proces . . . . .	19
2.5.2 Nehomogeni Poissonov točkovni proces . . . . .	22
2.6 Simulacije točkovnih procesa u programskom jeziku R . . . . .	23
<b>3 Karakteristike točkovnih procesa</b>	<b>26</b>
3.1 Intenzitet . . . . .	26
3.2 Mjere drugog momenta . . . . .	28
3.3 K-funkcija . . . . .	32
3.3.1 Primjeri u programskom jeziku R . . . . .	39

<i>SADRŽAJ</i>	vi
3.4 Primjene kod testiranja Poissonove hipoteze . . . . .	40
<b>Zaključak</b>	<b>44</b>
<b>Literatura</b>	<b>45</b>

# Poglavlje 1

## Teorijska pozadina

U ovom poglavlju definirat ćemo osnovne pojmove iz vjerojatnosti, statistike, mjere i integrala koji su nam potrebni za razumijevanje ostatka rada.

Sa  $\Omega$  označimo proizvoljan neprazan skup koji reprezentira skup svih ishoda slučajnog pokusa i kojeg zovemo prostor elementarnih događaja.

**Definicija 1.1** *Familija  $\mathcal{F}$  podskupova od  $\Omega$  ( $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ) jest  $\sigma$ -algebra skupova ako je:*

$$(F1) \quad \emptyset \in \mathcal{F}$$

$$(F2) \quad A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$$

$$(F3) \quad A_i \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$$

Neka je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na skupu  $\Omega$ . Tada uređeni par  $(\Omega, \mathcal{F})$  nazivamo **izmjerivim prostorom**. Svaki element od  $\mathcal{F}$  se zove **izmjeriv skup**.

Na  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^d$ ) ćemo najčešće promatrati najmanju  $\sigma$ -algebru (s obzirom na inkluziju) koja sadrži sve otvorene skupove, u oznaci  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  ( $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ), te je nazivamo  $\sigma$ -algebra Borelovih skupova na  $\mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^d$ ), a njene elemente **Borelovi skupovi**.



## Poglavlje 1. Teorijska pozadina

Neka su  $(\Omega, \mathcal{F})$  i  $(\Omega', \mathcal{F}')$  izmjerivi prostori i  $f: \Omega \rightarrow \Omega'$ . Kažemo da je  $f$  **izmjeriva funkcija** ako je  $f^{-1}(\mathcal{F}') \subset \mathcal{F}$ , tj.  $\{f^{-1}(F'); F' \in \mathcal{F}'\} \subset \mathcal{F}$ .

**Definicija 1.2** Neka je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra na  $\Omega$ . **Mjera** na  $\mathcal{F}$  je svako preslikavanje  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  sa svojstvima

$$(1) \mu(A) \geq 0, \forall A \in \mathcal{F}$$

$$(2) \mu(\emptyset) = 0$$

(3)  $\sigma$ -aditivnost

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i),$$

gdje su  $A_i \in \mathcal{F}$  disjunktni skupovi.

Kažemo da je  $\mu(A)$  mjera skupa  $A$ , a  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor mjere. Mjera  $\mu$  je konačna ako vrijedi  $\mu(\Omega) < \infty$ .

**Definicija 1.3** Za mjeru  $\mu$  na izmjerivom prostoru  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  kažemo da je:

- **regularna iznutra** ako za svaki otvoren skup  $U$  vrijedi da je  $\mu(U) = \sup\{\mu(K) : K \text{ je kompaktan i } K \subset U\}$ .
- **regularna izvana** ako za svaki Borelov skup  $B$  vrijedi da je  $\mu(B) = \inf\{\mu(U) : U \text{ je otvoren i } B \subset U\}$ .
- **lokalno konačna** ako svaka točka  $x \in \mathbb{R}^d$  ima okolinu  $U$  takvu da je  $\mu(U) < \infty$ .
- **Radonova** ako je regularna iznutra, regularna izvana i lokalno konačna.

## Poglavlje 1. Teorijska pozadina

**Definicija 1.4** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor mjere. Kažemo da je  $E \in \mathcal{F}$  **atom** mjere  $\mu$  ako je  $\mu(E) > 0$  i ako za svaki  $B \in \mathcal{F}$ ,  $B \subset E$  takav da je  $\mu(B) < \mu(E)$  vrijedi da je  $\mu(B) = 0$ . Za mjeru  $\mu$  koja nema atoma kažemo da je **difuzna**.

**Definicija 1.5** Neka je  $\mathcal{F}$   $\sigma$ -algebra definirana na skupu  $\Omega$ . Funkciju  $\mu: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  definiranu s

$$\mu(A) = \begin{cases} n, & \text{ako je } A \subset \Omega \text{ konačan skup s } n \text{ elemenata} \\ \infty, & \text{ako je } A \subset \Omega \text{ beskonačan skup} \end{cases}$$

nazivamo **brojećom mjerom** ili **diskretnom mjerom**.

Funkciju  $\delta_x: \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty]$  definiranu sa

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in A, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

nazivamo **Diracovom mjerom** koncentriranom u točki  $x$ .

Intervale oblika  $(a, b)$ ,  $[a, b)$ ,  $(a, b]$ ,  $[a, b]$ , gdje su  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a \leq b$  zovemo 1-intervali. Skup oblika  $I_1 \times \dots \times I_d$  zovemo  $d$ -interval na  $\mathbb{R}^d$ , gdje su  $I_1, \dots, I_d$  1-intervali.

Jedna od najvažnijih primjera mjere je **Lebesgueova mjera**  $v_d$  na  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  koja se može karakterizirati kao

$$v_d(Q) = (b_1 - a_1) \cdot \dots \cdot (b_d - a_d)$$

ako je  $Q = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$ . Tada slijedi da se vrijednosti  $v_d$  mjera geometrijskih objekata kao kugala, cilindara i slično podudaraju sa volumenom u elementarnoj geometriji. Zaista, u slučaju kada je  $d = 3$ , Lebesgueova mjera  $v_3$  je jednaka volumenu  $V$ . U slučaju kada je  $B$  ograničeni Borelov skup  $v_d(B) < \infty$ .

## Poglavlje 1. Teorijska pozadina

**Propozicija 1.6** *Lebesgueova mjera  $v_d$  jedina je mjera na  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  koja svakom  $d$ -intervalu pridružuje njegov volumen.*

Lebesgueova mjera je invarijantna obzirom na izometriju, dakle vrijedi da je  $v_d(mA) = v_d(A)$ , za svaku izometriju  $m$  i Borelov skup  $A$ . Svaka Radonova mjera  $\mu$  na  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$  koja je invarijantna obzirom na izometriju je konstantni višekratnik Lebesgueove mjere

$$\mu = c \cdot v_d, \quad \text{za } c \geq 0. \quad (1.1)$$

Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  izmjeriv prostor i  $F \subseteq \Omega$ . Za funkciju  $f: F \rightarrow \mathbb{R}$  kažemo da je  **$\mathcal{F}$ -izmjeriva** ako je  $f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$  za svaki skup  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

**Stepenasta funkcija** na skupu  $A$  je svaka funkcija  $f: A \rightarrow [-\infty, +\infty]$  koja prima samo konačno mnogo različitih vrijednosti. Konačnu i izmjerivu stepenastu funkciju zovemo **jednostavna funkcija**.

**Definicija 1.7** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  prostor mjere.*

(1) *Neka je  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty)$  jednostavna nenegativna funkcija s prikazom  $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ , gdje su  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$  disjunktni skupovi i  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  nenegativni realni brojevi. Broj*

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^n \alpha_i \mu(A_i)$$

*se zove **integral funkcije**  $f$  obzirom na mjeru  $\mu$ . Za funkciju  $f$  kažemo da je **integrabilna** ako je  $\int f d\mu < \infty$ .*

(2) *Neka je  $f: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  nenegativna  $\mathcal{F}$ -izmjeriva funkcija. Broj*

$$\int f d\mu := \sup \left\{ \int g d\mu : g \text{ je jednostavna nenegativna izmjeriva, } g \leq f \right\}$$

*se zove **integral funkcije**  $f$  obzirom na mjeru  $\mu$ .*

## Poglavlje 1. Teorijska pozadina

(3) Neka je  $f: \Omega \rightarrow [-\infty, +\infty]$   $\mathcal{F}$ -izmjeriva funkcija, pri čemu je  $f^+ := \max\{f, 0\}$ ,  $f^- := \max\{-f, 0\}$  i  $f = f^+ - f^-$ . Broj

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

zovemo integral funkcije  $f$  obzirom na mjeru  $\mu$ . Neka je  $E \in \Omega$  izmjeriv skup. Ako je definiran integral  $\int \mathbf{1}_E f d\mu$ , onda broj  $\int_E f d\mu := \int f \mathbf{1}_E d\mu$  zovemo integral funkcije  $f$  na skupu  $E$  obzirom na mjeru  $\mu$ .

Svaka omeđena i po dijelovima monotona funkcija na  $[a, b]$  je integrabilna u smislu Riemanna, tj.  $R$ -integrabilna. Prema Riemannovom teoremu je  $R$ -integrabilna i svaka neprekidna funkcija  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , a njezin integral se računa po Newton-Leibnizovoj formuli

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

gdje je  $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  bilo koja primitivna funkcija funkcije  $f$ , tj.  $\forall x \in [a, b]$  vrijedi  $F'(x) = f(x)$ .

**Teorem 1.8** Neka je  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  omeđena funkcija

a) Funkcija  $f$  je  $R$ -integrabilna onda i samo onda ako je neprekidna skoro svuda na  $[a, b]$ .

b) Ako je funkcija  $f$   $R$ -integrabilna, onda je integrabilna i u smislu Lebesguea i pri tome se Lebesgueov integral podudara s Riemannovim integralom, tj. vrijedi

$$\int_{[a,b]} f dv_d = \int_a^b f(x) dx$$

**Definicija 1.9** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F})$  izmjerivi prostor. Funkciju  $P: \mathcal{F} \rightarrow \mathbb{R}$  nazivamo **funkcijom vjerojatnosti** na  $\mathcal{F}$ , odnosno na  $\Omega$ , ako je  $P$  mjera i  $P(\Omega) = 1$ .

## Poglavlje 1. Teorijska pozadina

Uređena trojka  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  se zove **vjerojatnosni prostor**. Elemente  $\sigma$ -algebre  $\mathcal{F}$  nazivamo događajima, a broj  $P(A)$  vjerojatnost događaja  $A$ .

**Definicija 1.10** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor. Svaku funkciju  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , za koju vrijedi  $\{X \in B\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}, \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  nazivamo **slučajnom varijablom**.*

Relacijom

$$P_X(B) = P(X^{-1}(B)) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = P(X \in B),$$

za svaki  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ , definirana je funkcija  $P_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  i lako se provjeri da je  $P_X$  vjerojatnost na  $\mathbb{R}$ .

**Definicija 1.11** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor i  $X$  slučajna varijabla na  $\Omega$ . Vjerojatnost  $P_X: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  zadanu gornjom relacijom nazivamo **vjerojatnosnom mjerom induciranom s  $X$  ili zakonom razdiobe od  $X$** , a vjerojatnosni prostor  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), P_X)$  nazivamo **vjerojatnosnim prostorom induciranim s  $X$** .*

Slučajne varijable kod kojih postoji diskretan skup  $A$  takav da je  $P(X \in A) = 1$  nazivamo **diskretnim slučajnim varijablama**.

