

# Keplerovi zakoni za hipotetsku gravitacijsku silu

---

**Koljanin, Ivan**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2019**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:771697>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-02-03**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



UNIVERSITY OF SPLIT



DIGITALNI AKADEMSKI ARHIVI I REPOZITORIJI

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet

# **Keplerovi zakoni za hipotetsku gravitacijsku silu**

Završni rad

Ivan Koljanin

Split, rujan 2019.



Zahvaljujem prof.dr.sc. Anti Bilušiću na mentorstvu i pomoći pri izradi završnog rada.

## Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu

Završni rad

Prirodoslovno – matematički fakultet

Odjel za fiziku

Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

### Keplerovi zakoni za hipotetsku gravitacijsku silu

Ivan Koljanin

Sveučilišni preddiplomski studij Matematika i fizika

#### Sažetak:

Cilj ovoga rada jest ispitati ponašanje Keplerovih zakona za gravitacijsku silu u kojoj je funkcionalna ovisnost udaljenosti različita od  $r^{-2}$ . Matematičkom pripremom same simulacije te izradom računalne simulacije u programskom jeziku C moguće je analizom podataka doći do željenih zaključaka vezanih za Keplerove zakone. Pokazano je da za potencije udaljenosti koje su približno jednake dva ponašanje Keplerovih zakona postaje sve sličnije ponašanju za kvadratnu potenciju. Kada bi sustav činile samo Zemlja i Sunce putanja Zemlje bila bi u potpunosti stabilna, no postojanje ostalih planeta u sustavu uzrokuje nestabilnosti i pertubacije Zemljine putanje pa je promatranje u ovom radu točno samo za problem dvaju tijela.

**Ključne riječi:** problem dva tijela, Keplerovi zakoni, Newtonov zakon gravitacije, Euler – Cromer metoda, kružna putanja Zemlje, eliptična putanja

**Rad sadrži:** 28 stranice, 20 slika, 2 tablica, 8 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom

**Mentor:** prof. dr. sc. Ante Bilušić

**Ocjenjivači:** prof. dr. sc. Ante Bilušić  
doc. dr. sc. Larisa Zoranić  
dr. sc. Ivana Weber

**Rad prihvaćen:** 11. rujna 2019.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

## Basic documentation card

University of Split

Bachelor thesis

Faculty of Science

Department of Physics

Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

### Kepler's laws for a hypothetical gravitational force

Ivan Koljanin

University undergraduate study programme Mathematics and Physics

#### Abstract:

The aim of this paper is to examine the behavior of Kepler laws for gravitational force in which the functional dependence of distance is different from  $r^{-2}$ . By mathematical preparation of the simulation itself and computer simulation in the C programming language, it is possible to reach the desired conclusions regarding Kepler's laws by analyzing the data. It has been shown that for distance potentials approximately equal to two, the behavior of Kepler's laws becomes increasingly similar to the behavior for quadratic potency. If the system consisted only of the Earth and the Sun the Earth's trajectory would be completely stable, but the existence of other planets in the system causes instabilities and perturbations of the Earth's trajectory, so the observation in this paper is correct only for the two-body problem.

**Keywords:** Two bodies problem, Kepler's laws, Newton's law of gravity, Euler - Cromer method, Earth's circular path, elliptical path

**Thesis consists of:** 28 pages, 20 figures, 2 tables, 8 references. Original language: Croatian

**Supervisor:** Prof. Dr. Ante Bilušić

**Reviewers:** Prof. Ante Bilušić  
Assist. Prof. Larisa Zoranić  
Dr. Ivana Weber

**Thesis accepted:** September 11, 2019.

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

# Sadržaj

<b>1 Uvod.....</b>	<b>1</b>
<b>2 Teorijska osnova.....</b>	<b>2</b>
<b>3 Simulacija.....</b>	<b>3</b>
3.1 Euler – Cromerova metoda.....	3
3.2 Izrada simulacije.....	6
3.3 Program u C-u.....	9
3.4 Analiza rezultata.....	12
3.4.1 Kružna putanja za različite planete.....	12
3.4.2 Eliptična putanja Zemlje.....	18
<b>4 Zaključak.....</b>	<b>27</b>
<b>5 Literatura.....</b>	<b>28</b>

## 1 Uvod

Problem dvaju tijela, koji se u knjigama često nalazi pod nazivom “gravitacijski problem dvaju tijela”, je model koji se primjenjuje kod gibanja planeta oko Sunca, gibanja prirodnih satelita i smatra se osnovnim problemom nebeske mehanike [1]. Jedan od eklatantnih primjera jest gibanje sustava Zemlje i Mjeseca. Iako je masa Mjeseca približno osamdeset puta manja od mase Zemlje njegov je utjecaj na gibanje Zemlje oko Sunca mjerljiv, odnosno, utjecaj Mjeseca nije zanemariv te se gibanje promatra kao sustav dvaju tijela [2]. S druge strane, promotri li se gibanje satelita oko Zemlje, masa satelita je zanemariva u usporedbi s masom Zemlje te je ujedno utjecaj satelita na putanju Zemlje zanemariv pa se taj sustav promatra kao problem jednog tijela [3]. Dakle, problem dvaju tijela je je model koji se primjenjuje prilikom promatranja gibanja u sustavu dvaju tijela čiji omjer masa nije beskonačan ili jednak nuli. Važno je naglasiti da kod problema dvaju tijela točno vrijede Keplerovi zakoni [4]:

Prvi Keplerov zakon – svi planeti gibaju se po elipsama kojima je jedno od žarišta Sunce .

Drugi Keplerov zakon – radijvektor, odnosno spojnica, Sunce-planet (dužina koja spaja centar Sunca i trenutni položaj planet), prebriše u jednakim vremenskim razmacima jednake površine .

Treći Keplerov zakon – Kvadrati ophodnih vremena planeta proporcionalni su kubovima njihovih srednjih udaljenosti od Sunca .

Objekt promatranja ovoga rada jest gibanje dvaju nebeskih tijela kod kojih se potencija udaljenosti među njima u izrazu za gravitacijsku silu mijenja te promatranje Keplerovih zakona za te slučajeve. Do rješenja problema doći će se redom promatranjem najjednostavnijeg gibanja, Sunce-planet, pretpostavkom valjanosti Newtonovog zakona gravitacija  $F_G \sim r^{-2}$  , uz pretpostavku kružne orbite Zemlje. Nadalje, nakon određenih promjena, o kojima će u samoj razradi biti riječ, unutar simulacije moguće je putanju Zemlje prilagoditi na eliptičnu. Promjenom potencija udaljenosti planeta i Sunca unutar simulacije eliptične putanje moguće je analizom rezultata odrediti ponašanje Keplerovih zakona za različite potencije. Od posebnog interesa u razradi bit će potencije koje se uvelike razlikuje od dva te potencije koje su približno jednake dva.



## 2 Teorijska osnova

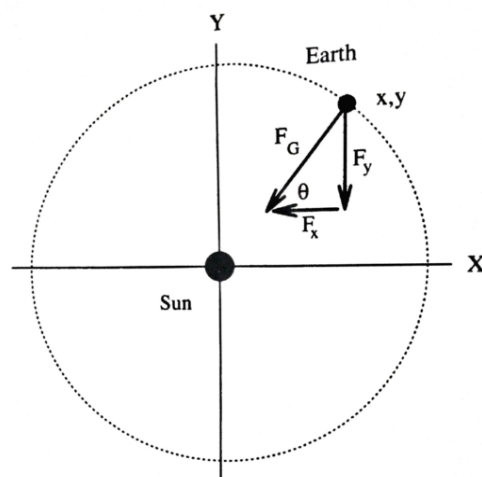
Promatrajući hipotetski Sunčev sustav koji se sastoji samo od Sunca i Zemlje lako je uočiti da je gravitacijska sila koja se javlja u sustavu dana Newtonovim zakonom gravitacije [5] .

$$F_G = G \frac{M_S * M_Z}{r^2} \quad (2.1.)$$

gdje su  $M_S, M_Z$  masa Sunca i masa Zemlje redom,  $r$  udaljenost među njima, a  $G$  gravitacijska konstanta.

