

# Booleov model slučajnog skupa

---

**Končurat, Paula**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2023**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, Faculty of Science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://um.nsk.hr/um:nbn:hr:166:700856>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-30**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU

PAULA KONČURAT

**BOOLEOV MODEL SLUČAJNOG  
SKUPA**

DIPLOMSKI RAD

Split, rujan 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

**BOOLEOV MODEL SLUČAJNOG  
SKUPA**

DIPLOMSKI RAD

Studentica:  
Paula Končurat

Mentorica:  
doc. dr. sc. Vesna Gotovac  
Đogaš

Split, rujan 2023.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET  
SVEUČILIŠTA U SPLITU  
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD  
**BOOLEOV MODEL SLUČAJNOG SKUPA**

Paula Končurat

**Sažetak:**

*U prvom poglavlju je dana definicija Booleovog modela te osnovne funkcije i svojstva koja opisuju takav model. Od velike su važnosti i funkcionalni kapaciteta, kako za Booleov model, tako i općenito za sve slučajne zatvorene skupove. U radu smo proučavali svojstva Booleovog modela s različitim vrstima zrna, a posebice je bitan onaj model koji ima konveksna zrna. Također, Booleov model osnovni je model za perkolaciju kontinuuma. U središnjem dijelu rada proučavali smo pokrivenost i povezanost modela. Zadnje poglavlje vezano je za statistiku i simulacije ovoga modela, pri čemu je naglasak na metodama procjene parametara modela i testiranju pretpostavki modela.*

**Ključne riječi:**

*volumni udio, kovarijanca, funkcional kapaciteta, kontaktne funkcije distribucije, intenzitet, pokrivenost, povezanost, perkolacija, nakupine*

**Podatci o radu:**

*broj stranica 68, broj slika 12, broj literaturnih navoda 31, jezik izvornika: hrvatski*

**Mentorica:** *doc. dr. sc., Vesna Gotovac Đogaš*

**Članovi povjerenstva:**

*doc. dr. sc., Goran Erceg*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

*Marcela Mandarić*

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *18. rujna 2023.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT  
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS  
**BOOLEAN RANDOM SET MODEL**

Paula Končurat

**Abstract:**

*In the first chapter we gave the definition of the Boolean model and the basic functions and properties that describe such a model. Capacity functionals are also of great importance, both for the Boolean model and, in general, for all random closed sets. In this thesis, we studied the properties of the Boolean model with different types of grains, and the model with convex grains is one of the most important example. Also, the Boolean model is the basic model for continuum percolation. In the central part of the thesis, we studied the coverage and connectivity of the model. The last chapter is related to the statistics and simulations of this model, where the emphasis is on methods of estimating model parameters and testing model assumptions.*

**Key words:**

*the volume fraction, covariance, capacity functional, contact distribution functions, intensity, coverage, connectivity, percolation, clumps*

**Specifications:**

*broj stranica 68, broj slika 12, broj literaturnih navoda 31, jezik izvornika: Croatian*

**Mentor:** *assisstant professor, Vesna Gotovac Đogaš*

**Committee:**

*assisstant professor, Goran Erceg*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

*Marcela Mandarić*

This thesis was approved by a Thesis committee on *18th September, 2023*.

# Uvod

Komplicirani geometrijski uzorci pojavljuju se u mnogim područjima znanosti i tehnologije i najčešće zahtijevaju statističku analizu. Analiza ovakvih skupova podataka zahtjeva odgovarajući matematički model i odgovarajuće statističke metode. Područje matematičkih istraživanja koje nastoji osigurati i izgraditi takve modele naziva se stohastička geometrija. [1]

Stohastička geometrija bogata je grana primijenjene vjerojatnosti posebno prilagođena proučavanju slučajnih pojava u ravnini ili u višoj dimenziji. Izuzetno je vezana uz teoriju točkovnih procesa. U početku je njen razvoj bio potaknut primjenom u biologiji, astronomiji i znanostima o materijalima. Danas se također koristi u analiziranju slika i u kontekstu komunikacijskih mreža.

Osnovni pojmovi stohastičke geometrije u praksi su točke. Slični slučajni točkovni uzorci, točkovna polja ili, u matematičkoj terminologiji, točkovni procesi igraju glavnu ulogu u stohastičkoj geometriji i oni izravno nastaju kao rezultati istraživanja prirode i tehnologije.

U mnogim problemima stohastičke geometrije korisno je tumačiti uzorke geometrijskih objekata kao sustave "točaka" u prikladnim "reprezentativnim prostorima". "Točka" u nekom sustavu predstavlja određeni geometrijski objekt u originalnom uzorku.

Najjednostavniji slučajni prostorni uzorak je Booleov model, poznat i



## TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

pod nazivima Booleova schema, Poissonov klica-zrno model, Poissonov model zrna prodora, potpuno prodoran sustav zrna ili homogeni sustav preklapanja čestice. To je jedan od važnijih primjera slučajnog zatvorenog skupa jer je podložan izračunavanju i fleksibilan. Laički rečeno, Booleov model dobijemo tako da uzmemo Poissonov točkovni proces s parametrom (intenzitetom)  $\lambda$  u ravnini i svaku točku tog procesa učinimo središtem nekog slučajnog skupa te promatramo uniju tih preklapajućih skupova. Točnije, neka su točke u ravnini postavljene tako da tvore homogeni Poissonov proces s intenzitetom  $\lambda$ . Oko svake te točke opišemo disk radijusa  $r$ . Booleov model je unija svih tih diskova. [1]

Naziv Poissonov klica-zrno model dolazi od toga što točke Poissonovog procesa zovemo klice, a diskove oko njih zovemo (primarna) zrna. Sekundarna zrna se u nastavku nazivaju nakupine.[1]

Ovakva konstrukcija Booleovog modela može se poopćiti kako bi dobili opći stacionaran Booleov model. To je model kod kojeg diskove oko točaka zamjenjujemo s nezavisnim realizacijama slučajnih kompaktnih skupova.[1]

# Sadržaj

Uvod	vii
Sadržaj	ix
<b>1 Notacija i osnovni pojmovi</b>	<b>1</b>
1.1 Osnovne operacije . . . . .	1
1.2 Teorija mjere . . . . .	2
1.3 Slučajni zatvoreni skup . . . . .	5
1.4 Točkovni proces . . . . .	6
1.5 Minkowskijevi funkcionali i intrinzični volumeni . . . . .	7
<b>2 Booleov model slučajnog skupa</b>	<b>11</b>
2.1 Opis Booleovog modela . . . . .	11
2.2 Primjene Booleovog modela . . . . .	16
2.3 Stacionarnost i izotropnost . . . . .	17
2.4 Funkcional kapaciteta . . . . .	18
2.5 Osnovne karakteristike . . . . .	23
2.5.1 Volumni udio . . . . .	23
2.5.2 Kovarijanca ili dvotočkovna vjerojatnosna funkcija . . . . .	24
2.6 Kontaktne funkcije distribucije . . . . .	28

## TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

<b>3</b>	<b>Booleov model s konveksnim zrcima</b>	<b>32</b>
3.1	Pojednostavljena formula za funkcional kapaciteta . . . . .	32
3.2	Intenziteti ili gustoće intrinzičnih volumena . . . . .	33
3.3	Sjecišta s linearnim potprostorima . . . . .	36
3.4	Formule za neke specijalne Booleove modele s izotropnim konveksnim zrnima . . . . .	38
<b>4</b>	<b>Pokrivenost i povezanost</b>	<b>41</b>
4.1	Vjerojatnosti pokrivenosti . . . . .	41
4.2	Nakupine . . . . .	44
4.3	Povezanost . . . . .	45
4.4	Perkolacija . . . . .	46
4.5	Prazne regije . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Statistika</b>	<b>52</b>
5.1	Općenito . . . . .	52
5.2	Testiranje pretpostavki modela . . . . .	55
5.3	Procjena parametara modela . . . . .	57
5.3.1	Metoda gustoće . . . . .	57
5.3.2	Metoda minimalnog kontrasta . . . . .	59
5.3.3	Procjena distribucije radijusa sfernih zrna . . . . .	60
5.4	Generalizacija i varijacije . . . . .	60
	<b>Zaključak</b>	<b>64</b>
	<b>Literatura</b>	<b>65</b>

# Poglavlje 1

## Notacija i osnovni pojmovi

### 1.1 Osnovne operacije

Za početak uvedimo neke osnovne operacije koje ćemo koristiti u nastavku ovoga rada. Neka je  $\mathbb{R}^d$  euklidski prostor dimenzije  $d$ .

**Definicija 1.1 (Suma Minkowskog)** *Neka su  $A$  i  $B$  podskupovi skupa  $\mathbb{R}^d$ .*

*Suma Minkowskog definira se kao*

$$A \oplus B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Suma Minkowskog je asocijativna i komutativna operacija te vrijedi da je  $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^d), \oplus)$  Abelova polugrupa s neutralnim elementom  $\{0\}$ .

Nadalje, neka je  $x$  neka točka u  $\mathbb{R}^d$ . S  $A_x$  označavamo skup  $A$  translaticiran za točku  $x$ , tj.

$$A_x = A + x = A \oplus \{x\} = \{y + x \mid y \in A\}.$$

Skup  $A \oplus B$  može se zapisati i na idući način:

$$A \oplus B = \bigcup_{y \in B} A_y = \bigcup_{x \in A} B_x. \quad (1.1)$$

Također, vrijede i iduća svojstva:

## 1.2. Teorija mjere

$$1. A \oplus (B_1 \cup B_2) = (A \oplus B_1) \cup (A \oplus B_2)$$

$$2. A_1 \subset A_2 \implies A_1 \oplus B \subset A_2 \oplus B.$$

Slično, s

$$\check{B} = -B = \{-x \mid x \in B\}$$

označavamo skup simetričan skupu  $B \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ . Ako je  $B = \check{B}$ , onda kažemo da je skup  $B$  simetričan.

**Definicija 1.2 (Razlika Minkowskog)** *Neka su  $A$  i  $B$  podskupovi skupa  $\mathbb{R}^d$ . Razlika Minkowskog definirana je kao*

$$A \ominus B = (A^c \oplus B)^c = \bigcap_{x \in B} A_x.$$

Svi rezultati ovog odjeljka preuzeti su iz [1].

## 1.2 Teorija mjere

**Definicija 1.3 ( $\sigma$ -algebra)** *Familiju  $\mathcal{A}$  podskupova skupa  $\Omega$  nazivamo  $\sigma$ -algebra skupova na skupu  $\Omega$  ako ona ima iduća svojstva:*

$$1. \Omega \in \mathcal{A}$$

$$2. A \in \mathcal{A} \implies A^c \in \mathcal{A}$$

3. *Unija prebrojivo mnogo elemenata iz  $\mathcal{A}$  je element iz  $\mathcal{A}$ , odnosno za svaki niz  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  skupova iz  $\mathcal{A}$  vrijedi  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .*

Uređeni par  $(\Omega, \mathcal{A})$  nazivamo izmjeriv prostor, a svaki element iz  $\mathcal{A}$  zovemo izmjeriv skup.

## 1.2. Teorija mjere

Neka je  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra na skupu  $\Omega$ . Vrijedi:  $\emptyset = \Omega^c$ , svojstvo 2. povlači da je  $\emptyset \in \mathcal{A}$  pa uvjet 1. možemo zamijeniti s uvjetom  $\emptyset \in \mathcal{A}$  koji je njemu ekvivalentan.

Također, kako vrijede svojstva 2. i 3. u Definiciji 1.3, to je familija  $\mathcal{A}$  zatvorena na prebrojive presjeke, tj. vrijedi :

Presjek prebrojivo mnogo elemenata iz  $\mathcal{A}$  je element iz  $\mathcal{A}$ ,

odnosno za svaki niz  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  skupova iz  $\mathcal{A}$  vrijedi  $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ .

**Korolar 1.4** *Neka je  $\mathcal{F}$  bilo koja familija podskupova skupa  $\Omega$ . Tada je*

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcap \{ \mathcal{A} : \mathcal{A} \text{ je } \sigma\text{-algebra, } \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A} \}$$

*najmanja  $\sigma$ -algebra koja sadrži familiju  $\mathcal{F}$ . Za  $\sigma(\mathcal{F})$  kažemo da je  $\sigma$ -algebra generirana s  $\mathcal{F}$ .*

**Definicija 1.5 (Topološki prostor)** *Topološki prostor je uređeni par  $(\Omega, \mathcal{U})$ , gdje je  $\Omega$  neprazan skup, a  $\mathcal{U}$  familija podskupova od  $\Omega$  koja zadovoljava iduća svojstva:*

1.  $\emptyset, \Omega \in \mathcal{U}$
2. unija svake familije skupova iz  $\mathcal{U}$  je element iz  $\mathcal{U}$
3. presjek konačno mnogo skupova iz  $\mathcal{U}$  je element iz  $\mathcal{U}$ .

*Familija  $\mathcal{U}$  je topološka struktura ili topologija, a njeni članovi su otvoreni skupovi.*

**Definicija 1.6 (Borelova  $\sigma$ -algebra)** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{U})$  topološki prostor. Za  $\sigma$ -algebru  $\sigma(\mathcal{U})$  generiranu topologijom  $\mathcal{U}$  kažemo da je Borelova  $\sigma$ -algebra na skupu  $\Omega$ . Označavamo ju s  $\mathcal{B}(\Omega, \mathcal{U})$ ,  $\mathcal{B}(\Omega)$  ili  $\mathcal{B}_\Omega$ .*

## 1.2. Teorija mjere

U nastavku ovoga rada koristit ćemo oznaku  $\mathcal{B}^d$  za Borelovu  $\sigma$ -algebru na  $\mathbb{R}^d$ .

**Definicija 1.7 (Mjera)** *Neka je  $\mathcal{A}$   $\sigma$ -algebra na skupu  $\Omega$ . Mjera na  $\mathcal{A}$  je svako preslikavanje  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  s idućim svojstvima:*

1. (nenegativnost)  $\mu(A) \geq 0$ , za svaki  $A \in \mathcal{A}$ .
2.  $\mu(\emptyset) = 0$ .
3. ( $\sigma$ -aditivnost) Za svaki niz  $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$  disjunktnih skupova iz  $\mathcal{A}$  vrijedi

$$\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

$\mu(A)$  je mjera skupa  $A$ , a trojka  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  je prostor mjere.