Spomenimo dva primjera diskretnih slučajnih varijabli koje ćemo spomenuti u ovo radu:

1. Kažemo da je  $X$  **binomna slučajna varijabla** s parametrima  $n \in \mathbb{N}$  i  $p \in \langle 0, 1 \rangle$  ako vrijedi

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

## Poglavlje 1. Teorijska pozadina

2. Kažemo da je  $X$  **Poissonova slučajna varijabla** s parametrom  $\lambda > 0$  ako vrijedi

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Definicija 1.12** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor i  $X$  slučajna varijabla na  $\Omega$ . **Matematičko očekivanje slučajne varijable**  $X$ , ili kraće **očekivanje od**  $X$ , postoji ako je konačan integral  $\int |X| dP$ , te ga u tom slučaju definiramo kao broj

$$EX = \int X dP.$$

**Definicija 1.13** **Varijanca** slučajne varijable  $X$  koju označavamo s  $VarX$  ili  $\sigma_X^2$  (ako postoji) je jednaka

$$VarX = E[(X - EX)^2].$$

Pozitivan drugi korijen iz varijance zovemo **standardna devijacija** slučajne varijable  $X$  i označujemo sa  $\sigma_X$ .

**Definicija 1.14** Neka su  $X$  i  $Y$  slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . Kažemo da su  $X$  i  $Y$  **nezavisne** ako vrijedi

$$P(X \in B_1, Y \in B_2) = P(X \in B_1)P(Y \in B_2),$$

za svaki  $B_1, B_2 \in \mathbb{B}(\mathbb{R})$ .

**Definicija 1.15** Neka su  $X$  i  $Y$  slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ . **Kovarijanca** slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$  je

$$Cov(X, Y) = E[(X - EX)(Y - EY)] = E[XY] - E[X]E[Y].$$

Ako su  $X$  i  $Y$  nezavisne slučajne varijable onda je  $Cov(X, Y) = 0$ .

## Poglavlje 1. Teorijska pozadina

**Definicija 1.16** Neka su  $X$  i  $Y$  slučajne varijable na istom vjerojatnosnom prostoru  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ,  $Cov(X, Y)$  kovarijanca slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$ , a  $\sigma_X$  i  $\sigma_Y$  njihove standardne devijacije. **Koeficijent korelacije** slučajnih varijabli  $X$  i  $Y$  je

$$\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}.$$

**Definicija 1.17** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  proizvoljni vjerojatnosni prostor i  $A \in \mathcal{F}$  takav da je  $P(A) > 0$ . Definirajmo funkciju  $P_A: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$  na sljedeći način:

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad B \in \mathcal{F}.$$

Funkciju  $P_A$  zovemo **uvjetna vjerojatnost uz uvjet  $A$** , a broj  $P(B|A)$  vjerojatnost od  $B$  uz uvjet  $A$ .

**Definicija 1.18** Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor,  $X$  slučajna varijabla na  $\Omega$  i  $A \in \mathcal{F}$ , takav da je  $P(A) > 0$ . **Uvjetno (matematičko) očekivanje** slučajne varijable  $X$  uz dano  $A$  je definirano u slučaju da je integral  $\int |X| dP_A$  konačan i tom slučaju jednako je broju

$$E[X|A] = \int X dP_A.$$

# Poglavlje 2

## Točkovni procesi

### 2.1 Motivacijski primjer

Kao motivacijski primjer imamo točkovni uzorak koji predstavlja lokacije stabala na jednom određenom dijelu konkretne šume.

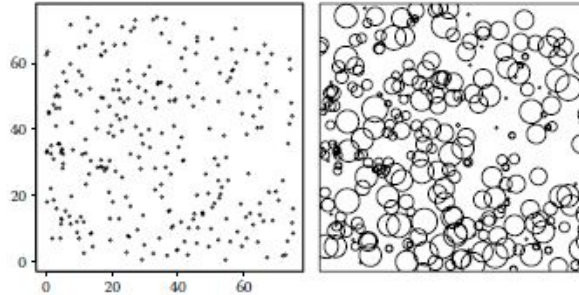
Promatrat ćemo uzorak od 270 stabala na području od  $75 \times 75$  metara u Kaluzhskie Zaseki šumi u Rusiji (lijeva strana Slike 2.1). Postoje mnogi uzroci koji utječu na raspored stabala u šumi, kao primjer možemo uzeti borbu stabala za nutrijente ili prostor, što može dovesti do toga da velika stabla nisu blizu jedna drugima, a manja stabla popunjavaju praznine među njima. Također, sadnice imaju tendenciju rasta u blizini starijih stabala, što može rezultirati većoj gustoći oko tih stabala. Možemo uzeti u obzir i činjenicu o varijaciji plodnosti tla, jer je vjerojatnije da će stablo uspjeti u području visoke plodnosti.

Na desnoj strani Slike 2.1 možemo vidjeti primjer uzorka sa dodatnim informacijama o svakom stablu (točki), što nazivamo označenim točkovnim uzorkom.

Nakupine manjih stabala u prazninama između većih su očigledne. Kako bi

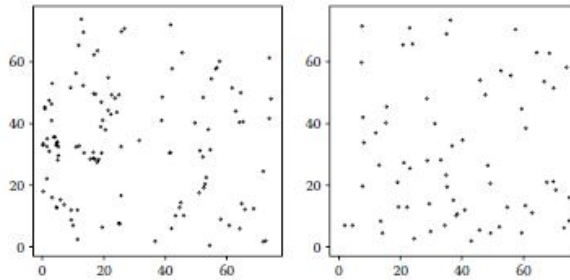


## Poglavlje 2. Točkovni procesi



Slika 2.1: Stabla u Kaluzhskie Zaseki šumi u centralnoj Rusiji (Smirnova, 1994; Grabarnik i Chiu, 2002). Lijeva slika: lokacije 270 stabala. Desna slika: grafički prikaz u kojem je svako stablo locirano u centru kruga čiji je polumjer 0.103 puta veći od promjera stabla. Slika preuzeta iz knjige [4].

se taj efekt vidio jasnije, na Slici 2.2 će biti odvojeni grafički prikaz većih i manjih stabala.



Slika 2.2: Lijeva slika: Stabla sa promjerom manjim od 15 cm. Desna slika: Stabla sa promjerom većim od 25 cm. Slika preuzeta iz knjige [4].

Podaci kao na Slici 2.1 i Slici 2.2 mogu biti matematički opisani kao konačna cjelobrojna mjera

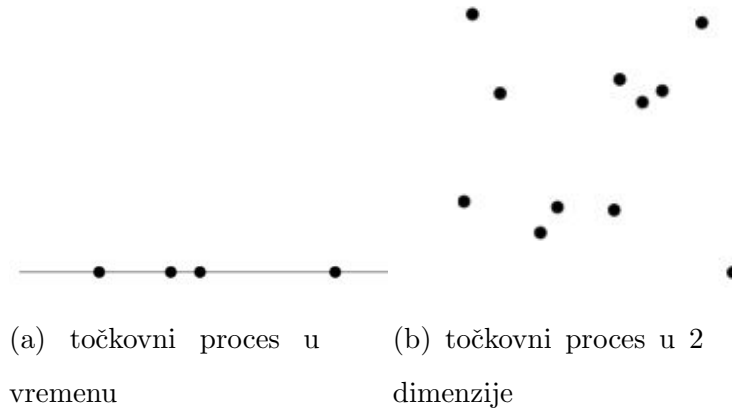
$$\sum_{i=1}^l k_i \delta_{x_i},$$

gdje je  $l \in \mathbb{N}_0$ ,  $x_i$  su različite točke iz  $\mathbb{R}^d$ , a svaka težina  $k_i$  je strogo pozitivan cijeli broj, kratnost od  $x_i$ .

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

**Primjer 2.1** *Koristan model za promatranje vremena u kojem se neki događaj pojavio je točkovni proces u jednoj dimenziji (vrijeme). Kao primjer možemo uzeti slučajna vremena kada su primljeni pozivi službi za korisnike. Kao što možemo vidjeti na lijevoj strani Slike 2.3, svaki poziv predstavlja jednu točku.*

*Ako u promatranje uključimo i lokacije korisnika koji su zvali korisničku službu tokom nekog određenog dana, tada ćemo dobiti točkovni uzorak u dvije dimenzije kao što je prikazano na desnoj strani Slike 2.3. Imamo slučajan broj takvih točaka, čije lokacije su također slučajne.*



Slika 2.3: Slike preuzete iz [1]

## 2.2 Definicija

Neka je  $\mathfrak{N}$  familija svih nizova  $\varphi$  točaka iz  $\mathbb{R}^d$  koji zadovoljavaju sljedeće uvjete:

- niz  $\varphi$  je lokalno konačan, tj. svaki omeđeni podskup od  $\mathbb{R}^d$  mora sadržavati samo konačan broj točaka od  $\varphi$ ,
- niz je jednostavan, tj.  $x_i \neq x_j$  ako je  $i \neq j$ .

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

Na  $\mathfrak{X}$  definirajmo  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{N}$  kao najmanju  $\sigma$ -algebru na  $\mathfrak{X}$  takvu da su sva preslikavanja  $\varphi : B \mapsto \varphi(B)$ ,  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  izmjeriva, gdje  $\varphi(B)$  označava broj točaka u skupu  $B$ .

**Definicija 2.2** *Točkovni proces*  $\phi$  je izmjerivo preslikavanje iz vjerojatnosnog prostora  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  u  $(\mathfrak{X}, \mathcal{N})$ .

U sljedećem primjeru ćemo pokušati oslikati pojam točkovnog procesa putem slučajne varijable koja opisuje ishod bacanja kockice.

**Primjer 2.3** *Slučajna varijabla poprima vrijednosti od 1 do 6, gdje je vjerojatnost za svaku od 6 mogućnosti  $\frac{1}{6}$ . Sada pretpostavimo da smo konstruirali kockicu sa beskonačno mnogo strana, sa dvodimenzionalnim točkovnim uzorkom na svakoj strani. Svaki put kad je kockica bačena, generiran je točkovni uzorak. Kockica predstavlja točkovni proces  $\Phi$ , a točkovni uzorak  $\varphi = \Phi(\omega)$  je dodijeljen svakoj točki  $\omega$ . Pretpostavimo da netko promatra neovisno ponavljanje bacanja kockice. Ta osoba vidi različite uzorke točaka i mijenjanje vrijednosti broja točaka u nekom podskupu  $B$  ravnine. Drugim riječima, svako bacanje kockice proizvodi različitu realizaciju slučajne varijable 'broj točaka u  $B$ '.*

Točkovni proces ili slučajni točkovni uzorak  $\Phi$  se može promatrati kao slučajni niz (strože slučajni skup)  $\Phi = \{x_1, x_2, \dots\}$  ili kao slučajna brojeća mjera; za svaki Borelov skup  $B$  simbol  $\Phi(B)$  označava slučajan broj točaka točkovnog procesa  $\Phi$  koji leže u skupu  $B$ . Kao slučajan skup  $\Phi$  može biti u presjeku sa nekim drugim skupom, a presjek nekog Borelovog skupa  $B$  i točkovnog procesa  $\Phi$  je slučajan skup točaka od  $\Phi$  koje također pripadaju skupu  $B$ . Budući da se slučajni točkovni uzorci smatraju lokalno konačnim, tada će  $\Phi$  uvijek biti zatvoren skup, a  $B \cap \Phi$  će uvijek biti konačan, kad god je skup  $B$  ograničen.

