Topološki i diskretni pristup problemu podjele ogrlice

Tadić, Robert

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ROBERT TADIĆ

Topološki i diskretni pristup problemu podjele ogrlice

DIPLOMSKI RAD

Split, srpanj 2024.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

Topološki i diskretni pristup problemu podjele ogrlice

DIPLOMSKI RAD

Student:
Robert Tadić

Mentorica:
doc. dr. sc. Tanja Vojković

Split, srpanj 2024.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

Topološki i diskretni pristup problemu podjele ogrlice

Robert Tadić

Sažetak:

Cilj ovog rada je riješiti neke varijante problema podjele ogrlice koristeći različite strategije. U tu srvhu smo prvo formalizirali problem, odnosno uveli definiciju ogrlice i pravedne podjele ogrlice i iskazali teorem o egzistenciji pravedne podjele. Prvi pristup koji smo koristili za rješavanje problema je topološki. Definirali smo homotopiju, fundamentalnu grupu i odredili fundamentalnu grupu kružnice s ciljem dokazivanja Borsuk-Ulam teorema. Konačno, iskoristili smo Borsuk-Ulam teorem za dokazivanje egzistencije pravedne podjele ogrlice. Nadalje, promotrili smo neke posebne slučajeve problema i dokazali ih direktno i u tom procesu iskoristili određene rezultate iz teorije grafova. Naposlijetku, definirali smo kubične komplekse i promatrali kubična preslikavanja. Konstruktivno smo dokazali Ky-Fanov teorem i primjenili konstrukciju iz dokaza na rješavanje problema pravedne podjele ogrlice.

Ključne riječi:

Borsuk-Ulam teorem, fundamentalna grupa, graf, kubični kompleks, kubična pseudo-mnogstrukost, kubično preslikavanje

Podatci o radu:

broj stranica 49, broj slika 18, broj literaturnih navoda 8, jezik izvornika: Hr-

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

vatski

Mentorica: *doc. dr. sc. Tanja Vojković*

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Tanja Vojković

doc. dr. sc. Aljoša Šubašić

dr. sc. Ana Laštre

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *26. lipnja 2024.*

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT

DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

Topological and discrete approach to the necklace splitting problem

Robert Tadić

Abstract:

Goal of this paper is to solve some variants of necklace-splitting problem using different strategies. In this context, we firstly formalized the problem, i.e. introduced the definition of the necklace and fair division of the necklace and stated the theorem on the existence of fair division. The first approach we used to solve the problem was topological. We defined a homotopy, a fundamental group and determined a fundamental group of a circle with the aim of proving the Borsuk-Ulam theorem. Finally, we used the Borsuk-Ulam theorem to prove the existence of a fair division of the necklace. Furthermore, we looked at some special cases of the problem and proved them directly and in the process used certain results from graph theory. Finally, we defined cubical complexes and observed cubical mappings. We constructively proved the Ky-Fan theorem and applied the construction from the proof to solve the problem of fair division of the necklace.

Key words:

Borsuk-Ulam theorem, fundamental group, graph, cubical complex, cubical map

Specifications:

49 pages, 18 figures, 8 references, original in: Croatian

BASIC DOCUMENTATION CARD

Mentor: *assisstant professor Tanja Vojković*

Committee:

assisstant professor Tanja Vojković

assisstant professor Aljoša Šubašić

Ana Laštre, phd

This thesis was approved by a Thesis commettee on *26th June, 2024.*

Uvod

Problem podjele ogrlice ("necklace-splitting problem") je problem koji dolazi iz područja diskretne matematike. U ovom radu ćemo prezentirati različite strategije za njegovo rješavanje, koristeći alate iz topologije, algebarske topologije, kombinatorike i teorije grafova. Cilj rada je istražiti kako se različiti rezultati iz različitih matematičkih područja koja na prvi pogled nisu povezana mogu integrirati i primijeniti na postavljeni problem.

Ovaj rad podijeljen je u četiri dijela. U prvom poglavlju uvodimo formalnu definiciju ogrlice, pravedne podjele ogrlice i iskazujemo ključni teorem i njegovu neprekidnu formulaciju.

U drugom pogavlju navodimo osnovne pojmove i definicije koje koristimo u daljnjem radu.

Cilj trećeg poglavlja je dokazivanje Borsuk-Ulam teorema. U tu svrhu definirati ćemo pojam homotopije i intuitivno objasniti i formalno definirati pojam fundamentalne grupe. Pokazati ćemo da je fundamentalna grupa kružnice izomorfna $\mathbb{Z}$, što će nam omogućiti dokazivanje Borsuk-Ulam teorema. Konačno, primijeniti ćemo navedene rezultate iz područja algebarske topologije na rješavanje diskretnog problema podjele ogrlice.

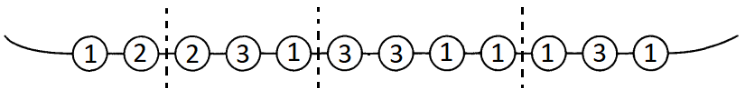
U četvrtom poglavlju napuštamo topološki pristup i neke varijante problema podjele ogrlice dokazati ćemo kombinatorno i koristeći odgovarajuće rezultate iz teorije grafova. Nadalje, definirati ćemo kubične komplekse i pseudomnogostrukosti. Definirati ćemo pojam kubičnih preslikavanja i promatrati ćemo objekt koji čuva određena svojstva djelovanjem kubičnog preslikavanja. Konačno, dokazivanje egzistencije takvog objekta povezati ćemo s osnovnim problemom i dati njegovo konstruktivno rješenje.

Sadržaj

Poglavlje 1

Problem podjele ogrlice

Zamislimo zlatnu ogrlicu koja se sastoji od n perlica u t različitih boja. Neka je broj perlica i-te boje jednak $q \cdot b_i$. Želimo pravedno podijeliti ogrlicu na q ljudi, odnosno podijeliti na način da svatko od njih dobije jednak broj perlica svake boje. Da bismo podijelili ogrlicu, potrebno ju je rezati na mjestima između perlica. Očito, pravedna podjela uvijek postoji uz $n-1$ rezanja. Međutim, ne želimo oštetiti materijal pa želimo izvršiti podjelu u što manje rezanja. Postavlja se pitanje koji je najmanji mogući broj rezanja neovisno o distribuciji perlica na ogrlici.



Slika 1.1: Pravedna podjela za $t = 3$ i $q = 2$

Formalizirajmo sada problem na sljedeći način.
Neka su $n, t, q \in \mathbb{N}$. Niz elemenata $N = a_1, ..., a_n$ nazivamo ***t*-obojena ogrlica** ako za svaki $j \in \{1, 2, ..., n\}$ vrijedi $a_j \in \{1, ..., t\}$. Elemente niza $a_1, ..., a_n$ nazivamo perlicama, a elemente skupa $\{1, ..., t\}$ bojama. Skup elemenata $\{a_1, ..., a_n\}$ označavamo s N'.

Neka je za svaki $i \in \{1, ..., t\}$ definirano preslikavanje $m_i \colon \mathcal{P}(N') \to \mathbb{N}$, $m_i(A) = card\{x \in A \colon x = i\}$, to jest za svaki $i \in \{1, ..., t\}$, m_i je preslikavanje koje svakom podskupu od N' pridružuje broj perlica i-te boje koje se nalaze u njemu. Particiju od N' s q elemenata nazivamo q-particija od N.
Pravedna q-podjela t-obojene ogrlice N je q-particija $N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_q$ od N takva da za svaki $i \in \{1, ..., t\}$ i $1 \leq j < k \leq q$ vrijedi $m_i(N_j) = m_i(N_k)$.
Red veličine q-particije $N_1 \cup ... \cup N_q$ je minimalni broj reznih točaka niza N takvih da je svaki N_i unija segmenata koji nastanu rezanjem.
Sljedeći je teorem centralni rezultat ovog rada. Cilj ga je dokazati u narednim poglavljima.

Teorem 1.1 *Neka su $n, t, q \in \mathbb{N}$ i neka je $N = a_1, ..., a_n$ t-obojena ogrlica takva da $q \mid m_i(N')$, za svaki $i \in \{1, ..., t\}$. Tada postoji pravedna q-podjela $N_1 \cup ... \cup N_q$ od N reda veličine manjim ili jednakim od $t(q-1)$.*

Za dokazivanje navedenog teorema trebat će nam njegova neprekidna formulacija. Neka je $I = [0, n\rangle$ i $m \in \mathbb{N}$. Za preslikavanje $B \colon I \to \{1, ..., m\}$ kažemo da je **m-bojenje intervala** I ako je $B^{-1}(l)$ izmjeriv u Lebesgueovom smislu za svaki $l \in \{1, ..., m\}$. Nadalje, particiju $I = F_1 \cup F_2 \cup ... \cup F_k$ nazivamo **pravednom k-podjelom m-bojenja B reda veličine r** ako vrijedi:

1. Postoje $y_0, y_1, ..., y_{r+1} \in \mathbb{N}$, $0 = y_0 \leq y_1 \leq ... \leq y_r \leq y_{r+1} = 1$ takvi da za svaki $l \in \{0, ..., r\}$ i za svaki $j \in \{1, ..., k\}$ vrijedi:

$$[y_l, y_{l+1}\rangle \subseteq F_j \text{ ili } [y_l, y_{l+1}\rangle \cap F_j = \emptyset.$$

   U tom slučaju točke $y_1, ..., y_r$ nazivamo **točkama rezanja**.

2. Za svaki $i \in \{1, ..., m\}$ i za svaki $j \in \{1, ..., k\}$ je

$$\lambda(B^{-1}(i) \cap F_j) = \frac{1}{k}\lambda(B^{-1}(i)),$$

pri čemu je λ Lebesgueova mjera na I.

Sljedeći teorem neprekidna je verzija Teorema 1.1

Teorem 1.2 *Neka je* $m \in \mathbb{N}$ *i* $B\colon I \to \{1, ..., m\}$ *proizvoljno* m*-bojanje intervala* I*. Tada za svaki* $k \in \mathbb{N}$ *postoji pravedna* k*-podjela bojanja* B *reda veličine* $m(k-1)$*.*

U narednim poglavljima vidjet ćemo kako neprekidna verzija teorema implicira diskretnu i dokazati neke njegove varijante.

Poglavlje 2

Osnovni pojmovi i definicije

Prije nego što pristupimo rješavanju problema, definirati ćemo osnovne pojmove i dokazati dvije leme koje će nam biti potrebne u daljnjem radu.

Definicija 2.1 *Neka je G neprazan skup i $*\colon G \times G \to G$ binarna operacija na G. Uređeni par $(G, *)$ nazivamo **grupa** ako vrijedi:*

1. *Za sve $a, b, c \in G$ vrijedi $a * (b * c) = (a * b) * c$,*
2. *Postoji element $e \in G$, kojeg nazivamo neutralni element, takav da je $a * e = e * a = a$, za svaki $a \in G$,*
3. *Za svaki $a \in G$ postoji $b \in G$, kojeg nazivamo inverzni element, takav da je $a * b = b * a = e$.*

Definicija 2.2 *Neka je $(G, *)$ grupa. Kažemo da je G **ciklička grupa** ako postoji $a \in G$ takav da je $G = \{a^k | k \in \mathbb{Z}\}$. U tom slučaju za element a kažemo da je **generator** grupe G.*

Definicija 2.3 *Direktni umnožak*

$$\mathbb{Z}^r = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times ... \times Z \ (r \ kopija)$$

naziva se slobodna Abelovska grupa ranga r.

Definicija 2.4 *Neka su $(G, *)$ i $(H, \cdot)$ grupe. Preslikavanje $\Psi\colon G \to H$ nazivamo* ***homomorfizam*** *grupa ako vrijedi $\Psi(x * y) = \Psi(x) \cdot \Psi(y)$, za svaki $x, y \in G$. Ako je Ψ pritom bijekcija, onda se Ψ naziva* ***izmorfizam*** *grupa i G i H se nazivaju izmorfne grupe.*

Definicija 2.5 *Neka je P neprazan skup i $+, \cdot$ dvije binarne operacija na P. Uređenu trojku $(P, +, \cdot)$ nazivamo* ***prsten*** *ako je $(P, +)$ komutativna grupa, operacija $\cdot$ je asocijativna i $\forall x, y, z \in P$ vrijedi $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ i $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$. Ako postoji neutralni element za operaciju $\cdot$ onda kažemo da je P prsten s jedinicom. Ako je $\cdot$ komutativna operacija onda P nazivamo komutativni prsten.*

Definicija 2.6 *Komutativni prsten s jedinicom nazivamo* ***polje*** *ako je svaki nenul element u prstenu invertibilan.*

Definicija 2.7 *Neka je F polje. Formalna suma*

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n,\ a_i \in F$$

naziva se polinom u varijabli x. Skup svih polinoma označavamo s $F[x]$. Kažemo da je α korijen polinoma $f(x)$ ako je $f(\alpha) = 0$. Za polje F kažemo da je ***algebarski zatvoreno*** *ako svaki nenul polinom $f(x) \in F[x]$ ima korijen u F.*

Definicija 2.8 ***Graf*** *G je uređena trojka (V, E, φ), gdje je V neprazan skup čije elemente nazivamo* ***vrhovima****, E je skup disjunktan s V čije elemente nazivamo* ***bridovima*** *i φ preslikavanje koje svakom bridu pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova. Kažemo da su vrhovi u i v krajevi brida e i međusobno susjedni ako je $\varphi(e) = \{u, v\}$. Također kažemo da su u*

i v incidentni bridu e i obratno. Brid e kojemu su krajevi isti vrh naziva se ***petlja****.*

Definicija 2.9 ***Stupanj*** *vrha v u grafu G je broj bridova grafa G koji su incidentni s v, pri čemu se za petlju broje dvije incidencije. Stupanj vrha v označavamo s $deg(v)$.*

Lema 2.10 *(Lema o rukovanju) U svakom je grafu zbroj stupnjeva njegovih vrhova paran. Ako je m broj bridova grafa, onda je*

$$\sum_{v \in V} deg(v) = 2m$$

Dokaz. Prebrojimo na dva načina incidencije u grafu računajući dvostruko incidencije petlji. Kada brojimo po vrhovima, ukupan broj incidencija jednak je zbroju stupnjeva svih vrhova. Brojimo li po bridovima, svaki brid ima dvije incidencije pa ih je ukupan broj jednak $2m$, što dokazuje lemu. ■

Definicija 2.11 ***Šetnja*** *W u grafu G je konačan niz vrhova v_i i bridova e_i oblika $v_0, e_1, v_1, e_2, ..., e_l, v_l$, pri čemu su krajevi brida e_i vrhovi v_{i-1} i v_i.* ***Staza*** *u grafu je šetnja čiji su svi bridovi međusobno različiti.* ***Put*** *u grafu je staza s međusobno različitim vrhovima.* ***Ciklus*** *u grafu je zatvorena staza koja sadrži barem jedan brid i ima međusobno različite unutarnje vrhove.*
Za vrhove u i v kažemo da su ***povezani*** *ako postoji put čije su krajnje točke u i v.*

Definicija 2.12 *Za graf G kažemo da je* ***povezan*** *ako su svaka dva njegova vrha povezana putem. Povezani podgraf koji nije pravi podgraf ni jednog drugog povezanog podgrafa grafa G naziva se* ***komponenta povezanosti****.*

Lema 2.13 *Neka je G graf i neka je $X \cup Y$ particija vrhova neparnog stupnja. Ako su $cardX$ i $cardY$ neparni brojevi, onda postoji put u G koji povezuje vrh iz X s vrhom iz Y.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji put u grafu G koji povezuje vrh u X s vrhom u Y. Tada X i Y leže u različitim komponentama povezanosti G_1 i G_2 redom. Budući da je G_1 graf, prema Lemi slijedi da je zbroj stupnjeva vrhova grafa G_1 paran broj. Nadalje, budući da je suma stupnjeva vrhova iz X neparan broj, a suma stupnjeva vrhova u $G_1 \setminus X$ paran broj, slijedi da je suma stupnjeva vrhova u G_1 neparan broj, što je u kontradikciji s Lemom 2.10. ■

Poglavlje 3

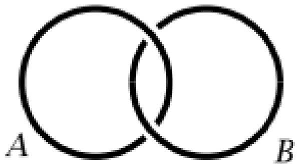
Topološki pristup

3.1 Fundamentalna grupa

U ovom poglavlju definirati ćemo pojam fundamentalne grupe i odrediti fundamentalnu grupu kružnice u svrhu algebarskog pristupa proučavanju topoloških prostora i dokazivanju Borsuk-Ulam teorema.