**Definicija 1.8 (Lebesgueova vanjska mjera na  $\mathbb{R}^d$ )** *Funkciju  $\lambda_d^*: 2^{\mathbb{R}^d} \rightarrow [0, +\infty]$  definiranu formulom*

$$\lambda_d^*(A) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \text{vol}(I_i) : (I_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathcal{C}_A \right\},$$

gdje je  $\mathcal{C}_A$  familija svih nizova  $(I_i)_{i \in \mathbb{N}}$  omeđenih i otvorenih  $d$ -intervala koji pokrivaju skup  $A$  te  $\text{vol}(I_i)$  volumen  $d$ -intervala  $I_i$ , nazivamo Lebesgueova vanjska mjera na  $\mathbb{R}^d$ .

**Napomena 1.9** *Za skup  $A \subseteq \mathbb{R}^d$  kažemo da je izmjeriv u smislu Lebesguea ili da je Lebesgueov skup ako je on  $\lambda_d^*$ -izmjeriv.*

**Definicija 1.10** *Neka je  $\mu^*: 2^X \rightarrow [0, \infty]$  vanjska mjera na skupu  $X$ . Za skup  $B \subseteq X$  kažemo da je  $\mu^*$ -izmjeriv ako je*

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \cap B^c), \forall A \subseteq X.$$

### 1.3. Slučajni zatvoreni skup

**Definicija 1.11 (Lebesgueova mjera na  $\mathbb{R}^d$ )** *Lebesgueova mjera na  $\mathbb{R}^d$  je restrikcija Lebesgueove vanjske mjere na  $\mathbb{R}^d$  na skup  $\mathcal{M}_{\lambda_d^*}$ . Skup  $\mathcal{M}_{\lambda_d^*}$  je familija svih podskupova od  $\mathbb{R}^d$  koji su izmjerivi u smislu Lebesguea.*

U nastavku ćemo Lebesgueovu mjeru na  $\mathbb{R}^d$  označavati s  $\nu_d$ .

Rezultati iz ovog dijela poglavlja preuzeti su iz [4].

## 1.3 Slučajni zatvoreni skup

Još jedan od važnih pojmova koje ćemo koristiti u nastavku je i slučajni zatvoreni skup.

Neka je  $\mathbb{F}$  familija svih zatvorenih podskupova skupa  $\mathbb{R}^d$  i  $\mathcal{F}$  najmanja  $\sigma$ -algebra podskupova skupa  $\mathbb{F}$  koja sadrži "skupove pogotka" oblika:

$$\mathbb{F}_K = \{F \in \mathbb{F} : F \cap K \neq \emptyset\}, \text{ za } K \in \mathbb{K}, \quad (1.2)$$

gdje je  $\mathbb{K}$  skup svih kompaktnih podskupova od  $\mathbb{R}^d$ . Neka je  $\mathcal{B}(\mathcal{F})$  Borelova  $\sigma$ -algebra nad  $\mathbb{F}$  generirana skupovima  $\mathbb{F}_K$ , za svaki  $K \in \mathbb{K}$ . Tu  $\sigma$ -algebru zovemo Effrosova  $\sigma$ -algebra.

**Definicija 1.12** *Neka je  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  vjerojatnosni prostor. Preslikavanje  $X: \Omega \rightarrow \mathcal{F}$  zovemo slučajni zatvoreni skup ako je  $X$  izmjerivo preslikavanje u paru  $\sigma$ -algebri  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}(\mathcal{F}))$ , tj. ako je skup  $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \cap K \neq \emptyset\}$   $\mathcal{A}$ -izmjeriv, za svaki  $K \in \mathbb{K}$  kompaktan podskup od  $\mathbb{R}^d$ .*

Primjeri nekih slučajnih skupova su:

- slučajne točke (slučajni jednočlani skup),
- zatvorene kugle sa slučajnim središtem i radijusom,
- zatvorene kocke sa slučajnim položajima kutova i duljinama rubova.



#### 1.4. Točkovni proces

Neke kompliciranije slučajne skupove možemo dobiti korištenjem operacija kao što su unija, presjek i  $\oplus$ . U ovom diplomskom radu upoznat ćemo se s Booleovim modelom koji je primjer jednog zatvorenog slučajnog skupa generiranog korištenjem operacija kao što su unija skupova i translacija.

Rezultati iz ovog dijela poglavlja preuzeti su iz [1] i [5].

### 1.4 Točkovni proces

U stohastičkoj geometriji točkovni procesi ili točkovni uzorci igraju vrlo važnu ulogu. Jedan od najvažnijih primjera je Poissonov točkovni proces.

**Definicija 1.13 (Točkovni proces)** *Točkovni proces na  $\mathbb{R}^d$  je slučajna varijabla s vrijednostima u izmjerivom prostoru  $(\mathbb{N}, \mathcal{N})$ , gdje je  $\mathbb{N}$  familija svih nizova  $\varphi$  točaka u  $\mathbb{R}^d$ , koja zadovoljava iduća 2 svojstva:*

1. niz  $\varphi$  je lokalno konačan, odnosno svaki ograničeni podskup od  $\mathbb{R}^d$  mora sadržavati samo konačno mnogo točaka od  $\varphi$ ,
2. niz je jednostvan što znači da vrijedi  $x_i \neq x_j$  ako je  $i \neq j$ .

Označimo sa  $\varphi(B)$  broj točaka u nizu  $\varphi$  koji leži u ograničenom Borelovom skupu  $B$ .  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{N}$  je najmanja  $\sigma$ -algebra na  $\mathbb{N}$  takva da su sva preslikavanja  $\varphi \rightarrow \varphi(B)$  izmjeriva u paru sigma-algebri  $(\mathcal{N}, \mathcal{B})$  za sve  $B$  ograničene Borelove skupove.

U praksi se često koristi notacija  $\varphi = \{x_n\}$ , no mi ćemo u nastavku ovoga rada koristiti notaciju  $\Phi$  za točkovni proces i  $\phi$  za jednu realizaciju točkovnog procesa.

**Definicija 1.14 (Poissonov točkovni proces)** *Poissonov točkovni proces je točkovni proces  $\Phi$  koji ima iduća dva svojstva:*

## 1.5. Minkowskijevi funkcionali i intrinzični volumeni

1. **Poissonova distribucija broja točaka:** Slučajan broj točaka procesa  $\Phi$  u ograničenom Borelovom skupu  $B$  ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem  $\lambda\nu_d(B)$  za neku konstantu  $\lambda$ , tj. vrijedi

$$\mathbb{P}(\Phi(B) = m) = \exp(-\lambda\nu_d(B)) \frac{(\lambda\nu_d(B))^m}{m!} \text{ za } m = 0, 1, 2, \dots \quad (1.3)$$

2. **Nezavisna raspršenost:** Broj točaka procesa  $\Phi$  u  $k$  disjunktih Borelovih skupova tvori  $k$  nezavisnih slučajnih varijabli, za neki proizvoljni  $k$ .

**Definicija 1.15 (Stacionarnost)** Za točkovni proces  $\Phi = \{x_n\}$  kažemo da je stacionaran ako translaticirani proces  $\Phi_x = \{x_n + x\}$  ima istu distribuciju kao i  $\Phi$ , za sve  $x \in \mathbb{R}^d$ .

**Definicija 1.16 (izotropnost)** Za točkovni proces  $\Phi = \{x_n\}$  kažemo da je izotropan ako rotirani proces  $\mathbf{r}\Phi = \{\mathbf{r}x_n\}$  ima istu distribuciju kao i  $\Phi$ , gdje je  $\mathbf{r}$  rotacija oko ishodišta.

**Definicija 1.17 (Invarijantnost na kretanje)** Za točkovni proces koji je stacionaran i izotropan kažemo da je invarijantan na kretanje.

Svi rezultati navedeni u ovom odjeljku su iz [1].

## 1.5 Minkowskijevi funkcionali i intrinzični volumeni

Minkowskijevi funkcionali i intrinzični volumeni su funkcionali koji opisuju globalne karakteristike konveksnog skupa, na primjer opseg i površinu u 2-dimenzionalnom slučaju, te površina ruba i volumen u 3-dimenzionalnom slučaju.

### 1.5. Minkowskijevi funkcionali i intrinzični volumeni

Minkowskijevi funkcionali konveksnog tijela  $K \subset \mathbb{R}^d$  za proizvoljni  $k = 0, \dots, d$ , u oznaci  $W_k(K)$ , su definirani izravno po formuli

$$W_k(K) = \frac{b_d}{b_{d-k}} \int_{\mathbb{L}_k} \nu_{d-k}(K|_{(\mathbb{L}_k)^\perp}) dU_k, \quad (1.4)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \nu_k &\longrightarrow k\text{-dimenzionalna Lebesgueova mjera} \\ \mathbb{L}_k &\longrightarrow \text{skup svih } k\text{-potprostora} \\ K|_{(\mathbb{L}_k)^\perp} &\longrightarrow \text{ortogonalna projekcija od } K \text{ na } (\mathbb{L}_k)^\perp \\ (\mathbb{L}_k)^\perp &\longrightarrow (d-k)\text{-potprostor ortogonalan na } \mathbb{R}^d \in \mathbb{L}_k \\ U_k &\longrightarrow \text{uniformna vjerojatnosna distribucija na } \mathbb{L}_k \\ b_k &\longrightarrow \text{volumen jedinične kugle u } \mathbb{R}^k. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Volumen  $b_k$  može se računati po formuli

$$b_k = \frac{\sqrt{\pi^k}}{\Gamma(1 + k/2)}.$$

Neki važni slučajevi su

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 2, \quad b_2 = \pi, \quad b_3 = 4\pi/3. \quad (1.6)$$

Ako je  $K$  jedinična kugla, onda je  $W_k(K) = W_k(B(o, 1)) = b_d$ , za  $k = 0, 1, \dots, d$ .

Za općenite slučajeve kada je  $K$  konveksno tijelo, vrijedi da je  $W_0(K)$  jednak  $\nu_d(K)$ , dok je  $W_d(K)$  konstantan i, neovisno o  $K$ , jednak je  $b_d$ .

Također, Minkowskijevi funkcionali  $W_k$  su usko vezani za takozvane intrinzične volumene  $V_k$ :

$$b_{d-k} V_k(K) = \binom{d}{k} W_{d-k}(K), \quad \text{za } k = 0, 1, \dots, d. \quad (1.7)$$

Koji od ova dva funkcionala ćemo koristiti ovisi samo o matematičkoj konvenciji. Primjerice,  $V_k$  možemo smatrati boljim izborom jer ovisi samo o  $K$ ,

### 1.5. Minkowskijevi funkcionali i intrinzični volumeni

a ne i o dimenziji cijeloga prostora  $\mathbb{R}^d$ . Uvrštavanjem  $W_0(K)$ ,  $W_1(K)$ ,  $W_d(K)$  i  $W_{d-1}(K)$  u formulu (1.7) dobivamo:

$$\begin{aligned}V_0(K) &= 1, \\V_{d-1}(K) &= \frac{1}{2}S_d(K), \\V_d(K) &= \nu_d(K).\end{aligned}\tag{1.8}$$

pri čemu je  $S_d(K)$   $(d-1)$ -dimenzionalna površina od  $\partial K$ , tj. ruba skupa  $K$ .

Navedimo sada još i kako dobiti neke intrinzične volumene u slučaju  $d = 1, d = 2, d = 3$ :

- $d = 1$ :

$$\begin{aligned}V_0(K) &= 1, \\V_1(K) &= l(K),\end{aligned}\tag{1.9}$$

- $d = 2$ :

$$\begin{aligned}V_0(K) &= 1, \\V_1(K) &= \frac{L(K)}{2}, \\V_2(K) &= A(K),\end{aligned}\tag{1.10}$$

### 1.5. Minkowskijevi funkcionali i intrinzični volumeni

- $d = 3$ :

$$\begin{aligned}V_0(K) &= 1, \\V_1(K) &= 2\bar{b}(K), \\V_2(K) &= \frac{S(K)}{2}, \\V_3(K) &= V(K),\end{aligned}\tag{1.11}$$

gdje je  $V$  oznaka za volumen,  $S$  i  $A$  za površinu,  $\bar{b}$  za prosječnu širinu,  $l$  za duljinu te  $L$  za opseg konveksnog tijela  $K$ .

Prethodni rezultati preuzeti su iz [1].

# Poglavlje 2

## Booleov model slučajnog skupa

### 2.1 Opis Booleovog modela

Neka je  $\Phi = \{x_1, x_2, \dots\}$  homogeni Poissonov proces u  $\mathbb{R}^d$  intenziteta  $\lambda$  (uočimo da je ovo navođenje točkaka  $x_i$  na neki proizvoljan način). Neka je  $\Xi_1, \Xi_2, \dots$  niz nezavisnih jednako distribuiranih slučajnih kompaktnih skupova u  $\mathbb{R}^d$  koji su nezavisni od Poissonovog procesa  $\Phi$  i zadovoljavaju tehnički uvjet

$$\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0 \oplus K)) < \infty, \quad (2.1)$$

za sve kompaktne skupove  $K$ .  $\Xi_0$  zovemo tipično zrno i ono u nastavku označava slučajni kompaktni skup iste distribucije kao i zrna  $\Xi_n$ , ali nezavisan i od zrna i od klica procesa  $\Phi$ . Booleov model  $\Xi$  konstruira se koristeći klice  $x_n$  i zrna  $\Xi_n$  na sljedeći način:

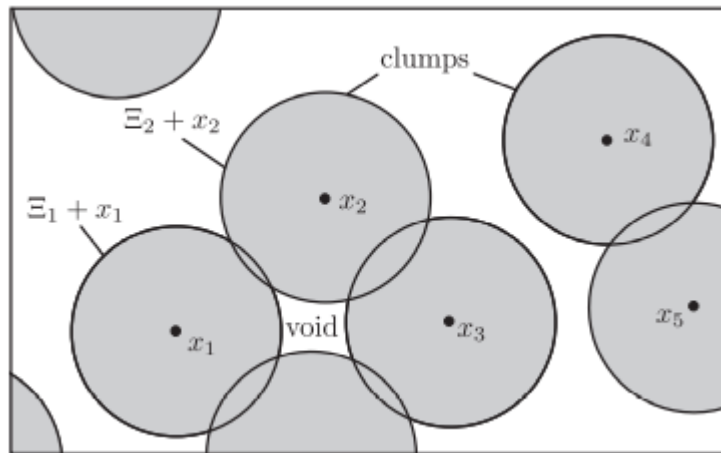
$$\Xi = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Xi_n + x_n) = (\Xi_1 + x_1) \cup (\Xi_2 + x_2) \cup \dots \quad (2.2)$$

Ovako definirana unija (2.2) je slučajni zatvoreni skup koji nazivamo Booleov model s tipičnim zrnom  $\Xi_0$ .