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

S obzirom na ove dvije interpretacije imamo sljedeći zapis:

$$\begin{aligned}x \in \Phi &: && \text{točka } x \text{ pripada slučajnom nizu } \Phi, \\n(\Phi) &: && \text{broj točaka procesa } \Phi, \\ \Phi(B) = n &: && \text{skup } B \text{ sadrži } n \text{ točaka od } \Phi,\end{aligned}$$

gdje je  $\Phi(B)$  nenegativna cjelobrojna diskretna slučajna varijabla koja predstavlja broj točaka točkovnog procesa  $\Phi$  koje leže u skupu  $B$ .

Broj točaka niza  $\varphi$  koji leže u skupu  $B$  možemo zapisati kao

$$\varphi(B) = \sum_{x \in \varphi} \mathbf{1}_B(x),$$

gdje je  $\mathbf{1}_B$  karakteristična funkcija skupa  $B$  za koju vrijedi

$$\mathbf{1}_B(x) = \begin{cases} 1, & \text{ako je } x \in B \\ 0, & \text{ako je } x \notin B \end{cases}.$$

Stoga, očekivanu vrijednost broja točaka točkovnog procesa  $\Phi$  koje leže u skupu  $B$  možemo zapisati kao

$$E(\Phi(B)) = E\left(\sum_{x \in \Phi} \mathbf{1}_B(x)\right)$$

**Definicija 2.4** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  vjerojatnosni prostor i  $\Phi : \Omega \rightarrow \mathfrak{X}$  točkovni proces. **Distribucija točkovnog procesa**  $\Phi$  je vjerojatnosna mjera  $P_\Phi$  na izmjerivom prostoru  $(\mathfrak{X}, \mathcal{N})$  za koju vrijedi*

$$P_\Phi(Y) = P(\Phi \in Y) = P(\omega \in \Omega : \Phi(\omega) \in Y)$$

za svaki  $Y \in \mathcal{N}$ .

Događaj  $\{\Phi \in Y\}$  nam često označava da točkovni proces  $\Phi$  ima neko svojstvo (npr. nema točaka u nekom skupu  $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ ), te u tom slučaju  $P(\Phi \in Y)$  predstavlja vjerojatnost da  $\Phi$  ima to svojstvo.

## 2.3 Karakterizacija distribucije točkovnog procesa

**Definicija 2.5** *Konačno dimenzionalne distribucije točkovnog procesa su vjerojatnosti oblika*

$$P(\Phi(B_1) = n_1, \dots, \Phi(B_k) = n_k),$$

gdje su  $B_1, \dots, B_k$  omeđeni Borelovi skupovi i  $n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}_0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

Dakle, ovaj pojam nam opisuje vjerojatnost da točkovni proces  $\Phi$  ima  $n_1$  točaka u skupu  $B_1$ ,  $\dots$ ,  $n_k$  točaka u skupu  $B_k$ .

**Teorem 2.6** *Distribucija točkovnog procesa  $\Phi$  je jednoznačno određena konačno dimenzionalnim distribucijama.*

Iz teorema slijedi da ako dva točkovna procesa imaju iste konačno dimenzionalne distribucije, tada imaju istu distribuciju.

Za jednostavne točkovne procese definirat ćemo dva pojma koja određuju distribuciju točkovnog procesa.

**Definicija 2.7** *Vjerojatnost praznine  $v_B$  točkovnog procesa  $\Phi$  nam označava vjerojatnost da proces nema točaka u danom Borelovom skupu  $B$*

$$\begin{aligned} v_B &= P(\Phi(B) = 0) \\ &= P(\Phi \cap B = \emptyset) \end{aligned}$$

Ako dva jednostavna točkovna procesa  $\Phi_1$  i  $\Phi_2$  imaju iste vjerojatnosti praznine za svaki omeđeni Borelov skup, tada im se distribucije podudaraju, što je posljedica sljedećeg teorema.

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

**Teorem 2.8** *Distribucija jednostavnog točkovnog procesa je jednoznačno određena vjerojatnošću praznine.*

**Definicija 2.9** *Funkcional kapaciteta jednostavnog točkovnog procesa  $\Phi$  je preslikavanje  $T_\Phi: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R}$  definirano sa*

$$T_\Phi(B) = P(\Phi(B) > 0) = 1 - v_B, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Funkcional kapaciteta jednostavnog točkovnog procesa također određuje njegovu distribuciju.

**Definicija 2.10** *Točkovni proces  $\Phi$  ili njegovu distribuciju  $P_\Phi$  ćemo nazvati **stacionarnom** ako je invarijantan obzirom na translaciju.*

Definicija nam kaže, točkovni procesi  $\Phi = \{x_n\}$  i  $\Phi_x = \{x_n + x\}$  imaju istu distribuciju za svaki  $x \in \mathbb{R}^d$ . Dakle, vrijedi da je

$$P(\Phi \in Y) = P(\Phi_x \in Y) \tag{2.1}$$

Ekvivalentno,  $P_\Phi(Y) = P_\Phi(Y_x)$ , gdje je  $Y_x = \{\varphi_x : \varphi \in Y\}$ .

**Propozicija 2.11** *Jednostavni točkovni proces  $\Phi$  je stacionaran ako i samo ako je funkcional kapaciteta  $T_\Phi(B)$  invarijantan obzirom na translaciju, tj.*

$$T_\Phi(B) = T_\Phi(B + v), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \forall v \in \mathbb{R}^d.$$

Slično, točkovni proces  $\Phi$  je **izotropan** ako je invarijantan obzirom na rotaciju. Točkovni procesi  $\Phi$  i  $r\Phi$  imaju jednaku distribuciju za svaku rotaciju  $r$ , dakle  $P_\Phi(Y) = P_\Phi(rY)$ , za svaki  $r$  i  $Y$ , gdje je  $rY = \{r\varphi : \varphi \in Y\}$ .

## 2.4 Binomni točkovni proces

Elementarni primjer točkovnog procesa je onaj koji sadrži samo jednu točku. Slučajna točka  $x$  uniformno distribuirana u kompaktnom skupu  $W \subset \mathbb{R}^d$  je slučajna točka za koju vrijedi

$$P(x \in A) = \frac{v_d(A)}{v_d(W)}$$

za svaki Borelov skup  $A$  sadržan u  $W$ , gdje je  $v_d$  Lebesgueova mjera.

Mnogi problemi u geometrijskoj vjerojatnosti nastaju iz proučavanja uniformno raspoređenih slučajnih točaka i određivanja omjera volumena kada je skup  $A$  definiran nekom geometrijskom konstrukcijom. Napredak moderne stohastičke geometrije u određenoj se mjeri može sažeti kao sustavna zamjena uniformno distribuiranih slučajnih točaka općenitijim uzorcima slučajnih točaka. Uniformno distribuirana slučajna točka prilično je trivijalan slučajni uzorak, a primjer općenitijeg uzorka slučajnih točaka je proces formiran od  $n$  nezavisnih točaka  $x_1, \dots, x_n$  uniformno raspoređenih u istom kompaktnom skupu  $W$ . Tada vrijedi

$$P(x_1 \in A_1, \dots, x_n \in A_n) = P(x_1 \in A_1) \cdot \dots \cdot P(x_n \in A_n) = \frac{v_d(A_1) \cdot \dots \cdot v_d(A_n)}{v_d(W)^n},$$

gdje su  $A_1, \dots, A_n$  Borelovi podskupovi od  $W$ . Ekvivalentno, točke  $x_1, \dots, x_n$  formiraju binomni točkovni proces u  $W$  ako je slučajni vektor  $(x_1, \dots, x_n)$  uniformno distribuiran u  $W^d$ . Slučajni uzorak koji formiraju te točke označavamo sa  $\Phi$ .

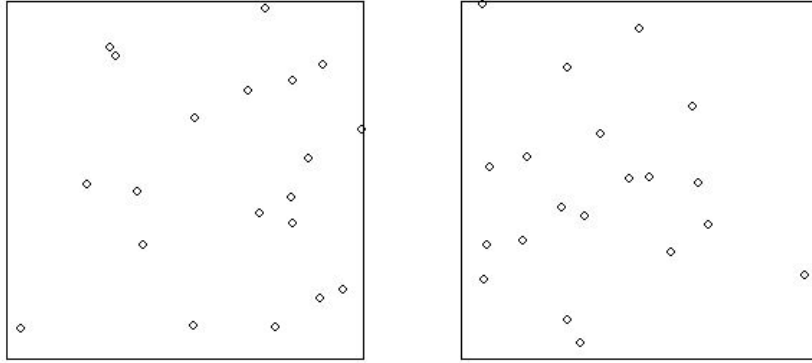
U slučajevima kad raspored točaka nije važan,  $\Phi$  se može smatrati slučajnim skupom, te i kao takav ima važnu ulogu u stohastičkoj geometriji. Također se  $\Phi$  može promatrati kao slučajna brojeća mjera. za Borelov skup  $A$  neka je  $\Phi(A)$  broj točaka od  $\Phi$  koje pripadaju  $A$ . Tada vrijedi

$$\Phi(\emptyset) = 0, \quad \Phi(W) = n,$$

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

$$\Phi(A_1 \cup A_2) = \Phi(A_1) + \Phi(A_2),$$

gdje su  $A_1$  i  $A_2$  disjunktni podskupovi od  $W$ . S obzirom da vrijedi  $\sigma$ -aditivnost slijedi da je  $\Phi$  slučajna brojeća mjera.



Slika 2.4: Dvije realizacije binomnog točkovnog procesa s 20 točaka

Binomni točkovni proces  $\Phi$  je dobio ime po svojim distribucijskim svojstvima. Na Slici 2.4 možemo vidjeti 2 različita prikaza binomnog točkovnog procesa koji ima 20 točaka. Ako je  $A$  Borelov podskup od  $W$  tada  $\Phi(A)$  ima binomnu distribuciju sa parametrima  $n = \Phi(W)$  i  $p = p(A) = \frac{v_d(A)}{v_d(W)}$ , te vrijedi:

$$P(\Phi(A) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \dots, n.$$

Budući da je matematičko očekivanje binomne slučajne varijable s parametrima  $n$  i  $p$  jednako  $n \cdot p$ , očekivani broj točaka po jedinici volumena ili intezitet binomnog točkovnog procesa dan je sa

$$\lambda = \frac{n}{v_d(W)}.$$

Matematičko očekivanje od  $\Phi(A)$  je

$$E(\Phi(A)) = \lambda \cdot v_d(A)$$



## Poglavlje 2. Točkovni procesi

za svaki Borelov skup  $A \subset W$ . Brojevi točaka u različitim podskupovima od  $W$  nisu neovisni čak i ako su podskupovi disjunktne, jer očito iz  $\Phi(A) = m$  slijedi da je  $\Phi(W \setminus A) = n - m$ .

Distribuciju točkovnog procesa  $\Phi$  možemo karakterizirati pomoću konačno-dimenzionalnih distribucija

$$P(\Phi(A_1) = n_1, \dots, \Phi(A_k) = n_k), \quad k = 1, 2, \dots,$$

gdje su  $A_1, \dots, A_k$  Borelovi skupovi i  $n_1, \dots, n_k$  su nenegativni cijeli brojevi koji zadovoljavaju svojstvo  $n_1 + \dots + n_k \leq n$ .

Teorem 2.8 kaže da je distribucija jednostavnog točkovnog procesa određena vjerojatnošću praznine  $v_B = P(\Phi(B) = 0)$ , gdje je  $B$  Borelov podskup od  $W$ .

