

# Numeričko rješavanje Navier-Stokesovih jednadžbi: Vizualizacija polja brzine i tlaka

---

**Korda, Marko**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:678938>

*Rights / Prava:* [Attribution-NoDerivatives 4.0 International](#)/[Imenovanje-Bez prerada 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-12-25**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno-matematički fakultet

**Numeričko rješavanje Navier-Stokesovih  
jednadžbi: Vizualizacija polja brzine i tlaka**

Završni rad

Marko Korda

Split, rujan 2023.

## Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno–matematički fakultet  
Odjel za fiziku  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

### Numeričko rješavanje Navier-Stokesovih jednadžbi: Vizualizacija polja brzine i tlaka

Marko Korda

Sveučilišni prijediplomski studij Fizika

#### Sažetak:

Mehanika fluida jedno je od zanimljivijih i primjenjivijih područja klasične fizike. Primjenjuje se u aerodinamici, meteorologiji, medicini i brojnim drugim područjima znanosti i inženjerstva. Njen glavni zadatak je rješavanje Navier-Stokesovih jednadžbi koje općenito nisu analitički rješive pa se koriste razne numeričke metode. Zadatak ovog rada je opisati jednu od tih metoda i primijeniti ju na rješavanje nekih jednostavnih dvodimenzionalnih primjera. Korištena je metoda konačnih razlika, Eulerova metoda i pomaknuta mreža. Programski kod za simulaciju je razvijen u programskom jeziku *Python* uz pomoć biblioteka *NumPy* i *Matplotlib*. Analitičko i numeričko rješenje toka kroz ravnu cijev su se dobro slagali prikazujući parabolični profil brzina. Slučaj ravne cijevi sa stepenicom je pokazao zanimljivo ponašanje stvaranjem vrtloga u podnožju stepenice. Za proučavanje polja tlaka zanimljivo je bilo riješiti problem šupljine s poklopcem koji se giba velikom brzinom udesno. Svi dobiveni rezultati su vizualizirani i vrlo dobro se slažu s očekivanjima.

**Ključne riječi:** Navier-Stokes jednadžbe, numeričke metode, laminarni tok, viskoznost

**Rad sadrži:** 26 stranica, 12 slika, 6 tablica, 10 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku.

**Mentor:** izv. prof. dr. sc. Larisa Zoranić

**Ocjenjivači:** izv. prof. dr. sc. Larisa Zoranić,  
prof. dr. sc. Ante Bilušić  
izv. prof. dr. sc. Petar Stipanović

**Rad prihvaćen:** 26. rujna 2023.

Rad je pohranjen u Knjižnici Prirodoslovno–matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

## Basic documentation card

University of Split  
Faculty of Science  
Department of Physics  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Bachelor thesis

### Numerical Computation of the Navier-Stokes Equations Represented through Velocity and Pressure Fields

Marko Korda

University undergraduate study Physics

#### Abstract:

Fluid mechanics is one of the more interesting and applicable areas of classical physics. It is applied in aerodynamics, meteorology, medicine, and numerous other fields of science and engineering. Its primary task is to solve the Navier-Stokes equations, which are generally not analytically solvable, so various numerical methods are used. The goal of this work is to describe one of these methods and apply it to solve some simple two-dimensional examples. The finite difference method, Euler's method, and the staggered grid were used. The simulation code was developed in the *Python* programming language with the help of the *NumPy* and *Matplotlib* libraries. The analytical and numerical solutions of the flow through a straight pipe matched well, displaying a parabolic velocity profile. The case of a straight pipe with a step showed interesting behavior with the formation of vortices at the base of the step. To study the pressure field, it was interesting to solve the problem of a cavity with a lid moving rapidly to the right. All obtained results were visualized and aligned very well with expectations.

**Keywords:** Navier-Stokes equations, numerical methods, laminar flow, viscosity

**Thesis consists of:** 26 pages, 12 figures, 6 tables, 10 references. Original language: Croatian.

**Supervisor:** Asoc. Prof. Dr. Larisa Zoranić

**Reviewers:** Asoc. Prof. Dr. Larisa Zoranić,  
Prof. Dr. Ante Bilušić  
Asoc. Prof. Dr. Petar Stipanović

**Thesis accepted:** September 26th, 2023

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

Zahvaljujem se, prije svega, mentorici izv. prof. dr. sc. Larisi Zoranić na vođenju kroz izradu ovog rada, uz bezgranično strpljenje te za znanje i iskustvo koje mi je pružila. Također veliko hvala svim profesorima i asistentima koji se uvijek trude maksimalno prenijeti svoja znanja i biti na usluzi studentima za sva moguća pitanja i probleme. Najveće hvala cijeloj mojoj obitelji i prijateljima koji su bili tu za mene cijeli život i bez kojih ne bih bio to što jesam.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Metoda</b>	<b>4</b>
2.1	Postupak rješavanja	4
2.2	Pomaknuta mreža	4
2.3	Prostorna diskretizacija	5
2.3.1	Diskretizacija $u$ jednažbe	6
2.3.2	Diskretizacija $v$ jednažbe	7
2.3.3	Diskretizacija Poissonove jednažbe	8
2.3.4	Korekcija brzine i tlaka	9
2.4	Rubni uvjeti	9
2.5	Početni uvjeti	10
2.6	Numerička stabilnost	10
2.7	Odabir konstanti	10
2.8	Pregled koda	11
<b>3</b>	<b>Rezultati</b>	<b>12</b>
3.1	Ravna cijev	12
3.1.1	Analitičko rješenje za beskonačnu ravnu cijev	12
3.1.2	Numeričko rješenje za konačnu ravnu cijev	13
3.2	Cijev sa stepenicom	17
3.3	Šupljina s pokretnim poklopcem	21
<b>4</b>	<b>Zaključak</b>	<b>25</b>

# 1 Uvod

Mehanika fluida je grana fizike koja se bavi proučavanjem ponašanja fluida [1]. Primjenjuje se u brojnim drugim područjima znanosti i inženjerstva kao što su meteorologija, aerodinamika, zrakoplovno inženjerstvo te u biomedicinske i medicinske svrhe. Može se primjenjivati za proučavanje atmosferskih procesa, morskih strujanja i cirkulacije krvi u ljudskom tijelu. Problemi koji se rješavaju su kompleksni pa se koriste aproksimativne računalne metode. Navedenim se bavi područje koje ujedinjuje znanja i interese fizičara, matematičara kao i inženjera raznih struka, a koje se naziva računalna dinamika fluida (eng. *Computational Fluid Dynamics (CFD)*) [2, 3].

Glavni zadatak mehanike fluida je rješavanje Navier-Stokesovih jednažbi. Ove jednažbe, općenito opisuju kompresibilan fluid, no u većini slučajeva fluid se radi pojednostavljenja može smatrati nekompresibilnim. Takva aproksimacija nije valjana za velike brzine fluida i ako je od interesa promatranje zvučnih valova.

Navier-Stokesove jednažbe za nekompresibilni fluid su:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.2)$$

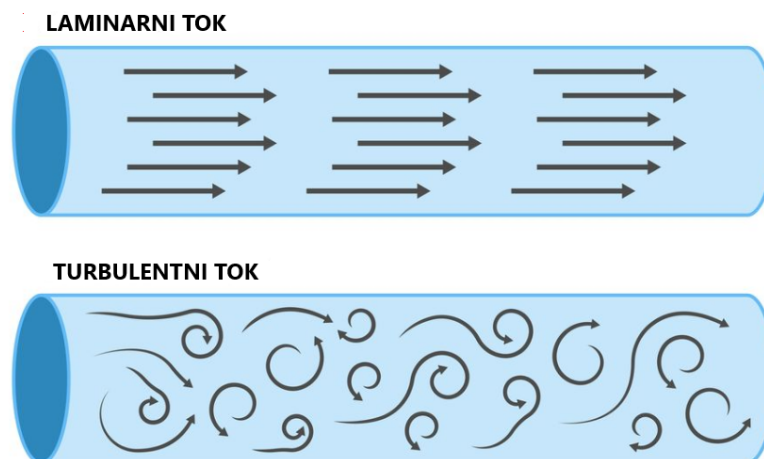
gdje je  $\mathbf{u} = (u, v)$  vektor brzine u dvije dimenzije,  $t$  je vrijeme,  $\rho$  je gustoća,  $p$  je tlak, a  $\nu$  je kinematička viskoznost. Prva jednažba predstavlja drugi Newtonov zakon, a druga jednažba osigurava uvjet nekompresibilnosti.

Ovisno o uvjetima tok može biti laminaran i turbulentan (slika 1). Laminarni tok je postojan i predvidljiv bez miješanja slojeva fluida. Turbulentan tok je kaotičan i karakterizira ga značajno miješanje slojeva fluida uz mnoštvo vrtloga na raznim prostornim skalama. Laminaran tok se može promatrati na većoj prostornoj skali bez gubitka detalja, dok za točan opis turbulentnog toka je potrebno promotriti na jako finoj prostornoj skali kako bi se uhvatile i najmanje turbulencije koje, zbog kaotičnosti gibanja, značajno utječu na makroskopsko gibanje. Zbog toga se za simulacije turbulentnog toka koriste moćna računala ili napredne aproksimativne metode koje su izvan opsega razmatranja ovog rada.