## 2.1. Opis Booleovog modela

Primjer izgleda jednog planarnog Booleovog modela dan je na Slici 2.1 na stranici 12.

Tehnički uvjet (2.1) garantira da se samo konačno mnogo zrna  $\Xi_n + x_n$  dodiruje s danim kompaktnim skupom. Ovo posebice znači da je svojstvo zatvorenosti skupa nasljeđeno od  $\Xi$  iz zrna.

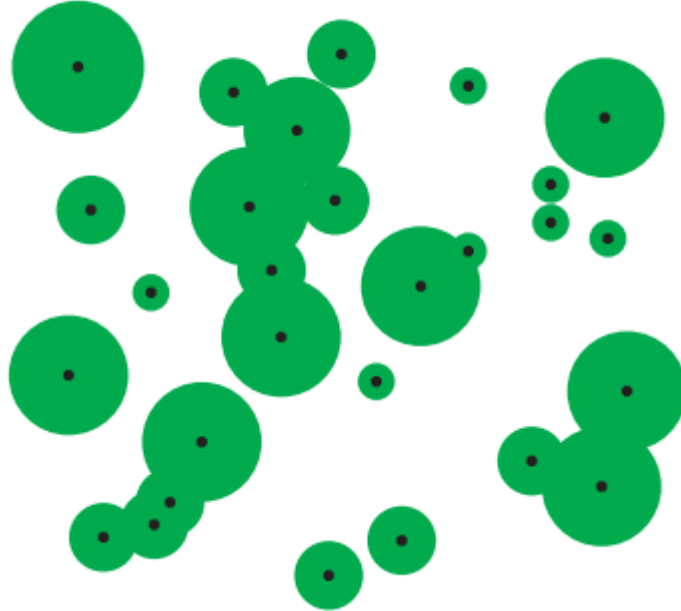


Slika 2.1: Dijagramska slika planarnog Booleovog modela. Prazan prostor omeđen s četiri zrna zove se "praznina" (eng. "void"). Ključ:  $x_n$ ; zrna:  $\Xi_n$ . Slika preuzeta iz [1].

S druge točke gledišta, koja je ujedno i više teoretska nego konstruktivna, definiramo Booleov model kao uniju skupova koji proizlaze iz Poissonovog procesa u prostoru  $\mathbb{K}$  svih nepraznih kompaktnih podskupova od  $\mathbb{R}^d$ . Tada je gornje spomenuti tehnički uvjet zahtjev da je mjera vezana za Poissonov proces zapravo  $\sigma$ -konačna mjera na  $\mathbb{K}$ , uzimajući u obzir odgovarajuću topologiju na  $\mathbb{K}$ .

Kad imamo slučaj Booleovog modela u ravnini najčešće se za zrna uzima disk proizvoljnog radijusa, slučajne zatvorene kugle, razni nasumični poligoni, segmenti nasumičnih duljina i orijentacija te slučajne konačne nakupine točkaka.

## 2.1. Opis Booleovog modela



Slika 2.2: Booleov model sa slučajnim sferičnim zrnima. Slika preuzeta iz [2].

**Definicija 2.1 (Slučajna zatvorena kugla)** *Slučajna zatvorena kugla je zatvorena kugla  $B(o, m)$  slučajnog radijusa  $m \in \mathbb{R}^+$  sa središtem u ishodištu  $o \in \mathbb{R}^d$ .*

**Lema 2.2** *Neka je  $\Xi$  Booleov model s intenzitetom klica  $\lambda$  i tipičnim zrnom  $\Xi_0$ . Broj zrna tog Booleovog modela koja sijeku dani kompaktni skup  $K$ , u oznaci*

$$N_K = \#\{x_i : (x_i + \Xi_i) \cap K \neq \emptyset\},$$

*je Poissonova slučajna varijabla s parametrom  $\mathbb{E}[\lambda(\check{\Xi} \oplus K)]$ .*

Bitna karakteristika zrna jest njihova distribucija  $M$ . Kako su to slučajni skupovi, njihova distribucija je vjerojatnosna mjera na  $\mathbb{K}$ . To je distribucija oznaka označenog točkavnog procesa  $\{[x_n; \Xi_n]\}$ .



## 2.1. Opis Booleovog modela



Slika 2.3: Računalna simulacija jednog Booleovog modela s bijelim zrnima u obliku diska. Parametri simulacije su prilagođeni uzorku dijela ležišta kalija. Bijela područja na slici odgovaraju područjima koja sadrže kalij. Slika preuzeta iz [1].

**Definicija 2.3 (Označeni točkovni proces)** *Označeni točkovni proces na  $\mathbb{R}^d$  je slučajni niz  $\psi = [x_n; m_n]$  gdje točke  $x_n$  zajedno tvore neoznačen točkovni proces, koji još zovemo i temeljni proces, u  $\mathbb{R}^d$ , a  $m_n$  su oznake koje pripadaju odgovarajućim točkama  $x_n$ .*

Oznake  $m_n$  pripadaju prostoru oznaka  $\mathbb{M}$  za kojeg pretpostavljamo da je topološki prostor koji je separabilan i metrizabilan, s metrikom koja ga čini potpunim metričkim prostorom. Borelovu  $\sigma$ -algebru na  $\mathbb{M}$  označavamo s  $\mathcal{M}$ .

U slučaju Booleovog modela te oznake su nezavisne. Ako su zrna konvektna, onda statističke sredine različitih numeričkih mjera konveksnih skupova

## 2.1. Opis Booleovog modela

igraju važnu ulogu u teoriji. Njihovo objašnjenje dano je na slici ( 2.4). U slučaju nekonveksnih zrna neke od ovih sredina su i dalje dobro definirane te se koriste isti simboli.

U Euklidskom prostoru $\mathbb{R}^d$ :	
$\bar{V}_k$	očekivanje k-tog intrinzičnog volumena
U prostornom slučaju d=3:	
$\bar{V}$	očekivani volumen , $\bar{V} = \bar{V}_3$
$\bar{S}$	očekivana površina , $\bar{S} = 2\bar{V}_2$
$\bar{M}$	očekivani integral srednje zakrivljenosti , $\bar{M} = \pi\bar{V}_1$
$\bar{b}$	očekivana širina , $\bar{M} = 2\pi\bar{b}$ , and $\bar{b} = \frac{1}{2}\bar{V}_1$
U ravnini , $d = 2$ :	
$\bar{A}$	očekivana površina , $\bar{A} = \bar{V}_2$
$\bar{L}$	očekivana duljina granice , $\bar{L} = 2\bar{V}_1$
$\bar{b}$	je statistička sredina geometrijskog prosjeka s obzirom na sve moguće smjerove

Slika 2.4: Statističke sredine različitih numeričkih mjera konveksnih skupova. Slika preuzeta iz [1].

**Definicija 2.4 (Homogeni Booleov model)** *Kažemo da je Booleov model  $\Xi$  homogen ako je pripadajući osnovni Poissonov točkovni proces stacionaran. Intenzitet tog točkovnog procesa,  $0 < \lambda < \infty$ , je također intenzitet homogenog Booleovog modela.*

Rezultati iz ovog odjeljka su iz [1] i [2].

## 2.2. Primjene Booleovog modela

# 2.2 Primjene Booleovog modela

Postoje dva različita načina primjene Booleovog modela.

Prvi način odnosi se na Booleov model kao model za rijetke sustave nasumično raspoređenih čestica. Pod pojmom rijetki sustav misli se na odabir Booleovog modela koji ima malu vrijednost intenziteta  $\lambda$  Poissonovog procesa klica.

Ako je dio prostora koji prekriva  $\Xi$  mali, zrna se najčešće neće preklapati pa će se  $\Xi$  uglavnom sastojati od odvojenih čestica. S povećanjem intenziteta  $\lambda$  broj tih preklapanja se povećava. Ta preklapanja se mogu uočiti u prirodi, npr. možemo ih vidjeti u rupama u siru ili na područjima poljoprivrednih polja među korovom.

Drugi način primjene Booleovog modela je za opis nekog nepravilnog uzorka opaženog u prirodi (slika 2.3 na stranici 14). Uloga Booleovog modela u ovom slučaju je osigurati nepravilne slučajne skupove prikladnog oblika, a njegova konstrukcija ne treba odgovarati fizičkoj stvarnosti.

Booleov model koristi se, barem u slučaju sfernih zrna, još od polovice 19. stoljeća (fizičar Clausius 1958. godine).

Navedimo još listu primjera radova nekih autora iz prirodnih i inženjerskih znanosti koji su koristili Booleov model:

1. Armitage (1949.): nasumično nakupljanje čestica prašine ili praha (vidi [7])
2. Diggle (1981.): rasprostranjenost vrijeska u šumi (vidi [8])
3. Jacod i Joathon (1971.): oblik geoloških struktura nastalih sedimentacijom te oblik geoloških naslaga kalija (vidi [9])
4. Hermann (1991.): različiti primjeri primjene Booleovog modela u ma-

### 2.3. Stacionarnost i izotropnost

terijalnim znanostima (vidi [10])

5. Jeulin et al. (2001.): mikrostruktura žbuke od igličastih kristala gipsa; zrna su modelirana kao Poissonovi poliedri ili nasumični paralelopipedi itd. (vidi [11])

Zrnca Booleovog modela ne moraju biti povezani skupovi. Na primjer, to mogu biti skupovi diskretnih točaka pa je u tom slučaju Booleov model točkovni proces, točnije, Neyman-Scottov točkovni proces. Neyman-Scottov točkovni proces je Poissonov cluster proces koji je rezultat homogenog nezavisnog grupiranja. Roditeljske točke čine homogeni Poissonov proces intenziteta  $\lambda_p$ , a djeca tih točaka jednog clustera su raspršena nezavisno s jednakom prostornom gustoćom vjerojatnosti  $f(y)$  oko ishodišta. Točkovni uzorak koji promatramo čine samo točke koje su djeca, a roditeljske točke ne promatramo.

Još jedan zanimljiv način primjene Booleovog modela je kod bombardiranja. Klice su u ovom slučaju udarne točke bombi, a zrna su područja prekrivena krhotinama od odgovarajućih eksplozija bombi.

U jednodimenzionalnom slučaju, kada su zrna intervali, Booleov model je ponekad opisan kao  $M/G/\infty$  red. Ovo je notacija za model čekanja u redu gdje su dolasci kupaca klice distribuirane prema Poissonovom procesu, vremena usluge zrna (nezavisna i jednakodistribuirana) te postoji beskonačno mnogo poslužitelja.

Preuzeto iz [1].

## 2.3 Stacionarnost i izotropnost

Booleov model, koji smo ranije definirali, jest stacionaran proces što slijedi iz toga da je Poissonov proces  $\Phi$  klica stacionaran te iz toga da zrna imaju

## 2.4. Funkcional kapaciteta

jednaku distribuciju. Drugim riječima, njegova distribucija je invarijantna na translacije.

Vrijedi

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\nu_d(\Xi \cap B(o, r))}{\nu_d(B(o, r))} = p, \quad (2.3)$$

gdje je  $p = \mathbb{P}(o \in \Xi)$  volumni udio Booleovog modela, tj. udio od  $\mathbb{R}^d$  koji je prekriven sa  $\Xi$ , a  $B(o, r)$  je oznaka za kuglu sa središtem u ishodištu  $o$  i radijusa  $r$ . Kasnije ćemo navesti preciznu definiciju od  $p$ .

Ukoliko je distribucija zrna izotropna (nepromjenjiva prilikom rotacija oko ishodišta), tada je Booleov model također izotropan. No, Booleov model može biti izotropan čak i ako zrna nisu izotropna.

izotropnost i stacionarnost zajedno impliciraju da Booleov model ima distribuciju koja je invarijantna na gibanja, tj. nepromjenjiva prilikom translacija i rotacija oko ishodišta.

Neke od primjena zahtjevaju nehomogene Booleove modele. Važni slučaj je kada su zrna nezavisna i jednakodistribuirana kao u stacionarnom slučaju, ali Poissonov proces klica je nehomogen s funkcijom intenziteta  $\lambda(x)$ . Ovaj model koristi se u vojnim primjenama, a korišten je i u Cressienom modelu tumora iz 1992. godine. Na slici ( 2.5) na stranici 19. prikazana je jedna simulacija ovakvog modela. U slučaju sa slike vrijedi

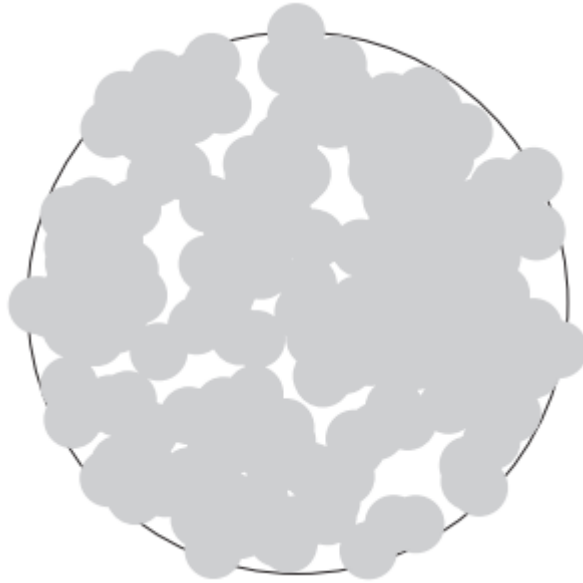
$$\lambda(x) = \lambda \mathbb{1}_A(x)$$

gdje je  $A = B(o, R)$  i  $\Xi_0 = B(o, r)$ .