Vjerojatnost praznine za binomni točkovni proces je dana sa

$$v_B = P(\Phi(B) = 0) = \frac{(v_d(W) - v_d(B))^n}{v_d(W)^n}. \quad (2.2)$$

Ako su  $A_1, \dots, A_k$  disjunktne Borelovi skupovi za koje vrijedi  $A_1 \cup \dots \cup A_k = W$  i  $n_1 + \dots + n_k = n$  tada su konačno-dimenzionalne vjerojatnosti dane sa

$$P(\Phi(A_1) = n_1, \dots, \Phi(A_k) = n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!} \cdot \frac{v_d(A_1)^{n_1} \cdot \dots \cdot v_d(A_k)^{n_k}}{v_d(W)^n}.$$

**Korolar 2.12** *Jednostavni točkovni proces je binomni ako i samo ako je njegov funkcional kapaciteta*

$$T_\Phi(B) = 1 - \left(1 - \frac{v_d(B \cap W)}{v_d(W)}\right)^n$$

za svaki Borelov skup  $B \subset \mathbb{R}^d$ .

## 2.5 Poissonov točkovni proces

### 2.5.1 Homogeni Poissonov točkovni proces

Jedno od prvih korištenja točkovnih procesa je bilo kada se željela izračunati vjerojatnost da neka zvijezda bude u određenoj okolini druge zvijezde. Pretpostavka je bila da su zvijezde nasumično raspoređene, a takve pojave kod kojih nema interakcije među slučajnim točkama opisujemo pomoću Poissonovih točkovnih procesa, koji predstavljaju osnovni model. Ime su dobili po Poissonovoj razdiobi koja je potrebna kako bi se opisala razdioba slučajno razbacanih točaka.

**Definicija 2.13** *Homogeni Poissonov točkovni proces  $\Phi$  se karakterizira pomoću dva fundamentalna svojstva:*

- (1) *slučajan broj točaka od  $\Phi$  u ograničenom Borelovom skupu  $B$  ima Poissonovu distribuciju s parametrom  $\lambda v_d(B)$ , za neku konstantu  $\lambda$ . Vrijedi*

$$P(\Phi(B) = m) = \frac{\mu^m e^{-\mu}}{m!},$$

*gdje je*

$$\mu = \lambda v_d(B).$$

- (2) *za međusobno disjunktne skupove  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  slučajne varijable  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_k)$  su nezavisne.*

**Napomena 2.14** *Točkovne procese sa svojstvom (2) iz definicije 2.13 nazivamo **potpuno slučajnim točkovnim procesima**.*

Broj  $\lambda$  iz svojstva (1) je karakteristični parametar homogenog Poissonovog točkovnog procesa, kojeg nazivamo intenzitet homogenog Poissonovog pro-

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

cesa, te za koji vrijedi

$$\lambda v_d(B) = E(\Phi(B)) \quad \text{za svaki omeđeni Borelov skup } B.$$

Slijede neka osnovna svojstva Poissonovog točkovnog procesa  $\Phi$ :

(a) Konačno dimnezionalne distribucije

Ako su  $B_1, \dots, B_k$  međusobno disjunktne Borelove skupove, tada su  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_k)$  međusobno nezavisne slučajne varijable sa srednjim vrijednostima  $\lambda v_d(B_1), \dots, \lambda v_d(B_k)$ .

Prema tome vrijedi:

$$\begin{aligned} P(\Phi(B_1) = n_1, \dots, \Phi(B_k) = n_k) &= \\ &= \frac{\lambda^{n_1 + \dots + n_k} (v_d(B_1))^{n_1} \cdot \dots \cdot (v_d(B_k))^{n_k}}{n_1! \cdot \dots \cdot n_k!} \cdot e^{-\sum_{i=1}^k \lambda v_d(B_i)} \end{aligned}$$

(b) Vjerojatnost praznine

U slučaju kada je  $\Phi$  homogeni Poissonov točkovni proces, vjerojatnost praznine je oblika

$$v_B = e^{-\lambda v_d(B)}$$

(c) Stacionarnost i izotropija

Točkovni proces definiran na način iz definicije 2.13 ima svojstvo stacionarnosti i izotropije, dakle svojstva iz definicije i karakteristični  $\lambda$  su invarijantni obzirom na translaciju i rotaciju.

Neka je  $A$  nesingularno linearno preslikavanje iz  $\mathbb{R}^d$  u  $\mathbb{R}^d$ . Ako je  $\Phi$  homogeni Poissonov točkovni proces sa intenzitetom  $\lambda$ , tada je također i  $A\Phi = \{Ax : x \in \Phi\}$  homogeni Poissonov proces, a njegov intenzitet je  $\lambda |\det(A^{-1})|$ .

**Korolar 2.15** *Jednostavni točkovni proces je Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$  ako i samo ako je njegov funkcional kapaciteta*

$$T_\Phi(B) = 1 - e^{-\lambda v_d(B)}.$$

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

za svaki Borelov skup  $B \subset \mathbb{R}^d$ .

Sljedeće svojstvo nam daje način na koji možemo simulirati Poissonov točkovni proces. Prvo generiramo slučajnu varijablu  $M$  iz Poissonove distribucije sa očekivanjem  $\lambda v_d(W)$ , a nakon toga sa  $M = m$  generiramo  $m$  nezavisnih uniformno distribuiranih slučajnih točaka iz  $W$ . Na taj način dođemo do generiranja realizacije Poissonovog točkovnog procesa u  $W$ .

**Lema 2.16** *Neka je  $\Phi$  Poissonov točkovni proces u  $\mathbb{R}^2$  sa intenzitetom  $\lambda > 0$ , a  $W \subset \mathbb{R}^2$  takav da je  $0 < v_d(W) < \infty$ . Ako je  $\Phi(W) = n$ , uvjetna distribucija  $\Phi(B)$  za  $B \subseteq W$  je binomna:*

$$P(\Phi(B) = k | \Phi(W) = n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k},$$

gdje je

$$p = \frac{v_d(B)}{v_d(W)}.$$

Nadalje, uvjetne distribucije od  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_k)$  za  $B_1, \dots, B_k$  su jednake kao i kod binomnog procesa. Drugim riječima, ako postoji  $n$  točaka u Poissonovom procesu, tada je tih  $n$  točaka uvjetno nezavisno i uniformno distribuirano.

Pomoću vjerojatnosti praznine možemo pokazati da ovo svojstvo vrijedi. Neka je  $B$  Borelov podskup od  $W$ , tada je vjerojatnost praznine uvjetnog homogenog Poissonovog procesa dana sa

$$\begin{aligned} P(\Phi(B) = 0 | \Phi(W) = n) &= \frac{P(\Phi(B) = 0, \Phi(W) = n)}{P(\Phi(W) = n)} \\ &= \frac{P(\Phi(B) = 0)P(\Phi(W/B) = n)}{P(\Phi(W) = n)} \\ &= \frac{(v_d(W) - v_d(B))^n}{v_d(W)^n}. \end{aligned}$$

Slijedi da se formula za vjerojatnost praznine uvjetnog homogenog Poissonovog procesa poklapa sa formulom (2.2) za vjerojatnost praznine binomnog

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

točkovnog procesa.

### 2.5.2 Nehomogeni Poissonov točkovni proces

Mjera intenziteta kod homogenog Poissonovog točkovnog procesa je proporcionalna Lebesgueovoj mjeri  $v_d$ , tj.  $\mu = \lambda v_b$ .

Prosječan broj točaka po jedinici površine ne varira u odnosu na prostor. Međutim, u mnogim primjenama uvjet nedostatka prostorne varijacije nije ispunjen. To možemo vidjeti na primjeru lokacija stabala u nekoj šumi. Promatramo šumu koja se nalazi na području čija se nadmorska visina povećava ili tlo postaje suše u nekom dijelu. Tada se prosječni broj stabala po jedinici površine može smanjiti.

Tada ima smisla promatrati model s funkcijom intenziteta  $\lambda(x)$ . Odgovarajuća mjera intenziteta je dana sa

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(x) dx.$$

Neka je  $\Lambda$  difuzna (bez atoma) Radonova mjera na  $\mathbb{R}^d$ , koja nam služi za konstrukciju općenitog Poissonovog točkovnog procesa  $\Phi$ .

**Definicija 2.17** *Poissonov točkovni proces* na skupu  $W$  s mjerom  $\Lambda$  je proces sa sljedećim svojstvima:

(i) broj točaka u ograničenom Borelovom skupu  $B$  ima Poissonovu distribuciju sa parametrom  $\Lambda(B)$

$$P(\Phi(B) = n) = \frac{\Lambda(B)^n}{n!} e^{-\Lambda(B)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

(ii) za međusobno disjunktne skupove  $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$  slučajne varijable  $\Phi(B_1), \dots, \Phi(B_k)$  su nezavisne.

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

Iz svojstva (i) je jasno da takav točkovni proces nije stacionaran. Bez pretpostavke da je  $\Lambda$  difuzna, proces bi mogao imati višestruke točke. Mjeru  $\Lambda$  nazivamo mjerom intenziteta točkovnog procesa koja odgovara već definiranoj mjeri kod homogenog Poissonovog točkovnog procesa.

## 2.6 Simulacije točkovnih procesa u programskom jeziku R

### Binomni točkovni proces

Binomni točkovni proces ima fiksni broj točaka  $n$ , međusobno nezavisnih i uniformno distribuiranih u istom kompaktnom skupu  $W$ .

Kako bi simulirali binomni točkovni proces u programskom jeziku R, potrebno je instalirati paket 'spatstat'. Pomoću funkcije 'runifpoint' generiramo slučajne realizacije binomnog procesa. U ovom primjeru, generirat ćemo 6 simulacija s 10 točaka unutar jediničnog kvadrata.

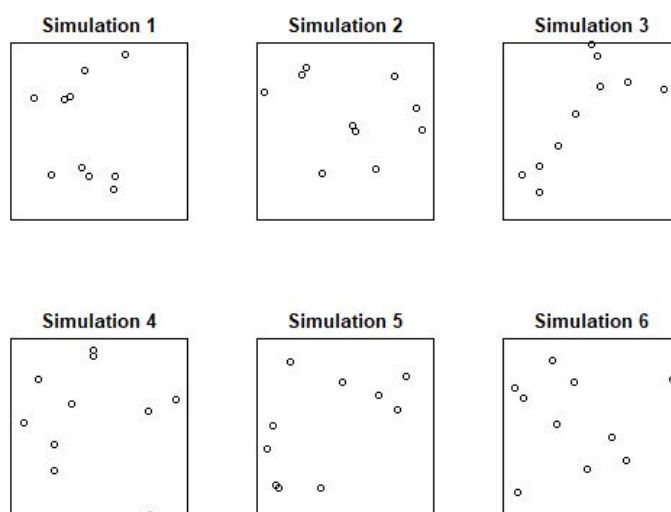
```
1  
2 install.packages("spatstat")  
3 library(spatstat)  
4  
5 plot(runifpoint(10,square(1),nsim=6))  
6  
7 |
```

Dakle, na Slici 2.5 možemo vidjeti različite prikaze binomnog točkovnog procesa sa istim brojem točaka.

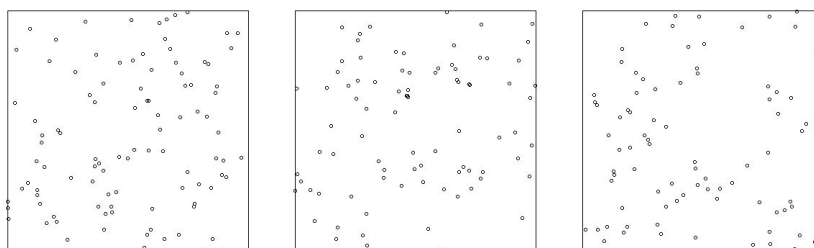
### Homogeni Poissonov točkovni proces

Točkovni proces za koji kažemo da je 'potpuno slučajan' je ilustriran u Slici 2.6. Svaki kvadrat je jedna realizacija homogenog Poissonovog procesa. Pro-

## Poglavlje 2. Točkovni procesi



Slika 2.5: Grafički prikaz 6 simulacija s 10 točaka.