Za definiranje vrste toka uvodi se bezdimenzionalna veličina zvana Reynoldsov broj [1, 4]:

$$Re = \frac{VD}{\nu} \quad (1.3)$$

gdje je  $V$  karakteristična brzina (najčešće srednja brzina) fluida,  $D$  karakteristična dimenzija domene (npr. promjer cijevi), a  $\nu$  je kinematička viskoznost. Reynoldsov broj je omjer



**Slika 1:** Vizualna usporedba laminarnog i turbulentnog toka fluida kroz cijev. (Slika preuzeta s [4])

inercijalnih i viskoznih sila u fluidu. Za male vrijednosti  $Re$  tok je laminaran dok povećavanjem poprima turbulentna svojstva. U literaturi [1] navodi se  $Re = 2300$  kao granična vrijednost između laminarnog i turbulentnog toka u zatvorenoj cijevi. Dva toka će biti jako slična ako imaju iste geometrije i iznose Reynoldsovog broja. To omogućava reskaliranje problema koji nas zanimaju promjenom karakteristične dimenzije ili brzine.

U našim razmatranjima postaviti ćemo  $V \approx 1.0$  m/s i  $D = 1.0$  m pa vrijedi:

$$Re \approx \frac{1}{\nu} \quad (1.4)$$

te ćemo u svim slučajevima definirati samo  $\nu$ . Za najmanju korištenu vrijednost  $\nu = 0.005$  vrijedi  $Re \approx 200$  što znači da će se u našim primjerima pojavljivati samo laminaran tok.

Viskoznost  $\mu$  je mjera otpora fluida na protjecanje i promjenu oblika te je jako bitna za proučavanje ponašanja fluida. Može se interpretirati kao makroskopski učinak mikroskopskih interakcija molekula koje čine fluid. Kod tekućina viskoznost zagrijavanjem pada, a kod plinova raste. U mehanici fluida uobičajeno je koristiti već prethodno spomenutu veličinu, kinematičku viskoznost  $\nu$  za koju vrijedi:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.5)$$

te ćemo se u ovom radu, kada pričamo o viskoznosti, referirati upravo na nju. Još jedan način definiranja viskoznosti je Newtonov zakon viskoznosti [1]:

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.6)$$

gdje je  $u$  brzina fluida u  $x$  smjeru,  $\mu$  koeficijent dinamičke viskoznosti i  $\tau$  smično naprezanje.



Zakon govori da je smično naprezanje između dva sloja u fluidu proporcionalno njihovoj razlici brzina. To znači da se fluid opire skokovitim promjenama brzine. U fluidima s niskom viskoznošću to opiranje je slabo i uslijed fluktuacije nastupaju turbulencije. Viskozni fluidi ne dopuštaju veliku razliku u brzini između dva sloja pa je tok laminaran. Fluidi za koje je ta ovisnost linearna se nazivaju newtonovski fluidi, a u suprotnom se nazivaju nenevtonovski. Također, postoji pojava suprafluidnosti kada viskoznost u potpunosti iščezava. Jedan takav primjer je  $^4\text{He}$  na temperaturi nižoj od  $T = 2,17 \text{ K}$ .

Osim za neke jednostavne slučajeve, Navier-Stokesove jednažbe općenito nisu analitički rješive pa nam ostaje jedino numerički pristup. U poglavlju Metode ćemo, u programskom jeziku *Python*, razviti numeričko rješenje i opisati primijenjene metode. Koristimo metodu konačnih razlika (eng. *finite difference method*) [5] za diskretizaciju prostora, eksplicitnu Eulerovu metodu za diskretizaciju vremena i pomaknutu mrežu (eng. *staggered grid*) za pohranu vrijednosti promatranih veličina. Razvijeni kod dostupan je na poveznici: <https://github.com/MarkoKorda/Navier-Stokes-2D>.

U poglavlju Rezultati opisano je nekoliko simulacija koje ilustriraju primjere laminarnog toka. Prvi primjer je simulacija toka kroz beskonačnu ravnu cijev, pri čemu ćemo dati usporedbu numeričkog i analitičkog rješenja za različite  $\nu$ . Drugi primjeri su simulacije toka kroz ravnu cijev sa stepenicom i fluid u šupljini s poklopcem koji se giba. Kroz ove primjere diskutirat će se ponašanje toka i nastajanje vrtloga u ovisnosti o viskoznosti fluida.

U Zaključku ćemo se prisjetiti ciljeva ovog rada te napraviti kratak pregled promatranih primjera i dobivenih rezultata. Ukratko ćemo objasniti zašto su dobiveni rezultati bili očekivani. Diskutirat će se kako bi se program mogao dalje unaprijediti i poopćiti na kompleksnije probleme.

## 2 Metoda

### 2.1 Postupak rješavanja

Za vremensku diskretizaciju koristi se Eulerova metoda pa se jednažba (1.1) može napisati kao

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} - \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n \quad (2.1)$$

pri čemu indeksi  $n$  i  $n + 1$  predstavljaju dva uzastopna vremenska koraka definirana za vrijeme  $t_n$  i  $t_{n+1} = t_n + \Delta t$ .

Jednažba (1.2) definira nedivergentno polje brzina, te ćemo koristiti prediktor-korektor metodu (eng. *predictor-corrector method*) [6] za nametanje zadanog uvjeta. Prvo računamo privremenu brzinu  $\mathbf{u}^*$  (eng. *tentative velocity*) rješavanjem (2.1) uz korištenje tlaka  $p^n$ :

$$\frac{\mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla p^n - \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n \quad (2.2)$$

U drugom koraku tražimo novu brzinu  $\mathbf{u}^{n+1}$  uključivanjem korekcije tlaka  $q$ :

$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla q \quad (2.3)$$

Korekciju tlaka  $q$  računamo rješavanjem Poissonove jednažbe:

$$\nabla^2 q = \frac{\rho}{\Delta t} \nabla \cdot \mathbf{u}^* \quad (2.4)$$

koja se dobije primjenom operatora divergencije na jednažbu (2.3) uz uvjet  $\nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0$ . Dobiveni rezultat  $q$  se iskoristi za korekciju tlaka i rješavanje jednažbe (2.3). Primjetimo da vrijedi  $p^{n+1} = p^n + q$ , te se može vidjeti da se zbrajanjem (2.2) i (2.3) dobije:

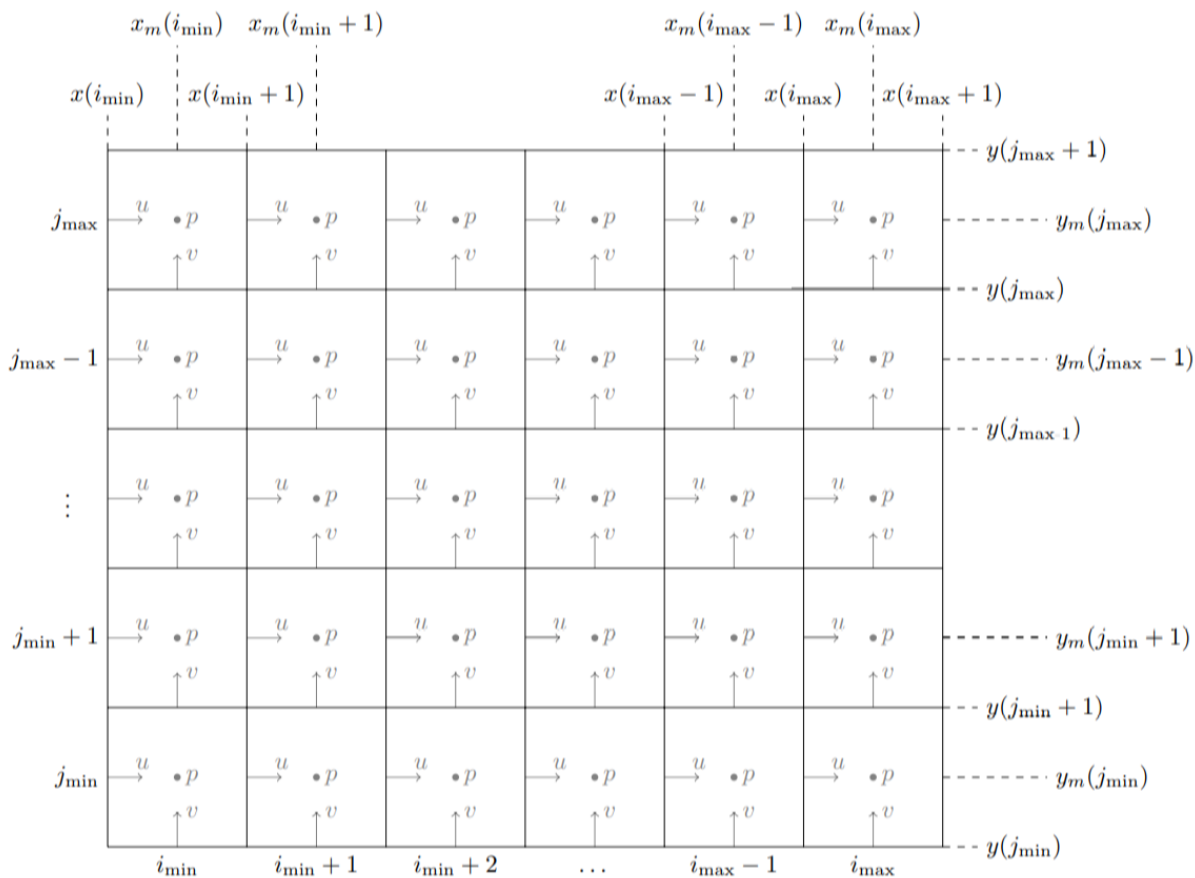
$$\frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^* + \mathbf{u}^* - \mathbf{u}^n}{\Delta t} = -\frac{1}{\rho} \nabla (p^n + q) - \mathbf{u}^n \cdot \nabla \mathbf{u}^n + \nu \nabla^2 \mathbf{u}^n \quad (2.5)$$

što odgovara početnom izrazu (2.1).