## 2.4 Funkcional kapaciteta

Vjerojatnosna funkcija distribucije jedinstveno određuje zakon razdiobe neke slučajne varijable ili slučajnog vektora. U slučaju slučajnih zatvorenih sku-

## 2.4. Funkcional kapaciteta



Slika 2.5: Simulirani uzorak nehomogenog Booleovog modela s diskoidnim zrnima i funkcijom intenziteta koja ima konstantnu vrijednost unutar diska i iščezava izvana. Slika preuzeta iz [1].

pova, umjesto vjerojatnosne funkcije distribucije definira se funkcional kapaciteta.

**Definicija 2.5** *Funkcional kapaciteta slučajnog zatvorenog skupa  $X$  je funkcija  $T_X: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$  definirana s*

$$T_X(K) = \mathbb{P}(X \cap K \neq \emptyset), \quad , \quad \text{za svaki kompaktni skup } K \in \mathbb{K}.$$

**Primjer 2.6 (Deterministički slučajni zatvoreni skup)** *Neka je  $X$  slučajni zatvoreni skup takav da je  $\mathbb{P}(X \cap K \neq \emptyset) \in \{0, 1\}$ , za svaki  $K \in \mathbb{K}$ , tj. funkcija  $T_X$  poprima samo dvije vrijednosti, 0 ili 1. Tada postoji  $S \subseteq \mathbb{R}^d$  tako da vrijedi  $X = S, \mathbb{P} - g.s.$  Ovakav slučajni zatvoreni skup  $X$  zovemo deterministički slučajni zatvoreni skup.*

## 2.4. Funkcional kapaciteta

Distribucija Booleovog modela je jedinstveno određena njegovim funkcionalom kapaciteta ili distribucijom  $T_{\Xi}$ :

$$T_{\Xi}(K) = \mathbb{P}(\Xi \cap K \neq \emptyset) = \mathbb{P}(\mathbb{F}_K) \text{ za sve kompaktne skupove } K. \quad (2.4)$$

Uočimo da je izrazom (2.4) funkcional kapaciteta definiran za sve slučajne zatvorene skupove  $\Xi$ . Također, teorija slučajnih zatvorenih skupova tvrdi da funkcional jednoznačno određuje distribuciju slučajnog zatvorenog skupa. Choquetov teorem (iz knjige [1]) o kapacitetima daje preciznu karakterizaciju distribucije slučajnog zatvorenog skupa.

**Teorem 2.7 (Choquetov teorem)** *Neka je  $T$  funkcional na  $\mathbb{K}$ . Tada postoji (jedinstvena) distribucija  $\mathbb{P}$  na  $\mathcal{F}$  takva da  $\mathbb{P}(\mathbb{F}_K) = T(K)$  ako i samo ako je  $T$  alternirajući Choquetov kapacitet beskonačnog reda i takav da je  $0 \leq T(K) \leq 1$ , za  $K \in \mathbb{K}$  te  $T(\emptyset) = 0$ , tj.  $T$  zadovoljava svojstva 1.- 4. koja su navedena dolje.*

**Definicija 2.8 (Monotono padajući niz)** *Niz  $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$  je monotono padajući ako je  $K_i \supseteq K_{i+1}$ , za svaki  $i \in \mathbb{N}$ . U tom slučaju pišemo  $K_n \downarrow K$ , gdje je  $K = \bigcap_{i=1}^{\infty} K_i$ .*

$T_{\Xi}(K)$  zadovoljava iduća svojstva:

1. gornju poluneprekidnost: ako  $K_n \downarrow K$ , onda  $T_{\Xi}(K_n) \downarrow T_{\Xi}(K)$  (Napomena: Oznaka  $\downarrow$  opisana je u Definiciji 2.8.)
2. alternacija:  $S_n(K; K_1, \dots, K_n) \geq 0$ , za sve  $n$ , gdje je

$$S_n(K; K_1, \dots, K_n) = S_{n-1}(K; K_1, \dots, K_{n-1}) - S_{n-1}(K \cup K_n; K_1, \dots, K_{n-1}),$$

te  $S_0(K) = 1 - T_{\Xi}(K)$ , pri čemu su  $K, K_1, \dots, K_n$  kompaktni podskupovi od  $\mathbb{R}^d$ . Primijetimo da je  $S_n(K; K_1, \dots, K_n)$  jednak

$$\mathbb{P}(\Xi \cap K = \emptyset, \Xi \cap K_1 \neq \emptyset, \dots, \Xi \cap K_n \neq \emptyset),$$

#### 2.4. Funkcional kapaciteta

3.  $T_{\Xi}(\emptyset) = 0$ .
4.  $0 \leq T_{\Xi}(K) \leq 1$ , za sve  $K \in \mathbb{K}$ .
5.  $\mathbb{P}(\Xi_1 \cap K_1 \neq \emptyset, \Xi_2 \cap K_2 \neq \emptyset) = T_{\Xi_1}(K_1)T_{\Xi_2}(K_2)$ , za sve kompaktne skupove  $K_1$  i  $K_2$ .
6.  $T_{\Xi_1 \cup \Xi_2}(K) = T_{\Xi_1}(K) + T_{\Xi_2}(K) - T_{\Xi_1}(K)T_{\Xi_2}(K)$ , za sve  $K \in \mathbb{K}$ .
7. invarijantnost na translacije:  $T_{\Xi}(K) = T_{\Xi}(K_x)$ , za svaki kompaktni skup  $K$  i svaki  $x \in \mathbb{R}^d$ .
8. invarijantnost na kretanje:  $T_{\Xi}(K) = T_{\Xi}(\mathbf{m}K)$ , za svako gibanje  $\mathbf{m}$  i  $K \in \mathbb{K}$ .

U slučaju Booleovog modela,  $T_{\Xi}(K)$  se može izraziti u jednostavnom obliku za razliku od ostalih sumarnih statističkih karakteristika povezanih s ovim modelom. Primjenom Poissonove pretpostavke,  $T_{\Xi}(K)$  se može izraziti kao

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}(\nu_d(\check{\Xi}_0 \oplus K))) \quad (2.5)$$

ili kao

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0 \oplus \check{K}))). \quad (2.6)$$

**Dokaz.** Neka je  $K$  neki proizvoljni fiksni kompakti skup. Iz originalnog procesa klica  $\Phi$  možemo konstruirati stanjeni proces  $\Phi_K$ . Stanjivanje vršimo tako da izbrišemo  $x_n$  iz procesa  $\Phi$  ako je  $(\Xi_n + x_n) \cap K$  prazan skup. To znači da je

$$\Phi_K = \{x_n \in \Phi : (\Xi_n + x_n) \cap K \neq \emptyset\}.$$

Uočimo da je u ovom procesu stanjivanja brisanje ili ostavljanje klice  $x_n$  neovisno o stanjivanju ostalih klica. To proizlazi iz činjenice nezavisnosti Booleovog procesa: brisanje ovisi samo o lokaciji klice i odgovarajućeg zrna. Ova



## 2.4. Funkcional kapaciteta

nezavisnost implicira da je  $\Phi_K$  također Poissonov proces, ali nehomogen s funkcijom intenziteta  $\lambda_K(x)$  i sa konačnim brojem točaka. Vrijedi da je

$$\lambda_K(x) = \lambda p(x),$$

gdje je  $p(x) = \mathbb{P}((\check{\Xi}_0 + x) \cap K \neq \emptyset)$ . Uočimo da je  $p(x)$  vjerojatnost da klica  $x$  nije izbrisana. To je tzv. vjerojatnost zadržavanja.

Ukupan broj točaka procesa  $\Phi_K$  ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem  $\mu_K$ ,

$$\mu_K = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} p(x) dx. \quad (2.7)$$

Stoga je vjerojatnost da je  $\Phi_K$  prazan jednaka

$$\mathbb{P}(\Phi_K \text{ nema točaka}) = \exp(-\mu_K). \quad (2.8)$$

Posljedica toga je da se vrijednost  $T_{\Xi}(K)$  dobiva kao

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp(-\mu_K). \quad (2.9)$$

Dakle, dovoljno je izračunati  $\mu_K$ .

Vjerojatnost  $p(x)$  je dana s

$$p(x) = \mathbb{P}(x \in \check{\Xi}_0 \oplus K). \quad (2.10)$$

Stoga je

$$\begin{aligned} \mu_K &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} p(x) dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{P}(x \in \check{\Xi}_0 \oplus K) dx \\ &= \lambda \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{E}(\mathbb{1}_{\check{\Xi}_0 \oplus K}(x)) dx = \lambda \mathbb{E}(\nu_d(\check{\Xi}_0 \oplus K)). \end{aligned}$$

Posljednje navedeno očekivanje je konačno što slijedi iz tehničkog uvjeta koji se zahtjeva u definiciji Booleovog modela.

Dakle,

$$T_{\Xi}(K) = 1 - \exp(-\mu_K) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}(\nu_d(\check{\Xi}_0 \oplus K)))$$

## 2.5. Osnovne karakteristike

što dokazuje formulu (2.5). ■

Korisno je uvesti i notaciju

$$\psi(K) = -\ln(T_{\Xi}(K)) \quad (2.11)$$

pa slijedi da je

$$\psi(K) = \lambda \mathbb{E}(\nu_d(\check{\Xi}_0 \oplus K)). \quad (2.12)$$

Rezultati ovog odjeljka preuzeti su iz [1], [4] i [5].

## 2.5 Osnovne karakteristike

### 2.5.1 Volumni udio

**Definicija 2.9** *Volumni udio  $p$  je srednji udio volumena koji zauzima  $\Xi$  u području  $B$  jediničnog volumena,*

$$p = \mathbb{E}(\nu_d(\Xi \cap B)), \text{ za } \nu_d(B) = 1. \quad (2.13)$$

Alternativna definicija glasi:

**Definicija 2.10** *Volumni udio  $p$  slučajnog zatvorenog skupa  $\Xi$  koji je invarijantan na translacije je definiran kao očekivani udio volumena koji zauzima  $\Xi$ , tj.*

$$p = \frac{\mathbb{E}(\nu_d(\Xi \cap B))}{\nu_d(B)}$$

za  $\nu_d(B) > 0$ .

**Napomena 2.11** *Zbog invarijantnosti na translacije slučajnog zatvorenog skupa, volumni udio možemo izraziti kao vjerojatnost da je dana točka (npr. ishodište) pokrivena sa  $\Xi$ . Naime,*

$$p = \frac{\mathbb{E}(\nu_d(\Xi \cap B))}{\nu_d(B)} = \frac{1}{\nu_d(B)} \int_B \mathbb{E}[\mathbb{1}(x \in \Xi)] dx = \mathbb{P}\{o \in \Xi\} = \mathbb{P}(\Xi \cap \{o\} \neq \emptyset) = T_{\Xi}(\{o\}),$$

dobijemo funkcional kapaciteta od  $\Xi$  evaluiran na jednočlanom skupu.

## 2.5. Osnovne karakteristike

Ova vrijednost ne ovisi o izboru područja  $B$ , zahvaljujući stacionarnosti od  $\Xi$ .

Još jedna posljedica stacionarnosti je

$$p = \mathbb{P}(o \in \Xi), \quad (2.14)$$

što je rezultat koji vrijedi za opće stacionarne slučajne skupove.

Formula za  $p$  dobiva se stavljanjem  $K = \{o\}$  u formulu (2.6) pa je onda

$$\mathbb{P}(o \in \Xi) = 1 - \exp(-\lambda \mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0))), \quad (2.15)$$

gdje je  $\Xi_0$  ranije definirano tipično zrno od  $\Xi$ .  $\bar{V} = \mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0))$  je srednji očekivani volumen tipičnog zrna. Naravno, ukoliko sva zrna Booleovog modela imaju ovaj volumen jednak nuli (npr. ako se radi o točkama ili segmentima), onda je i volumni udio jednak nula.

Preuzeto iz [1] i [2].

### 2.5.2 Kovarijanca ili dvotočkovna vjerojatnosna funkcija

Za slučajni skup koji ima volumni udio  $p$  kažemo da taj volumni udio označava svojstvo/karakteristiku prvog reda, a važna su svojstva drugog reda sažeta u njegovoj kovarijanci ili dvotočkovnoj vjerojatnosnoj funkciji. Očito, da bi kovarijanca bila različita od nule bitno je da je  $p > 0$ . Za neke slučajne skupove, kao što je točka, vrijedi  $p = 0$  te njihova svojstva drugoga reda opisujemo preko mjera momenta.

**Definicija 2.12** (*Necentrirana*) kovarijanca definirana je s:

$$C(\mathbf{r}) = \mathbb{P}(o \in \Xi \text{ i } \mathbf{r} \in \Xi) = \mathbb{P}(\{o, \mathbf{r}\} \subset \Xi) = T_{\Xi}(\{o, \mathbf{r}\}), \text{ za } \mathbf{r} \in \mathbb{R}^d. \quad (2.16)$$

## 2.5. Osnovne karakteristike

Uočimo, naziv necentrirana kovarijanca slijedi iz toga što vrijedi  $C(\mathbf{r}) = \mathbb{E}[\mathbb{1}(o \in \Xi)\mathbb{1}(\mathbf{r} \in \Xi)]$ , tj. to je kovarijanca slučajnih varijabli  $\mathbb{1}(o \in \Xi)$  i  $\mathbb{1}(\mathbf{r} \in \Xi)$ . "Prava" centrirana kovarijanca jednaka je

$$C(\mathbf{r}) - (\mathbb{P}(o \in \Xi))^2 = C(\mathbf{r}) - p^2.$$

$C(\mathbf{r})$  je volumni udio od  $\Xi \cap (\Xi - \mathbf{r})$  jer vrijedi da je formula (2.16) ista kao i formula

$$C(\mathbf{r}) = \mathbb{P}(o \in \Xi \cap (\Xi - \mathbf{r})). \quad (2.17)$$

Ako je  $\Xi$  Booleov model s tipičnim zrnom  $\Xi_0$ , onda je

$$C(\mathbf{r}) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \exp(\lambda \mathbb{E}(\gamma_{\Xi_0}(\mathbf{r}))), \quad (2.18)$$

gdje je  $\gamma_{\Xi_0}(\mathbf{r}) = \nu_d(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - \mathbf{r}))$  skup kovarijanca, geometrijski kovariogram ili vjerojatnost udaljenosti.