U promatranom sustavu pretpostavka je da je gibanje Sunca zanemarivo u usporedbi s njegovim dimenzijama te je preslikavanjem hipotetskog sustava u odgovarajući koordinatni sustav dozvoljeno Sunce postaviti u ishodište sustava kao “točku” koja miruje (slika 2.1.) .

Gravitacijska sila koja djeluje na Zemlju jest privlačna sila koja se u koordinatnom sustavu može rastaviti na  $x$  i  $y$  komponentu, što će u nastavku biti od velikog značaja za izradu željene simulacije.



**Slika 2.1.** model sustava Sunce-zemlja u koordinatnom sustavu kojem je Sunce ishodište (slika preuzeta s [5])

## 3 Simulacija

### 3.1 Euler – Cromerova metoda

Simulacija za sustav će se raditi u programskom jeziku C pomoću Euler – Cromerove metode. Spomenuta metoda je modifikacija originalne Eulerove metode te se može primijeniti na sustav diferencijalnih jednadžbi oblika [5]:

$$\frac{dx}{dt} = f(t, v) \quad (3.1.)$$

$$\frac{dv}{dt} = g(t, x) \quad (3.2.)$$

s početnim uvjetima oblika:

$$x(t_0) = x_0 \quad (3.3.)$$

$$v(t_0) = v_0 \quad (3.4.)$$

Vremenski interval u kojem se promatra gibanje dijeli se u  $n$  jednakih vremenskih intervala pri čemu vrijedi

$$t_n = t_0 + n \Delta t \quad (3.5.)$$

Integracijom izraza (3.1.) i (3.2.) dobiju se sljedeći izrazi:

$$v_{n+1} = v_n + g(t_n, x_n) \Delta t \quad (3.6.)$$

$$x_{n+1} = x_n + f(t_n, v_{n+1}) \Delta t \quad (3.7.)$$

Razlika između ove i originalne Eulerove metode jest ta što se u jednadžbi (3.7.) pri korištenju Eulerove metode koristi  $v_n$  umjesto  $v_{n+1}$ . Spomenuta metoda se koristi jer dobro čuva energiju, što je za oscilatorne sustave u kojima vrijedi zakon sačuvanja energije neophodno. Originalna Eulerova metoda bi s vremenom povećavala energiju, odnosno amplitude oscilacija bi bile sve veće pa je stoga ona manje precizna. Način na koji se u Euler-Cromerovoj metodi energija sačuva najbolje se vidi na primjeru matematičkog njihala. Sustav

diferencijalnih jednadžbi koji opisuje matematičko njihalo pri malim oscilacijama je sljedeći [6] :

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (3.8.)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = -\frac{g}{l} \theta \quad (3.9.)$$

pri čemu je  $\theta$  kut odklona njihala,  $\omega$  kutna frekvencija, dok je  $l$  duljina njihala. Primjenom pravila iz jednadžbi (3.6.) i (3.7.) za matematičko njihalo dobiju se jednadžbe:

$$\omega_{i+1} = \omega_i - \frac{g}{l} \theta_i \Delta t \quad (3.10.)$$

$$\theta_{i+1} = \theta_i + \left( \omega_i - \frac{g}{l} \theta_i \Delta t \right) \Delta t \quad (3.11.)$$

Energija po umnošku mase i kvadrata duljine matematičkog njihala malih oscilacija je dana s:

$$E = \frac{1}{2} \omega^2 + \frac{g}{2l} \theta^2 \quad (3.12.)$$

pri čemu je izraz (3.12.) vrijedi samo za male kuteve osciliranja. Dakle, energija njihala u trenutku  $t_{i+1}$  je dana s:

$$E_{i+1} = \frac{1}{2} \omega_{i+1}^2 + \frac{g}{2l} \theta_{i+1}^2 \quad (3.13.)$$

Uvrštavanjem jednadžbi (3.10.) i (3.11.) u jednadžbu (3.13.) i sređivanjem dobije se :

$$E_{i+1} = E_i + \frac{g}{2l} \left( \omega_i^2 - \frac{g}{l} \theta_i^2 \right) \Delta t^2 \quad (3.14.)$$

Izraz u zagradi u jednadžbi (3.14.) jednak je dvostrukoj razlici kinetičke i potencijalne energije u trenutku  $t_i$ . Cijeli drugi član s desne strane jednakosti predstavlja grešku jer bi ukupna energija u svim trenucima trebala biti jednaka. No, sumiranjem po svim vremenskim

trenucima unutar jednog perioda ukupna greška iščezava jer je prosječna kinetička energija jednaka prosječnoj potencijalnoj energiji. Dakle, ukupna energija je očuvana. Korištenjem Eulerove metode, koeficijent pogreške jednak je sumi kinetičke i potencijalne energije pa ne dolazi do konačnog iščezavanja na kraju perioda, kao što je to u slučaju Euler-Cromerove metode.

### 3.2 Izrada simulacije

Kratkim uvodom u Euler- Cromerovu metodu stvorena je podloga za izradu simulacije promatranog sustava Zemlja – Sunce. Primjenom drugog Newtonovog zakona po koordinatama za gravitacijsku silu slijedi [5]:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{F_{Gx}}{M_Z} \quad (3.15.)$$

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{F_{Gy}}{M_Z} \quad (3.16.)$$

gdje su  $F_{Gx}$  i  $F_{Gy}$  x i y komponente gravitacijske sile redom.

Iz jednadžbe (2.1.) i slike 2.1. Primjenom elementarne trigonometrije slijedi :

$$F_{Gx} = -G \frac{M_Z M_S}{r^2} \cos \Theta = -G \frac{M_Z M_S x}{r^3} \quad (3.17.)$$

$$F_{Gy} = -G \frac{M_Z M_S}{r^2} \sin \Theta = -G \frac{M_Z M_S y}{r^3} \quad (3.18.)$$

pri čemu je negativan predznak sile podsjetnik na činjenicu da je sila usmjerena prema Suncu, postavljenom u ishodište promatranog koordinatnog sustava. Nadalje, kombiniranjem jednadžbe (3.15.) s jednadžbom za brzinu  $dv_x = dx/dt$  te izrazom (3.17.) diferencijalna jednadžba drugog reda (3.15.) svodi se na diferencijalnu jednadžbu prvog reda :

$$\frac{dv_x}{dt} = -G \frac{M_S x}{r^3} \quad (3.19.)$$

Analogno se dobije:

$$\frac{dv_y}{dt} = -G \frac{M_S y}{r^3} \quad (3.20.)$$

Integracijom izraza (3.19.) i (3.20.) dolazi se do jednadžbi potrebnih za izradu simulacije. Zbog jednostavnijeg vizualnog prikaza simulacije potrebno je odrediti jedinice pojedinih veličina. Jedna od opcija jest korištenje SI sustava. Iako je SI sustav najjednostavniji za korištenje, u ovom slučaju je poprilično nezgrapan. Naime, radijus zemljine orbite približno

je  $1,5 * 10^{11}$  m, što je za grafički prikaz izuzetno nepraktično . Iz tog razloga u izradi ove simulacije najpraktičnije je koristiti *astronomske jedinice (astronomical units)*, AU, definirane na sljedeći način. Jedna astronomska jedinica dužine (1 AU) jest prosječna udaljenost Zemlje i Sunca ( $1 \text{ AU} \approx 1,5 * 10^{11} \text{ m}$ ) . Ujedno će vrijeme u simulaciji biti mjereno u godinama ( $1 \text{ god} \approx 3,2 * 10^7 \text{ s}$ ) . Kako bi sustav jedinica bio do kraja konvertiran u AU potrebno je prikazati masu u istom . Zbog jednostavnosti neka je Zemljina orbita, po pretpostavci, kružnica. Shodno pretpostavci gravitacijska sila koja djeluje na Zemlju jednaka je centripetalnoj sili pa vrijedi :

$$\frac{M_Z v^2}{r} = G \frac{M_Z M_S}{r^2} \quad (3.21.)$$

pri čemu je  $v$  brzina Zemlje.