Slika 2.6: Grafički prikazi Poissonovog procesa sa intenzitetom 50.

ces karakteriziraju svojstva homogenosti i nezavisnosti. Za razliku od binomnog procesa ilustriranog na 2.5, koji ima fiksni broj točaka, potpuno slučajni proces na 2.6 ima slučajni broj točaka.

Do dvije različite simulacije uz intenzitet 50 na slici 2.6 došli smo uz pomoć naredbe

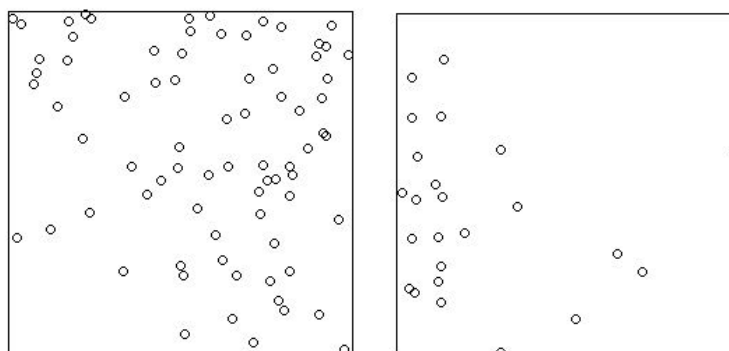
```
plot(rpoispp(50,nsim=2))
```

Možemo primjetiti da točke nisu uniformno raspoređene, tj. imamo kombinacije praznina i nakupina točaka, jer su točke međusobno nezavisne.

## Poglavlje 2. Točkovni procesi

### Nehomogeni Poissonov točkovni proces

Nehomogeni Poissonov proces se može simulirati pomoću naredbe 'rpoispp'. Intenzitet može biti konstantan, funkcija koja daje vrijednosti intenziteta u koordinatama  $x$  i  $y$  ili slika koja sadrži vrijednosti intenziteta.



Slika 2.7: Grafički prikazi nehomogenog Poissonovog procesa.

Na lijevoj strani Slike 2.7 imamo prikaz nehomogenog Poissonovog točkovnog procesa kojemu je funkcija intenziteta jednaka  $\lambda(x, y) = 100 * (x^2 + y)$ . Desna strana Slike 2.7 nam prikazuje točkovni proces kojemu je funkcija intenziteta  $\lambda(x, y) = 100 * e^{-3x}$ , a maksimalni intenzitet je 50.

Do grafičkih prikaza sa Slike 2.7 smo došli pomoću sljedećeg koda u programskom jeziku R.

```
inPp<-rpoispp(function(x,y){100*(x^2+y)})  
plot(inPp)
```

```
inPp<-rpoispp(function(x,y){100*exp(-3*x)},50)  
plot(inPp)
```



# Poglavlje 3

## Karakteristike točkovnih procesa

### 3.1 Intenzitet

**Definicija 3.1** *Neka je  $\Phi$  točkovni proces na  $W \subset \mathbb{R}^d$ . Mjera intenziteta točkovnog procesa  $\Phi$  je preslikavanje  $\Lambda : \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$  definirano na sljedeći način:*

$$\Lambda(B) = E(\Phi(B)) = \int \varphi(B) P(d\varphi)$$

za svaki Borelov skup  $B$ .

Slijedi da je  $\Lambda(B)$  očekivani broj točaka od  $\Phi$  u skupu  $B$ .

Ako je točkovni proces stacionaran, tada se mjera intenziteta pojednostavljuje, dakle mora biti invarijantna obzirom na translaciju

$$\Lambda(B) = E(\Phi(B)) = E(\Phi_x(B)) = E(\Phi(B_{-x})) = \Lambda(B_{-x}).$$

Iz 1.1 slijedi da je

$$\Lambda(B) = \lambda v_d(B)$$

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

za neku nenegativnu konstantu  $\lambda$ , koju nazivamo intenzitetom točkovnog procesa  $\Phi$ . Ako skup  $B$  ima volumen 1, tada se  $\lambda$  može interpretirati kao prosječan broj točaka od  $\Phi$  po jedinici volumena ili gustoća točaka, te pretpostavljamo da je  $0 < \lambda < \infty$ .

**Definicija 3.2** *Neka je  $\Phi$  točkovni proces sa pripadnom mjerom intenziteta  $\Lambda$ . Ako postoji funkcija  $\lambda: \mathbb{R}^d \rightarrow [0, +\infty]$  koja zadovoljava*

$$\Lambda(B) = \int_B \lambda(x) dx$$

*tada je nazivamo **funkcijom intenziteta** točkovnog procesa  $\Phi$ .*

Jasno je da je  $\lambda(x)$  proporcionalno lokalnoj gustoći točaka oko lokacije  $x$ . Intuitivno, očekivani broj točaka unutar male okoline volumena  $dx$  točke  $x$  dan je sa  $\lambda(x)dx$ .

Veliki broj izračuna se može pojednostaviti koristeći Campbellov teorem.

**Teorem 3.3 (Campbellova formula)** *Za svaku nenegativnu izmjerivu funkciju  $f(x)$  vrijedi*

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{x \in \Phi} f(x)\right) &= \int \sum_{x \in \Phi} f(x) P(d\varphi) = \\ &= \int \int f(x) \varphi(dx) P(d\varphi) = \int f(x) \Lambda(dx). \end{aligned} \quad (3.1)$$

U stacionarnom slučaju  $\Lambda$  integral iz 3.1 postaje

$$E\left(\sum_{x \in \Phi} f(x)\right) = \lambda \int f(x) dx. \quad (3.2)$$

Slično, kada točkovni proces ima funkciju intenziteta tada se (3.1) može zapisati kao

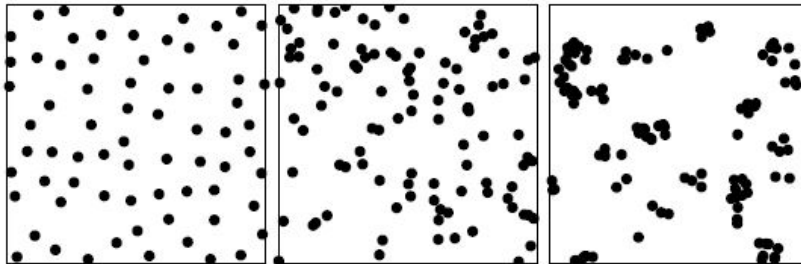
$$E\left(\sum_{x \in \Phi} f(x)\right) = \int f(x) \lambda(x) dx. \quad (3.3)$$

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

**Primjer 3.4** *Pretpostavimo da  $\Phi$  ima fiksnu, konačnu broju slučajnih točaka iz  $\mathbb{R}^d$ ,  $\Phi = \{X_1, \dots, X_n\}$ . Neka  $X_i$  ima marginalnu funkciju gustoće vjerojatnosti  $f_i(u)$ ,  $u \in \mathbb{R}^d$ . Tada  $\Phi$  ima funkciju intenziteta  $\lambda(u) = \sum_{i=1}^n f_i(u)$ .*

## 3.2 Mjere drugog momenta

Često je motivacija za analizu točkovnih uzoraka otkriti vezu između točaka, tj. leže li točke međusobno neovisne jedne od drugih u prostoru ili postoji neka vrsta točkovne ovisnosti među njima. Na Slici 3.1 su prikazana 3 različita točkovna uzorka. Lijevi točkovni proces ima tendenciju odbijanja, srednji točkovni proces je Poissonov (točke su međusobno nezavisne) i desni ima tendenciju grupiranja točaka.



Slika 3.1: Prikaz 3 različita točkovna procesa. Slika preuzeta iz knjige [2].

Standardni statistički alati koje možemo koristiti kako bi izmjerili zavisnost između broja točaka točkovnog procesa na određenim Borelovim podskupovima su koeficijent korelacije i kovarijanca. Uzmimo za primjer točkovne procese sa Slike 3.1 i promatrajmo dva bliska disjunktne Borelova podskupa  $B_1$  i  $B_2$ . Vidimo da je korelacija između slučajnih varijabli koje predstavljaju broj točaka u skupu  $B_1$  i broj točaka u skupu  $B_2$  kod prvog procesa negativna, kod drugog procesa je jednaka nuli, a kod trećeg procesa je pozitivna.

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

U statističkoj teoriji, kovarijanca je klasificirana kao mjera drugog momenta. Prvi moment slučajne varijable  $X$  je njena srednja vrijednost, drugi moment je srednja vrijednost varijable  $X^2$ , a zajedno prvi i drugi momenti slučajnih varijabli određuju važne karakteristike kao što su varijanca, standardna devijacija, kovarijanca i koeficijent korelacije. Korelacija ima svojstvo lakoće izračuna i moćan je alat za analizu podataka. Da bismo izbjegli pogrešan izračun korelacije važno nam je poznavati prvi moment, kod točkovnih procesa to znači da moramo znati intenzitet. Napomenimo da je korelacija samo indeks statističke povezanosti, odnosno ne karakterizira tip ili uzrok zavisnosti. Dakle, koristeći samo korelaciju ne možemo razlikovati različite načine grupiranja točaka.

Mjere drugog momenta kod točkovnih procesa intuitivno su povezane sa prebrojavanjem parova točaka. Tako je drugi moment od  $\Phi(B)$  jednak očekivanom broju parova točaka od  $\Phi$  koje leže u nekom skupu  $B$ .

**Definicija 3.5** *Neka je  $\Phi$  točkovni proces. Definiramo **varijancu** i **kovarijancu** od  $\Phi(B)$  kao*

$$\text{Var}(\Phi(B)) = E[\Phi(B)^2] - E[\Phi(B)]^2,$$

$$\text{Cov}[\Phi(B_1), \Phi(B_2)] = E[\Phi(B_1)\Phi(B_2)] - E[\Phi(B_1)]E[\Phi(B_2)],$$

gdje su  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ , a sa  $\Phi(B_1)\Phi(B_2)$  označavamo broj uređenih parova  $(x_1, x_2)$  točaka u procesu  $\Phi$  takvih da je  $x_1 \in B_1$  i  $x_2 \in B_2$ .

**Definicija 3.6** *Neka je  $\Phi$  točkovni proces na  $\mathfrak{N}$ . Preslikavanje  $v_2: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$  definirano sa*

$$v_2(B_1 \times B_2) = E[\Phi(B_1)\Phi(B_2)], \quad B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$$

zovemo **mjera drugog momenta** točkovnog procesa  $\Phi$ .