### 2.2 Pomaknuta mreža

Točka u prostornoj mreži je definirana indeksima  $(i, j)$  koji određuju koordinate  $x = i\Delta x$  i  $y = j\Delta y$ . Zbog računanja gradijenta tlaka u točkama u kojima nas zanima promjena brzine, umjesto tradicionalne kolocirane mreže (eng. *collocated grid*), u kojoj su sve varijable pohranjene u istim točkama, uobičajeno je koristiti pomaknutu mrežu u kojoj se lokacije pohranjenih varijabli razlikuju. Takva se mreža dobije korištenjem odvojenih običnih mreža za svaku varijablu

posebno. Zatim mreže s pohranjenim vrijednostima  $u$ ,  $v$  i  $p$  pomičemo za pola ćelije gore, pola ćelije desno te pola ćelije i gore i desno, redom. Dobivena mreža prikazana je na slici 2.



**Slika 2:** Pomaknuta mreža za prostornu pohranu komponenti brzina i tlaka. Vrijedi  $x(i) = i\Delta x$ ,  $x_m(i) = i\Delta x + \Delta x/2$ ,  $y(j) = j\Delta y$ ,  $y_m(j) = j\Delta y + \Delta y/2$ . Koordinate za  $u$  su  $(x(i), y_m(j))$ , za  $v$  su  $(x_m(i), y(j))$  i za  $p$  su  $(x_m(i), y_m(j))$ . (Slika preuzeta iz [6])

## 2.3 Prostorna diskretizacija

Iz jednačbe (2.2) izrazimo  $\mathbf{u}^*$  i raspišemo po komponentama:

$$u^* = u^n + \Delta t \left( \nu \nabla^2 u^n - \mathbf{u}^n \cdot \nabla u^n - \frac{1}{\rho} (\nabla p^n)_x \right) \quad (2.6)$$

$$v^* = v^n + \Delta t \left( \nu \nabla^2 v^n - \mathbf{u}^n \cdot \nabla v^n - \frac{1}{\rho} (\nabla p^n)_y \right) \quad (2.7)$$

Dobivene jednačbe ćemo diskretizirati u daljnjem tekstu.

### 2.3.1 Diskretizacija $u$ jednažbe

Desnu stranu jednažbe (2.6) diskretiziramo korištenjem metode konačnih razlika. Jednažbu za komponentu  $u$  možemo pisati:

$$u^* = u^n + \Delta t \left( \nu \left( \frac{\partial^2 u^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^n}{\partial y^2} \right) - \left( u^n \frac{\partial u^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial u^n}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial x} \right) \quad (2.8)$$

Pojedinačne članove za točku  $(i, j)$  diskretiziramo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (2.9)$$

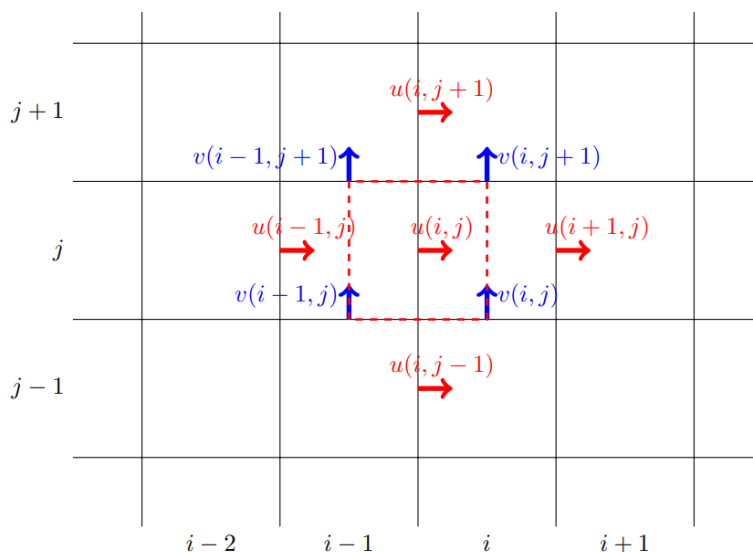
$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{u_{i,j-1} - 2u_{i,j} + u_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (2.10)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = u_{i,j} \frac{u_{i+1,j} - u_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.11)$$

$$v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{4} (v_{i-1,j} + v_{i,j} + v_{i-1,j+1} + v_{i,j+1}) \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{p_{i,j} - p_{i-1,j}}{\Delta x} \quad (2.13)$$

Primjetimo da zbog korištenja pomaknute mreže, komponenta brzine  $v$  korištena u jednažbi (2.12) nije izravno definirana u točki koju se promatra, stoga se ova vrijednost računa kao srednja vrijednost četiri okolne vrijednosti. Opisana diskretizacija prikazana je na slici 3.



**Slika 3:** Brzine korištene za diskretizaciju jednažbe (2.8) u točki  $(i, j)$ . Za vrijednost od  $v$  se uzima srednja vrijednost okolnih vrijednosti. (Slika preuzeta iz [6])

### 2.3.2 Diskretizacija $v$ jednažbe

Analogno, jednažbu (2.7) možemo pisati:

$$v^* = v^n + \Delta t \left( \nu \left( \frac{\partial^2 v^n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v^n}{\partial y^2} \right) - \left( u^n \frac{\partial v^n}{\partial x} + v^n \frac{\partial v^n}{\partial y} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p^n}{\partial y} \right) \quad (2.14)$$

Pojedinačne članove za točku  $(i, j)$  diskretiziramo:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{v_{i-1,j} - 2v_{i,j} + v_{i+1,j}}{\Delta x^2} \quad (2.15)$$

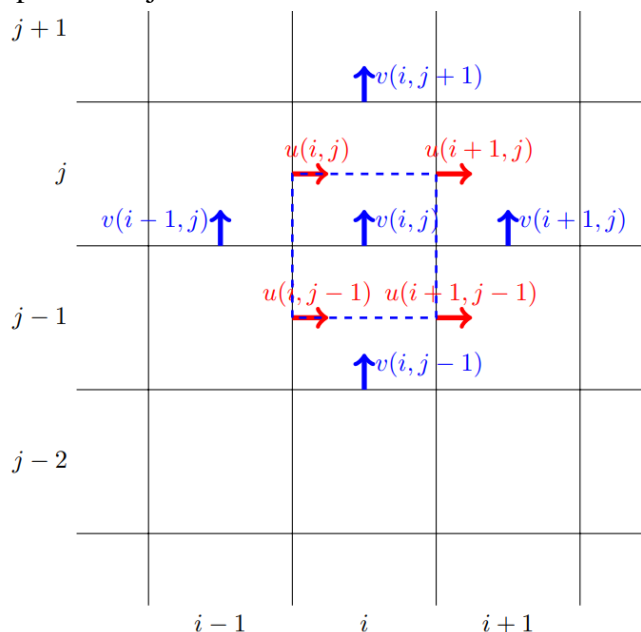
$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{v_{i,j-1} - 2v_{i,j} + v_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (2.16)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{4} (u_{i,j-1} + u_{i,j} + u_{i+1,j-1} + u_{i+1,j}) \frac{v_{i+1,j} - v_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (2.17)$$

$$v \frac{\partial v}{\partial y} = v_{i,j} \frac{v_{i,j+1} - v_{i,j-1}}{2\Delta y} \quad (2.18)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{p_{i,j} - p_{i,j-1}}{\Delta y} \quad (2.19)$$

Za razliku od jednažbi za  $u$  komponentu, sada zbog pomaknute mreže nije definirana vrijednost  $u$  u jednažbi (2.17) pa trebamo koristiti srednju vrijednost četiri okolne vrijednosti. Opisana diskretizacija prikazana je na slici 4.



**Slika 4:** Brzine korištene za diskretizaciju jednažbe (2.14) u koordinatama  $(i, j)$ . Za vrijednost od  $u$  se uzima srednja vrijednost okolnih vrijednosti. (Slika preuzeta iz [6])

### 2.3.3 Diskretizacija Poissonove jednažbe

Jednažbu (2.4) možemo diskretizirati korištenjem izraza:

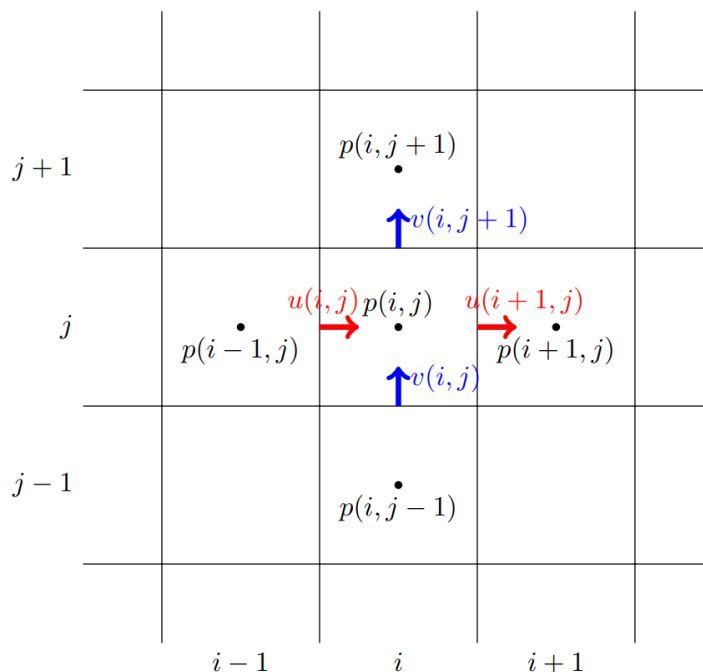
$$\nabla \cdot \mathbf{u}^* = \frac{u_{i+1,j}^* - u_{i,j}^*}{\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}^* - v_{i,j}^*}{\Delta y} \quad (2.20)$$

$$\nabla^2 q = \frac{q_{i-1,j} - 2q_{i,j} + q_{i+1,j}}{\Delta x^2} + \frac{q_{i,j-1} - 2q_{i,j} + q_{i,j+1}}{\Delta y^2} \quad (2.21)$$

Uvrštavanjem ovih izraza u (2.4), uz pojednostavljenja  $\Delta x = \Delta y$  i  $\rho = 1$ , sređivanjem se dobije:

$$q_{i,j} = \frac{1}{4} \left( q_{i-1,j} + q_{i+1,j} + q_{i,j-1} + q_{i,j+1} - \frac{\Delta x^2}{\Delta t} (\nabla \cdot \mathbf{u}^*) \right) \quad (2.22)$$

Primijenjena diskretizacija prikazana je na slici 5.