**Dokaz.** Formula (2.18) se može dokazati korištenjem procjene za  $C(\mathbf{r})$ :

$$\begin{aligned} C(\mathbf{r}) &= \mathbb{P}(o \in \Xi \cap (\Xi - \mathbf{r})) = \\ &= 1 - (\mathbb{P}(o \notin \Xi) + \mathbb{P}(o \notin (\Xi - \mathbf{r})) - \mathbb{P}(o \notin \Xi \cup (\Xi - \mathbf{r}))) = \\ &= 2p - 1 + \mathbb{P}(o \notin \Xi \cup (\Xi - \mathbf{r})). \end{aligned}$$

Koristeći (2.6) dobivamo

$$\mathbb{P}(\Xi \cap \{o, \mathbf{r}\} \neq \emptyset) = 1 - \exp(-\psi(\{o, \mathbf{r}\})),$$

gdje je  $\psi$  definiran sa  $\psi(K) = -\ln(T_{\Xi}(K)) = \lambda \mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0 \oplus \check{K}))$ .

Vrijedi:

$$\psi(\{o, \mathbf{r}\}) = \lambda \mathbb{E}(\nu_d(\check{\Xi}_0 \cup (\check{\Xi}_0 + \mathbf{r}))) = \quad (2.19)$$

$$= \lambda(\mathbb{E}(\nu_d(\check{\Xi}_0)) + \mathbb{E}(\nu_d(\check{\Xi}_0 + \mathbf{r})) - \mathbb{E}(\nu_d(\check{\Xi}_0 \cap (\check{\Xi}_0 + \mathbf{r})))) = \quad (2.20)$$

$$= \lambda(2\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0)) - \mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0 \cap (\Xi_0 - \mathbf{r}))), \quad (2.21)$$

## 2.5. Osnovne karakteristike

pa je ovime dokazano (2.18) jer vrijedi da je  $1 - p = \exp(-\lambda \mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0)))$ .

Drugi način, i ujedno jednostavniji, za dokaz ove formule je idući:

$$C(\mathbf{r}) = \mathbb{P}(o \in \Xi \cap (\Xi - \mathbf{r})) = \quad (2.22)$$

$$= \mathbb{P}(o \in \Xi) + \mathbb{P}(\mathbf{r} \in \Xi) - \mathbb{P}(o \in \Xi \cup (\Xi - \mathbf{r})) = \quad (2.23)$$

$$= 2p - \mathbb{P}(o \in \Xi \cup (\Xi - \mathbf{r})) = \quad (2.24)$$

$$= 2p - \mathbb{P}(\Xi \cap \{o, \mathbf{r}\} \neq \emptyset) = 2p - T_\Xi(\{o, \mathbf{r}\}) = \quad (2.25)$$

$$\stackrel{(2.5)}{=} 2p - 1 + \exp(-\lambda \mathbb{E}(\nu_d(\check{\Xi} \oplus \{o, \mathbf{r}\}))) = \quad (2.26)$$

$$= 2p - 1 + \exp(-\lambda (\mathbb{E}(\nu_d(\Xi) + \nu_d(\Xi - \mathbf{r}) - \nu_d(\Xi \cap (\Xi - \mathbf{r})))) = \quad (2.27)$$

$$= 2p - 1 + (1 - p)^2 \exp(\lambda \mathbb{E}(\nu_d(\Xi \cap (\Xi - \mathbf{r}))). \quad (2.28)$$

■

Gore definirana kovarijanca razlikuje se od konvencionalne funkcije kovarijanca po tome što kovarijanca nije centrirana oko očekivanja.

Ako je slučajni skup izotropan, tada  $C(r)$  ovisi samo o duljini  $r = \|\mathbf{r}\|$  vektora  $\mathbf{r}$ , a ako je tipično zrno  $\Xi_0$  izotropno, onda se  $\gamma_{\Xi_0}(r\mathbf{u})$  može zamijeniti kovarijancom izotropnog skupa  $\bar{\gamma}_{\Xi_0}$ .

Ako označimo očekivanje  $\mathbb{E}(\bar{\gamma}_{\Xi_0}(r))$  s  $\bar{\bar{\gamma}}_{\Xi_0}(r)$ , onda formulu (2.18) možemo napisati u obliku

$$C(r) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \exp(\lambda \bar{\bar{\gamma}}_{\Xi_0}(r)). \quad (2.29)$$

Za neka slučajna konveksna tijela  $\Xi_0$  imamo poznatu srednju kovarijancu izotropnog  $\bar{\bar{\gamma}}_{\Xi_0}(r)$ . Npr. za trodimenzionalnu kuglu slučajnog radijusa, s funkcijom gustoće vjerojatnosti polumjera  $f_R(r)$ , srednja kovarijanca izotropnog skupa dan je s

$$\bar{\bar{\gamma}}_{\Xi_0}(r) = \int_{r/2}^{\infty} \frac{4}{3} \pi x^3 \left( 1 - \frac{3r}{4x} + \frac{r^3}{16x^3} \right) f_R(x) dx, \quad \text{za } r \geq 0, \quad (2.30)$$

## 2.5. Osnovne karakteristike

a za disk u ravnini

$$\bar{\gamma}_{\Xi_0}(r) = \int_{r/2}^{\infty} \left( 2x^2 \cos^{-1} \frac{r}{2x} - \frac{r}{2} \sqrt{4x^2 - r^2} \right) f_R(r) dx, \text{ za } r \geq 0. \quad (2.31)$$

Općenito, postoji  $r_0$  takav da je  $\bar{\gamma}_{\Xi_0}(r) = 0$  za  $r > r_0$ . U tom slučaju je  $C(r) = p^2$  za  $r > r_0$  te se za Booleov model kaže da ima konačni raspon korelacije  $r_0$ .

Ponekad je poznata samo funkcija korelacije  $\kappa(r)$  dana s formulom

$$\kappa(r) = \frac{C(r) - p^2}{p(1-p)} \text{ za } r \geq 0. \quad (2.32)$$

U ovom slučaju može biti od koristi iduća formula:

$$p = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\kappa''(r)}{(\kappa'(r))^2}. \quad (2.33)$$

## Karakteristike pokrivenosti

Booleov model je unija zrna pa sljedeće karakteristike mogu biti korisne:

- očekivani broj zrna  $\bar{c}$  koja sadrže fiksnu točku (dovoljno je uzeti u obzir ishodište  $o$ )
- volumni udio  $p_k$  slučajnog skupa svih točaka koje su sadržane u više od  $k$  zrna.

U dokazu formule (2.6) pokazali smo da slučajan broj zrna koja pogađaju fiksni kompaktni skup  $K$  slijedi Poissonovu distribuciju sa očekivanjem  $\mu_k$  dano s formulom (2.7). Za slučaj  $K = \{o\}$  vrijedi

$$\mu_0 = \lambda \mathbb{E} \nu_d(\Xi_0), \quad (2.34)$$

što povlači

$$\bar{c} = \mu_0. \quad (2.35)$$

## 2.6. Kontaktne funkcije distribucije

Slično formuli (2.14), zbog stacionarnosti volumni udio  $p_k$  jednak je vjerojatnosti da je ishodište  $o$  prekriveno s više od  $k$  zrnaca, tj.

$$p_k = 1 - \sum_{i=0}^k \frac{\bar{c}^i}{i!} e^{-\bar{c}} \text{ za } k = 1, 2, \dots \quad (2.36)$$

Rezultati ovog dijela poglavlja preuzeti su iz [1] i [2].

## 2.6 Kontaktne funkcije distribucije

U svojoj punoj općenitosti kao funkcija kompaktnih skupova  $K$ , funkcional kapaciteta  $T_{\Xi}(K)$  nije pogodan za praktični rad. Matheron je imao ideju koristiti familiju standardnih skupova  $K$ , što nas dovodi do pojma kontaktne funkcije distribucije.

Neka je  $B$  konveksno tijelo u  $\mathbb{R}^d$  koje sadrži ishodište  $o$ , što se u ovom kontekstu zove testni skup, mjerni skup ili strukturni element. Tada je

$$T_{\Xi}(rB) = \mathbb{P}(\Xi \cap rB \neq \emptyset) \quad (2.37)$$

funkcija faktora skaliranja  $r$ .

Međutim, elegantnija je uporaba kontaktne funkcije distribucije  $H_B(r)$  koja je dana s

$$H_B(r) = 1 - \frac{\mathbb{P}(\Xi \cap rB = \emptyset)}{1 - p}, \text{ za } r \geq 0, \quad (2.38)$$

gdje je  $p$  volumni udio od  $\Xi$ . Očito je

$$H_B(r) = 1 - \frac{1 - T_{\Xi}(rB)}{1 - p}$$

što pokazuje odnos između kontaktne funkcije distribucije i funkcionala kapaciteta.

Budući da  $B$  sadrži ishodište,  $\Xi \cap rB$  je prazan skup implicira da  $\Xi$  ne sadrži ishodište. Dakle, vrijednost  $H_B(r)$  je uvjetna vjerojatnost da skalirani

## 2.6. Kontaktne funkcije distribucije

skup  $rB$  pogodi (ili ostvari kontakt sa)  $\Xi$ , uvjetno na to da  $\Xi$  ne sadrži  $o$ , tj.

$$H_B(r) = \mathbb{P}(rB \subset \Xi^c | o \in \Xi^c).$$

Drugačije interpretirano,  $H_B(r)$  je uvjetna funkcija distribucije od  $R$  :

$$H_B(r) = \mathbb{P}(R \leq r | R > 0), \quad (2.39)$$

gdje je

$$R = \inf\{s : \Xi \cap sB \neq \emptyset\},$$

tj.  $R$  je udaljenost od ishodišta do  $\Xi$  mjerena u odnosu na  $B$ .

Oblik strukturnog elementa  $B$  igra važnu ulogu. Dva posebno važna slučaja su ekstremi gdje je s jedne strane  $B$  segment jedinične duljine koji vodi do pojma linearne kontaktne funkcije distribucije  $H_l(r)$ , a s druge strane  $B$  je jedinična kugla  $B(o, 1)$  što dovodi do sferne kontaktne funkcije distribucije  $H_s(r)$ . Kod linearne kontaktne funkcije distribucije promatra se segment od ishodišta u smjeru vektora  $v \in \mathbb{R}^d$ , gdje je  $|v| = 1$  i u tom slučaju je onda  $B = [o, v]$  pa je linearna kontaktna funkcije distribucije zapravo uvjetna funkcija distribucije udaljenosti od ishodišta  $o$  do  $\Xi$  u smjeru vektora  $v$ , pod pretpostavkom da je  $o \notin \Xi$ .

Sferna kontaktna funkcija distribucije može se interpretirati kao funkcija distribucije udaljenosti od slučajno odabrane točke izvan  $\Xi$  do najbliže točke od  $\Xi$ . Stoga se  $H_s(r)$  naziva "zakon prvog kontakta".

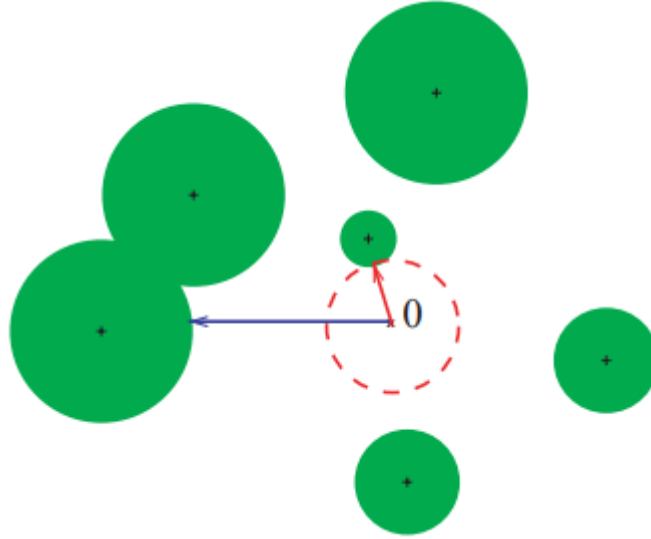
Najjednostavniji slučaj za kontaktne funkcije distribucije jest kada je dan konveksni kompaktni strukturni element  $B$ . U tom slučaju je

$$H_B(r) = 1 - \exp\left(-\frac{\lambda}{b_d} \sum_{k=0}^{d-1} \frac{b_k b_{d-k}}{\binom{d}{k}} \bar{V}_k V_{d-k}(B) r^{d-k}\right), \text{ za } r \geq 0, \quad (2.40)$$

gdje je  $b_k$  volumen  $k$ -dimenzionalne jedinične kugle u  $\mathbb{R}^k$ ,  $\bar{V}_k$  srednji  $k$ -ti intrinzični volumen i  $V_{d-k}(B)$   $k$ -ti intrinzični volumen od  $B$ .



## 2.6. Kontaktne funkcije distribucije



Slika 2.6: Prikazan je radijus najmanje sfere sa središtem u ishodištu  $o$  koja siječe Booleov model te najkraći segment koji spaja  $o$  i Booleov model u smjeru  $(-1, 0)$ . Uvjetne funkcije distribucije radijusa sfere i duljine segmenta, pod pretpostavkom da ishodište nije dio Booleovog modela, zovu se redom sferna i linearna kontaktna funkcija distribucije. Slika preuzeta iz [2].

### Linearna kontaktna funkcija distribucije

Linearna kontaktna funkcija distribucije dana je formulom

$$H_l(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \frac{2b_{d-1}\bar{V}_{d-1}}{db_d} r\right) = 1 - \exp(-\lambda_1^{(d)} r), \text{ za } r \geq 0. \quad (2.41)$$

Uočimo da je ovo eksponencijalna distribucija s parametrom  $\lambda_1^{(d)}$ . Parametar  $\lambda_1^{(d)}$  sada samo navodimo, a kasnije ćemo dati njegovu eksplicitnu formulu.