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

Očito, mjera drugog momenta sadrži informacije o varijanci i kovarijanci slučajne varijable  $\Phi(B)$ . Mjera drugog momenta točkovnog procesa  $\Phi$  je jednaka mjeri intenziteta točkovnog procesa  $\Phi \times \Phi$ , tj. točkovnog procesa na  $\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}$  koji sadrži uređene parove točaka  $(x, x')$ , gdje su  $x, x' \in \Phi$ . Ako primijenimo Campbellovu formulu na  $\Phi \times \Phi$  za izmjerivu funkciju  $f: \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$  dobijemo

$$E \left[ \sum_{x \in \Phi} \sum_{y \in \Phi} f(x, y) \right] = \int_{\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}} f(x, y) v_2(dx, dy).$$

Neka je  $\Phi$  Poissonov točkovni proces sa intenzitetom  $\lambda > 0$ . Tada slijedi da je mjera drugog momenta jednaka

$$v_2(B_1 \times B_2) = \lambda^2 v_d(B_1) v_d(B_2) + \lambda v_d(B_1 \cap B_2).$$

Mjera drugog momenta  $v_2$  se sastoji od dvije komponente. Konstanta  $\lambda^2$  množi prvi dio koji nam označava umnožak očekivanog broja točaka u skupovima  $B_1$  i  $B_2$ , a drugi dio je očekivani broj točaka u presjeku ta dva skupa. Tada na dijagonali imamo parove  $(x, x)$  identičnih točaka.

Mjeru drugog momenta možemo zapisati kao

$$v_2(dx, dy) = \lambda^2 dx dy + \lambda \delta(x - y) dx,$$

gdje je  $\delta$  delta funkcija. Tada vrijedi  $v_2 = \lambda^2 v_d \otimes v_d + \lambda \text{diag}^{-1} v_d$ , gdje je  $\text{diag}(x, x) = x$ . Izbacivanjem elemenata na dijagonali dobijemo jednostavniji oblik mjere drugog momenta.

**Definicija 3.7** *Neka je  $\Phi$  točkovni proces na  $\mathfrak{N}$ . Preslikavanje  $v_{[2]}: \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \rightarrow [0, +\infty]$  definirano sa*

$$v_{[2]}(B_1 \times B_2) = E[\Phi(B_1)\Phi(B_2)] - E[\Phi(B_1 \cap B_2)]$$

*zovemo **faktorijelna mjera drugog momenta točkovnog procesa  $\Phi$** .*

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

To je mjera intenziteta točkovnog procesa  $\Phi * \Phi$ , tj. svih uređenih parova različitih točaka ( $\Phi \times \Phi$  bez elemenata na dijagonali).

Faktorijela mjera drugog momenta zadovoljava formulu

$$E \left[ \sum_{x \in \Phi} \sum_{y \in \Phi, y \neq x} f(x, y) \right] = \int_{\mathfrak{N} \times \mathfrak{N}} f(x, y) v_{[2]}(dx, dy),$$

gdje je  $f: \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \rightarrow \mathbb{R}$  izmjeriva funkcija.

**Primjer 3.8** *Neka je  $\Phi$  homogeni Poissonov točkovni proces sa intenzitetom  $\lambda > 0$ . Tada je faktorijelna mjera drugog momenta jednaka*

$$v_{[2]} = \lambda^2 v_d \otimes v_d$$

**Definicija 3.9** *Funkcija  $g_2: \mathfrak{N} \times \mathfrak{N} \rightarrow [0, +\infty]$  je **gustoća drugog momenta** točkovnog procesa  $\Phi$  ako vrijedi*

$$v_{[2]}(C) = \int_C g_2(x, y) dx dy$$

za svaki kompaktni skup  $C \subset \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ .

Dakle,  $g_2(x, y)$  nam daje vjerojatnost da će postojati točke od  $\Phi$  u dvije lokacije  $x$  i  $y$ :

$$P(\Phi(dx) > 0, \Phi(dy) > 0) \sim g_2(x, y) dx dy.$$

**Primjer 3.10** *Gustoća drugog momenta homogenog Poissonovog točkovnog procesa je  $g_2(x, y) = \lambda^2$ , gdje je  $\lambda > 0$  intenzitet.*

*Gustoća drugog momenta binomnog točkovnog procesa sa  $n$  točaka u skupu  $W$  je*

$$g_2(x, y) = \begin{cases} \frac{n(n-1)}{v_d(W)^2}, & \text{ako je } x, y \in W \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

**Definicija 3.11** Neka je  $\Phi$  točkovni proces na  $\mathfrak{N}$  s funkcijom intenziteta  $\lambda(x)$  i gustoćom drugog momenta  $g_2(x, y)$ . Definiramo **funkciju korelacije** točkovnog procesa sa

$$\rho_2(x, y) = \frac{g_2(x, y)}{\lambda(x)\lambda(y)}.$$

Funkcija korelacije je nenegativna, dakle uvijek zadovoljava  $\rho_2(x, y) \geq 0$ .

**Primjer 3.12** Neka je  $\Phi$  homogeni Poissonov točkovni proces sa intenzitetom  $\lambda$ , tada vrijedi:

$$\lambda(x) \equiv \lambda, \quad g_2 \equiv \lambda^2, \quad \rho_2(x, y) \equiv 1.$$

Neka je  $\Phi$  binomni točkovni proces sa  $n$  točaka u skupu  $W$ , tada je

$$\rho_2(x, y) \equiv 1 - \frac{1}{n}.$$

**Primjer 3.13** Neka je  $\Phi = \{X_1, \dots, X_n\}$  točkovni proces sa fiksni, konačnim brojem slučajnih točaka iz  $\mathbb{R}^d$ . Neka je  $f_i(u), u \in \mathbb{R}^d$  marginalna funkcija gustoće od  $X_i$ , a  $f_{ij}(u, v), u, v \in \mathbb{R}^d$  združena funkcija gustoće od  $(X_i, X_j)$ . Tada je gustoća drugog momenta točkovnog procesa  $\Phi$  dana sa

$$g_2(x, y) = \sum_{i \neq j} f_{ij}(x, y),$$

a funkcija korelacije je

$$\rho_2(x, y) = \frac{\sum_{i \neq j} f_{ij}(x, y)}{\left(\sum_i f_i(x)\right)\left(\sum_j f_j(y)\right)}.$$

## 3.3 K-funkcija

U ovom poglavlju ćemo morati pretpostaviti da je točkovni proces  $\Phi$  stacionaran, tj. distribucija točkovnog procesa  $\Phi$  je jednaka distribuciji procesa

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

$\Phi + v$  za bilo koji vektor  $v \in \mathbb{R}^d$ . Uočimo da za stacionarne točkovne procese  $\Phi$  vrijedi

$$E[\Phi(B_1 + v)\Phi(B_2 + v)] = E[\Phi(B_1)\Phi(B_2)]$$

za svaki  $v \in \mathbb{R}^d$  i  $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ .

Reći ćemo da je točka  $y$  **r-susjed** točke  $x$  ako vrijedi  $0 < \|y - x\| \leq r$ . K-funkciju točkovnog procesa  $\Phi$  ćemo definirati kao omjer očekivanog broja  $r$ -susjeda točke procesa  $\Phi$  i intenziteta  $\lambda$ .

Formalnije, za svaku prostornu lokaciju  $u$  definiramo

$$t(u, r, \Phi) = \sum_{j=1}^{n(\Phi)} \mathbf{1}\{0 < \|u - x_j\| \leq r\} \quad (3.4)$$

broj točaka u točkovnom procesu  $\Phi$  koje su udaljene za  $r$  od lokacije  $u$ , ali nisu na lokaciji  $u$ .

**Definicija 3.14** *Neka je  $\Phi$  stacionaran točkovni proces sa intenzitetom  $\lambda$ , tada za bilo koji  $r \geq 0$  s*

$$K(r) = \frac{1}{\lambda} E[t(u, r, \Phi) | u \in \Phi] \quad (3.5)$$

definiramo **K-funkciju** točkovnog procesa  $\Phi$ .

Primjetimo da pošto je točkovni proces stacionaran, ova definicija nam ne ovisi o odabranoj lokaciji  $u$ .

Vidimo da je

$$K(r) = \frac{1}{\lambda} E[\text{broj } r\text{-susjeda od } u | \text{postoji točka na lokaciji } u \text{ procesa } \Phi]$$

za  $r \geq 0$  i bilo koju lokaciju  $u$ . Pa kod računanja K-funkcije točkovnog procesa, pretpostavimo da postoji slučajna točka procesa  $\Phi$  na lokaciji  $u$  i izračunamo očekivani broj točaka procesa  $\Phi$  udaljenih za  $r$ .



### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

**Teorem 3.15** *Neka je  $\Phi$  stacionaran točkovni proces na  $\mathbb{R}^d$  sa intenzitetom  $\lambda$ . Tada postoji mjera  $\mathcal{K}$  na  $\mathbb{R}^d$  takva da vrijedi*

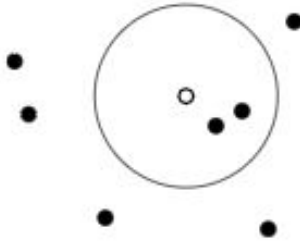
$$E\left[\sum_{x \in \Phi} \sum_{y \in \Phi, y \neq x} f(x, y)\right] = \lambda \int \int f(x, x + u) \mathcal{K}(du) dx$$

*i koju nazivamo **reducirana mjera drugog momenta točkovnog procesa**  $\Phi$ .*

K-funkciju možemo definirati i pomoću reducirane mjere drugog momenta  $\mathcal{K}$  na sljedeći način:

$$K(r) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{K}(B(u, r)), \quad r \geq 0.$$

Dakle,  $\lambda K(r)$  je očekivani broj točaka  $y$  takvi da vrijedi  $0 < \|y - x\| \leq r$  za danu točku  $x$  nekog procesa.



Slika 3.2: Koncept K-funkcije. Slika preuzeta iz [1]

Na Slici 3.2 možemo vidjeti da je broj točaka koje su udaljene za  $r$  od promatrane točke jednak 2.

**Primjer 3.16** *Pošto su kod homogenog Poissonovog točkovnog procesa točke međusobno nezavisne, postojanje slučajne točke na lokaciji  $u$  nema utjecaja na postojanje točaka na drugim lokacijama pa vrijedi*

$$E[t(u, r, \Phi) | u \in \Phi] = E[t(u, r, \Phi)].$$

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

Dakle,  $t(u, r, \Phi)$  nam označava broj točaka procesa  $\Phi$  koje leže u kugli  $B(u, r)$  radijusa  $r$  sa centrom u lokaciji  $u$ . Očekivani broj takvih točaka je  $\lambda \times |B(u, r)| = \lambda \pi r^2$ . Nakon što tu vrijednost podijelimo s intenzitetom  $\lambda$ , dobivamo da za  $K$ -funkciju homogenog Poissonovog točkovnog procesa za dvije dimenzije vrijedi

$$K_{pois}(r) = \pi r^2.$$

Općenito, iz Slivnyak-Mecke teorema kojeg možete pročitati u [3] vrijedi

$$\lambda K(r) = E[t(u, r, \Phi)] = \lambda v_d(B(u, r)) = \lambda b_d r^d,$$

gdje je  $b_d$  volumen jedinične kugle u  $\mathbb{R}^d$ .

Jedna verzija  $K$ -funkcije je  $K(r) - K_{pois}(r) = K(r) - \pi r^2$ , koja nam može biti korisna u klasifikaciji točkovnog procesa jer je funkcija jednaka nuli ako je točkovni proces potpuno slučajan.

Transformaciju  $K$ -funkcije koja se najčešće koristi nazivamo **L-funkcija** i za točkovne procese na  $\mathbb{R}^2$  vrijedi

$$L(r) = \sqrt{\frac{K(r)}{\pi}}.$$

L-funkcija transformira teorijsku Poissonovu  $K$ -funkciju  $K_{pois} = \pi r^2$  u ravnu liniju  $L_{pois}(r) = r$ .