Sređivanjem izraza (3.21.) slijedi:

$$GM_S = v^2 r \quad (3.22.)$$

S obzirom na to da se Zemlja po pretpostavci giba po kružnici za inicijalnu brzinu se uzima vrijednost potrebna Zemlji da u jednoj godini napravi cijelu orbitu, što povlači  $v = 2\pi r / 1 \text{ god} = 2\pi \text{ AU/god}$  pri čemu je  $r = 1 \text{ AU}$ . Uvrštavanjem prethodnog u izraz (3.22.) slijedi:

$$GM_S = 4\pi^2 \quad (3.23.)$$

Integracijom izraza na položaju za  $x$  (3.19.) slijedi :

$$\int_{v_{x,i}}^{v_{x,i+1}} dv = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} GM_S \frac{X_i}{r^3} dt = - \int_{t_i}^{t_{i+1}} 4\pi^2 \frac{X_i}{r_i^3} dt \quad (3.24.)$$

$$v_{x,i+1} = v_{x,i} - 4\pi^2 \frac{X_i}{r_i^3} \Delta t \quad (3.25.)$$

Nadalje integracijom izraza za brzinu slijedi :

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} dx = \int_{t_i}^{t_{i+1}} v dt \quad (3.26.)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_{x,i+1} \Delta t \quad (3.27.)$$

Analogno se za y koordinate dobije :

$$v_{y,i+1} = v_{y,i} - 4\pi^2 \frac{y_i}{r_i^3} \Delta t \quad (3.28.)$$

$$y_{i+1} = y_i + v_{y,i+1} \Delta t \quad (3.29.)$$

gdje je vremenska promjena  $\Delta t$ , dok  $4\pi^2$  ukazuje da se u simulaciji koristi AU

### 3.3 Program u C-u

S obzirom na to da su sve jednadžbe matematički korektno izvedene te je određena metoda izrade i odgovarajuće mjerne jedinice sustava, sve za izradu koda je dostupno. Za početak izrade koda potrebno je definirati potrebne biblioteke.

```
#include<stdio.h>
#include<stdlib.h>
#include <math.h>
```

Nadalje, s obzirom da je  $\pi$  (u programu označeno kao pi) konstanta koja je potrebna pri izvedbi izračuna najjednostavnije ju je u programu definirati na način na koji se definiraju konstante.

```
#define pi 3.14159
```

Kako bi se podaci koje kod, napisan u programskom jeziku C, izračuna sačuvali te kako bi se na temelju njih mogao napraviti graf gibanja i daljnja analiza potrebno je kreirati pokazivač na datoteku koji će omogućiti spremanje potrebnih podataka.

```
FILE*dat;
```

Nakon obavljenih pripremnih radnji može se započeti sa samim kodom.

```
{

    // zbog potrebne preciznosti sve varijable su tipa double

    double GMs;

    double dt=0.001, t=0.000;

    double xz, yz;

    double vx, vy;
```



```
double rsz, b;

// inicijalizacija početnih uvjeta

xz=1.0;

yz=0.0;

vx=0.0;

vy=2*pi;

GMs=4.0*pow(pi,2);

dat=fopen("zavrsni","w");

while(t<=1)

{

    rsz=sqrt(xz*xz+yz*yz);

    vx=vx-GMs*dt*xz/(pow(rsz,3.0));

    vy=vy-GMs*dt*yz/(pow(rsz,3.0));

    xz=xz+vx*dt;

    yz=yz+vy*dt;

    b=xz*vy-yz*vx;

    t=t+dt;

    fprintf(dat,"\n \t %lf \t %lf \t %lf",xz, yz, b);
```

```
}
```

```
fclose(dat);
```

```
return 0;
```

```
}
```

### 3.4 Analiza rezultata

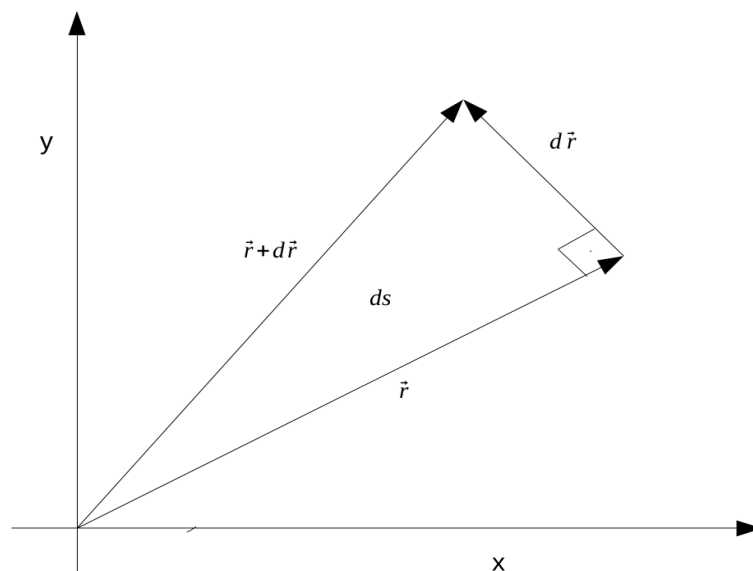
Kod napisan u programskom jeziku C odgovara kružnoj putanji planeta te se isti može koristiti za istraživanje Keplerovih zakona gibanja različitih nebeskih tijela promjenom inicijalnih uvjeta.

#### 3.4.1 Kružna putanja za različite planete

Kako je putanja planeta oko Sunca po pretpostavci kružnica prvi Keplerov zakon trivijalno je zadovoljen. Kako je gravitacijska sila, u promatranom slučaju, centralna za drugi Keplerov zakon vrijedi sljedeće [7] :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right) = \frac{L_0}{2M} = \text{const} \quad (3.30.)$$

Gdje je  $L_0$  kutna količina gibanja, a  $M$  masa planeta.



Slika 3.1. skica izvoda drugog Keplerovog zakona.

Sada je primjenom, analitičke geometrije, površina trokuta označena sa  $ds$  dana sa:

$$ds = \frac{1}{2} |\vec{r} \times d\vec{r}| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v} dt| = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| dt \quad (3.31.)$$

Pa slijedi:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} |\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{v}}| = \frac{1}{2M} |\dot{\vec{r}} \times M \dot{\vec{v}}| = \frac{1}{2M} |\dot{\vec{L}}| = \text{const} \quad (3.32.)$$

Dakle, očito je za provjeru drugog Keplerovog zakona dovoljno provjeriti sljedeće:

$$|(\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{v}})| = \left| (x_z \dot{i} + y_z \dot{j}) \times (v_x \dot{i} + v_y \dot{j}) \right| = \left| (x_z v_y - y_z v_x) \vec{k} \right| = x_z v_y - y_z v_x = \text{const} \quad (3.33)$$

Posljedica izraza (3.33.) u napisanom kodu je izraz:

$$b = xz * v_y - yz * v_x;$$

Očito iznos vrijednosti  $b$  ovisi samo početnim uvjetima zadanim za brzinu i položaj. Treći Keplerov zakon provjeri se usporedbom tabličnih podatke omjera kvadrata perioda s kubom velike poluosi (u slučaju kružne putanje velika poluos jednaka je radijusu putanje) s vrijednostima dobivenim eksperimentalno. Kako bi pomoću koda bilo moguće provjeriti valjanost trećeg Keplerovog zakona potrebno je ispisati vrijeme potrebno da planet presječe  $x$  os u točki početka putanje. Vrijednost traženog vremena je vrijednost vremena u kojem je iznos prethodne  $y$  koordinata planeta manja, a iznos sljedeće  $y$  koordinate planeta veća od nule. Dakle, pri ulasku u while petlju potrebno je zapamtiti ulaznu vrijednost  $y$  na način  $a = yz$ . Vrijednost vremena potrebno je zapamtiti samo jednom, dakle potrebna radnja u kodu obaviti će se samo ukoliko je vrijednost  $u$  koju se sprema vrijeme jednaka nuli. Dakle, u kodu, na kraju while petlje, prije dodavanja sljedećeg vremenskog koraka, dodaje se sljedeće:

```
if(c==0.0)
{
    if(a<0 && yz>0)

        c=t;
}
```

Po definiciji je  $GM_S = v^2 r$  te je  $v = 2\pi r / \text{god}$ , očito je za različite vrijednosti udaljenosti  $r$  vrijednost  $GM_S$  različita. Naime, za Zemljinu putanju  $r = 1 \text{ AU}$  pa je  $v = 2\pi \text{ AU/god}$ . Stoga je

prije izvršenja petlje u kodu potrebno, uz izmjenu početnog položaja, napraviti izmjenu u pogledu te konstante i početne brzine, uz napomenu da je radijus putanje jednak početno položaju planeta  $xz$ .

$$v_y = 2.0 * \pi * xz;$$

$$GM_s = \text{pow}(xz, 3) * 4.0 * \text{pow}(\pi, 2);$$

Za sve planete sunčevog sustava, osim za Merkur putanje su približno kružnog oblika.