**Slika 5:** Brzine i tlakovi (na slici označeni s  $p$ ) korištene za diskretizaciju jednažbe (2.22) u koordinatama  $(i, j)$ . (Slika preuzeta iz [6])

### 2.3.4 Korekcija brzine i tlaka

Konačno, možemo riješiti jednažbu (2.3) prebacivanjem u oblik:

$$\mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n - \frac{\Delta t}{\rho} \left( \frac{q_{i,j} - q_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{q_{i,j} - q_{i,j-1}}{\Delta y} \right) \quad (2.23)$$

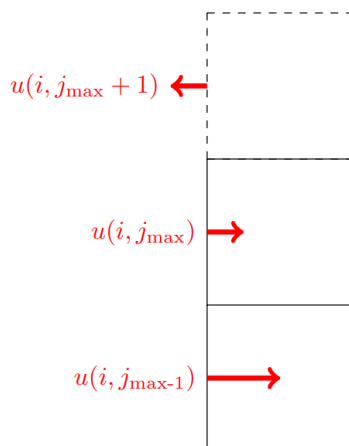
uz korekciju tlaka:

$$p^{n+1} = p^n + q. \quad (2.24)$$

Računanjem ovih vrijednosti završen je jedan vremenski korak u simulaciji te je krajnji rezultat simulacije vrijednost  $\mathbf{u}^{n+1}$  i  $p^{n+1}$  u zadnjem vremenskom koraku.

## 2.4 Rubni uvjeti

U ovom radu promatrat će se različiti oblici domene toka definirani rubnim uvjetima. Zbog upotrebe pomaknute mreže neki od rubnih uvjeta nisu trivijalni za postavljanje jer varijable nisu definirane izravno na svim rubovima. Jedan takav slučaj je brzina  $u$  na gornjem rubu. Njen iznos je definiran  $\Delta x/2$  od gornjeg ruba. Rješenje za ovaj problem je dodavanje reda fiktivnih ćelija iznad ruba. Za Dirichletov rubni uvjet na gornjoj stijenci ( $u = 0$ ) definiramo  $u_{i,J+1} = -u_{i,J}$ , gdje je  $J = j_{max}$ . Navedeni primjer prikazan je na slici 6. Općenito, za sve varijable koje nisu definirane na rubu dodajemo jednu fiktivnu ćeliju odmah izvan ruba i postavljamo ju na vrijednost potrebnu da aritmetička sredina dvije rubne vrijednosti odgovara Dirichletovom rubnom uvjetu.



**Slika 6:** Prikaz postavljanja Dirichletovog rubnog uvjeta za  $u$  brzinu na gornjoj stijenci domene. Vrijednost  $u$  fiktivnoj ćeliji ( $j_{max} + 1$ ) postavljamo na suprotnu vrijednost od ćelije ispod ( $j_{max}$ ) kako bi između njih (na rubu domene) vrijednost bila 0. (Slika preuzeta iz [6])

## 2.5 Početni uvjeti

U primjerima gdje fluid s jedne strane ulazi te s druge izlazi potrebno je prilagoditi početne uvjete kako očuvanje mase ne bi bilo narušeno. Utjecanje fluida bit će modelirano jednakom komponentom brzine  $u = 1.0$  m/s za sve točke na otvorenom dijelu lijevog ruba domene. Njihove koordinate su  $(0, j)$ ,  $j_1 < j < j_2$ . Najjednostavniji način da se nametne uvjet očuvanja mase je da se za sve točke domene za koje vrijedi  $j_1 < j < j_2$  postavi  $u = 1.0$  m/s, a za ostale  $u = 0.0$  m/s.

Primjer šupljine s pokretnim poklopcem nema utjecanja ni istjecanja fluida pa je početni uvjet  $u = 0.0$  m/s u svim točkama domene. U svim primjerima bit će postavljeno na  $v = 0.0$  m/s i  $p = 0.0$  Pa na početku simulacije.

## 2.6 Numerička stabilnost

S obzirom da smo koristili eksplicitnu shemu za diskretiziranje derivacija, moramo pripaziti na numeričku stabilnost. Prema literaturi [9] uvjet koji treba zadovoljiti je:

$$\Delta t < C \cdot \min \left( \frac{(\Delta x)^2}{4} Re, \frac{\Delta x}{|\mathbf{u}|_{max}} \right) \quad (2.25)$$

gdje je

$$C = \frac{|\mathbf{u}|_{max} \Delta t}{\Delta x} \quad (2.26)$$

Courantov broj. Kod odabira veličine vremenskog koraka bit će uračunat navedeni uvjet.

## 2.7 Odabir konstanti

U svim primjerima vrijedit će  $\rho = 1.0$  kg/m<sup>3</sup> te ćemo, što se tiče svojstava fluida, mijenjati samo kinematičku viskoznost  $\nu$  čiju ćemo mjernu jedinicu ( $m^2/s$ ), zbog preglednosti, izostavljati u daljnjem tekstu. Kako bi vrijedilo  $D = 1.0$  m, visina cijevi kao i šupljine bit će  $h = 1.0$  m. Duljina cijevi bit će  $L = 10.0$  m, a šupljine  $L = 1.0$  m. Zato ćemo veličinu prostorne diskretizacije definirati preko brojeva prostornih točaka  $n_x$  i  $n_y$ . Vrijedit će  $\Delta x = \Delta y = (1.0 \text{ m}) / (n_y - 1)$ . Finoću prostorne diskretizacije ćemo birati prema konkretnom problemu, a u svim primjerima za vremenski korak dovoljnim će se pokazati  $\Delta t = 0.001$  s. Broj vremenskih iteracija  $nt$  bit će izabran tako da je simulacija dovoljno duga da garantira stacionarna rješenja. Za broj iteracija u rješavanju Poissonove jednažbe koristit ćemo  $nt_{Poisson} = 50$ .



## 2.8 Pregled koda

Kod je napisan u programskom jeziku Python. Za računski dio korištena je biblioteka *NumPy* [7], a za vizualizaciju dobivenih rezultata korišten je *Matplotlib* [8]. Sada ćemo promotriti cijeli postupak u sažetom i preglednom obliku. Cjeloviti kod za sve riješene primjere se nalazi na poveznici: <https://github.com/MarkoKorda/Navier-Stokes-2D>.

Sažeti pregled koda:

- a) Postavljanje konstanti ( $\nu$ ,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta t$ , broj točaka (nx, ny), vremenskih iteracija (nt)...) )
- b) Kreiranje mreže i postavljanje početnih uvjeta
- c) For petlja za vrijeme (nt vremenskih koraka)
  - c.1 Računanje  $u^*$  i  $v^*$
  - c.2 Primjena rubnih uvjeta na  $u^*$  i  $v^*$
  - c.3 Izračun desne strane Poissonove jednažbe
  - c.4 For petlja za iterativno računanje Poissonove jednažbe (50 iteracija) uz primjenu rubnih uvjeta za tlak
  - c.5 Korekcija tlaka za dobivanje  $p^{n+1}$
  - c.6 Korekcija brzine za dobivanje  $u^{n+1}$  i  $v^{n+1}$
  - c.7 Primjena rubnih uvjeta na  $u^{n+1}$  i  $v^{n+1}$
  - c.8 Ažuriranje animacije (ukoliko je ima)
- d) Vizualizacija i/ili ispis rezultata

## 3 Rezultati

### 3.1 Ravna cijev

#### 3.1.1 Analitičko rješenje za beskonačnu ravnu cijev

Pretpostavit ćemo dvodimenzionalan slučaj toka kroz beskonačne paralelne ploče. Tok je stacionaran tako da vrijedi:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

Također, uvodimo pretpostavku da je tok potpuno formiran što znači da se više ne mijenja u  $x$  smjeru i vrijedi:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

Brzine su paralelne stijenka pa vrijedi  $v = 0$  i gradijent tlaka postoji samo u  $x$  smjeru te se jednažba (1.1) u ovom primjeru reducira na:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{1}{\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.3)$$

Desna strana je konstantna pa ju označimo sa  $C$  i problem se reducira na običnu diferencijalnu jednažbu:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = C \quad (3.4)$$

Pretpostavimo rješenje u obliku:

$$u(y) = Ay^2 + By + D \quad (3.5)$$

Rubni uvjeti su Dirichletovi rubni uvjeti na stijenka:  $u(0) = 0$ ,  $u(h) = 0$  gdje je  $h$  visina cijevi. To su takozvani rubni uvjeti bez proklizavanja (eng. *no slip boundary conditions*). Primjenom prvog rubnog uvjeta dobijemo  $D = 0$ . Jednažbu (3.5) deriviramo dvaput po  $y$  i usporedbom s jednažbom (3.4) vidimo da vrijedi:

$$A = \frac{C}{2} = \frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (3.6)$$

Primjenom drugog rubnog uvjeta na jednažbu (3.5) dobije se

$$B = -Ah = -\frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} h \quad (3.7)$$

pa konačno rješenje ima oblik:

$$u(y) = \frac{1}{2\rho\nu} \frac{\partial p}{\partial x} y(y - h) \quad (3.8)$$

Dobiveni profil brzina je parabolični profil brzina. Za gradijent tlaka u (3.8) ćemo iskoristiti dobivene vrijednosti u numeričkoj simulaciji na kraju cijevi gdje je tok približno formiran. Takvo rješenje ćemo zvati analitičkim i usporedit ćemo ga s brzinama dobivenim u numeričkoj simulaciji.