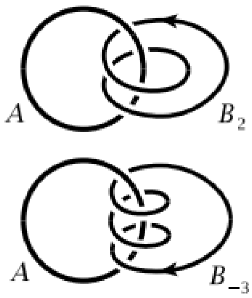
3.1.1 Motivacija

Prije nego uvedemo formalnu definiciju fundamentalne grupe pokušati ćemo kroz geometrijske aspekte ilustrirati intuitivno značenje samog pojma.
Promotrimo dvije disjunktne kružnice A i B u $\mathbb{R}^3$ takve da kružnica A siječe unutrašnjost kruga omeđenog s B. Zamislimo li da su kružnice A i B čvrsti objekti, intuicija nam govori da kružnicu B nikakvim neprekidnim pomacima nije moguće odvojiti od kružnice A.
Možemo promatrati i slučaj kada jednostavna zatvorena krivulja B prolazi dva ili više puta kroz unutrašnjost kruga omeđenog s A . Uvedemo li pozitivnu i negativnu orijentaciju na krivulju B, s B_n, $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ možemo označiti orijentiranu krivulju koja prolazi kroz unutrašnjost kruga omeđenog



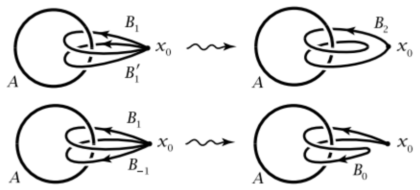
Slika 3.1: Povezane kružnice u $\mathbb{R}^3$

s A n puta i orijentacija joj je jednaka predznaku od n. S B_0 označavamo krivulju koja ne siječe unutrašnjost kruga omeđenog s A.



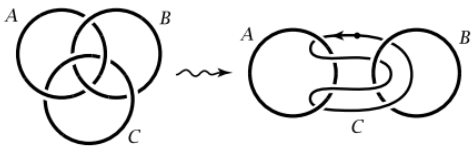
Slika 3.2: Krivulje B_2 i B_{-3}

Da bismo dobili strukturu grupe, na skupu krivulja $\{B_n : n \in \mathbb{Z}\}$ potrebno je uvesti operaciju. Zbroj dvije jednostavne zatvorene krivulje B i B' s početkom u istoj točki x_0 možemo shvatiti kao put koji prijeđemo gibajući se prvo po krivulji B, a zatim po krivulji B'. Primjerice, zbroj $B_1 + B_1$ je krivulja koja se može neprekidno transformirati u B_2. Zbroj krivulja B_1 i B_{-1} može se neprekidno transformirati u B_0. Općenito, želimo uvesti definiciju zbroja krivulja tako da vrijedi $B_m + B_n = B_{m+n}$ do na neprekidnu transformaciju.



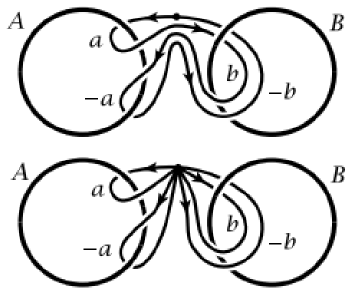
Slika 3.3: Zbrajanje krivulja

Očekivamo da će ova operacija biti komutativna. Promotrimo sada takozvane Borromeanove prstene prikazane na Slici 3.4.



Slika 3.4: Borromeanovi prsteni

Kružnice A i B su fiksirane i "razdvojive", a krivulju C promatramo kao petlju koja ne siječe A i B. Kada bi izbrisali krivulju A, vidimo da bi krivulju C neprekidnim pomacima mogli odvojiti od krivulje B. Međutim, intuicija nam govori da krivulju C nije moguće raspetljati od krivulja A i B. Krivulju C možemo identificirati sa zbrojem krivulja $a + b - a - b$ kao na Slici 3.5.



Slika 3.5: Dekompozicija krivulje C

Kako C nije trivijalan element, možemo zaključiti da operacija "+" u ovom slučaju neće biti komutativna. Dakle, C ćemo pisati u obliku $C = aba^{-1}b^{-1}$. Fundamentalnu grupu prostora X definirat ćemo na način da su elementi petlje u X sa fiksnom početnom i krajnjom točkom $x_0 \in X$, pri čemu su petlje identificirane ako se mogu dobiti neprekidnom deformacijom jedne u drugu. U prvom primjeru, prostor X je komplement fiksne kružnice A, a u drugom, komplement unije kružnica A i B. Pokazat ćemo da je fundamentalna grupa kružnice beskonačna ciklička grupa s generatorom B_1. Drugim riječima, fundamentalna grupa kružnice izomorfna je $(\mathbb{Z}, +)$.

Nadalje, iz drugog primjera očekivano je da će fundamentalna grupa komplementa dviju nepovezanih kružnica biti slobodna neabelovska grupa s dva generatora. Posebno, komutator te grupe $aba^{-1}b^{-1}$ je netrivijalan element grupe.

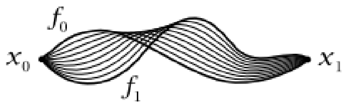
3.1.2 Homotopija

Definicija 3.1 *Neka je X topološki prostor.* ***Put*** *u prostoru X je svako neprekidno preslikavanje $f\colon I \to X$, gdje je $I = [0,1]$.*

Definicija 3.2 *Neka je X topološki prostor.* ***Homotopija*** *puteva u X je familija $(f_t\colon t \in I)$ puteva $f_t\colon I \to X$ takva da vrijedi:*

1. $(\exists x_0, x_1 \in X)(\forall t_1, t_2 \in I)$ $f_{t_1}(0) = f_{t_2}(0) = x_0$ *i* $f_{t_1}(1) = f_{t_2}(1) = x_1$
2. *Preslikavanje $F\colon I \times I \to X$ definirano s $F(s,t) = f_t(s)$ je neprekidno.*

Definicija 3.3 *Kažemo da su putevi f i f'* ***homotopni*** *ako postoji homotopija puteva $(f_t\colon t \in I)$ takva da je $f_0 = f$ i $f_1 = f'$. Tada kažemo da homotopija $(f_t\colon t \in I)$ povezuje puteve f_0 i f_1, odnosno da su putevi f_0 i f_1 povezani preko homotopije $(f_t\colon t \in I)$. Kažemo da je put f* ***nulhomotopan*** *ako je homotopan konstantnom putu.*



Slika 3.6: Homotopija

Intuitivno, dva puta su homotopna ako se jedan može dobiti iz drugoga neprekidnim transformacijama u neprekidnom vremenu $[0, 1]$, pri čemu zadržavamo početnu i krajnju točku.

Primjer 3.4 (Linearne homotopije)
Svaka dva puta f_0 i f_1 u $\mathbb{R}^n$ s istim početnim i krajnjim točkama su homotopna.

Za $t, s \in I$ stavimo $f_t(s) = (1 - t)f_0(s) + tf_1(s)$. Tada je:
$f_t(0) = f_0(0) - tf_0(0) + tf_1(0) = f_0(0)$
$f_t(1) = f_0(1) - tf_0(1) + tf_1(1) = f_0(1)$.
Neprekidnost preslikavanja F iz definicije slijedi iz neprekidnosti f_0 i f_1 i zatvorenosti neprekidnosti obzirom na zbrajanje i množenje skalarom.
Isti argument možemo upotrijebiti na konveksne podskupove od $\mathbb{R}^n$.

Propozicija 3.5 *Relacija "biti homotopan" je relacija ekvivalencije na skupu puteva s fiksnim krajnjim točkama.*

Dokaz. Refleksivnost je trivijalna jer za proizvoljni put f možemo uzeti $f_t = f$.
Ako su f_0 i f_1 homotopni i $(f_t\colon t \in I)$ homotopija koja ih povezuje, onda homotopija $(f_{1-t}\colon t \in I)$ povezuje f_1 i f_0.
Pokažimo tranzitivnost. Neka je $(f_t\colon t \in I)$ homotopija koja povezuje puteve f_0 i f_1 i $(g_t\colon t \in I)$ homotopija koja povezuje f_1 i g_0. Za svaki $t \in I$ neka je $h_t\colon I \to X$ funkcija definirana na sljedeći način:

$$h_t = \begin{cases} f_{2t}, \text{ ako je } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ g_{2t-1}, \text{ ako je } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

Tvrdimo da je $(h_t \colon t \in I)$ homotopija koja povezuje f_0 i g_0. Uočimo da je za svaki $t \in I$, $h_t(0) = f_0(0) = x_0$ i $h_t(1) = g_1(1) = x_1$. Budući da su pridružene funkcije F i G neprekidne na zatvorenim skupovima i $F(s, \frac{1}{2}) = G(s, \frac{1}{2})$, vrijedi i da je funkcija

$$H(s,t) = \begin{cases} F(s, 2t), \text{ ako je } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ G(s, 2t-1), \text{ ako je } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

neprekidna, pa je $(h_t \colon t \in I)$ tražena homotopija. Dokazali smo da je "biti homotopan" refleksivna, simetrična i tranzitivna i relacija, što je i trebalo dokazati. ■

Ako su f_0 i f_1 homotopni, pišemo $f_0 \sim f_1$.

Definicija 3.6 *Neka su $f, g \colon I \to X$ putevi takvi da je $f(1) = g(0)$.* ***Produkt puteva*** *f i g je put $f \cdot g$ definiran sa:*

$$f \cdot g(s) = \begin{cases} f(2s), \ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ g(2s-1), \ \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases}$$

Ako je $f_0 \sim f_1$ i $g_0 \sim g_1$ preko homotopija $(f_t \colon t \in I)$ i $(g_t \colon t \in I)$ redom, onda je $f_0 \cdot g_0 \sim f_1 \cdot g_1$ preko homotopije $(f_t \cdot g_t \colon t \in I)$.

Sada ćemo promatrati puteve $f \colon I \to X$ za koje je $f(0) = f(1) = x_0$. Takve puteve nazivamo **petljama** s početkom u x_0. Skup svih klasa homotopije $[f]$ petlje $f \colon I \to X$ s početnom točkom x_0 označavamo s $\pi_1(X, x_0)$.

Propozicija 3.7 *$\pi_1(X, x_0)$ je grupa obzirom na produkt $[f] \cdot [g] = [f \cdot g]$*

Dokaz. Restrikcijom puteva samo na petlje s početnom točkom x_0 osigurana je dobra defincija produkta $f \cdot g$. Stoga je dobro definiran i produkt $[f] \cdot [g]$.

Definirajmo reparametrizaciju puta f kao kompoziciju $f\varphi$, pri čemu je $\varphi\colon I \to I$ bilo koje neprekidno preslikavanje takvo da je $\varphi(0) = 0$ i $\varphi(1) = 1$. Neka je za svaki t definirano preslikavanje

$$f\varphi_t(s) \coloneqq (1-t)\varphi(s) + ts.$$

Tada je $(f\varphi_t\colon t \in I)$ homotopija koja povezuje $f\varphi$ i f, pa slijedi $f\varphi \sim f$ tj. reparametrizacija čuva homotopnu klasu. Uočimo da je $\varphi(s) \le \varphi_t(s) \le s$ ili $\varphi(s) \ge \varphi_t(s) \ge s$, pa je kompozicija dobro definirana.
Neka su sada f, g, h putevi takvi da je $f(1) = g(0)$ i $g(1) = h(0)$. Tada su produkti $(f \cdot g) \cdot h$ i $f \cdot (g \cdot h)$ dobro definirani. Neka je $\varphi\colon I \to I$ definiran sa

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s, \text{ ako je } 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ s - \frac{1}{4}, \text{ ako je } \frac{1}{2} \le s \le \frac{3}{4} \\ 2s - 1, \text{ ako je } \frac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

Tvrdimo da je $((f \cdot g) \cdot h) \circ \varphi = f \cdot (g \cdot h)$, odnosno da je $f \cdot (g \cdot h)$ reparametrizacija od $(f \cdot g) \cdot h$. Prema definiciji produkta puteva vrijedi:

$$f \cdot (g \cdot h)\,(s) = \begin{cases} f(2s),\ 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g \cdot h(2s-1),\ \frac{1}{2} \le s \le 1 \end{cases} = \begin{cases} f(2s),\ 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g(4s-2),\ \frac{1}{2} \le s \le \frac{3}{4} \\ h(4s-3),\ \frac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

S druge strane je

$$((f \cdot g) \cdot h)\circ\varphi(s) = \begin{cases} f(4\varphi(s)),\ 0 \le s \le \frac{1}{4} \\ g(4\varphi(s)-1),\ \frac{1}{4} \le \varphi(s) \le \frac{1}{2} \\ h(2\varphi(s)-1),\ \frac{1}{2} \le \varphi(s) \le 1 \end{cases} = \begin{cases} f(2s),\ 0 \le s \le \frac{1}{2} \\ g(4s-2),\ \frac{1}{2} \le s \le \frac{3}{4} \\ h(4s-3),\ \frac{3}{4} \le s \le 1 \end{cases}$$

Dakle, $(f \cdot g) \cdot h \sim f \cdot (g \cdot h)$. Drugim riječima, produkt u $\pi_1(X, x_0)$ je asocijativna operacija.