Općenito, L-funkcija točkovnog procesa na  $\mathbb{R}^d$  je dana sa

$$L(r) = \sqrt[d]{\frac{K(r)}{b_d}}, \quad r \geq 0.$$

$K$ -funkcija se rijetko koristi u praksi i modelima vizualizacije. Zbog jednostavnijeg grafičkog prikaza i boljih svojstava u statističkom kontekstu više se koristi L-funkcija.

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

#### Procjena K-funkcije

Neka je  $d_{ij} = \|x_i - x_j\|$  udaljenost između dvije različite točke  $x_i$  i  $x_j$ . Kao što smo prethodno definirali u (3.4), izraz  $t(u, r, \Phi)$  nam označava broj  $r$ -susjeda lokacije  $u$ , tj. broj točaka udaljenih za  $r$  od lokacije  $u$  točkovnog procesa  $\Phi$ .

Alternativni izraz za K-funkciju, koji ne uključuje uvjetno očekivanje je dan sa

$$K(r) = \frac{E[\sum_{x \in \Phi \cap B} t(x, r, \Phi)]}{\lambda E[n(\Phi \cap B)]}, \quad (3.6)$$

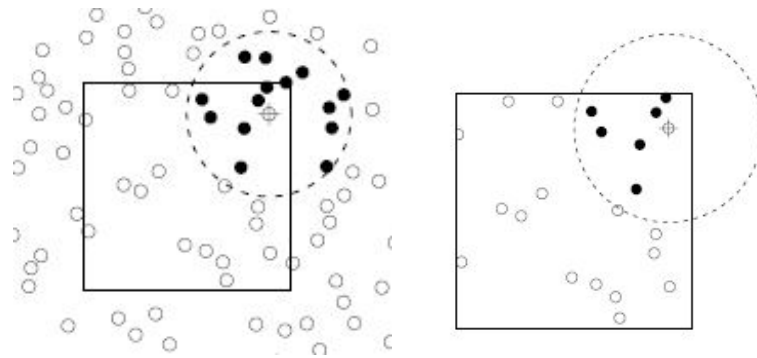
gdje je  $\Phi$  stacionaran točkovni proces, a  $B$  omeđeni skup za koji vrijedi  $|B| > 0$ . Prema tome,  $\lambda K(r)$  je očekivani broj parova točaka koji su udaljeni za  $r$ , takvi da prva točka leži u skupu  $B$ , podijeljeno sa očekivanim brojem točaka koje leže u skupu  $B$ . Direktna način procjene K-funkcije je sugeriran izrazom (3.6). S obzirom na dani točkovni uzorak  $\Phi$ , jednostavno zamijenimo brojnik i nazivnik sa procjenama

$$\tilde{K}(r) = \frac{\sum_{x_i \in \Phi \cap B} t(x_i, r, \Phi)}{\lambda n(\Phi \cap B)}. \quad (3.7)$$

Brojnik nam označava ukupan broj  $r$ -susjeda svih slučajnih točaka koje leže u skupu  $B$ , a u nazivniku imamo umnožak ukupnog broja točaka procesa koji leže u skupu  $B$  i procjene intenziteta  $\bar{\lambda} = n(\Phi \cap B)/|B|$ .

Slika 3.3 nam prikazuje primjenu procjene K-funkcije u praksi. U homogenom polju cvjetova postavljen je crni kvadrat za uzorkovanje. Postavljamo neki znak (križić) u blizini jednog od cvjetova i opišemo krug sa središtem u križiću nekog određenog polumjera, npr. 1 metar. Tada možemo prebrojati cvjetove koji se nalaze unutar isprekidanog kruga, bez obzira ležali oni unutar kvadrata za uzorkovanje ili ne. U slučaju primjera sa lijeve strane Slike 3.3, imamo 14 takvih cvjetova. Dakle, prebrojali smo broj  $r$ -susjeda  $t(x_i, r, \Phi)$  jednog cvijeta  $x_i$  za udaljenost  $r = 1$  metar. Ponavljajući postupak za sve cvjetove unutar kvadrata dobit ćemo broj susjeda  $t(x_i, r, \Phi)$

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa



(a) Prebrojavanje točaka unutar kruga radijusa  $r$ , bez obzira na područje proučavanja  $W$

(b) Prebrojavanje točaka koje leže unutar kruga  $i$  unutar područja proučavanja  $W$

Slika 3.3: Problem s rubom pri procjeni K-funkcije. Slike preuzete iz [2]

za cvjetove  $x_1, \dots, x_n$ , gdje je  $n$  broj cvjetova unutar područja proučavanja. Prosječan broj susjeda je  $\bar{t} = \frac{\sum_i t(x_i, r, \Phi)}{n}$ . Podijelimo li sa procjenjenim intenzitetom  $\bar{\lambda} = n/|B|$ , gdje je  $B$  područje proučavanja, dobit ćemo procjenu K-funkcije  $K(r)$ .

Situacija opisana Slikom 3.3 je neuobičajena, jer smo mogli vidjeti izvan područja proučavanja (kvadrata). Ali u većini istraživanja nemamo te informacije, znamo samo za točke koje leže unutar područja proučavanja, kao na desnoj strani Slike 3.3. Ako promatramo samo točke unutar prozora  $W = B$ , tada procjena K-funkcije iz (3.7) nije valjana. Ovakav slučaj nazivamo problem s rubom (engl. edge effect problem), tj. broj točaka unutar kruga radijusa  $r$  nije poznat ako krug prelazi granice prozora  $W$ .

Metoda granice (engl. border method) je jedna od jednostavnijih strategija pri rješavanju ovog problema. Pri procjeni K-funkcije za određenu udaljenost  $r$ , uzimamo u obzir samo slučajeve krugova radijusa  $r$  koji leže u

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

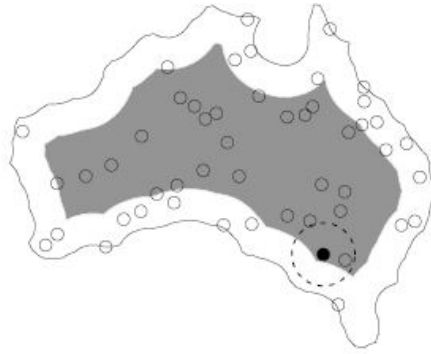
potpunosti unutar područja proučavanja, tako da ne može doći do problema s rubom. Tu metodu nam opisuje Slika 3.4.

U jednažbi (3.7) sumiramo samo one točke  $x_i$  za koje kugla  $B(x_i, r)$  leži unutar prozora  $W$ . Za takve točke vrijedi  $t(x_i, r, \Phi \cap W) = t(x_i, r, \Phi)$ , dakle broj  $r$ -susjeda je poznat.

Neka nam  $d(u, \partial W)$  označava najmanju udaljenost od lokacije  $u$  do granice prozora  $\partial W$ . Mi uzimamo u obzir samo točke  $x_i$  za koje vrijedi  $d(x_i, \partial W) \geq r$ . Dalje, definiramo skup

$$W_{\ominus r} = \{u \in W : d(u, \partial W) \geq r\}$$

koji sadrži sve točke unutar  $W$  koje su od ruba udaljene barem za  $r$ .



Slika 3.4: Metoda granice. Skup  $W_{\ominus r}$  je osjenčan. Slika preuzeta iz [2]

Stoga, K-funkciju procjenjujemo na sljedeći način

$$\hat{K}_{bord}(r) = \frac{\sum_{x_i \in \Phi \cap W_{\ominus r}} t(x_i, r, \Phi)}{\bar{\lambda} n(\Phi \cap W_{\ominus r})} = \frac{\sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{b_i \geq r\} t(x_i, r, \Phi)}{\bar{\lambda} \sum_{i=1}^n \mathbf{1}\{b_i \geq r\}}, \quad (3.8)$$

gdje je  $b_i = d(x_i, \partial W)$  udaljenost točke  $x_i$  od granice područja, a  $\bar{\lambda} = \frac{n(\Phi \cap W)}{|W|}$  je procjena intenziteta.

Postoje i druge metode rješavanja za problem s rubom koje možete naći u sedmom poglavlju knjige [2].

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

#### 3.3.1 Primjeri u programskom jeziku R

U sljedećim primjerima ćemo grafički prikazati i usporediti procjenu K-funkcije na dva različita skupa podataka koja se nalaze unutar već korištenog paketa 'spatstat'.

Koristimo skupove podataka

'cells' - obuhvaća 42 centra bioloških stanica promatranih pod optičkim mikroskopom.

'gordon'- obuhvaća lokacije ljudi koji sjede u parku Gordon u Londonu u 15:00h.

Pomoću koda

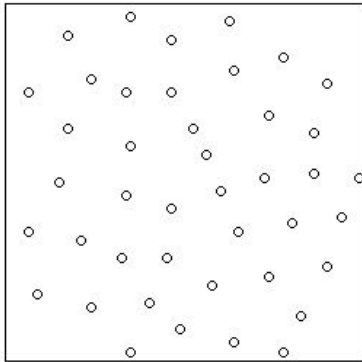
```
library(spatstat)
plot(cells)
K1 <- Kest(cells,correction = "border")
plot(K1)

plot(gordon)
K2<-Kest(gordon,correction = "border")
plot(K2)
```

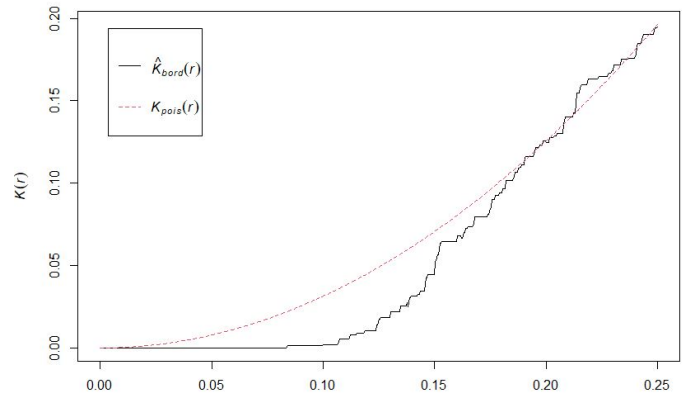
procjenjujemo K-funkciju i uspoređujemo je sa teorijskom vrijednosti K-funkcije dvodimenzionalnog Poissonovog procesa za koji vrijedi  $K(r) = \pi r^2$ .

Kao što možemo primjetiti na Slici 3.5a, točkovni uzorak kojeg predstavljaju lokacije bioloških stanica je pravilan. U tom slučaju je vrijednost procjenjene K-funkcije uglavnom manja od  $K_{pois}$ , dok je u slučaju sa Slike 3.6a gdje točke imaju tendenciju nagomilavanja vrijednost  $K_{pois}$  manja od procjenjene K-funkcije za taj skup podataka.

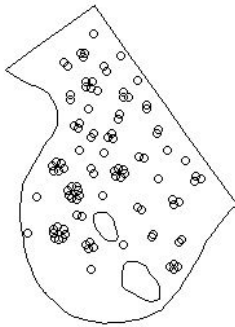
### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa



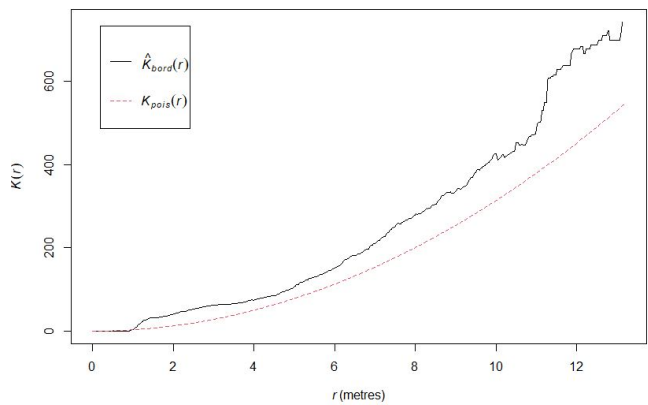
(a) Grafički prikaz skupa podataka 'cells'.