### 3.1.2 Numeričko rješenje za konačnu ravnu cijev

Sada ćemo korištenjem razvijenog koda simulirati tok kroz ravnu cijev. U tom slučaju imamo dvije paralelne čvrste stijenke između kojih teče fluid. Fluid utječe s lijeve strane, a istječe s desne. Brzina je konstantna na ulazu pa rubni uvjet na lijevom rubu iznosi  $u = 1.0$  m/s. Na stijenkama nema proklizavanja pa brzine na stijenkama iščezavaju, kao i gradijent tlaka okomit na stijenku. Očuvanje mase definira početni uvjet  $u = 1.0$  m/s. Stoga su početni uvjeti definirani na način da je:

$$u = 1.0 \text{ m/s}, v = 0.0 \text{ m/s}, p = 0.0 \text{ Pa} \quad (3.9)$$

svugdje osim na rubovima. Postavljamo Dirichletove rubne uvjete za brzinu  $u$  za stijenke i lijevi rub gdje fluid utječe:

$$u_{bottom} = u_{top} = 0.0 \text{ m/s} \quad (3.10)$$

$$u_{left} = 1.0 \text{ m/s} \quad (3.11)$$

i Neumannov za brzinu na desnom rubu gdje fluid istječe i ne poznajemo točan iznos brzine:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{right} = 0.0 \quad (3.12)$$

Analogno, za brzinu  $v$  rubni uvjeti su:

$$v_{bottom} = v_{top} = v_{left} = 0.0 \text{ m/s} \quad (3.13)$$

i Neumannov za brzinu na desnom rubu gdje fluid istječe i ne poznajemo točan iznos brzine:

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{right} = 0.0 \quad (3.14)$$

Tlak je definiran do na konstantu pa desni rub držimo na nultom Dirichletovom rubnom uvjetu, a ostale na Neumannovom:

$$p_{right} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{left} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{bottom} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{top} = 0.0 \quad (3.15)$$

U ovom primjeru usporedit ćemo analitička i numerička rješenja za odabire različitih viskoznosti fluida. Konstante postavljamo na vrijednosti zadane u tablici 1, a viskoznosti na one prikazane u tablici 2.

**Tablica 1:** Odabir konstanti za numeričku simulaciju toka kroz ravnu cijev.

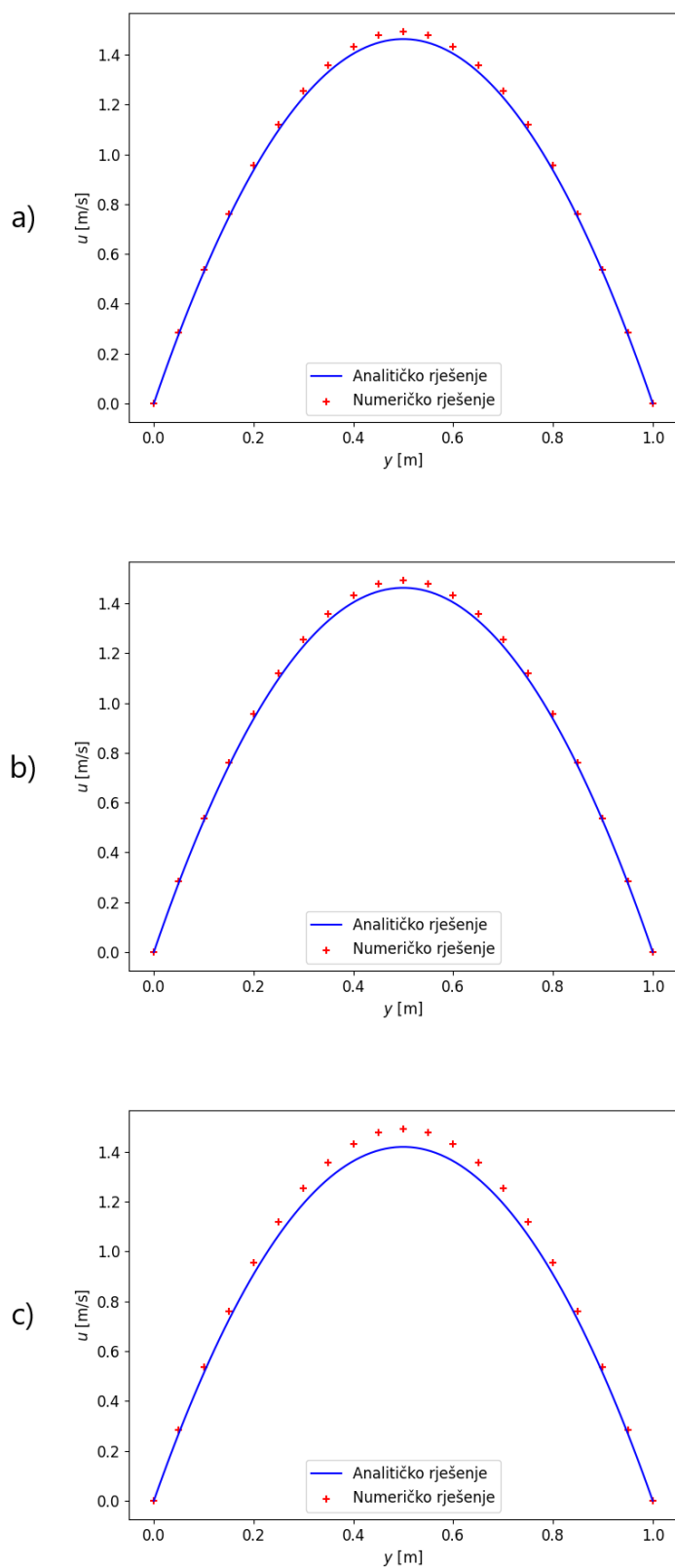
$\rho$ [kgm <sup>-3</sup> ]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta t$ [s]
1.0	0.05	0.05	0.001
$nx$	$ny$	$nt$	$nt_{Poisson}$
21	201	5000	50

**Tablica 2:** Odabir vrijednosti kinematičke viskoznosti za tri primjera numeričke simulacije toka kroz ravnu cijev.

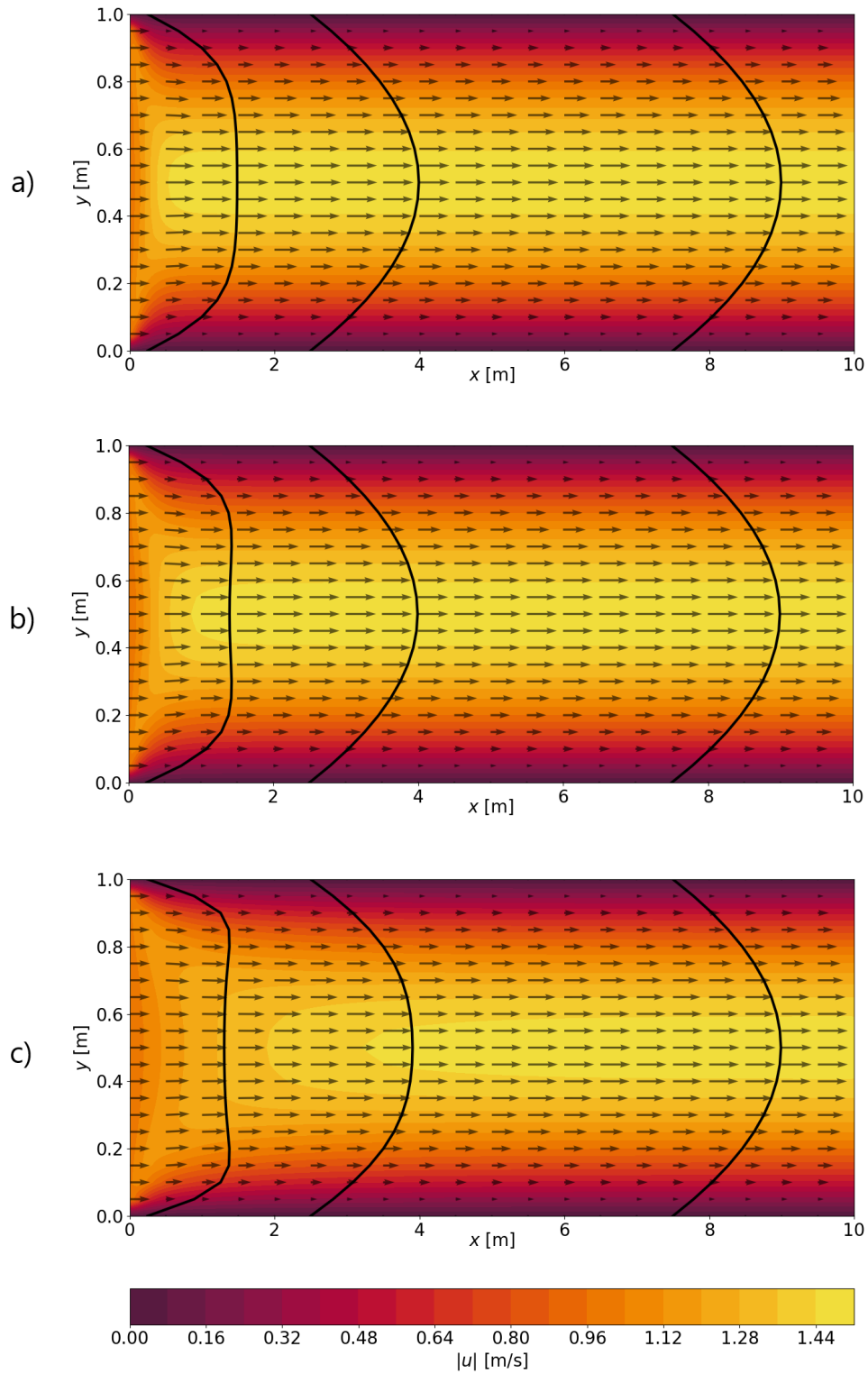
	Primjer 1	Primjer 2	Primjer 3
$\nu$ [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	0.5	0.1	0.02