**Tablica 3.1.** Provođenjem koda uz naznačene izmjene te očitavanjem perioda za svaki planet zasebno dobiju se rezultati prikazani u tablici

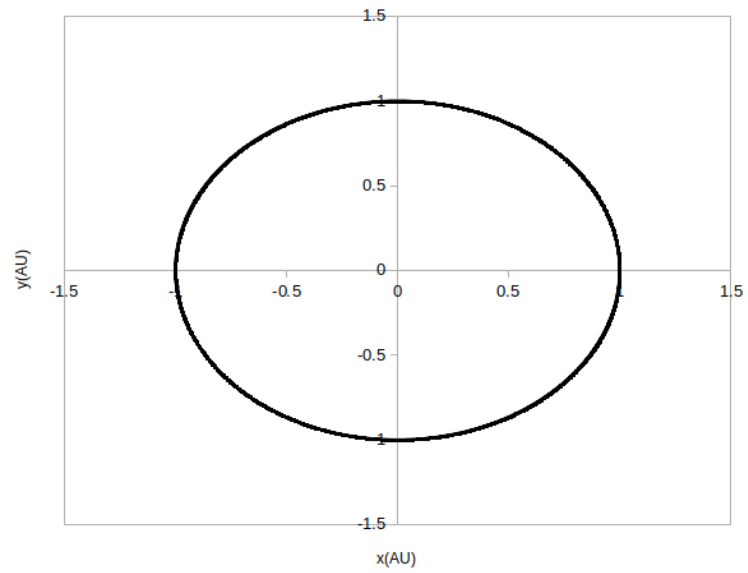
Planet	$a = r$ (AU)	$ \vec{r} \times \vec{v}  = b$	$T$ (god)	$\frac{T^2}{a^3} \text{god}^2 / \text{AU}^3$
Venera	0.72	3.2572	0.6091	0.994
Zemlja	1.00	6.2832	1.000	1.000
Mars	1.52	14.5167	1.8815	1.01

Očitavanjem podataka dobivenih nakon provedbe while petlje pokaže se da je vrijednost traženog skalarnog produkta vektora (u nastavku teksta  $b$ ) jednaka u svakom trenutku vremena, odnosno da drugi Keplerov zakon vrijedi. Nadalje za treći Keplerov zakon, nakon promjena koje se dogode u kodu, vrijedi

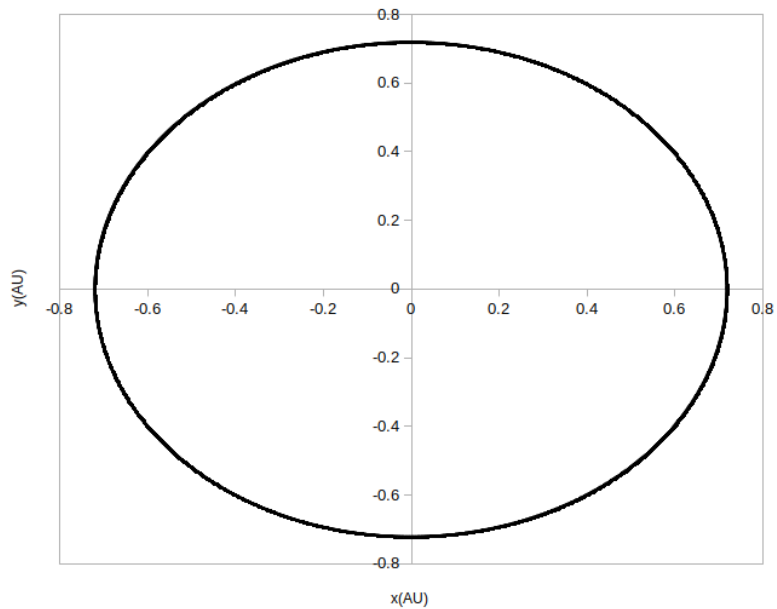
$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_s} = \frac{4\pi^2}{4\pi^2 a^3} \quad (3.34.)$$

Gdje je  $xz = a$ .

Slijedi da treći Keplerov zakon u simulaciji vrijedi za  $T^2 = 1$ , odnosno  $c = 1$ .



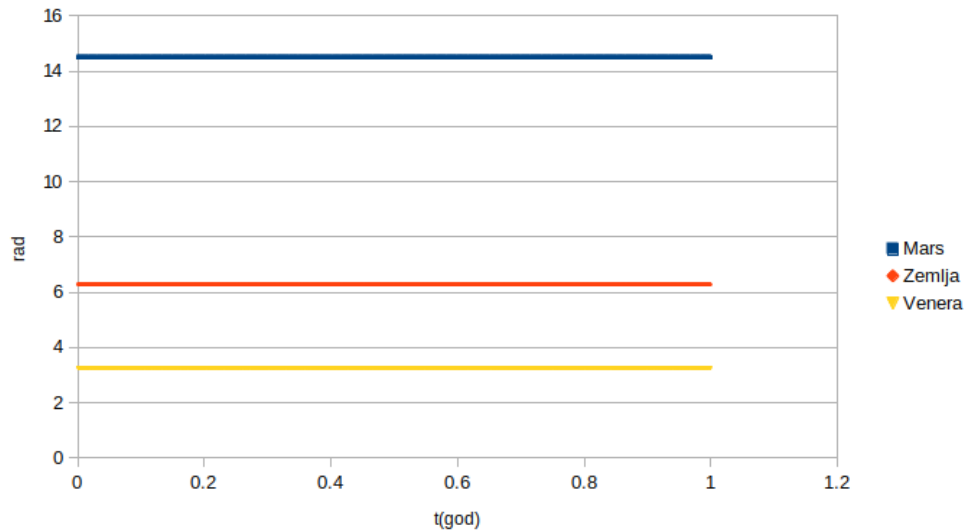
**Slika 3.2.** kružna putanja Zemlje sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava i početnim uvjetima  $xz=1.0$ ,  $yz=0.0$ ,  $v_x=0.0$ ,  $v_y=2\pi$  te vremenskim korakom  $dt=0.001$



**Slika 3.3.** kružna putanja Venere sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava i početnim uvjetima  $xz=0.72$ ,  $yz=0.0$ ,  $v_x=0.0$ ,  $v_y=2\pi xz$  te vremenskim korakom  $dt=0.001$



**Slika 3.4.** kružna putanja Marsa sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava i početnim uvjetima  $xz=1.52$ ,  $yz=0.0$ ,  $vx=0.0$ ,  $vy=2\pi xz$  te vremenskim korakom  $dt=0.001$



**Slika 3.5.** graf prikazuje različite vrijednosti iznosa vektorskog produkta brzine i udaljenosti za različite planete; vrijednost je konstantna za svaki planet zasebno

S obzirom da je izraz (3.34.) jednak omjeru iznosa kutne količine gibanja i mase planeta vrijedi da je, za jednake početne brzine svih promatranih planeta, za planet udaljeniji od sunca taj omjer veći.