Neka je $f\colon I \to X$ put i c konstantan put, $c(s) = f(1)$, za svaki $s \in I$. Pokažimo da je $[c]$ neutralni element. Kao u gornjem primjeru, uzmemo li

$$\varphi(s) = \begin{cases} 2s,\ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 1,\ \text{inače} \end{cases}$$

vidimo da je $f \cdot c$ reparametrizacija puta f, a time i $f \cdot c \sim f$. Slično, $c \cdot f$ je parametrizacija puta f uz

$$\varphi(s) = \begin{cases} 0,\ 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ 2s - 2,\ \text{inače} \end{cases}$$

Uzmimo sada da je f petlja s početnom točkom x_0. Pokazali smo da je $[f] \cdot [c] = [f] = [c] \cdot [f]$, pa je konstantan put $c(t) = x_0$ obostrana jedinica u $\pi_1(X, x_0)$.
Neka je f put s krajevima x_0 i x_1. Definiramo inverzni put $\overline{f}(s) := f(1-s)$. Tvrdimo da je $\left[\overline{f}\right]$ multiplikativni inverz, odnosno da su putevi $f \cdot \overline{f}$ i $\overline{f} \cdot f$ homotopni konstantnom putu. Za svaki $t \in [0, 1]$ neka je

$$h_t = f_t \cdot g_t,$$

pri čemu je f_t put koji se podudara sa f na intervalu $[0, 1-t]$ i konstantan je na $[1-t, t]$, a g_t inverzni put od f_t. Tada je $f_0 = f$, f_1 je put s konstantom x_0 i h_t je homotopija koja povezuje $f \cdot \overline{f}$ i $c \cdot \overline{c} = c$. Zamijenimo li f sa $\overline{f}$ slijedi $\overline{f} \cdot f \sim c$, pri čemu je c konstantan put s konstantom x_1. Konačno, ako je f petlja s početkom u x_0, slijedi da je $\left[\overline{f}\right]$ obostrani multiplikativni inverz za $[f]$ u $\pi_1(X, x_0)$. $\blacksquare$

Primjer 3.8 *Za konveksan skup $X \subseteq \mathbb{R}^n$ i $x_0 \in X$ vrijedi $\pi_1(X, x_0) = 0$, odnosno $\pi_1(X, x_0)$ je trivijalna grupa. Doista, ako su f_0 i f_1 petlje s početkom u x_0 onda su povezane linearnom homotopijom $f_t(s) = (1-t)f_0(s) + tf_1(s)$.*

3.1.3 Fundamentalna grupa kružnice

Općenito, nije lako pokazati da prostor ima netrivijalnu fundamentalnu grupu. Problematika leži u dokazivanju neegzistencije homotopije između dvije petlje. U ovom potpodglavlju odrediti ćemo fundamenatlnu grupu kružnice i pokazati da je $\pi_1(S^1) \cong \mathbb{Z}$.

Teorem 3.9 *Neka je* $\Phi\colon \mathbb{Z} \to \pi_1(S^1, (1,0))$ *preslikavanje definirano sa* $\Phi(n) = [w_n]$*, pri čemu je* $w_n\colon I \to S^1$ *petlja s početkom u (1,0) definirana sa*

$$w_n(s) = (\cos 2\pi ns, \sin 2\pi ns).$$

Tada je Φ *izomorfizam.*

Dokaz. Promotrimo preslikavanje $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(s) = (cos2\pi s, sin2\pi s)$. Preslikavanje p možemo vizualizirati geometrijski. Promotrimo ulaganje $\mathbb{R}$ u $\mathbb{R}^3$, pri čemu je slika ulaganja zavojnica parametrizirana sa $s \to (cos2\pi s, sin2\pi s, s)$. Tada je p kompozicija projekcije prostora $\mathbb{R}^3$ na prostor $\mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \to (x, y)$ i ulaganja $s \to (cos2\pi s, sin2\pi s, s)$. Uočimo da je petlja w_n jednaka kompozicij $p \circ \widetilde{w}_n$, pri čemu je $\widetilde{w}_n\colon I \to \mathbb{R}$ put

$$\widetilde{w}_n(s) = ns,$$

s početnom točkom 0 i krajnjom točkom n koji se "omota" oko zavojnice $|n|$ puta prema gore za $n > 0$, odnosno prema dolje za $n < 0$. Kažemo da je $\widetilde{w}_n$ **dizanje** od w_n ako je $w_n = p\widetilde{w}_n$.

Slika 3.7: Dekompozicija parametrizacije $w_n = p \circ \widetilde{w}_n$

Definicija preslikavanja Φ može se reformulirati na način da je vrijednost $\Phi(n)$ jednaka homotopnoj klasi petlje $p\widetilde{f}$, za bilo koji put $\widetilde{f}\colon [0,n] \to \mathbb{R}$. Takav put $\widetilde{f}$ homotopan je $\widetilde{w}_n$ uz linearnu homotopiju $(1-t)\widetilde{f} + tw_n$. Stoga je i $p\widetilde{f}$ homotopan $p\widetilde{w}_n = w_n$, pa je refolmuracija definicije korektna.

Pokažimo da je Φ homomorfizam. Neka je $\tau_m\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ translacija $\tau_m(x) = x + m$. Tada je $\widetilde{w}_m \cdot (\tau_m \widetilde{w}_n)\colon\ [0, m+n] \to \mathbb{R}$ put u $\mathbb{R}$, pa je $\Phi(m+n)$ homotopna klasa petlje $p(\widetilde{w}_m \cdot (\tau_m \widetilde{w}_n))$ u S^1. Ta je petlja jednaka $w_m \cdot w_n$, pa je $\Phi(m+n) = \Phi(m) \cdot \Phi(n)$. Dakle, Φ je homomorfizam.

Tvrdnja:

Neka je $F\colon Y \times I \to S^1$ neprekidno preslikavanje i $\widetilde{F}|_{Y\times\{0\}}$ dizanje od $F|_{Y\times\{0\}}$. Tada postoji jedinstveno dizanje $\widetilde{F} \times I \to \mathbb{R}$ od F koje proširuje $\widetilde{F}$.

Prvo uočimo da postoji skup L i otvoreni pokrivač $\{U_\alpha \colon \alpha \in L\}$ od S^1 takav da za svaki $\alpha \in L$ vrijedi da se $p^{-1}(U_\alpha)$ može rastaviti na disjunktnu uniju otvorenih skupova koje p homeomorfno preslikava na U_α. Doista, za $\{U_\alpha\}$ možemo uzeti dva otvorena kružna luka iz S^1 čija je unija S^1.

Da bismo pokazali tvrdnju, prvo ćemo konstuirati dizanje $\widetilde{F} \colon N \times I \to \mathbb{R}$ na nekoj okolini N točke $y_0 \in Y$. Budući da je F neprekidna, za svaku točku $(y_o, t) \in Y \times I$ postoji otvorena okolina $N_t \times \langle a_t, b_t \rangle$ takva da je $F(N_t \times \langle a_t, b_t \rangle) \subset U_\alpha$. Nadalje, budući da je $\{y_o\} \times I$ kompaktan, postoji $m \in \mathbb{N}$ i $0 = t_0, t_1, ..., t_m = 1$ i okolina N točke y_0 tako da za svaki $i \in \{0, ..., m-1\}$ vrijedi da je $F(N \times [t_i, t_{i+1}])$ sadržan u nekom U_α kojeg ćemo značavati sa U_i. Pretpostavimo sada da je $\widetilde{F}$ konstruiran na $N \times [0, t_i]$. Tada je $F(N \times [t_i, t_{i+1}]) \subset U_i$. Stoga postoji otvoreni skup $\widetilde{U_i} \subset \mathbb{R}$ kojeg p homeomorfno preslikava na U_i i sadrži točku $F(y_0, t_i)$. Zamijenimo li sada okolinu $N \times \{t_i\}$ okolinom $(N \times \{t_i\}) \cap (F|_{N \times \{t_i\}})^{-1}(\widetilde{U_i})$ možemo definirati $\widetilde{F}$ na $N \times [t_i, t_{i+1}]$ kao kompoziciju od F i $p^{-1} \colon U_i \to \widetilde{U_i}$. Dakle, možemo pronaći dovoljno malu okolinu N točke y_0 takva da je $\widetilde{F}(N \times \{t_i\})$ sadržana u U_i. Ponavljanjem istog postupka u konačno mnogo koraka dolazimo do dizanja $\widetilde{F} \colon N \times I \to \mathbb{R}$ za neku okolinu N od y_0.

Pokažimo jedinstvenost tvrdnje za slučaj kada je Y jednočlan. Tada možemo izostaviti Y iz oznaka. Pretpostavimo da su $\widetilde{F}$ i $\widetilde{F}'$ dva dizanja od $F \colon I \to S^1$ takva da je $\widetilde{F}(0) = \widetilde{F}'(0)$. Kao i u prethodnom koraku, odaberimo particiju $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m = 1$ od I takvu da za svaki i postoji U_i takav da je $F([t_i, t_{i+1}])$ sadržan u U_i. Pretpostavimo da se $\widetilde{F}$ i $\widetilde{F}'$ podudaraju na $[0, t_i]$. Budući da je $[t_i, t_{i+1}]$ povezan slijedi da je i $\widetilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ povezan. Stoga se $\widetilde{F}([t_i, t_{i+1}])$ nalazi u točno jednom od disjunktnih skupova $\widetilde{U_i}$ koje p homeomorfno projicira na U_i. Analogno, $\widetilde{F}'$ leži u jedinstvenom $\widetilde{U_i'}$. Kako je $\widetilde{F}(t_i) = \widetilde{F}'(t_i)$ sijedi $U_i = U_i'$. Konačno, budući da je p injekcija na $\widetilde{U_i}$ i $p\widetilde{F} = p\widetilde{F}'$ zaključujemo da je $\widetilde{F} = \widetilde{F}'$ na $[t_i, t_{i+1}]$. Dakle, funkcije su jednake na skupovima oblika $\{y\} \times I$, pa su jednake i na presjeku skupova oblika $N \times I$. Stoga je $\widetilde{F}$ dobro definirano dizanje na cijelom skupu $Y \times I$. odnosno $\widetilde{F}$ je neprekidno dizanje na svakom skupu $N \times I$ i jedinstveno na svakom

skupu oblika $\{y\} \times I$, pa je $\widetilde{F}$ neprekidno i jedinstveno dizanje of F. Time je tvrdnja dokazana.
Uočimo da tvrdnja implicira sljedeće činjenice:

(a) Za svaki put $f\colon I \to S^1$ s početkom u $x_0 \in S^1$ i svaki $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ postoji jedinstveno dizanje $\widetilde{f}\colon\ I \to \mathbb{R}$ s početkom u $\widetilde{x_0}$.

(b) Za svaku homotopiju $(f_t\colon t \in I)$ puteva $f_t\colon I \to S^1$ s početkom u $x_0 \in S^1$ i svaki $\widetilde{x_0} \in p^{-1}(x_0)$ postoji jedinstvena homotopija dizanja $\widetilde{f_t}\colon I \to \mathbb{R}$ puteva s početkom u $\widetilde{x_0}$.

Doista, tvrdnja a) poseban je slučaj dokazane tvrdnje kada je Y točka, a tvrdnju b) dobijemo korištenjem tvrdnje na $Y = I$ na sljedeći način: Homotopija $(f_t\colon t \in I)$ u b) inducira preslikavanje $F\colon I \times I \to S^1$, $F(s,t) = f_t(s)$. Jedinstveno dizanje $\widetilde{F}\colon I \times \{0\} \to \mathbb{R}$ slijedi iz a). Konačno, prema tvrdnji postoji jedinstveno dizanje $\widetilde{F}\colon I \times I \to \mathbb{R}$. Restrikicije $\widetilde{F}|_{\{0\}\times I}$ i $\widetilde{F}|_{\{1\}\times I}$ su putevi koji podižu konstantan put x_0, pa moraju biti konstantni putevi prema jedinstvenosti iz a). Dakle, $\widetilde{f_t}(s) = \widetilde{F}(s,t)$ je homotopija puteva i $\widetilde{f_t}$ je dizanje od f_t jer je $p\widetilde{F} = F$.

Preostalo je dokazati da je Φ surjekcija i injekcija. Neka je $f\colon I \to S^1$ petlja s početkom u $(1,0)$ reprezentant nekog elementa skupa $\pi_1(S^1)$. Prema a) postoji dizanje $\widetilde{f}$ s početkom u 0. Kraj puta $\widetilde{f}$ je neki cijeli broj n jer je $p\widetilde{f} = f(1) = (1,0)$ i $p^{-1}\{(1,0)\} = \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Stoga je, prema reformulaciji definicije od Φ, $\Phi(n) = \left[p\widetilde{f}\right] = [f]$. Dakle, Φ je surjekcija.
Neka su $m, n \in \mathbb{Z}$ takvi da je $\Phi(m) = \Phi(n)$, odnosno $w_m \sim w_n$. Neka je $(f_t\colon t \in I)$ homotopija koja povezuje $w_m = f_0$ i $w_n = f_1$. Prema b) je $(\widetilde{f_t}f\colon t \in I)$ dizanje homotopije i svaki $\widetilde{f_t}f$ je put s početkom u 0. Jedinstvenost iz a) povlači da je $\widetilde{f_0} = \widetilde{w_m}$ i $\widetilde{f_1} = \widetilde{w_n}$. Kako je $(\widetilde{f_t}\colon t \in I)$ homotopija

puteva, krajnja točka $f_t(1)$ ne ovisi o t. Za $t = 0$ te je točka jednaka m, a za $t = 1$ jednaka n. Stoga je $m = n$, to jest Φ je injekcija. ■

Sljedeća dva korolara direktne su posljedice dokazanog teorema. Iako nisu ključni za rješavanje problema podjele ogrlice, navodimo ih kao zanimljive i ilustrativne primjere inicijalno prekrivene povezanosti različitih grana matematike.