Konačan rezultat usporedbe numeričkog i analitičkog rješenja za tri različite viskoznosti vidimo na slici 7. Vidimo izvrsno podudaranje numeričkog i analitičkog rješenja. Porast greške sa smanjivanjem viskoznosti možemo intepretirati kao nepotpuno razvijene profile brzina jer smanjivanjem viskoznosti treba veća duljina cijevi da se uspostavi parabolični profil, a mi smo ju držali jednakom za sve slučajeve. U tom slučaju aproksimacija beskonačne cijevi koju smo iskoristili kod analitičkog izvoda prestaje biti valjana pa analitičko rješenje više nije točno, ali za veće vrijednosti  $\nu$  smo pokazali točnost numeričkog modela. Model će ostati stabilan i točan i za niže vrijednosti  $\nu$  dok smo god u rasponu koji garantira stacionarna rješenja i dok pazimo na finoću prostorne i vremenske diskretizacije.

Sada, kada smo provjerili ispravnost modela, možemo vizualizirati navedena tri slučaja. Zanimljivo je promotriti kako se formira parabolična raspodjela brzina s obzirom na prevaljenu udaljenost u  $x$  smjeru. Prvi slučaj, u kojem je  $\nu = 0.5$  vidimo na slici 8 (a). Vidimo da je profil brzina jako brzo poprimio parabolični oblik zbog visoke viskoznosti. U drugom slučaju, imamo nešto nižu viskoznost ( $\nu = 0.1$ ) pa se profil brzina sporije mijenja u parabolični, no vidimo na slici 8 (b) da ga ipak ubrzo poprmi. Uz još nižu viskoznost  $\nu = 0.02$ , u primjeru na slici 8 (c) vidimo da profil brzina jako sporo poprma parabolični oblik.



**Slika 7:** Usporedba numeričkog i analitičkog rješenja za profil brzina u ravnoj cijevi za (a)  $\nu = 0.5$ , (b)  $\nu = 0.1$  i (c)  $\nu = 0.02$ .



**Slika 8:** Polje brzina u ravnoj cijevi za (a)  $\nu = 0.5$ , (b)  $\nu = 0.1$  i (c)  $\nu = 0.02$ . Strelice pokazuju iznos i smjer brzine, a okomite crne linije prikazuju oblik raspodjele  $x$  komponente brzine ovisno o koordinati  $y$  za nekoliko vrijednosti  $x$ .

### 3.2 Cijev sa stepenicom

Razmotrit ćemo slučaj cijevi koja na početku ima stepenicu visine  $h_{step} = 0.5$  m. Promatrat ćemo nastajanje vrtložnog gibanja u podnožju stepenice i ovisnost veličine vrtloga o iznosu  $\nu$ .

U ovom slučaju početni tok se nalazi samo u gornjoj polovici cijevi, stoga kako bi masa bila očuvana početni uvjet za brzinu je  $u = 1.0$  m/s svugdje u gornjoj polovici domene, a  $u = 0$  m/s u donjoj pa su početni uvjeti (osim na rubovima):

$$u_{upper} = 1.0 \text{ m/s}, u_{lower} = 0.0 \text{ m/s}, v = 0.0 \text{ m/s}, p = 0.0 \text{ Pa} \quad (3.16)$$

Rubni uvjeti za  $u$  su Dirichletovi za stijenke cijevi, stijenke stepenice i gornju polovicu lijevog ruba domene:

$$u_{bottom} = u_{top} = u_{step} = 0.0 \text{ m/s} \quad (3.17)$$

$$u_{left} = 1.0 \text{ m/s} \quad (3.18)$$

Za desni rub gdje fluid istječe i gdje ne poznajemo točnu brzinu postavljamo Neumannov rubni uvjet:

$$\left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{right} = 0.0 \quad (3.19)$$

Analogno, za  $v$  vrijede nulti Dirichletovi rubni uvjeti na svim rubovima osim desnog:

$$v_{bottom} = v_{top} = v_{left} = v_{step} = 0.0 \text{ m/s} \quad (3.20)$$

i Neumannov za brzinu na desnom rubu gdje fluid istječe i ne poznajemo točan iznos brzine:

$$\left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{right} = 0.0 \quad (3.21)$$

Za tlak imamo rubne uvjete jednake kao u prošlom primjeru uz dodatak rubova stepenice:

$$p_{right} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)_{left} = \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{bottom} = \left( \frac{\partial p}{\partial y} \right)_{top} = \left( \frac{\partial p}{\partial n} \right)_{step} = 0.0 \quad (3.22)$$

Konstante postavljamo na vrijednosti zadane u tablici 3, a viskoznosti na one prikazane u tablici 4.

Rezultat numeričke simulacije vidljiv je na slici 9. Možemo primjetiti kako se u suženom dijelu cijevi uspostavio parabolični profil brzina. Prelaskom preko ruba stepenice tok se

**Tablica 3:** Odabir konstanti za numeričku simulaciju toka kroz ravnu cijev sa stepenicom.

$\rho$ [kgm <sup>-3</sup> ]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta t$ [s]
1.0	0.02	0.02	0.001
$nx$	$ny$	$nt$	$nt_{Poisson}$
51	501	10000	50

**Tablica 4:** Odabir vrijednosti kinematičke viskoznosti za tri primjera numeričke simulacije toka kroz ravnu cijev sa stepenicom.

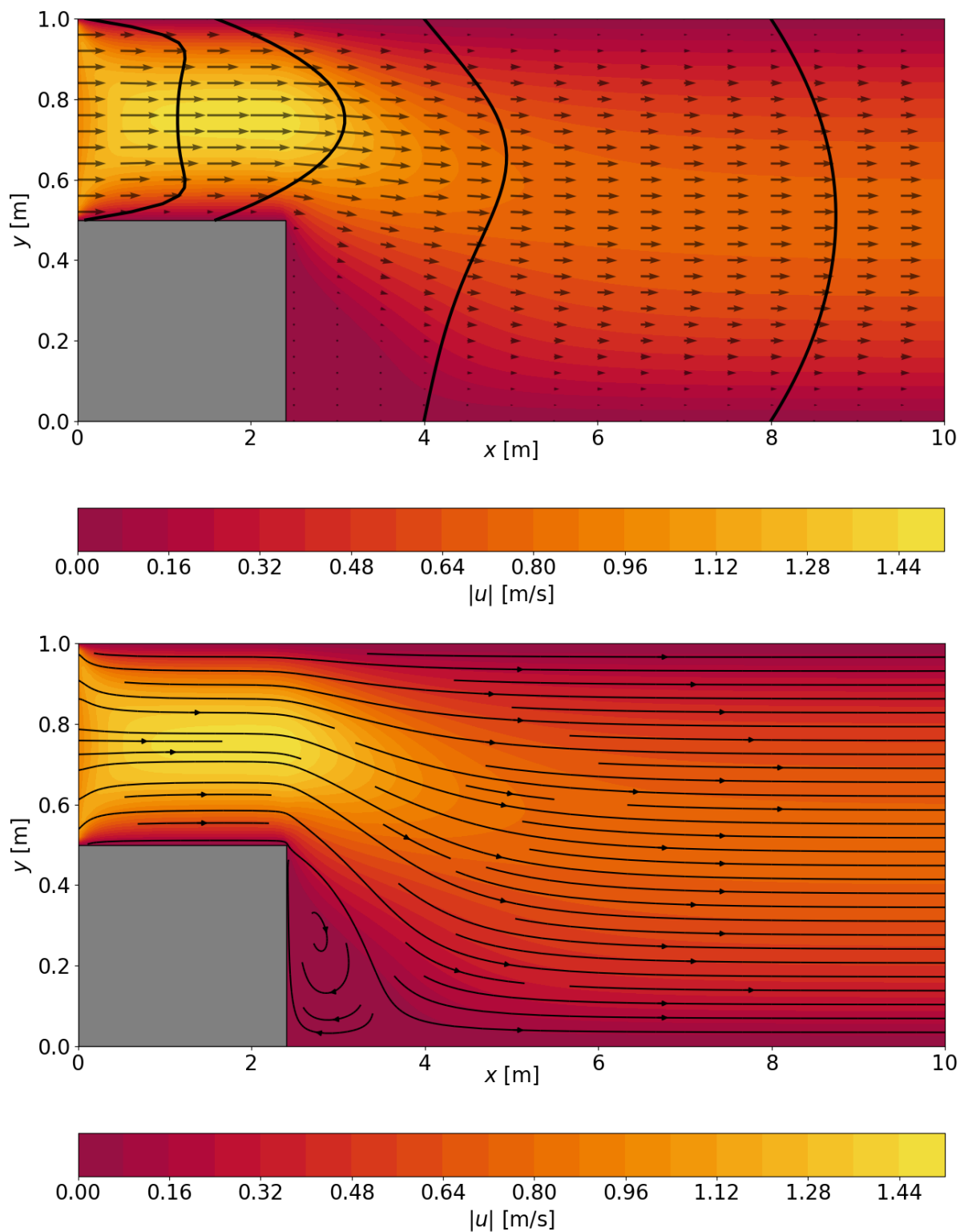
	Primjer 1	Primjer 2	Primjer 3
$\nu$ [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	0.02	0.01	0.005

poremeti jer dođe do kontakta s fluidom koji miruje što uzrokuje pojavu vrtloga. Fluid iznad vrtloga, koji nastavi s gibanjem udesno, ponovno teži poprimanju paraboličnog profila brzina. Što je veća viskoznost to se profil uspije brže uspostaviti zbog većeg trenja između slojeva fluida.