**Tablica 3.2.** vrijednosti varijable koja se koristi za potvrdu trećeg Keplerovog zakona u simulaciji su jednake za sve planete pa treći Keplerov zakon za promatrane slučajeve vrijedi

<i>Planet</i>	<i>c</i>
<i>Venera</i>	<i>1.0</i>
<i>Zemlja</i>	<i>1.0</i>
<i>Mars</i>	<i>1.0</i>

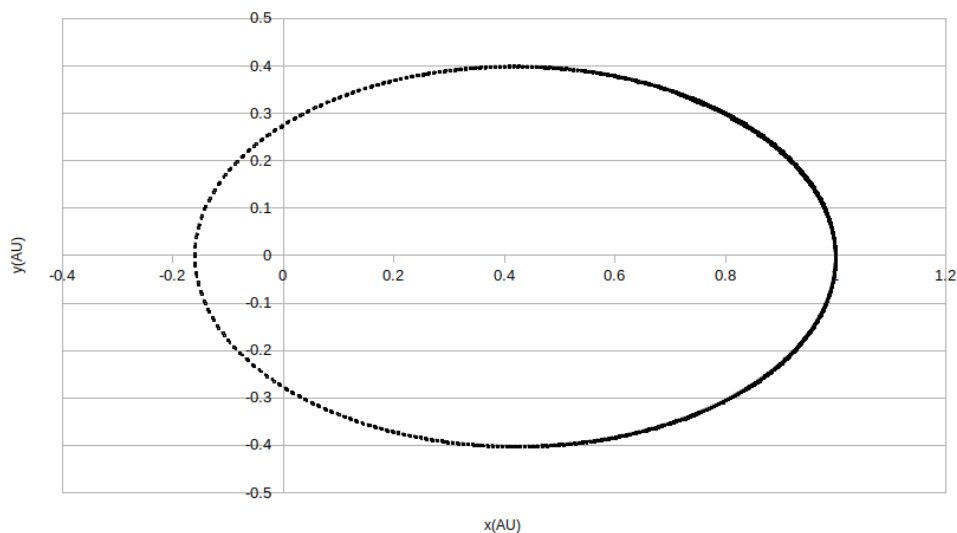


### 3.4.2 Eliptična putanja Zemlje

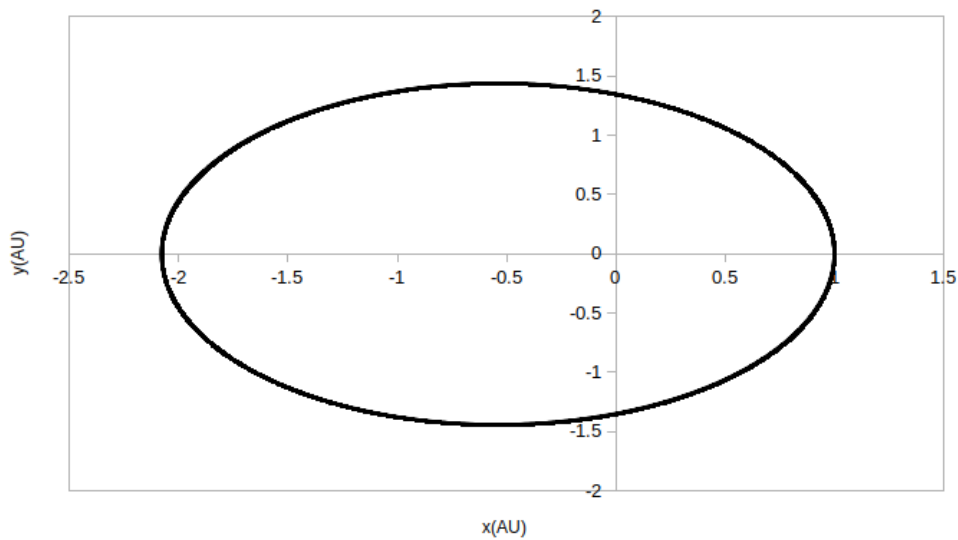
Uočava se da Keplerovi zakoni direktno slijede iz činjenice da je gravitacijska sila obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti dvaju nebeskih tijela [8]. Nadalje je zanimljivo promotriti ponašanje putanje nebeskog tijela (u konkretnom slučaju Zemlje) s potencijom udaljenosti različitom od 2. Neka je gravitacijska sila dana sljedećim izrazom :

$$F_G = G \frac{M_S M_Z}{r^\beta} \quad (3.35.)$$

Važno je naglasiti da u stvarnosti putanje nebeskih tijela nisu savršene kružnice već elipse. Kako bi se u napisanom kodu za putanju Zemlje dobila elipsa dovoljno je napraviti promjenu u vidu inicijalne brzine, dok će početni položaj na  $x$  osi biti vrijednost velike poluosi elipse. Prilikom odabira inicijalne brzine za kružnu putanju, gledano u AU, odabrana je brzina  $2\pi$ . Lako je uočiti da će vrijednost brzine manja od te uzrokovati “širenje” putanje po  $x$  osi u desno, dok će vrijednost veća od te uzrokovati “širenje” putanje po  $x$  osi u lijevo. Stoga je očito da je za postizanje eliptične putanje dovoljno za inicijalnu brzinu uzeti bilo koju vrijednost brzine različitu od  $2\pi$ .

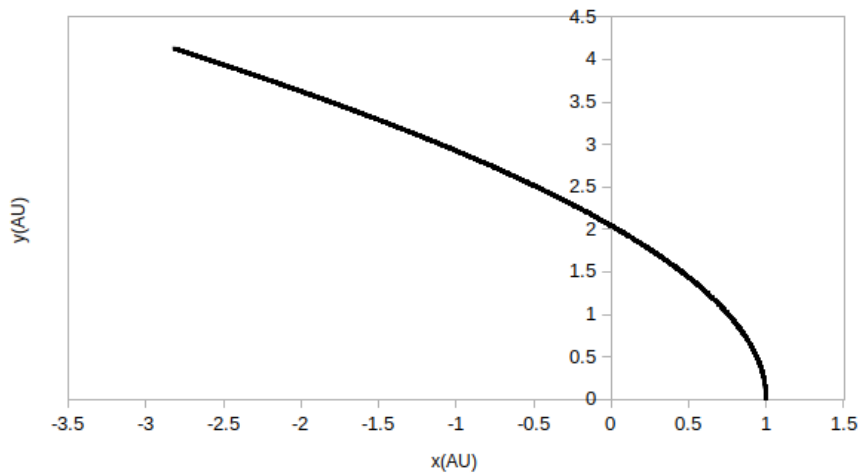


**Slika 3.6.** Eliptična putanja Zemlje s početnim uvjetima  $v_x=0$ ,  $v_y=3.3$ ,  $x=1.0$ ,  $y=0.0$



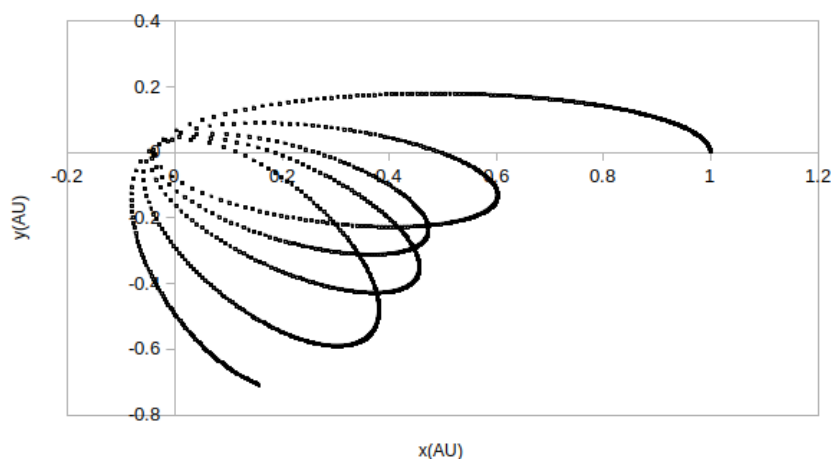
*Slika 3.7. Eliptična putanja Zemlje s početnim uvjetima  $v_x=0$ ,  $v_y=7.3$ ,  $x=1.0$ ,  $y=0.0$*

Kako su 3.6. i 3.7. prikazi eliptičnih putanja Zemlje u Sunčevom sustavu Keplerovi zakoni, za oba problema, trivijalno su zadovoljeni. Važno je naglasiti da za brzine veće od  $\sqrt{2} * 2\pi$ , što je druga kozmička brzina za promatrani problem, Zemlja prilikom gibanja izlazi iz sustava, što se lako pokaže uvrštavanjem odgovarajućih brzina u napravljenu simulaciju.



*Slika 3.8. Putanja Zemlje s početnim uvjetima  $v_x=0$ ,  $v_y=9.0$ ,  $x=1.0$ ,  $y=0.0$*

Nadalje, za brzine manje od  $2\pi/2$  orbite su iznimno nestabilne.