Korolar 3.10 *Polje kompleksnih brojeva je algebarski zatvoreno polje.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno. Tada postoji polinom $p(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + ... + a_n$ koji nema kompleksnih korijena. Za svaki $r \in [0, +\infty\rangle$ neka je

$$f_r(s) = \frac{\frac{p(re^{2\pi is})}{p(r)}}{|\frac{p(re^{2\pi is})}{p(r)}|}$$

Tada je za svaki $r > 0$ f_r petlja na jediničnoj kružnici $f_1 \subset \mathbb{C}$ s početkom u 1. Dakle, $(f_r\colon r > 0)$ je homotopija petlji s početkom u 1. Budući da je f_0 trivijalna petlja slijedi da je za svaki $r > 0$ klasa $[f_r] \in \pi_1(S^1)$ nula. Neka je $r > |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|$ i $r > 1$. Tada za $z \in \mathbb{C}$ takav da je $|z| = r$ vrijedi:

$$|z^n| = r^n = r \cdot r^{n-1} > (|a_1| + |a_2| + ... + |a_n|) \cdot |z^{n-1}| \geq |a_1 z^{n-1} + ... + a_n|$$

Stoga polinom $p_t(z) = z^n + t(a_1 z^{n-1} + ... + a_n)$ nema kompleksne korijene na kružnici radijusa $|z| = r$ za $0 \leq t \leq 1$. Definirajmo sada $f_{r,t}$ kao i f_r zamjenom polinoma p polinomom p_t, odnosno:

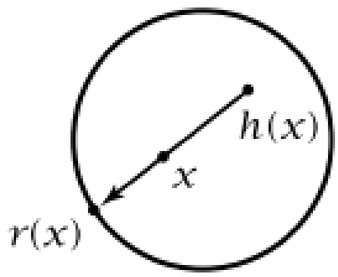
$$f_{r,t}(s) = \frac{\frac{p_t(re^{2\pi is})}{p_t(r)}}{|\frac{p_t(re^{2\pi is})}{p_t(r)}|}$$

Tada je $(f_{r,1-t}\colon t \in [0,1])$ homotopija koja povezuje petlju f_r i petlju $w_n(s) = e^{2\pi ins}$. Prema Teoremu 3.9 $w_n = n \cdot g$, pri čemu je g generator beskonačne cikličke grupe $\pi_1(S^1)$. Pokazali smo da je $[w_n] = [f_r] = 0$, pa je $n = 0$.

Drugim riječima, jedini polinomi u $\mathbb{C}$ koji nemaju korijena su konstantni polinomi. ■

Korolar 3.11 (Brouwerov teorem o fiksnoj točki, dvodimenzionalna verzija) *Neka je $h\colon D^2 \to D^2$ neprekidno preslikavanje diska $D^2 = \{x \in \mathbb{R}^2 \colon |x| \leq 1\}$. Tada postoji fiksna točka preslikavanja h.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, to jest da za svaki $x \in D^2$ vrijedi $h(x) \neq x$. Definirajmo preslikavanje $r\colon D^2 \to S^1$, $r(x) = y$, pri čemu je y presjek polupravca s početkom u $h(x)$ koji sadrži x.



Slika 3.8: Preslikavanje r

Budući da h po pretpostavci nema fiksnih točaka, r je dobro definirano i neprekidno preslikavanje. Nadalje, kako za svaki $x \in S^1$ vrijedi $r(x) = x$, slijedi da je r retrakcija D^2 na S^1. Neka je f_0 proizvoljna petlja u S^1 s početnom točkom x_0. Uočimo da je linearna homotopija $f_t(s) = (1-t)f_0(s) + tx_0$ homotopija u D^2 koja povezuje f_0 s konstantnom petljom. Stoga je kompozicija $r \circ f_t$ homotopija u S^1 koja povezuje $r \circ f_0$ i konstantnu petlju x_0. Međutim, to je u kontradikciji s činjenicom da je $\pi_1(S^1)$ netrivijalna. Dakle, h ima fiksnu točku. ■

3.2 Borsuk-Ulam teorem

U prethodnom poglavlju definirali smo fundamentalnu grupu kružnice i pokazali da je ona izomorfna $\mathbb{Z}$. U ovom poglavlju dokazati ćemo još jednu izravnu posljedicu, takozvani Borsuk-Ulam teorem i primijeniti ga na rješavanje problema podjele ogrlice.

Lema 3.12 *Neka je $p\colon \mathbb{R} \to S^1$, $p(s) = e^{2\pi is}$ i $z \in S^1$. Tada za $t \in p^{-1}(z)$, $u \in p^{-1}(-z)$ postoji $q \in \mathbb{N}$, takav da je $|t-u| = \frac{q}{2}$ i q je neparan.*

Dokaz. Neka je $x = t - u$. Tada je:

$$2\pi ix = 2\pi i(t-u) \iff e^{2\pi ix} = e^{2\pi i(t-u)} = \frac{e^{2\pi it}}{e^{2\pi iu}} = \frac{p(t)}{p(u)} = \frac{z}{-z} = -1 \iff$$
$$\iff ln(e^{2\pi ix}) = ln(-1) = \pi i(2n+1),$$

pri čemu zadnja jednakost slijedi iz Eulerovog identiteta. Dakle,

$$2\pi ix = \pi i(2n+1) \Rightarrow x = \tfrac{q}{2}, \text{ za neki } q \in \mathbb{Z} \text{ neparan.}$$

■

Teorem 3.13 (Borsuk-Ulam teorem za S^2) *Neka je $f\colon S^2 \to \mathbb{R}^2$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji $x \in S^2$ takav da je $f(x) = f(-x)$.*

Dokaz. Pretpostavimo suprotno, tj. $\forall x \in S^2$ vrijedi $f(x) \neq f(-x)$. tada je dobro definirano preslikavanje $g\colon S^2 \to S^1$,

$$g(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{|f(x) - f(-x)|}.$$

Neka je η petlja u S^2, $\eta(s) = (\cos 2\pi s, \sin 2\pi s, 0)$. Očito je η nulhomotopna u S^2 (može se retraktirati u bilo točku $(x, y, 0) \in S^2$). Neka je $h\colon I \to S^1$, $h := g \circ \eta$.

Uočimo da je $\eta(s + \frac{1}{2}) = (\cos(2\pi(s + \frac{1}{2})), \sin(2\pi(s + \frac{1}{2})), 0) = -\eta(s)$.

Nadalje, budući da je $g(-x) = -g(x)$, vrijedi i $h(s + \frac{1}{2}) = -h(s)$. Iz prethodne leme slijedi da je $\widetilde{h}(s+\frac{1}{2}) = \widetilde{h}(s)+\frac{q}{2}$, za neki $q \in \mathbb{Z}$ neparan. Direktnim rješavanjem te jednadžbe vidimo da q ne ovisi o $s \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, odnosno q je konstanta. Sada je:

$$\widetilde{h}(1) = \widetilde{h}(\tfrac{1}{2}) + \tfrac{q}{2} = \widetilde{h}(0) + q.$$

Stoga je h homotopan putu $q \cdot s$, pri čemu je s generator grupe $\pi_1(S^1)$. Kako je q neparan, h nije nulhomotopan. S druge strane, kako je η nulhomotopna petlja, to je i $h = g \circ \eta$, što je kontradikcija. Dakle, postoji $x \in S^1$ takav da je $f(x) = f(-x)$. ■

Ilustrativan primjer primjene Borsuk-Ulam teorema je sljedeći:
Zamislimo da je Zemlja sfernog oblika i postavimo koordinatni sustav sa središtem u središtu Zemlje. Tada svakoj točki na Zemljinoj sferi možemo pridružiti temperaturu i tlak zraka, uz pretpostavku da su ti parametri neprekidni. Tada postoje dvije dijametralno suprotne točke na Zemlji s jednakim temperaturama i jednakim tlakom zraka.
Analogon Borsuk-Ulam teorema vrijedi i u višim dimenzijama. Ovdje ćemo ga iskazati bez dokaza.

Teorem 3.14 (Borsuk-Ulam teorem) *Neka je $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ neprekidno preslikavanje. Tada postoji $x \in S^n$ takav da je $f(x) = f(-x)$.*

Korolar 3.15 *Neka je $f\colon S^n \to \mathbb{R}^n$ neprekidno preslikavanje takvo da je $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in S^n$. Tada postoji $x \in S^n$ takav da je $f(x) = 0$.*

Dokaz. Prema Borsuk-Ulam teoremu postoji $x \in S^n$ takav da je $f(x) = f(-x)$. Tada je, prema pretpostavci teorema $f(x) = f(-x) = -f(x)$, iz čega slijedi $f(x) = 0$. ■

Promotrimo sada kako Borsuk-Ulam teorem implicira verziju Teorema 1.2 za $k = 2$.

Propozicija 3.16 *Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $B\colon I \to \{1, ..., m\}$ proizvoljno m-bojenje intervala I. Tada postoji pravedna 2-podjela bojenja B reda veličine m.*

Dokaz. Neka je $m \in \mathbb{N}$ i $B\colon I \to \{1, ..., m\}$ proizvoljno m-bojanje intervala I. Neka je $\overline{x} = (x_1, ..., x_m, x_{m+1}) \in S^m$ proizvoljna točka. Neka je $\langle y \rangle = (y_0, ..., y_{m+1})$, pri čemu je $y_0 = 0$ i

$$y_j = \sum_{n=1}^{j} x_j^2,\ j \in \{1, ..., m\}.$$

Neka je za svaki $j \in \{1, ..., m\}$

$$f_j(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{m+1} sign(x_i)\lambda(B^{-1}(j) \cap [y_{i-1}, y_i\rangle),$$

pri čemu je λ Lebesgueova mjera na I. Tada je dobro definirano preslikavanje $f\colon S^m \to \mathbb{R}^m$, $f(\overline{x}) = (f_1(\overline{x}), ..., f_m(\overline{x}))$. Očito je preslikavanje f neprekidno i za svaki $\overline{x} \in S^m$ vrijedi $f(\overline{x}) = -f(-\overline{x})$. Prema korolaru 3.15 postoji $x' = (x'_1, ..., x'_m) \in S^m$ takav da je $f(x') = 0$. Stavimo $F_1 = \bigcup_{i=1}^{k+1} \{[y_{i-1}, y_i\rangle : sign(x'_i) = +1\}$ i $F_2 = I \setminus F_1$. Tada je $\lambda(B^{-1}(i) \cap F_1) = \lambda(B^{-1}(i) \cap F_2)$, pa je $\lambda(B^{-1}(i) \cap F_1) = \frac{1}{2}\lambda(B^{-1}(i)) = \lambda(B^{-1}(i) \cap F_2)$ Slijedi da su $y_1, ..., y_m$ točke rezanja i $\{F_1, F_2\}$ tražena particija. ■

Poglavlje 4

Diskretni pristup

4.1 Direktni dokazi nekih posebnih slučajeva

U prethodnom poglavlju dokazali smo da je pravedna podjela ogrlice s perlicama u t različitih boja između dvoje ljudi uvijek moguća u najviše t rezanja. U ovom poglavlju također ćemo promatrati posebne slučajeve Teorema 1.1. Cilj nam je, uz neke osnovne pretpostavke, dokazati da postoji pravedna q-podjela t-obojene ogrlice reda veličine manjeg ili jednakog od $t(q-1)$ u sljedeća tri slučaja:

1. Ako je broj boja manji ili jednak 2, a broj ljudi proizvoljan.

2. Ako je broj perlica svake boje jednak, a broj ljudi proizvoljan.

3. Ako je broj boja jednak tri, a broj ljudi jednak dva.

Uočimo da je tvrdnja 3) poseban slučaj Propozicije 3.16. Međutim, tvrdnju 3) ćemo u ovom poglavlju dokazati primjenom kombinatornih metoda i teorije grafova.

Propozicija 4.1 *Neka je $N = a_1, ..., a_n$ 2-obojena ogrlica i neka je $q \in \mathbb{N}$ takav da $q \mid m_1(N')$ i $q \mid m_2(N')$. Tada postoji pravedna q-podjela $N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_q$ ogrlice N reda veličine manjeg ili jednakog od $2(q-1)$.*

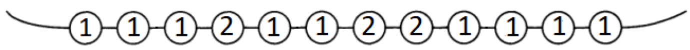
Dokaz. Tvrdnju ćemo dokazati indukcijom po q. Ako je $q = 1$, tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo sada da za $q-1 \in \mathbb{N}$ i za svaku 2-obojenu ogrlicu N za koju vrijedi $q-1 \mid m_1(N'), m_2(N')$, postoji pravedna $(q-1)$-podjela reda veličine manjeg ili jednakog od $2(q-2)$. Neka je sada N proizvoljna 2-obojena ogrlica takva da $q \mid m_1(N'), m_2(N')$ i neka je $b_1 = \frac{m_1(N')}{q}$ i $b_2 = \frac{m_2(N')}{q}$. Neka je za svaki $i \in 1, ..., q$ definirana ogrlica

$$N_i' = a_{\frac{(i-1)n}{q}+1}, a_{\frac{(i-1)n}{q}+2}, ..., a_{\frac{in}{q}}.$$

Drugim riječima, podijelili smo ogrlicu N na q disjunktnih podogrlica koje se sastoje od $\frac{n}{q}$ uzastopnih elemenata ogrlice N.
Pretpostavimo da za neki $i \in \{1, ..., q\}$ vrijedi $m_1(N_i') = b_1$ i $m_2(N_i') = b_2$. Promotrimo ogrlicu $N^* = N_1', N_2', ..., N_{i-1}', N_{i+1}', ..., N_q'$. Tada, prema pretpostavci indukcije, postoji pravedna $(q-1)$-podjela $N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_{q-1}$ ogrlice N^* s redom veličine manjim ili jednakim od $2(q-2)$. Budući da ogrlicu N_i možemo dobiti uz dva rezanja od N, slijedi da je $N_i \cup N_1 \cup ... \cup N_{q-1}$ pravedna q-podjela ogrlice N reda veličine manjeg ili jednakog od $2 + 2(q-2) = 2(q-1)$.
Pretpostavimo sada da ne postoji $i \in \{1, ..., q\}$ takav da je $m_1(N_i') = b_1$ i $m_2(N_i') = b_2$. Tada, bez smanjenja općenitosti, možemo pretpostaviti da postoje $m, k \in \{1, ..., n-(b_1+b_2)\}$, $m < k$ takvi da za podogrlice $M^+ = a_m, ..., a_{m+b_1+b_2-1}$ i $M^- = a_k, ..., a_{k+b_1+b_2-1}$ vrijedi $m_1(M^+) > b_1$ i $m_1(M^-) < b_1$. Stoga, prema teoremu o međuvrijednosti, postoji podogrlica $O = a_x, ..., a_{x+b_1+b_2-1}$, $m < x < k$ takva da je $m_1(O) = b_1$, a time i $m_2(O) = b_2$. Sada, koristeći isti argument kao i u prvom slučaju, možemo zaključiti da postoji pravedna q-podjela ogrlice N reda veličine manjeg ili jednakog od $2(q-1)$. ■

Ilustrirajmo ovaj dokaz kroz sljedeća dva primjera.