### Sferna kontaktna funkcija distribucije

Sferna kontaktna funkcija distribucije dana je formulom

$$H_s(r) = 1 - \exp\left(-\lambda \sum_{k=1}^d b_k \bar{V}_{d-k} r^k\right), \text{ za } r \geq 0. \quad (2.42)$$

## 2.6. Kontaktne funkcije distribucije

**Primjer 2.13** *Razmotrimo, na primjer, Booleov model sa sfernim zrcima u trodimenzionalnom prostoru, tj. slučajne kugle čija su središta raspoređena Poissonovim procesom u  $\mathbb{R}^3$ . Sferna kontaktna funkcija distribucije je funkcija distribucije udaljenosti do najbliže kugle, iz točke koja je odabrana na slučajan način, a leži izvan svih kugli. Formula u tom slučaju glasi:*

$$H_s(r) = 1 - \exp\left(-\frac{4}{3}\lambda\pi r(3\mathbb{E}(R^2) + 3r\mathbb{E}(R) + r^2)\right).$$

### Kvadratna kontaktna funkcija distribucije

Kvadratna kontaktna funkcija distribucije bitna je u statističkim primjenama za  $d = 2$ . U ovom je slučaju  $B$  jednični kvadrat i

$$H_q(r) = 1 - \exp\left(-\lambda r\left(\frac{2\bar{U}}{\pi} + r\right)\right), \text{ za } r \geq 0. \quad (2.43)$$

### Diskoidalna kontaktna funkcija distribucije

Diskoidalna kontaktna funkcija distribucije koristi se ponajviše u slučaju kad je  $d = 3$ . Za ovaj slučaj je  $B$  disk radijusa 1 u  $\mathbb{R}^3$  i

$$H_d(r) = 1 - \exp\left(-\lambda\pi r\left(\frac{\bar{S}}{4} + \bar{b}r\right)\right), \text{ za } r \geq 0, \quad (2.44)$$

gdje su  $\bar{S}$  i  $\bar{b}$  definirani na Slici 2.4.

Svi rezultati ovog odjeljka su iz [1] i [2].

# Poglavlje 3

## Booleov model s konveksnim zrcima

### 3.1 Pojednostavljena formula za funkcional kapaciteta

Ako je  $\Xi_0$  izotropan i konveksan, onda se  $\psi(K)$ , koji daje funkcional kapaciteta prema (2.11), može izračunati za konveksni  $K$  pomoću generalizirane Steinerove formule:

$$\psi(K) = \lambda \mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0 \oplus \check{K})) = \frac{\lambda}{b_d} \sum_{k=0}^d \frac{b_k b_{d-k}}{\binom{d}{k}} \bar{V}_k V_{d-k}(K), \quad (3.1)$$

gdje je  $\bar{V}_k$  srednji  $k$ -ti intrinzični volumen od  $\Xi_0$ , tj.

$$\bar{V}_k = \mathbb{E}(V_k(\Xi_0)) \text{ za } k = 0, 1, \dots, d,$$

i  $b_k$  volumen  $k$ -dimenzionalne jedinične kugle.

**Teorem 3.1** *Za konveksna tijela  $K$ , vrijednost funkcionala kapaciteta  $T_{\Xi}(K)$  Booleovog modela  $\Xi$  s izotropnim konveksnim zrcima ovisi samo o  $\lambda$  i srednjim vrijednostima intrinzičnih volumena zrna.*

### 3.2. Intenziteti ili gustoće intrinzičnih volumena

## 3.2 Intenziteti ili gustoće intrinzičnih volumena

Iz Booleovog modela mogu se izvesti različite slučajne mjere. Na primjer, trodimenzionalni Booleov model daje površinsku mjeru  $S_{\Xi}$  definiranu s

$$S_{\Xi}(B) = h_2(B \cap \partial\Xi) \text{ za sve Borelove skupove } B, \quad (3.2)$$

gdje desna strana jednakosti označava površinu granice  $\partial\Xi$  Booleovog modela  $\Xi$  u skupu  $B$ , a  $h_2$  je dvodimenzionalna Hausdorffova mjera.

**Definicija 3.2** *k-dimenzionalna Hausdorffova mjera  $h_k$  definirana je s*

$$h_k(B) = 2^{-k} b_k \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} (\text{diam}(M_j))^k : B \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} M_j, \text{diam } M_j \leq \delta \right\}, \quad (3.3)$$

$$\text{za } B \in \mathcal{B}^d, k = 0, 1, \dots,$$

pri čemu su  $M_j$  kompaktni podskupovi od  $\mathbb{R}^d$ , a  $b_k$  je volumen *k-dimenzionalne jedinične kugle*.

Za  $k = d$  ova Hausdorffova mjera poklapa se s Lebesgueovom mjerom, a za  $k = 0$  radi se o prebrojavajućoj mjeri (mjeri broj elemenata skupa  $B$ ).

Slučajna mjera  $S_{\Xi}$  nasljeđuje stacionarnost od Booleovog modela  $\Xi$ . Stoga je srednja mjera  $\mathbb{E}(S_{\Xi}(B))$  invarijantna na translacije i vrijedi

$$\mathbb{E}(S_{\Xi}(B)) = S_V \nu_3(B). \quad (3.4)$$

Konstanta  $S_V$  je intenzitet slučajne mjere  $S_{\Xi}$  i naziva se **specifičnom površinom** jer se  $S_V$  može protumačiti kao srednja površina od  $\Xi$  po jedinici volumena.  $\nu_3$  je Lebesgueova mjera na  $\mathbb{R}^3$ .

$S_V$  možemo izračunati na sljedeći način:

$$S_V = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(S_{\Xi}(B(o, r)))}{\nu_3(B(o, r))}. \quad (3.5)$$

### 3.2. Intenziteti ili gustoće intrinzičnih volumena

Gustoću  $k$ -tog intrinzičnog volumena u  $\mathbb{R}^d$  definiramo kao

$$v_k = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}(V_k(\Xi \cap B(o, r)))}{\nu_d(B(o, r))}, \text{ za } k = 0, 1, \dots, d. \quad (3.6)$$

U gornjoj formuli umjesto  $B(o, r)$  možemo pisati  $rW$ , gdje je  $W$  konveksno tijelo s pozitivnim volumenom. Kako je Booleov model ergodičan,  $\mathbb{E}$  možemo i izostaviti iz formule.

Neka specifična notacija za  $v_k$  za slučaj u ravnini je:

$$\begin{aligned} A_A &= v_2, \\ L_A &= 2v_1, \\ N_A &= v_0, \end{aligned} \quad (3.7)$$

i za slučaj u prostoru:

$$\begin{aligned} V_V &= v_3, \\ S_V &= 2v_2, \\ M_V &= \pi v_1, \\ N_V &= v_0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Intenzitete  $N_A$  i  $N_V$  zovemo **specifičnim brojevima povezanosti**, a  $M_V$  je **specifičan integral srednje zakrivljenosti**. Intenziteti  $N_A, N_V, M_V$  mogu biti i negativni.

Postoje pozitivni "duplikati"  $N_A^+$  i  $N_V^+$  koje zovemo **specifičnim brojevima konveksnosti**.  $N_A^+$  je intenzitet donje konveksne tangentne točke od  $\Xi$  u  $\mathbb{R}^2$ . Naime, svako zrno  $\Xi_n$  ima donju konveksnu tangentnu točku  $l_n$  što je točka s minimalnom drugom koordinatom u  $\Xi_n$ .

**Napomena 3.3** *Ako više točaka ima kao drugu koordinatu taj minimum, onda je donja konveksna tangentna točka ona koja ima minimalnu prvu koordinatu pri čemu se tu slijedi leksikografski uređaj.*

### 3.2. Intenziteti ili gustoće intrinzičnih volumena

**Definicija 3.4 (Leksikografski uređaj)** *Leksikografski uređaj na  $\mathbb{R}^2$  definiran je na idući način:*

$$(m, n) < (m', n') \Leftrightarrow m < m' \text{ ili } (m = m' \text{ i } n < n').$$

Točke  $x_n + l_n$  koje nisu pokrivene ostalim zrnima  $E_m + x_m (m \neq n)$  su donje konveksne tangentne točke od  $\Xi$ .

Analogno vrijedi i za  $N_V^+$  u prostornom slučaju.

Spomenuti intenziteti računaju se na sljedeći način takozvanim Miles-ovim formulama:

$$\begin{aligned} V_V &= p = 1 - \exp(-\lambda\bar{V}), \\ S_V &= \lambda(1-p)\bar{S} = \lambda \exp(-\lambda\bar{V})\bar{S}, \\ M_V &= \lambda(1-p) \left( \bar{M} - \frac{\pi^2 \lambda \bar{S}^2}{32} \right), \\ N_V &= \lambda(1-p) \left( 1 - \frac{\lambda \bar{M} \bar{S}}{4\pi} + \frac{\pi \lambda^2 \bar{S}^3}{384} \right), \\ N_V^+ &= \lambda(1-p) = \lambda \exp(-\lambda\bar{V}), \\ A_A &= p = 1 - \exp(-\lambda\bar{A}), \\ L_A &= \lambda(1-p)\bar{L} = \lambda \exp(-\lambda\bar{A})\bar{L}, \\ N_A &= \lambda(1-p) \left( 1 - \frac{\lambda \bar{L}^2}{4\pi} \right), \\ N_A^+ &= \lambda(1-p) = \lambda \exp(-\lambda\bar{A}), \end{aligned} \tag{3.9}$$

gdje su  $\bar{V}, \bar{S}, \bar{M}, \bar{L}, \bar{A}$  definirani kao na Slici 2.4.

**Napomena 3.5** *Donje konveksne tangentne točke Booleovog modela tvore stacionaran točkovni proces što se može protumačiti kao rezultat stanjivanja osnovnog (originalnog) procesa klica. Budući da tangente paralelne s x-osi igraju glavnu ulogu u konstrukciji procesa, stanjeni proces općenito nije izotropan, čak ni u slučaju sfernih zrna.*

### 3.3. Sjecišta s linearnim potprostorima

Preuzeto iz [1] i [6].

## 3.3 Sjecišta s linearnim potprostorima

Neka je  $L$  afini linearan potprostor od  $\mathbb{R}^d$  (dakle, potprostor koji ne mora nužno prolaziti kroz ishodište) dimenzije  $l$ . Za Booleov model  $\Xi$  u  $\mathbb{R}^d$  promotrimo presjek  $\Xi_L = \Xi \cap L$ .  $\Xi_L$  je tada isto Booleov model na  $L$ , gdje  $L$  poistovjećujemo s  $\mathbb{R}^l$ . Ako su zrna od  $\Xi$  konveksna, onda su takva i zrna od  $\Xi_L$ .

U slučaju izotropnosti, kada su zrna od  $\Xi$  konveksna, inducirani Booleov model  $\Xi_L$  je također izotropan.

Nadalje, intenzitet procesa klica je  $\lambda_l^{(d)}$ :

$$\lambda_l^{(d)} = \lambda \frac{b_{d-l} b_l \bar{V}_{d-l}}{b_d \binom{d}{d-l}}, \quad (3.10)$$

a očekivana vrijednost  $\bar{V}_k^{(l)}$   $k$ -tog intrinzičnog volumena zrna u  $\mathbb{R}^l$  jest:

$$\bar{V}_k^{(l)} = \frac{b_{d-l+k}}{b_k b_{d-l}} \binom{d}{d-l} \frac{\bar{V}_{d-l+k}}{\bar{V}_{d-l}}, \quad \text{za } k \leq l. \quad (3.11)$$

Ove formule uveo je Matheron (vidi [14], stranica 146), gdje je i objasnio slučaj kada model nije izotropan.

### Funkcija distribucije duljina tetiva za Booleove modele

Neka je  $\Xi$  Booleov model s konveksnim zrnima i pretpostavimo da je  $\Xi$  presječen linijom  $L$ . Presjek  $\Xi_L = \Xi \cap L$  daje dva alternirajuća niza tetiva ili intervala na  $L$ ; jedan od njih tvori unutarnji  $\Xi_L$ , a drugi vanjski  $L \setminus \Xi_L$ . Zbog pretpostavke o nezavisnosti Booleovog modela i konveksnosti zrna, ovi su intervali nezavisni te obje vrste tih tetiva slijede fiksnu distribuciju, a rezultirajuća struktura naziva se u matematičkoj literaturi "izmjenični proces obnove".

### 3.3. Sjecišta s linearnim potprostorima

Određivanje ovih dviju vrsta distribucija duljina tetiva uvelike se razlikuje.

Lako se pokaže da vanjska tetiva slijedi eksponencijalnu distribuciju. Ako je dodatno Booleov model  $\Xi$  izotropan, onda je parametar ove eksponencijalne distribucije dan s :

$$\lambda_1^{(d)} = \lambda \frac{2db_{d-1}}{b_d} \bar{V}_{d-1}, \quad (3.12)$$

što je specijalan slučaj za  $l = 1$ . Tada je funkcija distribucije duljina tetiva jednaka

$$f_{ex}(l) = \lambda_1^{(d)} \exp(-\lambda_1^{(d)} l), \text{ za } l \geq 0. \quad (3.13)$$

Očekivana duljina tetive je

$$\bar{l}_{ex} = \frac{1}{\lambda_1^{(d)}}. \quad (3.14)$$

Duljina unutarnje tetive ima malo kompliciraniju distribuciju ovisno o distribuciji zrna. Krivulje na Slici 3.1 za funkciju distribucije  $f_{in}(l)$  u slučaju identičnih kugla dijametra 1, dobivene su numerički invertiranjem Fourierove transformacije. Očekivana duljina tetive  $\bar{l}_{in}$  može se dobiti iz formule:

$$p = \frac{\bar{l}_{in}}{\bar{l}_{in} + \bar{l}_{ex}} \quad (3.15)$$

i drugog momenta:

$$\bar{l}_{in}^2 = \frac{\bar{l}_{in}^2 \cdot l_c}{\bar{l}_{ex} \cdot p}, \quad (3.16)$$

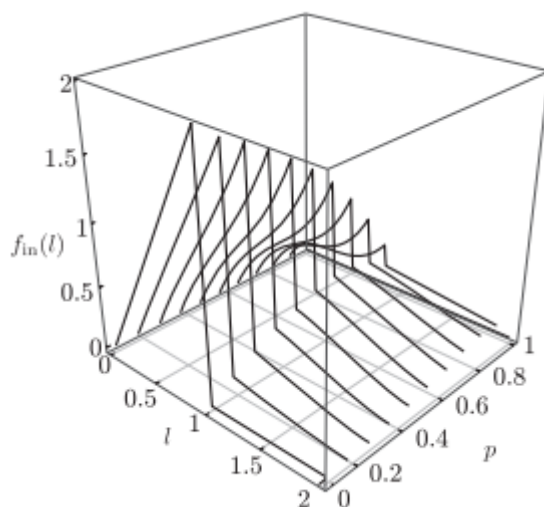
gdje je

$$l_c = 2 \int_0^\infty \kappa(r) dr \quad (3.17)$$

i  $\kappa(r)$  dana relacijom (2.32).