**Slika 3.9.** Putanja Zemlje s početnim uvjetima  $v_x=0$ ,  $v_y=\pi/2$ ,  $x=1.0$ ,  $y=0.0$

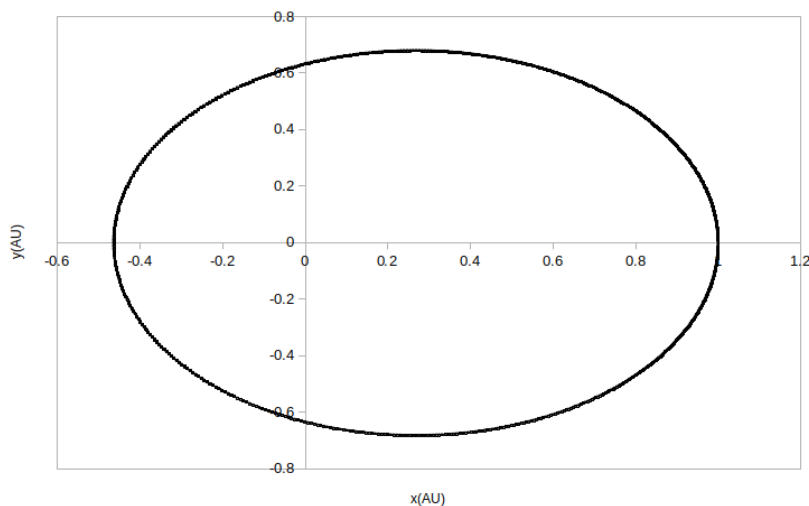
Nadalje, pokaže se da je za odabir veće inicijalne brzine potreban veći vremenski period while petlje. Zbog jednostavnosti neka je elipsa pomaknuta u desno te neka je vrijednost početne brzine planeta jednaka  $v_y=5$  AU/god; rezultati jednake kvalitete i težine dobili bi se za bilo koju vrijednost brzine oko broja  $2\pi$ . Kao potvrda trećeg Keplerovog zakona za eliptičnu putanju, osim izračunavanja konstante u kodu, može se iskoristiti činjenica da u Sunčevom sustavu koji se sastoji od Sunca i jednog planeta koji slijedi eliptičnu putanju, smjer osi elipse nije podložan vremenskoj promjeni, odnosno orijentacija gibanja planeta je konstantna [1]. Zbog jednostavnosti će se u nastavku koristiti ova metoda. S obzirom da promjena potencije udaljenosti uzrokuje promjenu vrijednosti gravitacijske konstante zbog jednostavnosti se uzima da za sve izbore  $\beta$  u (3.34) vrijedi  $GM_s=4\pi^2$ . Početni uvjeti i vremenska promjena jednaki su za sve odabire  $\beta$ . Izraz (3.35.) povlači određene promjene u kodu napisanom u programskom jeziku C. Naime, izrazi za  $x$  i  $y$  komponente brzine dobiveni su kombinacijom izraza za gravitacijsku silu (2.1) s izrazima u (3.19.), odnosno (3.20). Provedbom potrebnih promjena, odnosno zamjenom izraza (2.1.) izrazom (3.35.), te analognom provedbom izvoda, u kodu dolazi do sljedećih promjena:

$$v_x=v_x-Gms*dt*xz/(pow(rsz,\beta+1));$$

$$v_y=v_y-Gms*dt*yz/(pow(rsz,\beta+1));$$

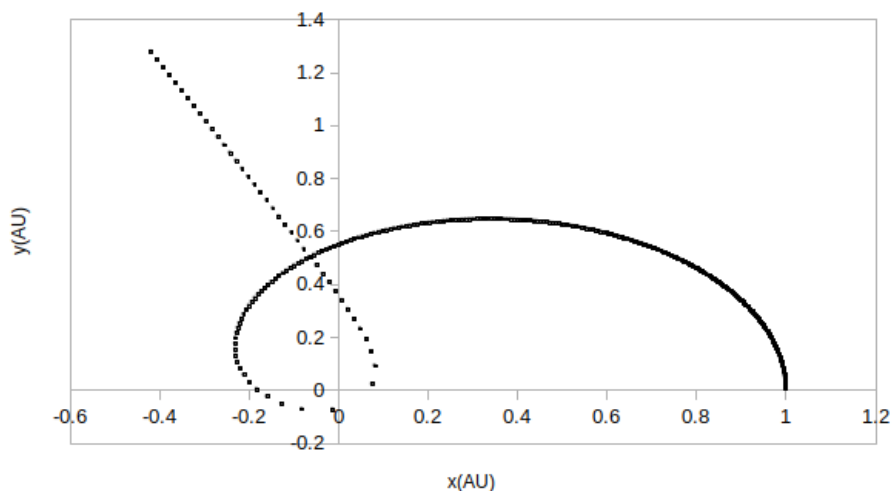
Naglasak je da se zbog činjenice da su sve varijable u kodu tipa *double* za vrijednost  $\beta$  uvrštava 2.0. Nakon provedenih izmjena kod je spreman za daljnu uporabu. Važno je naglasiti da će vrijednost  $b$  (zbog ovisnosti samo o odabiru početnih vrijednosti za brzinu i položaj) neovisno o putanji, odnosno neovisno o odabiru potencije udaljenosti u izrazu za gravitacijsku silu, biti konstantna, što će se potvrditi analizom podataka dobivenih provedbom koda

**a)  $\beta=2.0$**



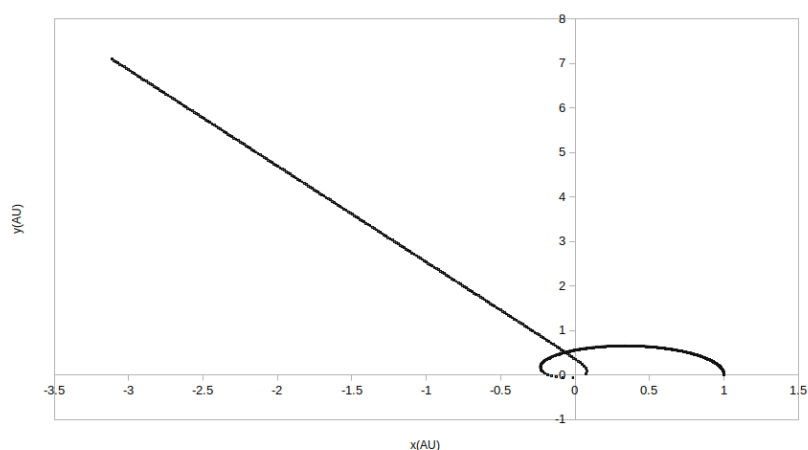
**Slika 3.10.** Eliptična putanja Zemlje oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=2$  nakon  $t=1$

Iz slike 3.10. dobivene za slučaj eliptične putanje Zemlje oko Sunca s gravitacijskom silom koja je obrnuto proporcionalna kvadratu udaljenosti planeta i Sunca vrijedi da Sunce nije u centru putanje planeta, što je u skladu s pretpostavkom prvog Keplerovog zakona koji nalaže da se sunce nalazi u jednom od žarišta elipse koja predstavlja putanju planeta. Očitavanjem podataka za vrijednost  $b$  dobije se da je tražena vrijednost konstantna te da je jednaka 5.0 u svakom trenutku ophoda Zemlje oko Sunca. Nadalje, očito je da prilikom vremenske promjene ni u jednom trenutku ne dolazi do odstupanja gibanja planeta od prvog ciklusa, odnosno vrijedi da se putanja planeta periodično ponavlja, što je u skladu s pretpostavkom Keplerovih zakona koja nalaže da se smjer, odnosno, orijentacija elipse ne mijenja u vremenu. Iz navedenog slijedi da za prikazani slučaj Keplerovi zakoni vrijede.