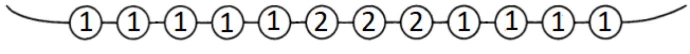
Primjer 4.2 *Neka je* $N = 1,1,1,2,1,1,2,2,1,1,1,1$ *ogrlica na slici 4.1..*



Slika 4.1: Ogrlica N

Cilj nam je dokazati egzistenciju pravedne 3*-podjele reda veličine manjeg ili jednakog od* $4 = 2(q-1)$*, uz pretpostavku da za svaku ogrlicu* $\overline{N}$ *za koju vrijedi* $2 \mid m_1(\overline{N}'), m_2(\overline{N}')$*, postoji pravedna* 2*-podjela reda veličine manjeg ili jednakog od* 2*.*
Prema oznakama iz dokaza propozicije 4.1, definirane su ogrlice N_1', N_2' *i* N_3' *na sljedeći način:* $N_1' = 1,1,1,2$*,* $N_2' = 1,1,2,2$*,* $N_3' = 1,1,1,1$ *i definirani su prirodni brojevi* $b_1 = \frac{m_1(N')}{3} = 3$ *i* $b_2 = \frac{m_2(N')}{3} = 1$*. Tada je* $m_1(N_1') = 3$ *i* $m_2(N_1') = 1$*. Općenito, svaku od podogrlica* N_i'*,* $i \in \{1,2,3\}$ *možemo dobiti uz ne više od dva rezanja ogrlice* N*, pa tako i ogrlicu* N_1*. Promotrimo ogrlicu* $N^* = N_2', N_3' = 1,1,2,2,1,1,1,1$*. Tada, prema pretpostavci indukcije, možemo zaključiti da postoji pravedna* 2*-podjela* $F_1 \cup F_2$ *reda veličine manjeg ili jednakog od 2. Tada je* $N_1 \cup F_1 \cup F_2$ *pravedna* 3*-podjela ogrlice* N *reda veličine manjeg ili jednakog od* $2+2=4=2(q-1)$*.*

Primjer 4.3 *Neka je* $N = 1,1,1,1,1,2,2,2,1,1,1,1$ *ogrlica na slici 4.2. Analogno kao u prethodno primjeru, definirane su ogrlice* $N_1' = 1,1,1,1,$



Slika 4.2: Ogrlica N

$N_2' = 1,2,2,2$ i $N_3' = 1,1,1,1$ i prirodni brojevi $b_1 = 3$, $b_2 = 1$. Tada ne postoji $i \in \{1,2,3\}$ za kojeg je $m_1(N_i') = b_1$ i $m_2(N_i') = b_2$. Za ogrlicu $M^+ = N_1' = a_1, a_2, a_3, a_4 = 1,1,1,1$ vrijedi $m_1(M^+) > b_1$ i $m_2(M^+) < b_2$, a za ogrlicu $M^- = N_2' = 1,1,2,2$ vrijedi $m_1(M^-) < b_1$ i $m_2(M^-) > b_2$. Sada, promatrajući redom ogrlice $O_1 = N_1'$, $O_2 = a_2, a_3, a_4, a_5$, $O_3 = a_3, a_4, a_5, a_6$, $O_4 = a_4, a_5, a_6, a_7$ i $O_5 = N_2'$ uočavamo da je $|m_i(O_j) - m_i(O_{j+1})| \leq 1$ za $i \in \{1,2\}$, $j \in \{1,2,3,4\}$. Dakle, broj pojavljivanja k-te boje, $k \in \{1,2\}$ u susjednim ogrlicama O_i, $i = 1,2,3,4$, razlikuje se za najviše 1. Kako je $m_1(O_1) > b_1$ i $m_1(O_1) < b_1$, slijedi da postoji $i \in 2,3,4$ takav da je $m_1(O_i) = b_1$, a time i $m_2(O_i) = b_2$. Doista, to je ogrlica $O_3 = a_3, a_4, a_5, a_6 = 1,1,1,2$. Sada, za ogrlicu $N^* = a_1, a_2, a_7, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12} = 1,1,2,2,1,1,1,1$, prema pretpostavci indukcije, postoji pravedna 2-podjela $F_1 \cup F_2$ reda veličine manjeg ili jednakog od 2. Ogrlicu O_3 možemo dobiti uz dva rezanja od N, pa je $O_3 \cup F_1 \cup F_2$ pravedna 3-podjela reda veličine manjeg ili jednakog od $4 = 2(q-1)$

Propozicija 4.4 *Neka su $n, t, q \in \mathbb{N}$ i neka je $N = a_1, ..., a_n$ t-obojena ogrlica za koju je $m_1(N') = m_2(N') = ... = m_t(N') = q$ i $q \cdot t = n$. Tada postoji pravedna q-podjela $N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_q$ ogrlice N reda veličine manjeg ili jednakog od $t(q-1)$.*

Dokaz. Skupove $N_1, N_2, ..., N_q$ konstruirat ćemo na sljedeći način. Promatramo elemente niza $a_1, ..., a_n$ i uvijek imamo fiksirani skup N_k, počevši od $N_1 = \{a_1\}$, pri čemu je $N_2 = N_3 = N_4 = \emptyset$. Ako promatramo element a_m, provjeravamo je li $a_m \in N_k$.

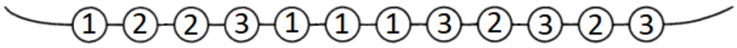
Ako je $a_m \in N_k$, fiksiramo skup N_{k+1} ako je $k < q$, odnosno fiksiramo skup N_1 ako je $k = q$ i ponovno promatramo element a_m, uz novi fiksirani skup.

Ako vrijedi $a_m \notin N_k$, skup N_k zamijenimo skupom $N_k \cup \{a_m\}$ i promatramo element a_{m+1}.

Ovaj algoritam osigurava particiju $N_1 \cup ... \cup N_q$ od N i red veličine te particije jednak je broju promjena fiksiranog skupa. Broj promjena fiksiranog skupa manji je ili jednak razlici od n i broja prvog pojavljivanja svake boje. Dakle, red veličine particije $N_1 \cup N_2 \cup ... \cup N_q$ manji je ili jednak od $n - t = qt - t = t(q-1)$. ■

Promotrimo algoritam iz prethodnog dokaza na sljedećem primjeru:

Primjer 4.5 *Neka je* $N = 1, 2, 2, 3, 1, 1, 1, 3, 2, 3, 2, 3$ *ogrlica sa slike 4.3:*



Slika 4.3: Ogrlica N

Stavimo $N_1 = \{a_1\} = \{1\}$, $N_2 = N_3 = N_4 = \emptyset$. *Fiksirajmo skup* N_1.

Promatramo element $a_2 = 2$. *Budući da* $a_2 \notin N_1$, *skup* N_1 *zamijenimo skupom* $N_1 \cup \{a_2\} = \{1, 2\}$, *a ostale skupove ne mijenjamo, pa je* $N_2 = N_3 = N_4 = \emptyset$.

Promatrajmo sada element $a_3 = 2$. *Budući da je* $a_3 \in N_1$, *fiksirajmo skup* N_2. *Budući da* $a_3 \notin N_2$ *skup* N_2 *zamijenimo skupom* $N_2 \cup \{a_3\}$, *pa imamo* $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{2\}$ $N_3 = \emptyset$ $N_4 = \emptyset$.

Nadalje, promatrajmo element $a_4 = 3$. *Fiksirani skup je* N_2, *pa kako* $a_3 \notin N_2$, *skup* N_2 *zamijeniti ćemo skupom* $N_2 \cup \{a_3\} = \{2, 3\}$. *Analagno nastavljamo postupak i u sljedećim koracima dobivamo redom:*

1. *(Promatramo* a_5*):* $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{1, 2, 3\}$, $N_3 = \emptyset$, $N_4 = \emptyset$

2. *(Promatramo* a_6*):* $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{1, 2, 3\}$, $N_3 = \{1\}$, $N_4 = \emptyset$

3. *(Promatramo* a_7*):* $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{1, 2, 3\}$, $N_3 = \{1\}$, $N_4 = \{1\}$

4. *(Promatramo* a_8*):* $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{1, 2, 3\}$, $N_3 = \{1\}$, $N_4 = \{1, 3\}$

5. *(Promatramo a_9):*

   $N_1 = \{1, 2\}$, $N_2 = \{1, 2, 3\}$, $N_3 = \{1\}$, $N_4 = \{1, 2, 3\}$

6. *(Promatramo a_{10}):*

   $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{1, 2, 3\}$, $N_3 = \{1\}$, $N_4 = \{1, 2, 3\}$

7. *(Promatramo a_{11}):*

   $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{1, 2, 3\}$, $N_3 = \{1, 2\}$, $N_4 = \{1, 2, 3\}$

8. *(Promatramo a_{12}):*

   $N_1 = \{1, 2, 3\}$, $N_2 = \{1, 2, 3\}$, $N_3 = \{1, 2, 3\}$, $N_4 = \{1, 2, 3\}$

Broj promjena fiksiranog skupa u ovom slučaju je 5, što znači da možemo pronaći pravednu 4-podjelu reda veličine manjeg ili jednakog od $5 < 3(4-1) = t(q-1)$.

Propozicija 4.6 *Neka je $N = a_1, ..., a_n$ 3-obojena ogrlica takva da je $m_i(N')$ paran broj za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$. Tada postoji pravedna 2-podjela $N_1 \cup N_2$ ogrlice N reda veličine manjeg ili jednakog od 3.*

Dokaz. Definirajmo 3-bojenje $B\colon I \to \{1, 2, 3\}$ intervala $I = [0, n\rangle$ na sljedeći način:

$$B(x) = a_i, \text{ za } i \in \mathbb{N} \text{ takav da vrijedi } x \in [i-1, i\rangle.$$

Intuitivno, podijelili smo interval na n jednakih dijelova i za svaki $k \in \{1, ..., n\}$, element a_k ogrlice N identificirali smo s intervalom $[k-1, k\rangle$. Pokažimo da postoji pravedna 2-podjela 3-obojenog intervala I. Za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$ definirajmo preslikavanje $\Phi_i\colon \mathcal{P}(I) \to \mathbb{R}$,

$$\Phi_i(S) = \int\limits_S \mathbb{1}_i(u)du, \text{ pri čemu je } \mathbb{1}_i(u) = \begin{cases} 1, \text{ako je } B(u) = i \\ 0, \text{inače} \end{cases}.$$

Neka je za svaki $i \in \{1, 2, 3\}$, $b_i = \frac{\Phi_i(I)}{2}$.

Ako postoji $x \in I$ takav da je $\Phi_i(\left\langle x, x+\frac{n}{2}\right\rangle) = b_i$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$, onda je za $F_1 = [0,x\rangle \cup \left[x+\frac{n}{2}, n\right\rangle$ i $F_2 = \left[x, x+\frac{n}{2}\right\rangle$, $F_1 \cup F_2$ pravedna 2-podjela 3-obojenog intervala I reda veličine 2.
Stoga, pretpostavimo da ne postoji $x \in I$ takav da je $\Phi_i(\left\langle x, x+\frac{n}{2}\right\rangle) = b_i$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\Phi_1\left[0, \frac{n}{2}\right\rangle > b_1$. Navedene pretpostavke nazivamo početnim pretpostavkama.
Neka je $\Phi_{2'}\colon \mathcal{P}(I) \to \mathbb{R}$ preslikavanje definirano s $\Phi_{2'} = \Phi_2 + \Phi_3$.
Neka je A skup svih uređenih trojki (c_1, c_2, c_3) za koje vrijedi sljedeće:

1. $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{N}_0$
2. $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq n$
3. $\Phi_1([0, c_1\rangle \cup \langle c_2, c_3]) = b_1$ i $\Phi_{2'}([0, c_1\rangle \cup \langle c_2, c_3]) = b_2 + b_3$.

Definirajmo graf G sa skupom vrhova A, pri čemu su vrhovi (x_1, x_2, x_3) i (y_1, y_2, y_3) susjedni u G ako i samo ako je $|x_i - y_i| \leq 1$, za svaki $i \in \{1,2,3\}$.
Uočimo da svaki vrh (c_1, c_2, c_3) u G generira particiju $F_1 \cup F_2$ intervala I, pri čemu je $F_1 = ([0, c_1\rangle \cup [c_2, c_3\rangle)$ i $F_2 = I \setminus F_1$, za koju je $\Phi_1(F_1) = \Phi_1(F_2) = b_1$. Nadalje, iz početnih pretpostavki slijedi da ne postoji vrh u G oblika $(0, c_2, n)$. Particiju $F_1 \cup F_2$ nazivamo **particija generirana vrhom** (c_1, c_2, c_3). Dokažimo sljedeću tvdnju.
Tvrdnja Uz početne pretpostavke za graf G vrijedi sljedeće:

1. Za vrhove (c_1, c_2, c_3) neparnog stupnja u grafu G vrijedi ili $c_1 = 0$ ili $c_3 = n$.
2. Broj vrhova neparnog stupnja grafa G za koje je $c_1 = 0$ je neparan i jednak je broju vrhova neparnog stupnja grafa G za koje je $c_3 = n$.