### 3.4. Formule za neke specijalne Booleove modele s izotropnim konveksnim zrnima



Slika 3.1: Vjerojatnosna funkcija distribucije  $f_{in}(l)$  duljina tetiva Booleovog modela s identičnim sfernim zrnima dijametra 1 u ovisnosti o volumnom udjelu  $p$ . Za mali  $p$  izolirane kugle dominiraju, a za velike  $p$  grupiranje igra važnu ulogu te tetive postaju dulje. Slika preuzeta iz [1].

## 3.4 Formule za neke specijalne Booleove modele s izotropnim konveksnim zrnima

### 1. Dvodimenzionalni modeli:

- (a) Zrna = slučajni segmenti s uniformnom (ili izotropnom) orijentacijom i očekivane duljine  $\bar{l}$ . Linearna kontaktna funkcija distribucije je eksponencijalna distribucija s parametrom

$$\lambda_1^{(2)} = \frac{2\lambda\bar{l}}{\pi}.$$

Sferna kontaktna funkcija distribucije jest

$$H_s(r) = 1 - \exp(-\lambda r(2l + \pi r)) \text{ za } r \geq 0.$$

### 3.4. Formule za neke specijalne Booleove modele s izotropnim konveksnim zrnima

- (b) Zrna = slučajni diskovi slučajnog radijusa  $R$ . Površinski udio jednak je

$$p = 1 - \exp(-\lambda\pi\mathbb{E}(R^2)).$$

Nadalje,

$$\lambda_1^{(2)} = 2\pi\lambda\mathbb{E}(R)$$

$$H_s(r) = 1 - \exp(-\lambda\pi r(2\mathbb{E}(R) + r)) \text{ za } r \geq 0.$$

- (c) Zrna = Poissonovi poligoni s parametrom  $\varrho$ . Naime, parametar  $\varrho = \frac{2L_A}{\pi}$  označava očekivani broj linija presječenih s testnim segmentom jedinične duljine, gdje je  $L_A$  intenzitet Poissonovog procesa. Tada je očekivana površina zrna

$$\bar{A} = \frac{4}{\pi\varrho^2}.$$

Ostale formule koje vrijede su:

- i.  $p = 1 - \exp\left(\frac{-4\lambda}{\pi\varrho^2}\right)$ ,
- ii.  $\lambda_1^{(2)} = \frac{4\lambda}{\pi\varrho}$ ,
- iii.  $H_s(r) = 1 - \exp\left(-\lambda r \left(\frac{4}{\varrho} + \pi r\right)\right)$ , za  $r \geq 0$ ,
- iv.  $C(r) = 2p - 1 + (1 - p)^2 \exp\left(\frac{4\lambda}{\pi\varrho^2} \exp(-\varrho r)\right)$ , za  $r \geq 0$ .

## 2. Trodimenzionalni modeli:

- (a) Zrna = slučajni segmenti uniformne orijentacije očekivane duljine  $\bar{l}$ . Diskoidalna i sferna kontaktna funkcija distribucije su:

$$H_d(r) = 1 - \exp(-\lambda\pi^2 r^2 \bar{l}), \text{ za } r \geq 0,$$

$$H_s(r) = 1 - \exp\left(-\lambda\pi r^2 \left(\bar{l} + \frac{4r}{3}\right)\right), \text{ za } r \geq 0.$$

**3.4. Formule za neke specijalne Booleove modele s izotropnim konveksnim zrnima**

- (b) Zrna = slučajni diskovi uniformne orijentacije i slučajnog radijusa  $R$ .

$$\lambda_1^{(3)} = \frac{\lambda\pi\mathbb{E}(R^2)}{2},$$

$$H_d(r) = 1 - \exp\left(-\lambda\pi r \left(\frac{\pi\mathbb{E}(R^2)}{2} + \frac{\pi\mathbb{E}(R)r}{2}\right)\right), \text{ za } r \geq 0,$$

$$H_s(r) = 1 - \exp\left(-\lambda\pi r \left(2\mathbb{E}(R^2) + \pi r\mathbb{E}(R) + \frac{4r^2}{3}\right)\right), \text{ za } r \geq 0.$$

- (c) Zrna = slučajne kugle slučajnog radijusa  $R$ .

$$p = 1 - \exp\left(-\frac{4}{3}\lambda\pi\mathbb{E}(R^3)\right),$$

$$\lambda_1^{(3)} = \lambda\pi\mathbb{E}(R^2),$$

$$H_d(r) = 1 - \exp\left(-\lambda\pi r (\pi\mathbb{E}(R^2) + 2\mathbb{E}(R)r)\right), \text{ za } r \geq 0,$$

$$H_s(r) = 1 - \exp\left(-\frac{4}{3}\lambda\pi r (3\mathbb{E}(R^2) + 3r\mathbb{E}(R) + r^2)\right), \text{ za } r \geq 0.$$

Svi prethodni rezultati preuzeti su iz [1].

# Poglavlje 4

## Pokrivenost i povezanost

### 4.1 Vjerojatnosti pokrivenosti

Vjerojatnosti pokrivenosti su veličine oblika

$$\mathbb{P}(K \subset \Xi),$$

gdje je  $K$  bilo koji kompaktni podskup od  $\mathbb{R}^d$ . Volumni udio  $p = \mathbb{P}(o \in \Xi)$  tada možemo pisati u obliku

$$p = \mathbb{P}(\{o\} \subset \Xi)$$

pa ga zovemo vjerojatnost pokrivenosti za  $K = \{o\}$ . Također, kovarijancu  $C(r)$  možemo interpretirati kao vjerojatnost pokrivenosti za dvotočkovni skup  $\{o, \mathbf{r}\}$  što možemo uočiti i direktno iz Definicije 2.12, tj. iz relacije (2.16).

Za općeniti kompaktni skup  $K$  vrijedi

$$\mathbb{P}(K \subset \Xi) \leq \mathbb{P}(K \cap \Xi \neq \emptyset); \quad (4.1)$$

tj. vjerojatnost pokrivenosti je manja ili jednaka od vjerojatnosti pogotka.

#### 4.1. Vjerojatnosti pokrivenosti

Računanje vjerojatnosti pokrivenosti je izrazito teško. Hall (1988.), u svojoj knjizi [15], objasnio je ovaj problem pokrivenosti vrlo detaljno. Uzmemo li specijalan slučaj kada je  $d = 2$ ,  $K = [0, 1]^2$  i  $\Xi_0 = B(o, r)$ , Hall je pokazao da je

$$1 - 3 \min\{1, (1 + \lambda^2 \pi r^2) e^{-\lambda \pi r^2}\} < \mathbb{P}(K \subset \Xi) < 1 - 0.05 \min\{1, (1 + \lambda^2 \pi r^2) e^{-\lambda \pi r^2}\} \quad (4.2)$$

ako je  $\lambda \geq 1$  i  $r \leq 0.5$ .

Postavlja se i pitanje pokrivenosti cijelog prostora  $\mathbb{R}^d$ . Hall je pokazao da uvjet (2.1) osigurava da s vjerojatnošću 1 nepokriveni dio od  $\mathbb{R}^d$  ima beskonačnu Lebesgueovu mjeru. Ako je  $\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0)) = \infty$ , što krši uvjet (2.1), onda je s vjerojatnošću 1 skoro cijeli  $\mathbb{R}^d$  pokriven sa  $\Xi$ . Štoviše,  $\Xi = \mathbb{R}^d$  nije nužno istina.

Razmotrimo sada pokrivenost dijelova od  $\Xi$  s ostatkom od  $\Xi$ .

Neka je  $x_*$  tipična točka Booleovog modela i  $\Xi_*$  odgovarajuće zrno. Ovo zrno ima istu distribuciju kao i tipično zrno  $\Xi_0$  i može se interpretirati kao zrno izabrano na slučajan način u tom smislu da je za svako zrno jednaka vjerojatnost da će ono biti izabrano pa ga stoga i zovemo tipično zrno. Neka je

$$\Xi' = \bigcup \{\Xi_i + x_i : x_i \neq x_*\} \quad (4.3)$$

unija ostalih zrna. Promotrit ćemo iduće veličine:

- $p_0 = \mathbb{P}(x_* \text{ je pokriven sa } \Xi')$ ,
- $p_G = \mathbb{P}(\Xi_* + x_* \text{ siječe } \Xi')$ ,
- $p_s = \text{udio granice od } \Xi_* + x_* \text{ koji je pokriven sa } \Xi'$ .

Vijedi  $p_0 > 0$  samo ako je  $\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0)) > 0$ , i  $p_s$  ima smisla samo ako zrna od  $\Xi$  imaju konačnu nenula površinu.

#### 4.1. Vjerojatnosti pokrivenosti

Vrijednost  $1 - p_G$  je vjerojatnost da je tipično zrno izolirano. Ako je ta vrijednost pozitivna, onda postoji čak beskonačno mnogo izoliranih zrna. Očekivani broj izoliranih zrna koji imaju klice u danom kompaktnom skupu  $K$  je  $\lambda(1 - p_G)\nu_d(K)$ .

Ove vjerojatnosti zadovoljavaju sljedeće jednakosti:

$$p_0 = p, \quad (4.4)$$

$$p_G = 1 - \mathbb{E}(\exp(-\psi(\Xi_0))), \quad (4.5)$$

$$p_s = p, \quad (4.6)$$

gdje je  $\psi(\Xi_0) = -\ln(T_{\Xi}(\Xi_0))$ .

**Primjer 4.1** *Ako promotrimo slučaj kada su zrna kugle fiksnog radijusa  $r$ , onda je*

$$p_G = 1 - \exp(-\lambda\nu_d(B(o, 2r))) = 1 - \exp(-2^d\lambda b_d r^d). \quad (4.7)$$

**Primjer 4.2** *U dvodimenzionalnom slučaju, kada su zrna diskovi fiksnog radijusa, vrijedi*

$$p_G = 1 - (1 - p)^4, \quad (4.8)$$

*neovisno o određenim vrijednostima  $\lambda$  i  $r$ .*

Formula (4.4) može se interpretirati na idući način. Zrno  $\Xi_* + x_*$  možemo izabrati neovisno o ostalim zrnima i  $\Xi' \stackrel{d}{=} \Xi$ . Dakle, uzimajući  $x_* = o$ , dobivamo  $p_0 = \mathbb{P}(o \in \Xi) = p$ . Dokazi za formule (4.5) i (4.6) izvode se na sličan način.

Na isti način se pokaže i da je očekivani broj zrna koja sijeku tipično zrno jednak

$$n_0 = \lambda\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0 \oplus \check{\Xi}_0)). \quad (4.9)$$

## 4.2. Nakupine

Odgovarajuća distribucija je Poissonova distribucija. Ovdje  $\check{\Xi}_0$  označava nezavisan slučajan kompaktan skup iste distribucije kao i  $-\Xi_0$ . Vrijednost  $\nu_d(\Xi_0 \oplus \check{\Xi}_0)$  naziva se **isključeni (odstranjeni) volumen**.

**Definicija 4.3 (Generalizirana Steinerova formula)** *Ako  $\Xi$  ima distribuciju invarijantnu na rotacije oko ishodišta  $o$ , onda generalizirana Steinerova formula glasi*

$$\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0 \oplus K)) = \frac{1}{b_d} \sum_{k=0}^d \frac{b_k b_{d-k}}{\binom{d}{k}} \bar{V}_k V_{d-k}(K),$$

za svaki kompaktan konveksan skup  $K$ .

U slučaju izotropnosti, generalizirana Steinerova formula daje nam formule za srednji isključeni volumen  $\bar{V}_{ex} = \mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0 \oplus \check{\Xi}_0))$ :

$$\bar{V}_{ex} = 2\bar{A} + \frac{\bar{L}^2}{2\pi}, \text{ za } d=2, \quad (4.10)$$

$$\bar{V}_{ex} = 2\bar{V} + \frac{\overline{MS}}{2\pi}, \text{ za } d=3, \quad (4.11)$$

gdje su  $\bar{A}$ ,  $\bar{L}$ ,  $\overline{MS}$ ,  $\bar{V}$  i  $\bar{S}$  definirani kao na Slici 2.4.

U slučaju vlaknastih zrna,  $n_0$  se naziva "srednji broj križanja vlakana po vlaknu". Ako je  $\Xi_0$  slučajno orijentiran ravni konveksni objekt, formula (4.11) postaje:

$$\bar{V}_{ex} = \frac{\overline{AL}}{2}, \quad (4.12)$$

gdje je  $\bar{A}$  srednja površina i  $\bar{L}$  srednji opseg od  $\Xi_0$ .

## 4.2 Nakupine

Pod pojmom nakupine podrazumijevamo maksimalno povezani klaster preklapajućih zrna. Njegova veličina definira se kao broj zrna koja čine takav

### 4.3. Povezanost

klaster, pri čemu vrijedi da taj broj može biti i beskonačan.

Hall (1988.) u knjizi [15] definirao je svojstva nakupina za rijetke (eng. sparse) modele. Ta svojstva uključuju asimptotiku za broj  $n$ -nakupina (sastavljenih od  $n$  zrna koja se preklapaju) u ograničenom području i očekivani broj nakupina po jedinici volumena.

Błaszczyszyn et al. (1999.) u knjizi [16] proučavao je momente veličina nakupina.