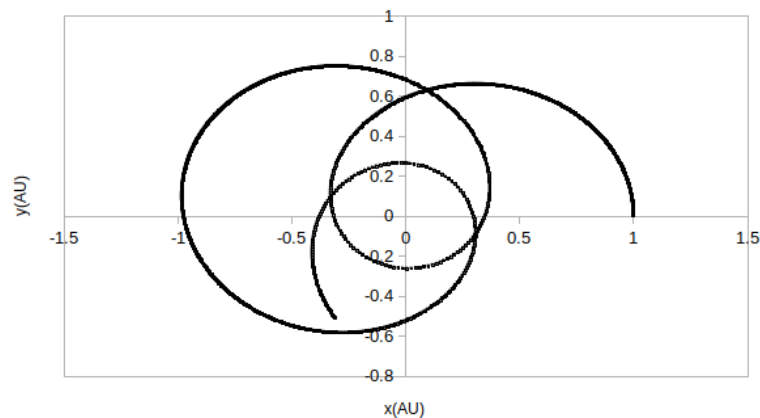
**b)  $\beta=3.0$** 

**Slika 3.11.** Putanja Zemlje oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=3.0$  nakon  $t=0.2$

Za slučaj kada gravitacijska sila obrnuto proporcionalno ovisi o kubu udaljenosti planeta i Sunca putanja se uvelike razlikuje od putanje za slučaj kvadratne ovisnosti. Naime, očito je da planet u sustavu uopće nema stabilnu orbitu, odnosno da nakon nekog vremena biva privučen od strane Sunca te prolazi jako blizu njega nakon čega biva izbačen iz sustava te svoju putanju nastavlja “odlazeći” iz sustava. Analizom rezultat koda dobije se da je u svakom trenutku vremena  $b=5.0$  što povlači da drugi Keplerov zakon vrijedi. S obzirom da je ovakva orbita planeta u Sunčevom sustavu nestabilna slijedi da treći Keplerovi zakoni za nju ne vrijede.

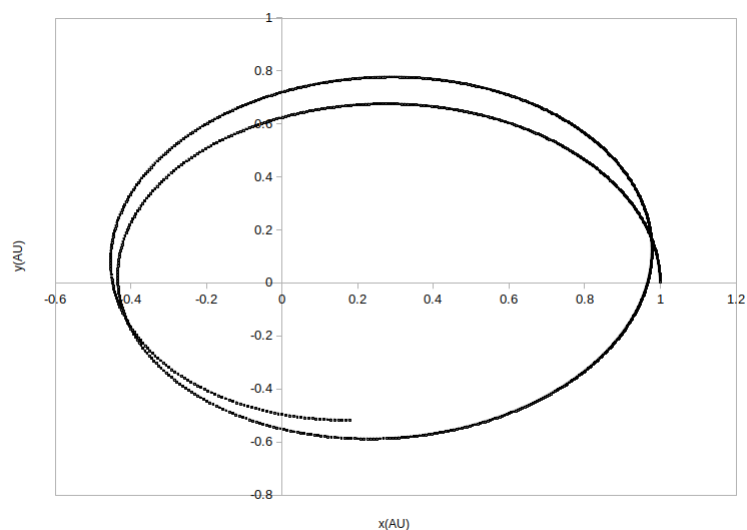


**Slika 3.12.** Zemljina putanja oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=3.0$  nakon približno pola godine od početka gibanja ( $t=0.5$ )

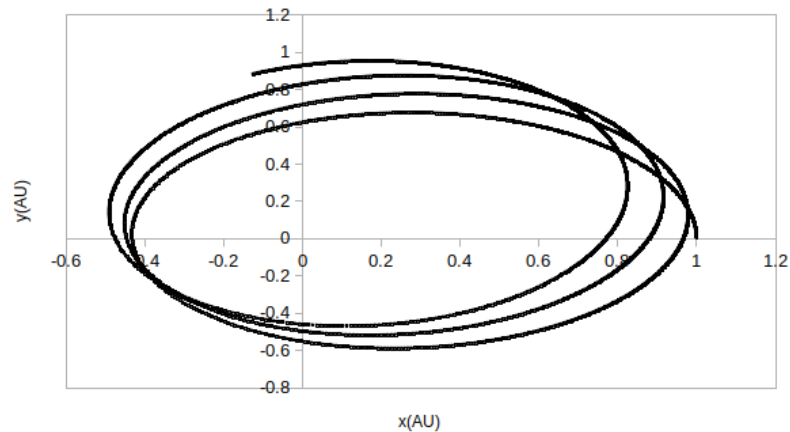
c)  $\beta=2.5$ 

*Slika 3.13. Zemljina putanja oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=2.5$  nakon približno godinu od početka gibanja ( $t=1$ )*

Očito je za slučaj 3.13. situacija bitno drugačija nego za slučaj 3.12. Putanja Zemlje veoma je slična obliku cikloide. Naime, putanja na početku prati eliptični obrazac, no nakon nekog vremena Zemlja biva privučena od strane Sunca, što uzrokuje rotaciju osi elipse te promjenu njihovog smjera što uzrokuje cikloidnu putanju. Promjena smjera osi elipse nije u skladu s posljedicom Keplerovih zakona, koja zahtjeva konstantnost smjera elipse, zbog čega treći Keplerov zakon za ovaj slučaj ne vrijedi. Drugi Keplerov zakon zbog  $b=\text{const}$  vrijedi.

d)  $\beta=2.10$ 

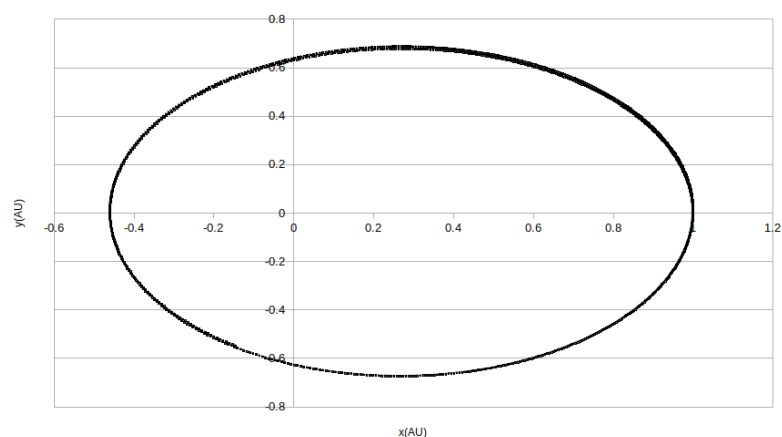
*Slika 3.14.. Zemljina putanja oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=2.1$  nakon približno godinu od početka gibanja ( $t=1$ )*



*Slika 3.15. Zemljina putanja oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=2.1$  nakon približno dvije godine od početka gibanja ( $t=2$ )*

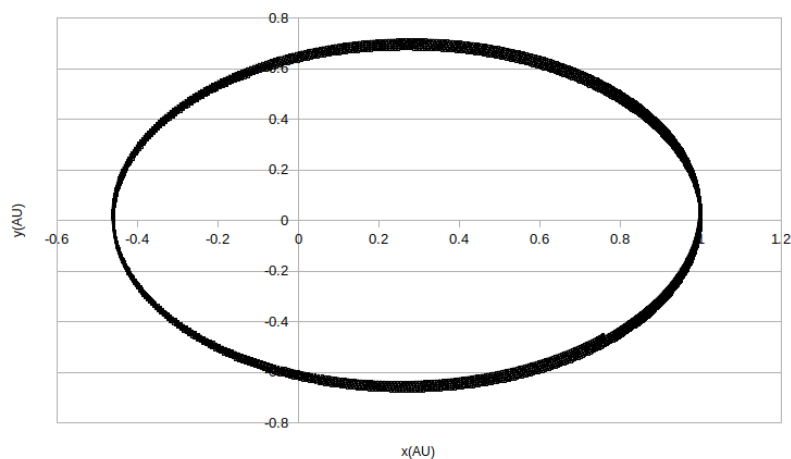
Važno je uočiti da je putanja za  $\beta=2.10$  bitno stabilnija od putanje u prethodno promatranom slučaju. Svejedno ni takva putanja još uvijek nije stabilna što se najbolje vidi usporedbom slike 3.14. sa slikom 3.15. Naime, što je veći vremenski odmak od početka gibanja smjer elipse se sve više pomiče te se potvrđuje da za ovu potenciju udaljenosti u gravitacijskoj sili treći Keplerov zakon ne vrijedi. Prvi Keplerov zakon je zadovoljen jer se Sunce očito nalazi u fokusu svake od elipsi koju planet opisuje, dok drugi Keplerov zakon, zbog neovisnosti o potenciji udaljenosti trivijalno vrijedi.