U dokazu trdnje, razlikovati ćemo vrhove (c_1, c_2, c_3) u ovisnosti o tome koje su boje intervali $[c_i - 1, c_i\rangle$, te $[c_i, c_{i+1}\rangle$ za $i = 1, 2, 3$. Na primjerima reprezentacije intervala ispod, gledajući s lijeva na desno, prva oznaka $|$ predstavlja c_1, druga c_2 i treća c_3. Broj lijevo od vrha c_i predstavlja boju intervala $[c_i - 1, c_i\rangle$, a desno od c_i boju intervala $[c_i, c_i + 1\rangle$, uz oznaku da broj $2'$ označava da je interval boje 2 ili boje 3. Primjerice, neka je vrh (x_1, x_2, x_3) oblika:

$$...1|2'...2'|1...1|2'...$$

Susjedni vrhovi vrha (x_1, x_2, x_3) su vrhovi koje možemo dobiti transformiranjem gornjeg oblika uz pomicanje $|$ za jedan lijevo ili desno, ali da zadržimo jednak broj boja tipa 1 i tipa $2'$ u svakom od elemenata u generiranoj particiji. Vidimo da je (x_1, x_2, x_3) stupnja 0 jer niti jedno pomicanje od $|$ ne možemo kompenzirati drugim pomicanjem od $|$ da sačuvamo jednakost boja tipa 1 i $2'$ u elementima generirane particije.
Promotrimo još jedan primjer. Neka je sada (x_1, x_2, x_3) vrh oblika

$$|1...1|1...1|2'...$$

Tada vrh (x_1, x_2, x_3) ima točno tri susjedna vrha i oni su oblika:

$$|1...|11...|12'...,$$
$$1|...11|...1|2'...,$$
$$1|...1|1...|12'...$$

Drugim riječima, ako je (x_1, x_2, x_3) vrh u grafu G sa svojstvom da je $x_1 = 0$, $B(x_2 - 1) = B(x_2) = B(x_3 - 1) = 1$ i $B(x_3) \in \{2, 3\}$, tada je on stupnja 3 i njegovi susjedni vrhovi u grafu G su $(x_1, x_2 - 1, x_3 - 1)$, $(x_1 + 1, x_2 + 1, x_3)$ i $(x_1 + 1, x_2, x_3 - 1)$.
Neka je sada (c_1, c_2, c_3) proizvoljan vrh i odredimo stupanj vrha u ovisnosti o bojama susjednih intervala točaka c_1, c_2 i c_3. Razlikujemo tri slučaja:

1. $c_1 = 0$.

   Tada je (c_1, c_2, c_3) oblika $|a...b|c...d|e...$, $a, b, c, d, e \in \{1, 2'\}$, pri čemu za $x \in \{a, b, c, d, e\}$ jednakost $x = 2'$ identificiramo s $x \in \{2, 3\}$ i za $x, y \in \{2, 3\}$ pišemo $x = y$. Tada lako vidimo da vrijedi sljedeće:

   - Ako je $b \neq e$ i $c = d$, stupanj vrha (c_1, c_2, c_3) jednak je 1 ako je $a \neq c$, odnosno 3 ako je $a = c$.
   - Ako je $b \neq e$ i $c \neq d$, stupanj vrha (c_1, c_2, c_3) jednak je 1 ako je $b = c$, odnosno 3 ako je $b \neq c$.
   - Ako je $b = e$ i $c = d$, stupanj vrha (c_1, c_2, c_3) jednak je 4 ako je $a = b = c$, 2 ako je $a \neq b$ i 0 ako je $a = b$ i $b \neq c$.
   - Ako je $b = e$ i $c \neq d$, stupanj vrha (c_1, c_2, c_3) jednak je 2.

2. $c_3 = n$.

   Ovaj slučaj analogan je prethodnom.

3. $c_1 > 0$ i $c_3 < n$.

   Razlikujemo sljedeće podslučajeve i izravnom provjerom vidimo da vrijedi:

   - Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika $...1|1...1|1...1|1...$, stupanj vrha je 6.
   - Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika $...1|1...1|1...1|2'...$, stupanj vrha je 4.
   - Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika $...1|1...1|1...2'|1...$, stupanj vrha je 4
   - Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika $...1|1...1|1...2'|2'...$, stupanj vrha je 2.
   - Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika $...1|1...1|2'...2'|1...$, stupanj vrha je 2.
   - Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika $...1|1...2'|1...1|2'...$, stupanj vrha je 2.
   - Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika $...1|1...1|2'...2'|2'...$, stupanj vrha je 2.
   - Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika $...1|1...2'|1...2'|2'...$, stupanj vrha je 2.

- Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika ...1|2′...2′|1...1|2′..., stupanj vrha je 0.
- Ako je (c_1, c_2, c_3) oblika ...1|2′...1|2′...2′|1..., stupanj vrha je 4.

Ostale podslučajeve dobijemo analogno, zamjenom 1 i 2′.

Iz navedenog slijedi da za vrh (c_1, c_2, c_3) neparnog stupnja u G, nužno vrijedi $c_1 = 0$ ili $c_3 = n$. Time smo dokazali prvu tvrdnju leme. Primjetimo da je vrh (c_1, c_2, c_3) u G neparnog stupnja ako i samo ako je $b \neq e$. Pokažimo sada da je broj vrhova neparnog stupnja za koje je $c_1 = 0$ neparan.
Neka je $\varepsilon > 0$ dovoljno mali. Neka je (c_1, c_2, c_3) vrh u G takav da je $c_1 = 0$ i definirajmo α, $\beta \in \mathbb{R}$ na sljedeći način:

$$\alpha := \frac{\Phi_1(\langle c_2 - 1, c_3 - 1 + \varepsilon\rangle)}{b_1 + b_2 + b_3 + \varepsilon} - \frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3},$$

$$\beta := \frac{\Phi_1(\langle c_2, c_3 + \varepsilon\rangle)}{b_1 + b_2 + b_3 + \varepsilon} - \frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3}.$$

Vrh (c_1, c_2, c_3) je oblika $|a...b|c...d|e...$. Tada vrijedi:

$$\alpha = \frac{b_1 + \mathbb{1}_{\{b=1\}} - (1-\varepsilon)\mathbb{1}_{\{d=1\}}}{b_1 + b_2 + b_3 + \varepsilon} - \frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3}$$

i

$$\beta = \frac{b_1 + \varepsilon\mathbb{1}_{\{e=1\}}}{b_1 + b_2 - b_3 + \varepsilon} - \frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3}.$$

Tvrdimo da su α i β suprotnih predznaka ako i samo ako je $b \neq e$. Vrijedi sljedeće:

1. Ako je $b = e = d = 2'$ onda je $\alpha < 0$ i $\beta < 0$.
2. Ako je $b = e = 2'$ i $d = 1$ onda je $\alpha < 0$ i $\beta < 0$.
3. Ako je $b = e = d = 1$ onda je $\alpha > 0$ i $\beta > 0$.

4. Ako je $b = e = 1$ i $d = 2'$ onda je $\alpha > 0$ i $\beta > 0$.

5. Ako je $b = 1$ i $e = d = 2'$ onda je $\alpha > 0$ i $\beta < 0$.

6. Ako je $b = d = 1$ i $e = 2'$ onda je $\alpha > 0$ i $\beta < 0$.

7. Ako je $b = d = 2'$ i $e = 1$ onda je $\alpha < 0$ i $\beta > 0$.

8. Ako je $b = 2'$ i $e = d = 1$ onda je $\alpha < 0$ i $\beta > 0$.

Konačno, zaključujemo da su α i β različitih predznaka ako i samo ako je $b \neq e$. Dakle, (c_1, c_2, c_3) je neparnog stupnja ako i samo ako su α i β različitih predznaka. Sada, koristeći isti argument kao i u dokazu Propozicije 4.1, vidimo da je broj promjene predznaka realnog broja

$$\frac{\Phi_1(\langle u, u + b_1 + b_2 + b_3 + \varepsilon\rangle)}{b_1 + b_2 + b_3 + \varepsilon} - \frac{b_1}{b_1 + b_2 + b_3},$$

kada puštamo u od 0 do $b_1 + b_2 + b_3$, neparan. Analogno možemo zaključiti da je broj vrhova neparnog stupnja za koje je $c_3 = n$ neparan. Nadalje, vrijedi i

$$deg(0, c_2, c_3) \text{ je neparan } \iff deg(c_2, c_3, n) \text{ je neparan.}$$

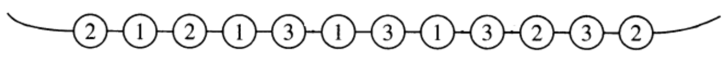
Time je tvrdnja dokazana.

Pokažimo sada i tvrdnju teorema. Neka je X skup svih vrhova neparnog stupnja (c_1, c_2, c_3) grafa G za koje je $\Phi_3(\langle 0, c_1\rangle \cup \langle c_2, c_3\rangle) > b_3$ i Y skup svih vrhova (c_1, c_2, c_3) neparnog stupnja grafa G za koje je $\Phi_3(\langle 0, c_1\rangle \cup \langle c_2, c_3\rangle) < b_3$. Tada je, budući da prema početnim pretpostavkama ne postoji vrh (c_1, c_2, c_3) neparnog stupnja takav da je $\Phi_3(\langle 0, c_1\rangle \cup \langle c_2, c_3\rangle) = b_3$, $X \cup Y$ particija vrhova neparnog stupnja. Stoga je $cardX = cardY$ i taj broj je neparan. Prema Lemi 2.13, postoji put u grafu G koji povezuje vrh u X s vrhom u Y. Kako su Φ_1 i $\Phi_{2'} = \Phi_2 + \Phi_3$ konstantne funkcije na generiranim particijama skupa vrhova od G i razlika vrijednosti od Φ_3 dviju particija generiranih susjednim vrhovima u G je najviše jedan, možemo zaključiti da postoji vrh (c_1, c_2, c_3) grafa G za koji je

$$\Phi_1(\langle 0, c_1\rangle \cup \langle c_2, c_3\rangle) = b_1$$
$$\Phi_2(\langle 0, c_1\rangle \cup \langle c_2, c_3\rangle) = b_2$$
$$\Phi_3(\langle 0, c_1\rangle \cup \langle c_2, c_3\rangle) = b_3.$$

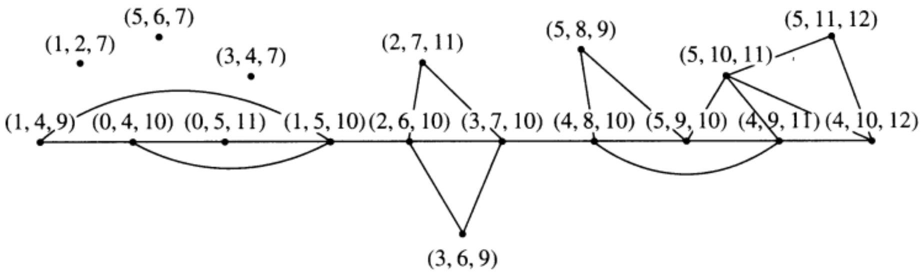
Sada je generirana particija $F_1 \cup F_2$ pravedna 2-podjela ogrlice reda veličine 3. Konačno, da bismo dokazali da postoji pravedna 2-podjela 3-obojene ogrlice N reda veličine manjeg ili jednakog od 3, dovoljno je uzeti $N_1 = \{a_1, a_2, ..., a_{c_1}\} \cup \{a_{c_2+1}, a_{c_2+2}, ..., a_{c_3}\}$ i $N_2 = N' \setminus N_1$. ■

Ilustirajmo ovaj dokaz primjerom 3-obojene ogrlice N na slici 4.4:



Slika 4.4: Ogrlica N

Na slici 4.5 je graf G koji odgovara ogrlici N definiran kao u dokazu Propozicije 4.6.



Slika 4.5: Graf G koji odgovara ogrlici N

Postoji put u G koji povezuje vrhove $(0, 4, 10)$ i $(4, 10, 12)$. Vrh $(0, 4, 10)$ generira particiju $N_1 \cup N_2$ za koju je $m_3(N_1) > m_3(N_2)$, a vrh $(4, 10, 12)$ generira particiju $N_1' \cup N_2'$ za koju je $m_3(N_1') < m_3(N_2')$. Stoga, na istom putu mora postojati vrh koji generira pravednu podjelu. Doista, to su vrhovi $(1, 5, 10)$ i $(2, 6, 10)$.

4.2 Ky Fanov teorem i konstrukcija rješenja

U ovom poglavlju cilj nam je konstruktivno dokazati verziju Teorema 1.1 za $q = 2$. Verzija istog teorema dokazana je u Propoziciji 3.16 koristeći Borsuk-Ulam teorem. Iako ćemo u ovom poglavlju Teorem 1.1 dokazati kombinatorno, topološka inspiracija unutar samog dokaza ostati će primjetna.

Definicija 4.7 *Neka je C d-kocka, ∂C rub od C i $V(C)$ skup vrhova od C. Za strane kocke kažemo da su susjedne ako je njihov presjek $(d-2)$-kocka. Dvije nesusjedne strane nazivamo suprotnim.*

Definicija 4.8 *Za familiju kocaka $\mathcal{C}$ uloženih u Euklidski prostor $\mathbb{R}^d$ kažemo da je **kubični kompleks** ako vrijedi sljedeće:*

1. *Za svaki $\tau \in \mathcal{C}$ i za svaku stranu σ od τ vrijedi $\sigma \in \mathcal{C}$.*
2. *Ako su $\tau, \tau' \in \mathcal{C}$ i $\tau \neq \tau'$, onda je $\tau \cap \tau'$ strana od τ i τ'*

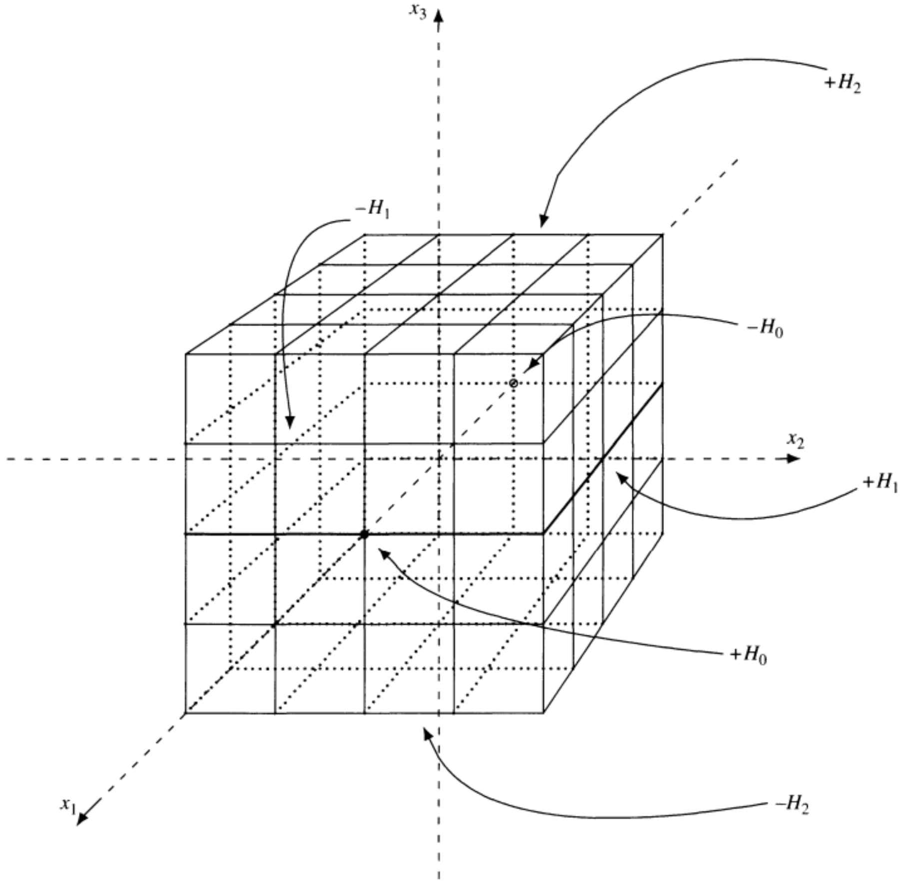
Definicija 4.9 *Za kubični kompleks $\mathcal{C}$ kažemo da je **čist** ako su sve maksimalne kocke u $\mathcal{C}$ u odnosu na inkluziju iste dimenzije.*

S $V(\mathcal{C})$ označavat ćemo skup vrhova kubičnog kompleksa $\mathcal{C}$.