(b) Grafički prikaz procjene K-funkcije.



(a) Grafički prikaz skupa podataka 'gordon'.



(b) Grafički prikaz procjene K-funkcije.

## 3.4 Primjene kod testiranja Poissonove hipoteze

Postoji velik broj testova koji mogu potvrditi hipotezu da je dani uzorak točaka Poissonov. U statističkoj literaturi ova hipoteza je poznata pod imenom Poissonova hipoteza ili hipoteza o potpunoj prostornoj slučajnosti (engl. complete spatial randomness) u kojoj se pretpostavlja da točke prate

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

homogeni Poissonov proces na području koje promatramo, tj. da je gustoća točaka konstantna (homogena) na cijelom području i da je broj točaka na disjunktним djelovima područja nezavisan. Odabir odgovarajućeg testa za testiranje Poissonove hipoteze ovisi o samim podacima koji su nam na raspolaganju, te o ograničenjima nametnutim metodama mjerenja.

U ovom radu objasniti ćemo L-test.

#### L-test

Uzimamo u obzir vrijednost  $K$ -funkcije za odabrani  $r > 0$  promatranog točkovnog procesa, tj. očekivani broj točaka unutar sfere promjera  $r$  sa centrom u slučajno odabranoj točki tog točkovnog procesa. Sjetimo se da za Poissonov proces vrijedi

$$K(r) = b_d r^d, \quad r \geq 0.$$

Ako procjena  $K$ -funkcije za promatrani točkovni uzorak znatno odstupa od ove forme, tada se dovodi u pitanje Poissonova hipoteza.

U praksi se češće koristi  $L$ -funkcija, gdje je

$$L(r) = \sqrt[d]{\frac{K(r)}{b_d}}, \quad r \geq 0,$$

koja u slučaju homogenog Poissonovog procesa poprima jednostavnu linearnu formu

$$L(r) = rm \quad r \geq 0.$$

Za dani točkovni uzorak promatramo vrijednost

$$\tau = \max_{r \leq r_{max}} |\hat{L}(r) - r|,$$

gdje je

$$\hat{L}(r) = \sqrt[d]{\frac{\hat{K}(r)}{b_d}}.$$



### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

U slučaju da je  $\tau$  dovoljno velik, tada se Poissonova hipoteza ne može prihvatiti naspram alternativne hipoteze koja glasi " proces nije homogeni Poissonov točkovni proces". Kritična vrijednost prema Ripleyu za razinu značajnosti  $\alpha = 0.05$  je

$$\tau_{0.05} = \frac{1.45\sqrt{a}}{n},$$

gdje je  $a$  područje i  $n$  broj promatranih točaka, tj. odbacujemo Poissonovu hipotezu u slučaju da je vrijednost od  $\tau$  veća ili jednaka  $\tau_{0.05}$ . Mnogi statističari smatraju da se  $\tau_{0.05}$  može koristiti i u slučajevima drugih procjenitelja  $K$ -funkcije.

U slučaju da nam Ripleyova aproksimacija nije prikladna, za odluku o prihvaćanju Poissonove hipoteze možemo koristiti Monte Carlo <sup>1</sup> metodu. U tom slučaju, prvo biramo odgovarajuću vrijednost  $r_{max}$ , npr. polovina dužine dijagonale pravokutnog područja. Zatim za odabrani dovoljno veliki  $k \in \mathbb{N}$  simuliramo  $k$  nezavisnih binomnih procesa sa  $n$  točaka. Za svaki simulirani proces se procjenjuje  $L$ -funkcija, a vrijednost  $\tau_i$  je određena svaki put sa

$$\tau_i = \max_{r \leq r_{max}} |\hat{L}_i(r) - r|, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

Vrijednosti  $\tau_i$  i  $\tau_{emp}$  za empirijske podatke se sortiraju uzlazno. Ako je  $\tau_{emp}$  prevelik (odnosno nalazi se među najvećim vrijednostima u nizu), tada ne možemo prihvatiti Poissonovu hipotezu.

**Primjer 3.17** *Pretpostavimo da je binomni proces simuliran  $k = 999$  puta.*

*Niz*

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{999}, \tau_{emp}$  *sortiramo uzlazno. Ako je vrijednost  $\tau_{emp}$  velika, tj. ako*

---

<sup>1</sup>Monte Carlo metode su podskup računalnih algoritama koji koriste postupak ponavljanja slučajnog uzorkovanja kako bi došli do numeričkih procjena nepoznatih parametara. [5]

### Poglavlje 3. Karakteristike točkovnih procesa

*pripada među 50 najvećih vrijednosti, tada Poissonovu hipotezu ne prihvaćamo na razini značajnosti  $\alpha = 0.95$ .*

Devijacije empirijskih i teorijskih vrijednosti mogu biti istražene uglavnom pomoću simulacija. Također je moguće promatrati varijacije realnih karakteristika ne uzimajući u obzir teorijske vrijednosti. To može biti  $L(r)$  za posebno važnu udaljenost  $r$ . Imamo empirijsku vrijednost  $\hat{L}(r)$  i 999 vrijednosti dobivenih simulacijom. Ako  $\hat{L}(r)$  pripada među 25 najmanjih ili najvećih  $L(r)$  vrijednosti, tada se hipoteza ne prihvaća.

U primjenama, izbor  $r_{max}$  je od velike važnosti. Za uzorak od  $n$  točaka promatranih u jediničnom kvadratu, Ripley(1979) je predložio da  $r_{max}$  bude  $\frac{1.25}{\sqrt{n}}$ , a Diggle<sup>2</sup>(2003) da ne bi trebao biti veći od 0.25.

---

<sup>2</sup>Peter Diggle, (24.02.1950, Lancashire, England) je britanski statističar.

# Zaključak

Cilj ovog diplomskog rada je upoznavanje s točkovnim procesima i njihovim primjenama. Na početku je opisan jedan od primjera primjene točkovnih procesa kao točkovni uzorak lokacija stabala u šumi. Nakon osnovnih definicija točkovnog procesa kao slučajnog skupa ili slučajne brojeće mjere, te njegove distribucije i karakterizacije dolazi se do dva najvažnija primjera točkovnog procesa, a to su binomni i Poissonov točkovni proces. Također se prikazuju i opisuju simulacije tih točkovnih procesa s različitim parametrima. Najvažnije karakteristike su intenzitet točkovnog procesa, funkcija korelacije i K-funkcija. Navode se vrijednosti tih karakteristika za slučaj binomnog i Poissonovog točkovnog procesa. Nadalje, objašnjava se pomoću konkretnog primjera koncept K-funkcije i problem s rubom pri procjeni K-funkcije, te metoda granice, jedna od najvažnijih metoda pri rješavanju problema s rubom. U programskom jeziku R grafički su prikazana dva primjera procjene K-funkcije na konkretnom skupu podataka, iz kojeg je zaključeno da je vrijednost teorijske K-funkcije dvodimenzionalnog Poissonovog procesa manja od procjene K-funkcije u skupu podataka u kojemu točke imaju tendenciju nagomilavanja. U zadnjem poglavlju je opisana primjena kod testiranja Poissonove hipoteze, tj. problem odluke je li neki točkovni proces Poissonov ili ne. U ovom radu je opisan L-test, dakle pri testiranju se koristi L-funkcija koja je jedna od transformacija K-funkcije.

# Literatura

- [1] Baddeley, A. (2007). Spatial Point Processes and their Applications. Stochastic geometry. Springer Berlin Heidelberg, str.1-75.
- [2] Baddeley A., Rubak E., Turner R. (2015). Spatial Point Patterns: Methodology and Applications with R. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- [3] Chiu S.N., Stoyan D., Kendall W.S., Mecke J. (2013). Stochastic geometry and its applications. John Wiley & Sons, New York.
- [4] Gelfand A.E., Diggle P.J., Fuentes M., Guttorp P. (2010). Handbook of spatial statistics. Chapman and Hall/CRC, Boca Raton.
- [5] Pease C. (2018). An Overview of Monte Carlo Methods. URL: <https://towardsdatascience.com/an-overview-of-monte-carlo-methods-675384eb1694>, (14.05.2020.).
- [6] Jukić, D. (2012). Mjera i integral. Grafika d.o.o., Osijek.
- [7] Mecke K.R., Stoyan D. (2010). Statistical Physics and Spatial Statistics. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
- [8] R Development Core Team: R (2019). A language and environment for statistical computing. R Found Stat Comp, Vienna. URL: <http://www.R-project.org/>.

## Literatura

- [9] Sarapa, N. (2002). Teorija vjerojatnosti. Školska knjiga, Zagreb.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU  
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

**Točkovni procesi i njihove karakteristike**

Dijana Dujmović

**Sažetak:**

*Razni događaji i pojave u svijetu se mogu prikazati pomoću točkovnih procesa, a motivacija za njihovu analizu se krije u želji za otkrivanjem veza između tih točaka. Analiziranjem konkretnih točkovnih uzoraka se može doći do važnih zaključaka koji su presudni za razumijevanje pojedinih dijelova raznih znanosti. Na jednostavan način su definirani točkovni procesi, njihova distribucija i primjena. Nadalje, definirani su binomni i Poissonov točkovni proces kao dva osnovna primjera. Kroz simulacije su prikazane razlike između dva spomenuta primjera, te par njihovih različitih grafičkih prikaza. Karakteristike točkovnih procesa kao što su intenzitet i  $K$ -funkcija daju bolji uvid u podatke opisane točkovnim procesom. U ovom radu su objašnjeni najosnovniji pojmovi i primjeri primjene točkovnih procesa, kao što je primjena kod testiranja Poissonove hipoteze.*

**Ključne riječi:**

*binomni, distribucija, intenzitet,  $K$ -funkcija, moment, Poisson*

**Podaci o radu:**

*43 stranice, 14 slika, 9 literaturnih navoda, jezik izvornika: hrvatski*

**Mentorica:** *doc. dr. sc. Snježana Braić*

**Komentorica:** *doc. dr. sc. Vesna Gotovac Đogaš*

## TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

### Članovi povjerenstva:

*Jelena Pleština*

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *7. rujna 2020.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

## Point processes and their characteristics

Dijana Dujmović

### Abstract:

*Various events and phenomena in the world can be represented by point processes, and the motivation for their analysis lies in the desire to discover the connections between these points. By analyzing specific point patterns, important conclusions can be reached that are crucial for understanding individual parts of various sciences. Point processes, their distribution and application are defined in a simple way. Furthermore, the binomial and Poisson point processes are defined as two basic examples. Through the simulations, the differences between the two mentioned examples are shown, and a couple of their different graphical representations as well. The characteristics of point processes such as intensity and  $K$ -function give a better insight into the data described by the point process. This thesis explains the most basic concepts and examples of the application of point processes, such as the application in testing the Poisson hypothesis.*

### Key words:

*binomial, distribution, intensity,  $K$ -function, moment, Poisson*

### Specifications:

*43 pages, 14 figures, 9 references, original in: Croatian*

**Mentor:** *assistant prof. Snježana Braić*

**Comentor:** *assistant prof. Vesna Gotovac Đogaš*



TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

**Committee:** *Jelena Pleština*

This thesis was approved by a Thesis committee on *September 7, 2020*.