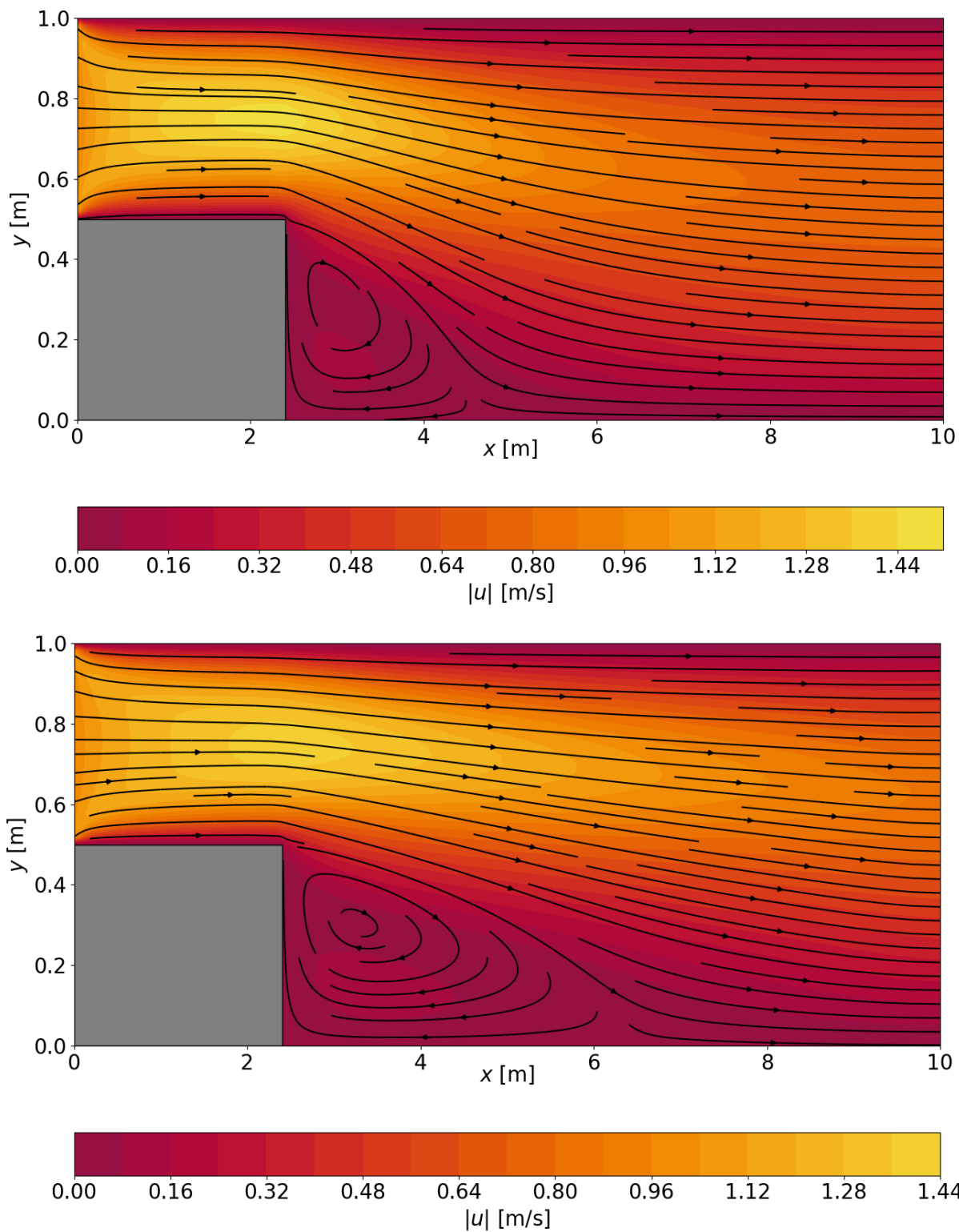
Kod ovog primjera zanimljivo je promotriti i drugačiji prikaz, a to je prikaz strujnica (eng. *streamlines*). Navedeni prikaz vidimo na slikama 9 i 10. U donjem lijevom kutu nastaje vrtlog u kojem se fluid rotira malom brzinom. Za niže vrijednosti  $\nu$  taj vrtlog će biti veći. Zbog niže viskoznosti dio slojeva se lakše "odvoji" od glavnog strujanja i tako formira veći vrtlog.

Za  $\nu = 0.005$  (slika 10 dolje) vrtlog zauzima velik dio domene. Vidimo i da se tok jako slabo prilagodio na novu širinu cijevi. Daljnjim smanjivanjem viskoznosti vrtlog bi prešao desni rub domene. To bi dovelo to netočnih rezultata zbog rubnih uvjeta pa ćemo se zadržati na dosadašnjim primjerima.





**Slika 9:** Na slici gore prikazano je polje brzina u ravnoj cijevi sa stepenicom za  $\nu = 0.02$ . Slika dolje prikazuje strujnice koje pokazuju smjer strujanja fluida za  $\nu = 0.02$ .



**Slika 10:** Polje brzina u ravnoj cijevi sa stepenicom za (gore)  $\nu = 0.01$  i (dolje)  $\nu = 0.005$ . Strujnice pokazuju smjer strujanja fluida.

### 3.3 Šupljina s pokretnim poklopcem

Posljednji primjer kojeg ćemo simulirati je poznati problem fluida u zatvorenoj šupljini s poklopcem koji se giba udesno i tjera fluid na gibanje (eng. *lid driven cavity problem*) [10]. Početni uvjeti su postojani fluid (osim na gornjem rubu) bez gradijenta tlaka:

$$u = v = 0.0 \text{ m/s}, p = 0.0 \text{ Pa} \quad (3.23)$$

Rubni uvjeti za brzinu su iščezavanje obe komponente na svim stijenkama osim  $u$  komponente na gornjoj stijenci koja prati gibanje poklopca:

$$u_{left} = u_{right} = u_{bottom} = v_{left} = v_{right} = v_{bottom} = v_{top} = 0.0 \text{ m/s} \quad (3.24)$$

$$u_{top} = 5.0 \text{ m/s} \quad (3.25)$$

Sve stijenke su čvrste pa za tlak imamo nulti Neumannov rubni uvjet na svim rubovima:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{left} = \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{right} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{bottom} = \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{top} = 0.0 \quad (3.26)$$

U tablici 5 su zadane konstante, dok tablica 6 sadrži vrijednosti viskoznosti.

**Tablica 5:** Odabir konstanti za numeričku simulaciju fluida u šupljini sa poklopcem koji se giba udesno.

$\rho$ [kgm <sup>-3</sup> ]	$\Delta x$ [m]	$\Delta y$ [m]	$\Delta t$ [s]
1.0	0.01	0.01	0.001
$nx$	$ny$	$nt$	$nt_{Poisson}$
101	101	5000	50

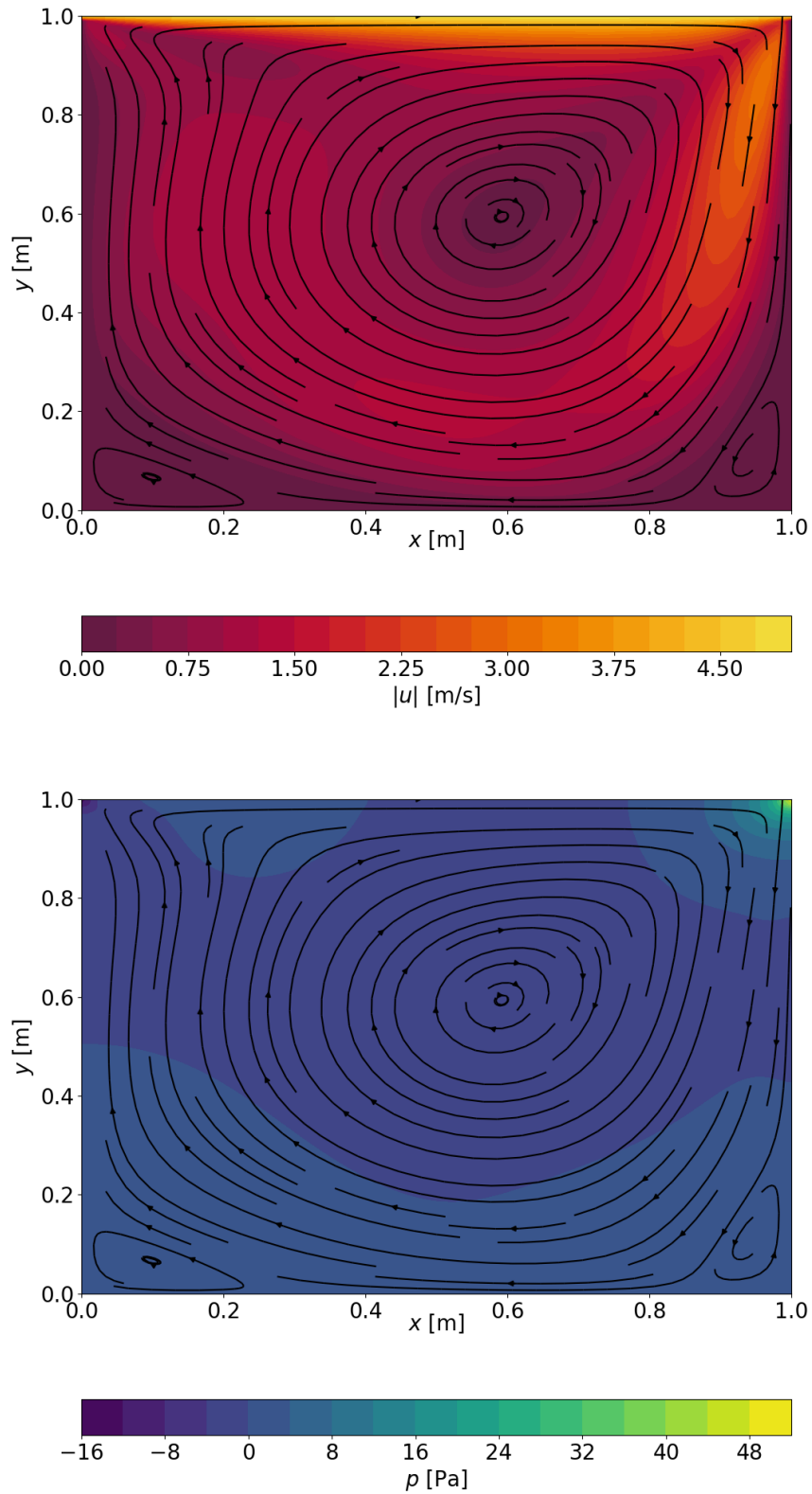
**Tablica 6:** Odabir vrijednosti kinematičke viskoznosti za dva primjera numeričke simulacije fluida u šupljini sa poklopcem koji se giba udesno.