Definicija 4.10 *Za čisti d-dimenzionalni kubični kompleks $\mathcal{M}$ kažemo da je **d-dimenzionalna kubična pseudo-mnogostrukost** ako je svaka $(d-1)$-dimenzionalna kocka u $\mathcal{M}$ sadržana u najviše dvije d-dimenzionalne kocke u*

$\mathcal{M}$. *Skup svih* $(d-1)$*-kocaka* σ *u* $\mathcal{M}$ *takvih da* σ *pripada najviše jednoj* d*-kocki u* $\mathcal{M}$ *nazivamo* ***rubom*** *od* $\mathcal{M}$ *i označavamo ga s* $\partial\mathcal{M}$.

S $\mathcal{C}^d$ označavat ćemo kubični kompleks koji nastaje kao unija kocke $\square^d := [-1,1]^d$ i svih njezinih strana.



Slika 4.6: Hemisfere trodimenzionalne kocke

Neka je k nenegativan cijeli broj. Za k različitih cijelih brojeva $i_1, ..., i_k \in \{1, ..., d\}$ i k brojeva $\epsilon_1, \epsilon_2, ..., \epsilon_k \in \{1, -1\}$ uvedimo oznaku

$$F\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_k \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_k \end{pmatrix} := \Big\{(x_1, ..., x_d) \in \square^d \colon x_{i_j} = \epsilon_j,\ \text{za } j = 1, 2, ..., k\Big\},$$

što je $(d-k)$-dimenzionalna strana od $\square^d$. Za $k = 0$, ta je strana jednaka $\square^d$. Za kocku $\square^d$, rub $\partial\square^d$ podijelit ćemo na skupove $+H_0$, $-H_0$, $+H_1$, $-H_1$, ..., $+H_{d-1}$, $-H_{d-1}$, pri čemu su za $i \in \{0, 1, ..., d-1\}$, skupovi $+H_i$ i $-H_i$ definirani s:

$$\begin{aligned} +H_i = \Big\{&(x_1, ..., x_d) \in \partial\square^d \ \Big|\ x_{i+1} \geq 0 \text{ i ako je } i \leq d-2 \text{ onda je } x_j = \\ &0,\ \text{za svaki } j \in \{i+2, ..., d\}\Big\}, \\ -H_i = \Big\{&(x_1, ..., x_d) \in \partial\square^d \ \Big|\ x_{i+1} \leq 0 \text{ i ako je } i \leq d-2 \text{ onda je } x_j = \\ &0,\ \text{za svaki } j \in \{i+2, ..., d\}\Big\}\ . \end{aligned}$$

Skupove $\pm H_i$ nazivamo **hemisferama** kocke $\square^d$. Na slici 4.6 prikazane su hemisfere trodimenzionalne kocke. **Glavna hemisfera** kocke $\sigma \in \mathcal{M}$ je hemisfera najmanje dimenzije koja sadrži σ.

Uočimo da za $i \in \{0, 1, ..., d-1\}$ vrijedi da su $(+H_i) \cup (-H_i)$ i sfera S^i homeomorfni i ako je $i \geq 1$ onda je $\partial(+H_i) = \partial(-H_i) = (+H_{i-1}) \cup (-H_{i-1})$.

Definicija 4.11 *Neka su $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ kubični kompleksi. Za preslikavanje $\lambda\colon V(\mathcal{C}) \to V(\mathcal{D})$ kažemo da je* ***kubično preslikavanje*** *ako vrijedi:*

1. *Za svaki $\sigma \in \mathcal{C}$ postoji $\tau \in \mathcal{D}$ takav da je $\lambda(V(\sigma)) \subseteq V(\tau)$.*

2. *Ako su A i A' susjedni vrhovi u $\mathcal{C}$, onda su i $\lambda(A)$, $\lambda(A')$ susjedni vrhovi u $\mathcal{D}$.*

Sljedeću lemu navodimo bez dokaza, a dokaz se može pronaći u [2].

Lema 4.12 *Neka je $\lambda\colon V(\square^m) \to V(\square^m)$ neinjektivno kubično preslikavanje i neka je ϕ strana od $\square^m$. Tada postoje $0, 2$ ili 4 strane σ od $\square^m$ takve da je $\lambda(V(\sigma)) = V(\phi)$.*

Lema 4.12 implicira sljedeću lemu:

Lema 4.13 *Neka je $\lambda\colon V(\square^d) \to V(\square^m)$ kubično preslikavanje, $m \geq d$ i neka je ϕ $(d-1)$- dimenzionalna strana od $\square^m$. Ako je λ neinjektivno preslikavanje onda postoje $0, 2$ ili 4 strane σ od $\square^d$ takve da je $\lambda(V(\sigma)) = V(\phi)$. Nadalje, ako postoje točno četiri takve strane i ako je σ jedna od tih strana, onda se i suprotna strana σ' od σ nalazi među te četiri strane.*

Dokaz. Neka je $\lambda\colon V(\square^d) \to V(\square^m)$ neinjektivno kubično preslikavanje i neka je ϕ $(d-1)$-dimenzionalna strana od $\square^m$. Ako ne postoji strana σ od $\square^d$ takva da je $\lambda(V(\sigma)) = V(\phi)$, dokaz je gotov. Stoga, pretpostavimo da je σ strana od $\square^d$ takva da je $\lambda(V(\sigma)) = V(\phi)$. Tvrdimo da postoji d-dimenzionalna strana od $\square^m$ koja sadržava sliku od λ.
Ako je $\lambda(V(\square^d)) = V(\phi)$, tvrdnja je očita. Stoga, pretpostavimo da postoji vrh $v \in V(\square^d) \setminus V(\sigma)$ takav da $\lambda(v) \notin V(\phi)$. Neka je w vrh u σ susjedan vrhu v i neka je w' jedinstveni vrh u σ takav da je $d(w, w') = d - 1$, pri čemu je d standardna metrika u 1-kosturu kocke ($d(x, y)$ je broj bridova u najkraćem putu koji povezuje x i y). Očito je $d(\lambda(v), \lambda(w')) = d$. Neka je sada v' proizvoljan vrh u $\square^d$. Tada vrijedi:

$$d = d(v, w') = d(v, v') + d(v', w') \geq d(\lambda(v'), \lambda(v)) + d(\lambda(v'), \lambda(w')) \geq d(\lambda(v), \lambda(v')) = d$$

Stoga je $d(v, v') = d(\lambda(v), \lambda(v'))$ i $d(v', w') = d(\lambda(v'), \lambda(w'))$. Konačno, za svaki $v' \in \square^d$ vrijedi da se $\lambda(v')$ nalazi u d-podkocki od $\square^m$ koja sadrži ϕ i $\lambda(v)$.

Stoga, možemo promatrati neinjektivno kubično preslikavanje preslikavanje $\lambda\colon V(\square^d) \to V(\square^d)$. Prema lemi 4.12 slijedi da postoje $0, 2$ ili 4 strane σ od $\square^m$ takve da je $\lambda(V(\sigma)) = V(\phi)$. Ako postoje četiri strane za koje je $\lambda(V(\sigma)) = V(\phi)$ onda među njima postoje dvije susjedne strane σ i σ'. Neka je σ'' proizvoljna strana susjedna stranama σ i σ'. Neka je $x \in V(\sigma' \cap \sigma'') \setminus V(\sigma)$ i y vrh u σ susjedan vrhu x. Tada je $y \in \sigma \cap \sigma' \cap \sigma''$ i $\lambda(x)$ je susjedan $\lambda(y)$. Nadalje, neka je z vrh u σ takav da je $\lambda(z) = \lambda(x)$ (Egzisencija od z je osigurana zbog neinjektivnosti). Tada je z susjedan y u σ i $z \notin \sigma'$. Slijedi da je z jedini vrh u σ čija je udaljenost do y jednaka 1 i koji nije element σ'. Dakle, $z \in \sigma''$. Budući da je $\lambda(z) = \lambda(x)$ i $z \neq x$, $z, x \in \sigma''$, iz definicije kubičnog preslikavanja slijedi $\lambda(V(\sigma'')) \neq V(\phi)$. Konačno, za stranu σ'' susjednu σ i σ' ne može vrijediti $\lambda(V(\sigma'')) = V(\phi)$. ∎

Neka je $\mathcal{M}$ t-dimenzionalna kubična pseudo-mnogostrukost i neka je $\mathcal{C}^m$ kubični kompleks koji se sastoji od kocke $\square^m$ i svih njezinih strana. Neka je $\lambda\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}^m$ kubično preslikavanje. S

$$\alpha_\lambda \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{m-t} \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_{m-t} \end{pmatrix},$$

označavat ćemo broj t-podkocaka σ od $\mathcal{M}$ takvih da λ vrhove u σ bijektivno preslikava u vrhove t-strane

$$F \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_{m-t} \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_{m-t} \end{pmatrix}.$$

Definicija 4.14 *Neka je $\mathcal{M}$ t-dimenzionalna kubična pseudo-mnogostrukost i neka je $\mathcal{C}^m$ kubični kompleks koji se sastoji od kocke $\square^m$ i svih njezinih strana. Neka je $\lambda\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}^m$ kubično preslikavanje. Za d-kocku σ sadržanu u $\mathcal{M}$ kažemo da je **potpuna** ako postoje $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_{m-d} \in \{+1, -1\}$ takvi da je*

$$\lambda(\sigma) = F \begin{pmatrix} d+1 & d+2 & \cdots & m \\ \epsilon_1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_{m-d} \end{pmatrix}.$$

Kažemo da je σ ***gotovo potpuna*** *ako nije potpuna i ako postoji potpuna strana od σ. Nadalje, ako ne vrijedi $d = m = t$, onda za potpunu d-kocku σ vrijednost ϵ_1 nazivamo* ***predznakom*** *od σ.*

Lema 4.15 *Neka je $\mathcal{M}$ t-dimenzionalna kubična pseudo-mnogostrukost i neka je $\mathcal{C}^m$ kubični kompleks koji se sastoji od kocke $\square^m$ i svih njezinih strana. Neka je $\lambda\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}^m$ kubično preslikavanje i τ gotovo potpuna d-kocka. Tada vrijedi točno jedna od sljedećih tvrdnji:*

1. *Preslikavanje λ bijektivno preslikava skup $V(\tau)$ na vrhove neke d-strane*

$$F\begin{pmatrix} d & \cdots & \widetilde{j} & \cdots & m \\ \epsilon_1 & \cdots & \widetilde{\epsilon}_{j-d+1} & \cdots & \epsilon_{m-d} \end{pmatrix}.$$

2. *λ je neinjektivno preslikavanje na skupu vrhova od τ i τ ima točno dvije potpune strane, pri čemu su predznaci od te dvije strane jednaki.*

3. *λ je neinjektivno preslikavanje na skupu vrhova od τ i τ ima točno četiri potpune strane, pri čemu sve te četiri strane imaju isti predznak. Nadalje, ako je $\sigma \subseteq \tau$ potpuna strana od τ, onda je i strana σ' suprotna σ, također potpuna strana.*

Dokaz. Pretpostavimo da je λ injektivno preslikavanje. Tada je slika od τ d-strana od $\mathcal{C}^m$. Budući da τ nije potpuna strana, možemo zaključiti da slika od τ ima oblik iz slučaja 1). Stoga, pretpostavimo da λ nije injektivno preslikavanje. Neka su σ i σ' potpune strane od τ. Budući da su σ i σ' potpune strane, λ je injektivno preslikavanje na σ i σ'. Nadalje, vrijedi da su $\lambda(V(\sigma))$ i $\lambda(V(\sigma'))$ skupovi vrhova nekih $(d-1)$-strana od $\mathcal{C}^m$ s nepraznim presjekom. U protivnom, λ bi bilo injektivno preslikavanje na τ. Nadalje, prema definiciji potpune kocke, slike dviju potpunih kocaka su paralelne. Međutim, dvije paralelne strane kocke s istom dimenzijom i nepraznim presjekom se podudaraju. Stoga je $\lambda(V(\sigma)) = \lambda(V(\sigma'))$ i postoji $(d-1)$-strana ϕ takva da za svaku potpuno stranu σ od τ vrijedi $\lambda(V(\sigma)) = V(\phi)$, pa tvrdnja slijedi iz leme 4.13. ■

Iz prethodne leme slijedi da je predznak gotovo potpune d-kocke jednak predznaku od proizvolje strane. Za kocku kažemo da je **prihvatljiva** ako je njezin predznak jednak predznaku od glavne hemisfere.

Teorem 4.16 *Neka je $\mathcal{M}$ t-dimenzionalna kubična pseudo-mnogostrukost bez ruba koji se dobije podjelom od $\mathcal{C}^{t+1}$ hiperravninama $x_i = \frac{j}{n}$, pri čemu je $i \in \{1, ..., t+1\}$, $j \in \{-n+1, -n+2, ..., -1, 0, 1, ..., n-2, n-1\}$. Neka je $\lambda\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}^m$ kubično preslikavanje i $m \geq t$. Ako je λ antipodalno preslikavanje, onda vrijedi sljedeće:*

1. *Ako je $m > t$, onda je*

$$\sum_{\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{m-t} \in \{+1,-1\}} \alpha_\lambda \begin{pmatrix} t+1 & t+2 & \cdots & m \\ +1 & \epsilon_2 & \cdots & \epsilon_{m-d} \end{pmatrix} \equiv 1 mod 2$$

2. *Ako je $m = t$ onda postoji t-kocka σ u $\mathcal{M}$ takva da je $\lambda(V(\sigma)) = V(\mathcal{C}^m)$.*

Dokaz. Definirajmo graf G na sljedeći način. Kocka σ s pripadajućom glavnom hemisferom $\pm H_d$ je vrh grafa G ako vrijedi barem jedna od sljedećih tvrdnji:

1. σ je prihvatilja potpuna $(d-1)$-kocka.