**e)  $\beta=2.01$**



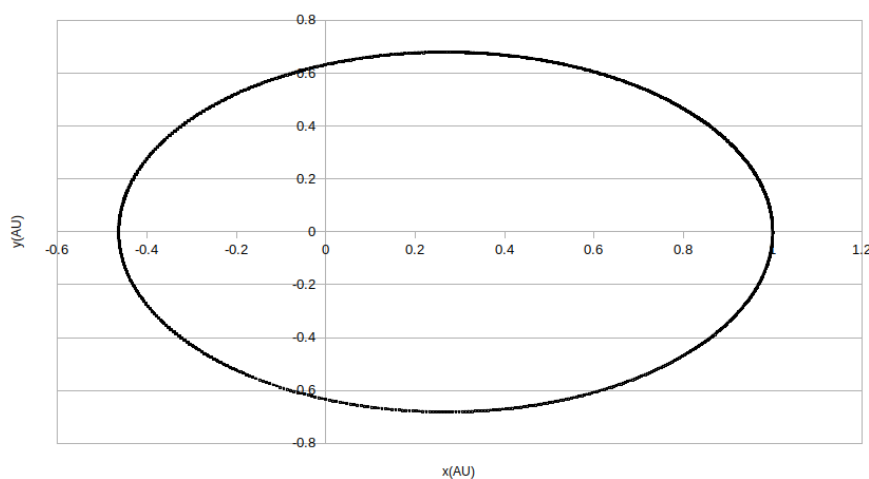
*Slika 3.16. Zemljina putanja oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=2.01$  nakon približno godine od početka gibanja ( $t=1$ )*

Analizom dobivenih podataka očito je da je promjena smjera u gibanju elipse još uvijek prisutna i za  $\beta=2.01$ , no važno je uočiti da je ovako dobivena orbita bitno stabilnija od svih ostalih prethodno promatranih orbita. Nakon godine od početka gibanja nestabilnost je prisutna, no u usporedbi s ostalim orbitama gotovo je zanemariva. Uočljivija nestabilnost javlja se s većim vremenskim odmakom pa je tako primjerice nakon približno tri godine gibanja promjena u smjeru elipse znatnije uočljiva, što potvrđuje da treći Keplerovi zakoni za ovaj slučaj ne vrijedi. Prvi i drugi Keplerov zakon, iz razloga kao i za prethodne slučajeve, su zadovoljeni.



*Slika 3.17. Zemljina putanja oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=2.01$  nakon približno godine od početka gibanja ( $t=3$ )*

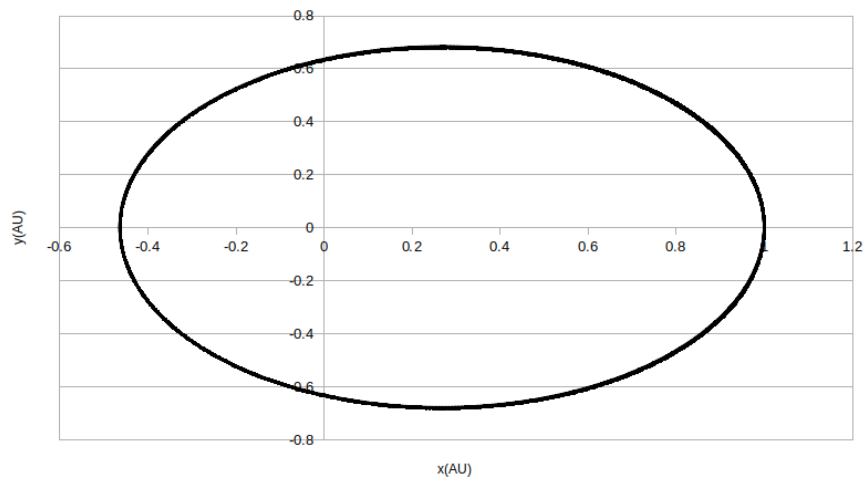
**f)  $\beta=2.001$**



*Slika 3.18. Zemljina putanja oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=2.001$  nakon približno godine od početka gibanja ( $t=1$ )*



Analizom dobivenih podataka uočava se da je promjena u smjeru gibanja elipse za  $\beta=2.001$  nakon jedne godine uopće nije uočljiva. Promotri li se isto gibanje nakon perioda od približno četiri godine vidi se da je promjena i dalje zanemarivo mala, no prisutna. Dakle, važno je uočiti da za vrijednosti potencije udaljenosti koje su bliže kvadratu (odnosno dvojci) putanja postaje sve stabilnija, odnosno, promjena u smjeru gibanja elipse postaje sve beznačajnija i neuočljivija.



**Slika 3.19.** Zemljina putanja oko Sunca sa Suncem u ishodištu koordinatnog sustava za  $\beta=2.001$  nakon približno četiri godine od početka gibanja ( $t=4$ )

## 4 Zaključak

Bitno je uočiti da što je vrijednost  $\beta$  bliža vrijednosti 2, orbita planeta postaje sve stabilnija, dok za vrijednosti koje su veće od dva putanja postaje sve nestabilnija. Već za  $\beta=3$  se nakon nekog vremena u potpunosti gubi stabilnost putanje te planet biva odbačen van sustava (kao što je prikazano na slici 3.7). Nadalje, putanja za  $\beta \approx 2$  približno je stabilna kao putanja za  $\beta=2$ . Dakle, promotri li se  $\beta \approx 2$  zaključak je da je devijacija u putanji zanemariva, odnosno da je putanja za takvu potenciju udaljenosti u gravitacijskoj sili jednako stabilna kao putanja za kvadratnu udaljenost planeta u gravitacijskoj sili. U pogledu Keplerovih zakona zaključuje se da drugi Keplerov zakon vrijedi neovisno o odabiru potencije udaljenosti u izrazu za gravitacijsku silu, kao posljedica ovisnosti isključivo o brzini i položaju, što je u svim slučajevima računalna simulacija potvrdila. Nadalje, prvi Keplerov zakon vrijedi za sve stabilne orbite, dok se treći Keplerov zakon potvrđuje za orbite kod kojih je  $\beta$  blizu iznosa broja 2. Dakle, Keplerovi zakoni za sustav dvaju tijela jednako vrijede kako za  $F_G \sim r^{-2}$  tako i za  $F_G \sim r^{-\beta}$ , gdje je  $\beta \approx 2$ , no zbog jednostavnosti teorijskog koncepta gravitacijske sile kao potencija udaljenosti uzima se kvadrat. Važno je naglasiti da kada bi Zemlja bila jedini planet Sunčevog sustava njena orbita bila bi potpuno stabilna te bi gore napisane pretpostavke bile točne, no kako u stvarnosti u Sunčevom sustavu postoji osam planeta koji svi međusobno interagiraju, odnosno svaki od planeta djeluje svojom gravitacijskom silom na preostalih sedam te time utječe na njihove putanje, gravitacijska sila kao ovakva postoji samo u teoriji. Dakle, precizno izvođenje eksperimenta za određivanje iznosa  $\beta$  za koji vrijede Keplerovi zakoni iziskivalo bi uzimanje u obzir utjecaja svih ostalih planeta na putanju promatranog.

## 5 Literatura

- [1] [https://en.wikipedia.org/wiki/Two-body\\_problem](https://en.wikipedia.org/wiki/Two-body_problem)
- [2] <https://www.britannica.com/science/two-body-problem>
- [3] A. Dulčić , *Mehanika*, Sveučilište u Zagrebu, Zagreb 2009
- [4] <https://gereshes.com/2018/06/18/keplers-laws-n-body-problem/>
- [5] N. J. Giordano, *Computational Physics*, Prentice Hall, Upper Saddle River, New Jersey 07458, 1997.
- [6] B. Ydri, A. Bouchareb, R. Chemam, *Lectures on Computational Physics*, Badji Mokhtar University, Annaba, Algeria, 2013.
- [7] <http://gama.fizika.unios.hr/~zglumac/utm.pdf>
- [8] <http://www.pas.rochester.edu/~blackman/ast104/newtonkepler.html>