	Primjer 1	Primjer 2
$\nu$ [m <sup>2</sup> s <sup>-1</sup> ]	0.02	0.01

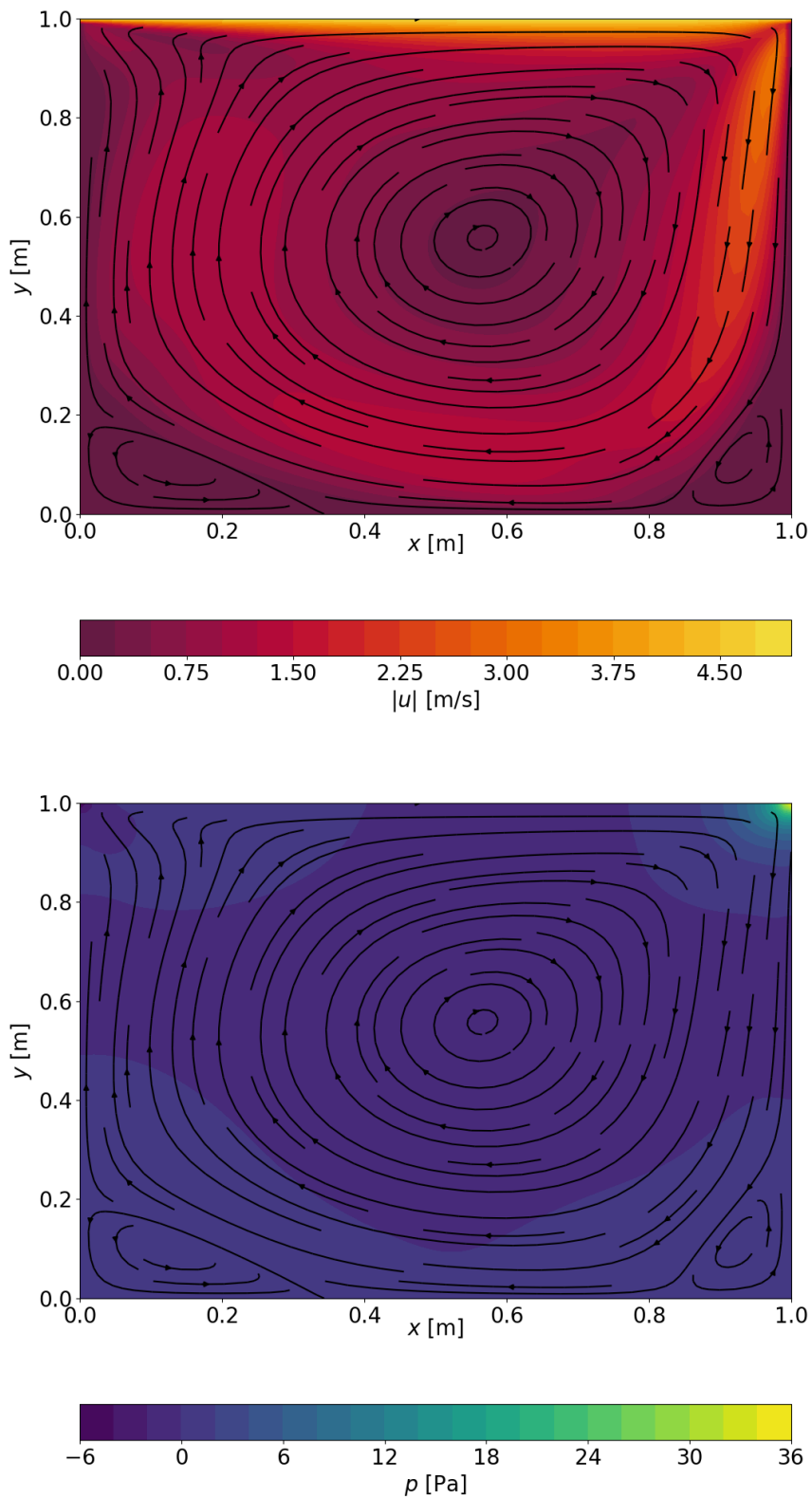
Rezultat simulacije vidljiv je na slikama 11 i 12. Vidimo da se cijeli fluid počeo rotirati u jednom velikom vrtlogu uz dva mala vrtloga u donjim kutevima šupljine. Vrtlozi u kutevima se povećavaju smanjivanjem viskoznosti fluida jer se fluid lakše odvaja od glavnog toka. Brzina je najniža u sredini i u kutevima, a najviša uz sami poklopac i desni rub što je očekivano. Za ovaj problem zanimljivo je i promotriti polje tlaka što se može vidjeti na slikama 11 (dolje) i 12 (dolje).

Tlak je daleko najviši u gornjem desnom kutu što je očekivano s obzirom da gibanje poklopca

gura fluid velikom brzinom u taj kut. Također, u gornjem lijevom kutu primjećujemo malu točku niskog tlaka što je rezultat brzog otjecanja fluida iz tog područja. Vidimo i zonu nešto višeg tlaka pri cijelom dnu šupljine.



**Slika 11:** Polje brzina (gore) i polje tlaka (dolje) u šupljini sa pokretnim poklopcem za  $\nu = 0.02$ . Strujnice pokazuju smjer strujanja fluida.



**Slika 12:** Polje brzina (gore) i polje tlaka (dolje) u šupljini sa pokretnim poklopcem za  $\nu = 0.01$ . Strujnice pokazuju smjer strujanja fluida.

## 4 Zaključak

U ovom radu cilj je bio numerički riješiti Navier-Stokesove jednadžbe za neke jednostavne dvodimenzionalne probleme kako bi se dobio uvid u metode i probleme računalne dinamike fluida. Također je cilj bio promotriti ponašanje toka u ovisnosti o viskoznosti. Pokazana je valjanost modela za niske vrijednosti Reynoldsovog broja usporedbom s analitički rješivim slučajem. Model je zatim primijenjen na slučaj toka kroz ravnu cijev sa stepenicom, što je dalo dobar uvid u način i razloge stvaranja vrtloga. Uočeno je da smanjivanjem viskoznosti raste vrtlog u podnožju stepenice zbog smanjivanja viskoznog doprinosa. U zadnjem, primjeru šupljine s pokretnim poklopcem, proučeno je nastajanje velikog i malih vrtloga uslijed brzog gibanja poklopca. Promotreno je također i polje tlaka te je zaključeno kako tlak značajno raste u području u kojeg pokušava ući veća količina fluida. Ovaj numerički model bi se mogao dalje unaprijediti korištenjem metoda kao što su metoda konačnih volumena (eng. *finite volume method*) i metoda konačnih elemenata (eng. *finite element method*) kako bi se mogli učinkovito promatrati problemi s kompleksnijim geometrijama koji bolje opisuju realne probleme, no to je izvan okvira ovog rada.

## 5 Literatura

- [1] Philip J. Pritchard, John W. Mitchell, Fox and McDonald's: *Introduction to Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, Manhattan College, 2011.
- [2] Dan S. Henningson, Martin Berggren: *Fluid Dynamics: Theory and Computation*, Stockholm, 2005.
- [3] Nasser Ashgriz, Javad Mostaghimi: *An Introduction to Computational Fluid Dynamics, Chapter 20 in Fluid Flow Handbook*, Department of Mechanical & Industrial Eng., University of Toronto
- [4] *The Reynolds Number*  
URL: <https://www.jousefmurad.com/fluid-mechanics/the-reynolds-number/> (7. 9. 2023.)
- [5] *Finite Difference Method*  
URL: [https://en.wikipedia.org/wiki/Finite\\_difference\\_method](https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method) (18. 8. 2023.)
- [6] Mark Owkes: *A guide to writing your first CFD solver*, Montana, 2017.
- [7] *NumPy*  
URL: <https://numpy.org/> (21. 8. 2023.)
- [8] *Matplotlib*  
URL: <https://matplotlib.org/> (21. 8. 2023.)
- [9] Wonder Kudzo Ekpe: *Numerical Solutions to Two-Dimensional Navier-Stokes Equations*, University of Zululand, 2015.
- [10] CFD Online: *Lid-driven cavity problem*  
URL: [https://www.cfd-online.com/Wiki/Lid-driven\\_cavity\\_problem](https://www.cfd-online.com/Wiki/Lid-driven_cavity_problem) (12. 9. 2023.)