2. σ je gotovo potpuna d-kocka.

3. σ je potpuna d-kocka.

Vrhovi σ i τ su susjedni u G ako vrijede sljedeće tvrdnje:

1. σ je strana od τ.

2. σ je potpuna.

3. Dimenzija od τ jednaka je dimenziji glavne hemisfere od τ.

4. Predznak glavne hemisfere od τ jednak je predznaku od σ.

Tvrdimo da je svaki vrh grafa G stupnja $1, 2$ ili 4 i da je vrh σ stupnja 1 ako i samo ako je njegova glavna hemisfera $\pm H_0$ ili potpuna t-kocka. Pokazat ćemo da postoji put u G između vrha H_0 i potpune t-kocke. Neka je σ vrh u G. Razlikujemo sljedeća tri slučaja:

1. Ako je σ prihvatljiva potpuna $(d-1)$-kocka s glavnom hemisferom $\pm H_d$ onda je σ strana od točno dvije d-kocke, pri čemu je svaka od njih potpuna ili prihvatljiva gotovo potpuna s istom glavnom hemisferom. Dakle, σ je susjedna tim dvjema stranama u G. Nadalje, iz trećeg uvjeta susjednosti slijedi da σ ne može biti susjedna niti jednoj svojoj strani u G. Stoga je σ stupnja 2 u G.

2. Ako je σ prihvatljiva gotovo potpuna d-kocka s glavnom hemisferom $\pm H_d$ onda, prema Lemi 4.15, σ ima točno dvije ili točno četiri susjedne strane u G, koje su pritom i potpune $(d-1)$-kocke. Potpuna strana od σ je vrh u G. Doista, budući da potpuna strana od σ nije prihvatljiva, njena glavna hemisfera je $\mp H_d$, odnosno suprotnog je predznaka od predznaka glavne hemisfere od σ. Međutim, četvrto svojstvo susjednosti je ispunjeno jer gotovo potpune prihvatljive d-kocke imaju isti predznak kao i njihove potpune strane.

3. Ako je $d \neq 0$ i σ potpuna d-kocka s glavnom hemisferom $\pm H_d$ onda σ ima točno jednu potpunu stranu τ čiji je predznak glavne hemisfere jednak predznaku glavne hemisfere od σ. Dakle, σ i τ su susjedni u G. Nadalje, σ je strana od točno dvije $(d+1)$-kocke u $+H_{d+1} \cup H_{d-1}$ od

kojih je jedna u $+H_{d+1}$, a druga u $-H_{d-1}$. Međutim, σ je susjedna u G onoj $(d+1)$-kocki koja ima isti predznak kao i σ.

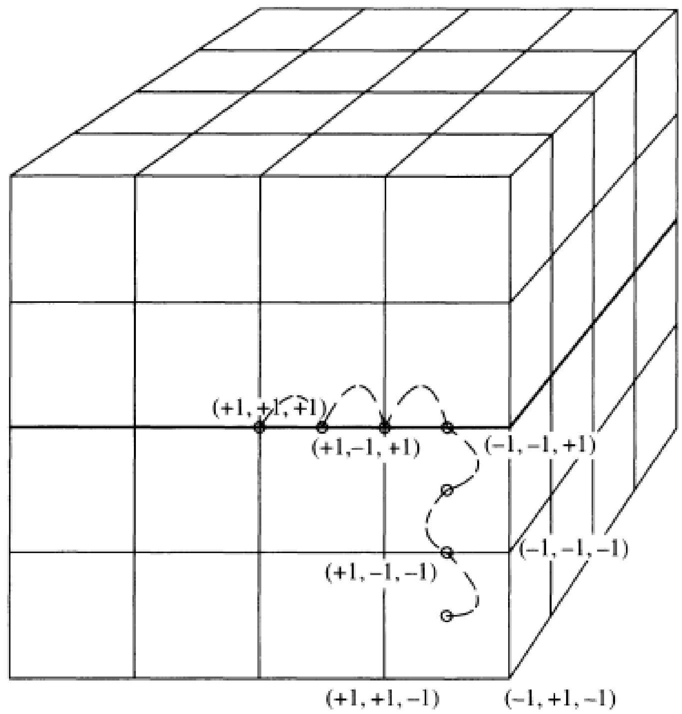
Konačno, možemo zaključiti da je σ stupnja 2 ili 4 osim ako je $d = 0$ ili je σ potpuna t-kocka. Ako je $d = 0$, onda je σ točka $\pm H_0$, pa nema strana. Stoga je σ stupnja 1. Ako je σ potpuna t-kocka onda σ nije strana niti jedne druge kocke, pa je opet stupnja 1. Stoga, svaki je vrh grafa G stupnja 2 ili 4, osim točaka $\pm H_0$ i potpunih t-kocaka.

Transformirajmo sada graf G u graf G' na sljedeći način:

Svaki vrh v stupnja 4 u G zamijenit ćemo vrhovima v' i v''. Četiri brida u G zamijeniti ćemo s četiri nova brida u G' od kojih dva povezuju v' i par nasuprotnih potpunih strana od v' i dva povezuju v'' i par nasuprotnih potpunih strana od v''.

U grafu G' svi su vrhovi stupnja 1 ili 2. Stoga je skup bridova od G' disjunktna unija ciklusa i puteva. Primjetimo da, ako je p put u G', onda je i njemu antipodalan put p' također put u G'. Nadalje, ne postoji put s antipodalnim krajnjim točkama. U protivnom bi taj put bio sebi antipodalan, pa bi imao brid ili vrh koji je sebi antipodalan. Dakle, broj krajnjih točaka je djeljiv s 4. Budući da su $+H_0$ i $-H_0$ stupnja 1, postoji $q \in \mathbb{N}$, q neparan, takav da je broj potpunih krajnjih točaka koje su potpune t-kocke jednak $2q$, što dokazuje prvu tvrdnju teorema. Ako je pritom $m > t$, pola od njih ima pozitivan predznak (Ako je $m = t$, potpuna t-kocka nema predznak). Time je teorem dokazan. ■

U prethodnom dokazu, put u G' koji počinje u $+H_0$ ne može završiti u $-H_0$. Stoga, postoji algoritam prema kojem možemo pronaći potpunu t-kocku. Algoritam je ilustriran primjerom na slici 4.7:



Slika 4.7: Ilustracija konstruktivnog dokaza teorema 4.16.

Uređene trojke odgovaraju oznakama kocke iz slike 4.6

Promotrimo sada kako teorem 4.16 implicira verziju Teorema 1.1 u sljedećoj Propoziciji:

Propozicija 4.17 *Neka je $N = a_1, ..., a_n$ t-obojena ogrlica i neka $2|m_i(N')$, za svaki $i \in \{1, ..., t\}$. Tada postoji pravedna 2-podjela $N_1 \cup N_2$ ogrlice N reda veličine manjeg ili jednakog od t*

Dokaz. Neka je $\mathcal{M}$ t-dimenzionalna kubična pseudo-mnogostrukost bez ruba definirana kao u Teoremu 4.16. Neka je $m = t$ i $(x_1, ..., x_{t+1})$ vrh u $\mathcal{M}$. Nadalje, uredimo uređenu $(t+1)$-torku od veće prema manje koordinate po apsolutnoj vrijednosti, s tim da ako je $|x_i| = |x_j|$ stavljamo x_i ispred x_j za $i < j$. Time je dobivena permutacija π za koju vrijedi:

$$|x_{\pi(1)}| \leq |x_{\pi(2)}| \leq ... \leq |x_{\pi(t+1)}| \leq 1.$$

Definirajmo sada preslikavanje $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_t)\colon \mathcal{M} \to \mathcal{C}^t$ na sljedeći način:

$$\lambda_i(x) = \begin{cases} +1, & \text{ako je} \sum_{j=0}^{t} sgn(x_{\epsilon(j)})\Phi_i\left(\langle n|x_{\pi(j)}|, n|x_{\pi(j+1)}|\rangle\right)) > 0 \\ -1, & \text{inače} \end{cases},$$

za $i = 1, ..., t$, pri čemu je $\epsilon(j)$ namanji prirodan broj k za koji je $|x_k| \geq |x_{\pi(j+1)}|$ i uz konvenciju $x_{\pi(0)} = 0$ i pri čemu je Φ_i definiran kao u Propoziciji 4.6.

Intuitivno, interval režemo na mjestima $n|x_j|$, $j = 1, ..., t$ i λ_i jednak je $+1$ (odnosno -1) ako je $\Phi_i(N_1) > b_i$ (odnosno $\Phi_i(N_1) < b_i$) i pritom predznak od x_k uvjetuje je li $[|nx_{k-1}|, |nx_k|\rangle$ sadržan u N_1 ili N_2. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je λ antipodalno preslikavanje. Nadalje, lako se vidi da je λ kubično preslikavanje. Prema Teoremu 4.16 postoji t-kocka σ takva da je $\lambda(\sigma) = \square^t$. Jedan od vrhova σ implicira pravednu

```
Algorithm (input an oracle giving the value of λ on each vertex of ∂M.).
initialize σ := (1, 0, ..., 0) ∈ M (the 0-dimensional cube);
initialize τ is the 1-dimensional cube in H_1 or −H_1 (the sign is determined by the sign of σ);
while τ is not a full t-cube do
        if τ is a full (d − 1)-cube of ±H_d for some d
            set σ' to be the d-cube of ±H_d distinct from σ containing τ;
        endif
        if σ is a full facet of τ
            set σ' to be the facet opposite to σ;
        endif
        if τ is a full d-cube of ±H_d for some d
            if σ is a facet of τ
                set σ' to be the (d + 1)-cube having τ as a facet
                    and whose carrier hemisphere has the same sign than τ;
            endif
            if τ is a facet of σ
                set σ' to be the full facet of τ whose sign is the sign of the carrier hemisphere of τ;
            endif
        endif
        set σ ← τ and τ ← σ';
endwhile
return τ.
```

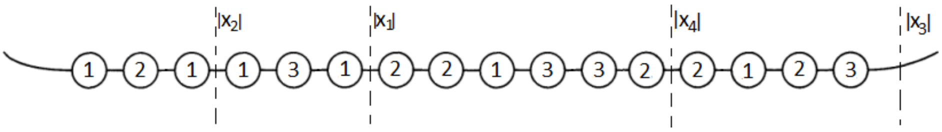
Slika 4.8: Algoritam za pronalazak potpune $t-$kocke

podjelu. Doista, za proizvoljan vrh x od σ i za bilo koji vrh x' od t susjednih vrhova od x, vrijednosti $\lambda(x)$ i $\lambda(x')$ razlikuju se na svakoj od t komponenti. Sada iz konstruktivnog dokaza Teorema 4.16 slijedi i dokaz propozicije. Kubični kompleks je k-kocka koja odgovara jednom izboru od k uzastopnih perlica. Nadalje, lako se provjeri da je k-kocka potpuna, čime je dan konstruktivni dokaz propozicije, slijedeći konstrukciju iz Teorema 4.16.

■

Slijedeći dokaz Teorema 4.16, na slici 4.8 dan je algoritam koji osigurava pronalazak potpune $t-$kocke.

Promotrimo preslikavanje λ iz dokaza Propozicije 4.17 na konkretnom primjeru.



Slika 4.9: Toče rezanja pridružene vrhu $x_1 = \frac{6}{16}$, $x_2 = \frac{-3}{16}$,$x_3 = -1$,$x_4 = \frac{-12}{16}$

Na slici 4.9 prikazana je ogrlica za $n = 2$, $t = 3$ i četiri točke rezanja. Te četiri točke rezanja kompatibilne su s vrhom (x_1, x_2, x_3, x_4), pri čemu je

$$x_1 = \frac{6}{16},\ x_2 = \frac{-3}{16}, x_3 = -1, x_4 = \frac{-12}{16}.$$

Točke rezanja generiraju četiri podogrlice, Prvu podogrlicu dajemo prvoj osobi, budući da je $\frac{6}{16} \geq |\frac{-3}{16}|$ (Najmanji indeks k za koji je $16|x_k|$ veći od broja svih perlica na toj ogrlici je 1) i $x_1 > 0$. Drugu podogrlicu iz istog razloga dajemo prvoj osobi. Nadalje, treću podogrlicu dajemo drugoj osobi budući da je najmanji indeks k za koji je $16|x_k|$ veći od broja svih perlica na toj ogrlici jednak 3 i $x_3 < 0$. Analogno, i četvrtu podogrlicu dajemo drugoj osobi. Dakle, $\lambda(x_1, x_2, x_3, x_4) = (+1, -1, -1)$, pri čemu i-ta koordinata odgovara $i-$toj boji. Može se provjeriti da λ preslikava susjedne vrhove u susjedne vrhove i da je antipodalno preslikavanje. Potpuna $t-$kocka osigurava pravednu podjelu, pa algoritam iz slike 4.8 osigurava rješenje problema pravedne podjele ogrlice.

Literatura

[1] Noga Alon and Douglas B. West, The Borsuk-Ulam Theorem and Bisection of Necklaces, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 98, No. 4 (Dec., 1986), pp. 623- 628

[2] Ehrenborg, R., G. Hetyei. 1995. Generalizations of Baxter's theorem and cubical homology. J. Combin. Theory Ser. A 69 233-28

[3] Anka Golemac, Teorija grafova

[4] Allen Hatcher, Algebraic topology

[5] Saša Krešić-Jurić, Algebarske strukture, skripta (korigirana 6. verzija)

[6] Frédéric Meunier, Discrete Splittings of the Necklace, Mathematics of Operations Research, Vol. 33, No. 3 (Aug., 2008)

[7] Frédéric Meunier, Bertrand Neveu. Computing solutions of the paint-shop necklace problem. 2011. ffhal-00601446v1f

[8] Jerzy Wojciechowski, Splitting necklaces and a generalization of the Borsuk-Ulam antipodal theorem, J. Comb. Math. and Comb. Comp. 21, (1996), 235–254.