## 4.3 Povezanost

**Definicija 4.4** *Za dvije klice  $x_i$  i  $x_j$  kažemo da su povezane ako je  $(\Xi_i + x_i) \cap (\Xi_j + x_j) \neq \emptyset$ .*

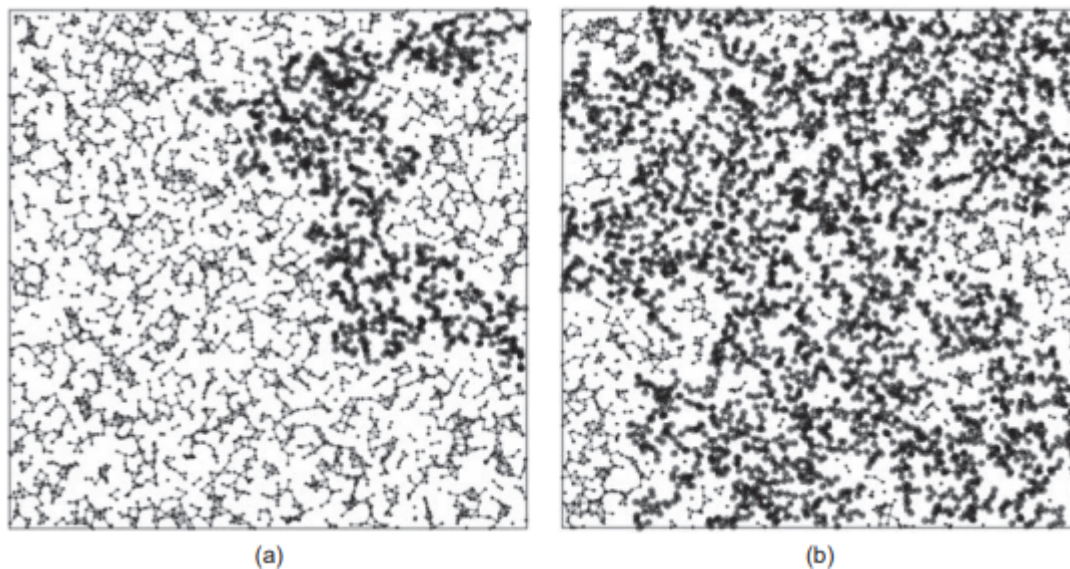
Ova definicija vodi nas do pojma Booleovog grafa povezanosti ili, u slučaju identičnih sfernih zrna, do slučajnog geometrijskog grafa ili Gilbertovog grafa (primjer na slici 4.1). Naziv Gilbertov graf koristi se u čast E. Gilberta, koji je proučavao ovaj graf u svom radu [17] iz 1961. godine.

Vrhovi slučajnog geometrijskog grafa su klice točkovnog procesa te postoji brid između vrhova koji su povezani u smislu Definicije 4.4. Vjerojatnost da je tipični vrh Gilbertovog grafa izoliran jest  $1 - p_G$ , pri čemu je  $p_G$  definirano na stranici 42. Stupanj tipičnog vrha ima Poissonovu distribuciju s očekivanjem  $n_0$  danim s formulom (4.9). Nadalje, asimptotski rezultat (za  $\lambda \rightarrow \infty$ ) za povezanost u kompaktnom skupu, odnosno za povezanost konačnog slučajnog grafa kojeg tvore klice u danom kompaktnom skupu  $K$ , prikazan je u knjizi [18] Baccelija i Błaszczyszyn (2009.).

**Definicija 4.5 (Povezanost u kompaktnom skupu  $K$ )** *Za dani kompaktni skup  $K$ , kažemo da je Booleov model  $\Xi$  povezan u  $K$  ako je skup  $\bigcup_{i: x_i \in K} (x_i + \Xi_i)$  povezan u  $K$ .*



#### 4.4. Perkolacija



Slika 4.1: Planarni slučajni geometrijski graf s (a)  $\lambda = 0,98\lambda_c$  i (b)  $\lambda = 1,02\lambda_c$  i radijusa takvog da je površina zrna jednaka 1, pri čemu se vjeruje da je kritični intenzitet  $\lambda_c$  jednak 1,1281. Najveća komponenta označena je crnom bojom. Slika preuzeta iz [1].

Rezultati ovog odjeljka nalaze se u [1] te [2].

## 4.4 Perkolacija

Od posebnog interesa su nam pojave gigantskih nakupina ili perkolacije kontinuuma.

**Definicija 4.6** *Kažemo da je Booleov model perkoliran ako postoji beskonačna povezana komponenta.*

Beskonačna povezana komponenta sastoji se od beskonačno mnogo preklapajućih zrna te je gotovo sigurno neograničeni skup.

#### 4.4. Perkolacija

Perkolacija u Booleovom modelu važna je u praksi budući da služi kao model za porozne medije. Strujanje fluida je nemoguće u poroznom mediju s izoliranim zrnima. Također, perkolacija kontinuuma važan je alat u istraživanju različitih telekomunikacijskih mreža.

Perkolaciju proučavamo pod pretpostavkom da je distribucija tipičnog zrna fiksna, dok je intenzitet  $\lambda$  varijabilni parametar modela.

Za  $d = 1$ , Booleov model ne perkolira ako je srednja duljina tipičnog zrna konačna. Dakle, ovdje u nastavku raspravljamo samo o slučaju kad je  $d \geq 2$ .

Poblje ćemo razmotriti dvije karakteristike perkolacije:

- vjerojatnost  $p_\infty$  da je tipično zrno  $\Xi_* + x_*$  Booleovog modela dio nakupine beskonačnog reda, tj. da postoji beskonačno mnogo  $\Xi_k + x_k$  koji su povezani s  $\Xi_* + x_*$  na način da se preklapaju
- očekivani red  $o_\infty$  nakupine koja sadrži tipično zrno  $\Xi_* + x_*$  definiramo kao broj zrna koja su dio te nakupine.

U slučaju sfernih zrna, Hall u knjizi [19] iz 1985. godine pokazao je da postoji pozitivna konačna konstanta  $\lambda'_c$  takva da je

- $o_\infty < \infty$  za  $\lambda < \lambda'_c$
- $o_\infty = \infty$  za  $\lambda > \lambda'_c$

ako i samo ako je  $\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0)^2) < \infty$

te postoji druga pozitivna konačna konstanta  $\lambda_c$  takva da je

- $p_\infty = 0$  za  $\lambda < \lambda_c$
- $p_\infty > 0$  za  $\lambda > \lambda_c$

#### 4.4. Perkolacija

ako i samo ako je  $\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0)^{2-1/d}) < \infty$ .

Uočimo da  $p_\infty = 1$  ne vrijedi jer uvijek postoje izolirana zrna. Unatoč tome, budući da postoji beskonačno mnogo zrnaca, kad god je  $p_\infty > 0$ , Booleov model perkolira. Dakle,  $\lambda_c$  i  $\lambda'_c$  su kritični intenziteti za takozvani fazni prijelaz.

Zanimljiv je slučaj kada je  $\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0)^2) = \infty$  i  $\mathbb{E}(\nu_d(\Xi_0)^{2-1/d}) < \infty$ . Tada je  $\lambda_c > \lambda'_c = 0$ , tj. ako Booleov model ima dovoljno mali intenzitet, on ne perkolira, ali očekivani broj zrna u nakupini koja sadrži ishodište je beskonačan. Općenito je  $0 \leq \lambda'_c \leq \lambda_c \leq \infty$ .

Meister i Roy u knjizi [20] iz 1994. godine pokazali su da Booleov model sa sfernim zrnima može imati najviše jednu beskonačnu nakupinu.

Primjer još jedne karakteristike perkolacije koja se proučava jest postojanje puta preklapajućih zrna od jedne strane kocke do suprotne strane.

Mnogi autori smatraju da je, osim u nekim patološkim slučajevima,  $\lambda_c = \lambda'_c$ . Kritični intenzitet  $\lambda'_c$  je lakši za odrediti. Obično je on asimptota grafa očekivanih veličina nakupina u odnosu na  $\lambda$ .

Za  $\Xi_0 = B(o, r)$ , gdje je  $r$  izabran tako da je površina diska i volumen kugle jednak 1, simulacije dovode do

$$\lambda'_c \approx 1.1281 \text{ (za } d=2) \text{ i } \lambda'_c \approx 0.3419 \text{ (za } d = 3).$$

Odgovarajuće vrijednosti od  $p_\infty$  su tada

$$p_\infty \approx 0.6763 \text{ (za } d = 2) \text{ i } p_\infty \approx 0.2896 \text{ (za } d = 3).$$

Uočimo da je  $p_\infty = 1 - e^{-\lambda_c}$ .

Fizičari su predložili različite aproksimacije za  $\lambda'_c$  u slučaju zrna koja nisu sferna.

Iz formule (4.9) slijedi jednakost

$$\lambda'_c \bar{V}_{ex} = 1 \tag{4.13}$$

#### 4.4. Perkolacija

koja daje aproksimaciju, temeljeno na ideji da u prosjeku u perkolirajućem Booleovom modelu svako zrno mora biti povezano s barem još jednim zrnom.

**Primjer 4.7** *U slučaju kada su zrna segmenti duljine  $l$  planarnog Booleovog modela, formula (4.13) daje aproksimaciju  $\lambda'_c = \alpha/l^2$  za  $\alpha = \pi/2$ . Simulacije su pokazale da je vjerojatno  $\lambda'_c = 5.7/l^2$ , tj. točni koeficijent  $\alpha$  je veći od predviđenog s formulom (4.13).*

Malo precizniji pristup koristi topološke argumente. Promotrimo specifični broj povezanosti  $N_V$ . Za male brojeve  $\lambda$ , zrna su uglavnom izolirana i  $N_V$  je pozitivan. Za velike  $\lambda$  Booleov model izgleda poput spužve s mnogo malih rupica i  $N_V$  je negativan. Stoga je prirodno pretpostaviti da najmanja nultočka funkcije  $N_A(\lambda)$  u formuli

$$N_A = \lambda(1 - p) \left( 1 - \frac{\lambda \bar{L}^2}{4\pi} \right) \quad (4.14)$$

ili  $N_V(\lambda)$  u formuli

$$N_V = \lambda(1 - p) \left( 1 - \frac{\lambda \overline{MS}}{4\pi} + \frac{\pi \lambda^2 \overline{S}^3}{384} \right) \quad (4.15)$$

daje dobru aproksimaciju za  $\lambda'_c$ , gdje su  $\bar{L}, \bar{S}, \bar{M}$  definirani na Slici 2.4. Nultočke su

$$\lambda_0 = \frac{4\pi}{\bar{L}^2}, \text{ za } d = 2 \quad (4.16)$$

i

$$\lambda_0 = \frac{48\bar{M}}{\pi^2 \bar{S}^2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{\pi^3 \bar{S}}{6\bar{M}^2} \right)^{1/2} \right), \text{ za } d = 3. \quad (4.17)$$

Mecke i Wagner [21], Mecke i Seyfried [22] te Stoyan i Mecke [23] demonstrirali su za različite oblike zrna da je dobra aproksimacija

$$\lambda'_c = \lambda_0. \quad (4.18)$$

#### 4.5. Prazne regije

U slučaju diskova površine 1 u  $\mathbb{R}^2$ , formula (4.16) daje aproksimaciju  $\lambda'_c = 1$  i za kugle u  $\mathbb{R}^3$  formula (4.17) daje aproksimaciju  $\lambda'_c = 0.38$ .

Formula (4.18), zajedno s formulama (4.16) i (4.17), pokazuje da oblik zrna uvelike utječe na vrijednost  $\lambda_0$ . Na primjer, za duga i tanka zrna  $\lambda_0$  je očito manji nego za sferna zrna pa se perkolacija češće odvija za ovakva zrna nego za kugle.

Preuzeto iz [1].

## 4.5 Prazne regije

Ponekad je i komplement  $\Xi^c$  Booleovog modela  $\Xi$  od velike važnosti. Njegov zatvarač, u oznaci  $(\Xi^c)^{cl}$ , je također slučajan zatvoren skup. Kako je Booleov model  $\Xi$  zatvoren skup, njegov komplement  $\Xi^c$  nije zatvoren (jer granice Booleovog modela  $\Xi$  ne pripadaju skupu  $\Xi^c$ ). Stoga je nužno uzeti zatvarač.

Svaka povezana komponenta od  $(\Xi^c)^{cl}$  naziva se **praznina**. U slučaju volumnog udjela  $p$  kada je on blizu 1 i ne premalih zrna, praznine su slučajno razbacane te svaka nalikuje konveksnom poligonu (mnogokutu) ili poliedru, ili spoju takvih oblika (vidi sliku 2.3 na stranici 14). Dakle, Booleov model sa zrnima koja su Poissonovi poligoni ili poliedri je često dobra aproksimacija za  $(\Xi^c)^{cl}$ .

**Primjer 4.8 (Lokalni granični teorem)** Promotrimo u  $\mathbb{R}^d$  niz Booleovih modela s istim tipičnim zrnom  $\Xi_0$ , koje je izotropno, te s intenzitetima  $\lambda_n$ , za  $\lambda_n \rightarrow \infty$ . Označimo s  $\mathcal{V}_n$  prazno mjesto koje sadrži ishodište o koje nije pokriveno. Tada je

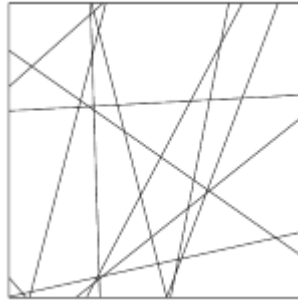
$$\lambda_n \mathcal{V}_n \rightarrow C_0 \text{ za } n \rightarrow \infty, \quad (4.19)$$

gdje je  $C_0$  nulta ćelija koja sadrži ishodište Poissonove hiperravninske teselacije intenziteta  $\varrho$  (koji je jednak  $S_V$  za  $d = 3$  te  $L_A$  za  $d = 2$ ) jednakog

#### 4.5. Prazne regije

srednjoj površini ili srednjem opsegu od  $\Xi_0$ . (Za više detalja pogledati [24].)

Primjer kako izgleda jedna Poissonova hiperravninska teselacija dana je na Slici 4.2.



Slika 4.2: Poissonova hiperravninska teselacija; slika je preuzeta i dostupna na linku: [https://www.researchgate.net/figure/A-realization-of-a-Poisson-hyperplane-tessellation-where-is-the-uniform-distribution-fig1\\_309738357](https://www.researchgate.net/figure/A-realization-of-a-Poisson-hyperplane-tessellation-where-is-the-uniform-distribution-fig1_309738357)

**Globalni granični teorem:** Za  $d = 2$ , očekivani broj praznina Booleovog modela sa  $\Xi_0 = B(o, r)$  po jedinici površine otprilike

$$N_A = \lambda^2 \pi r^2 \exp(-\lambda \pi r^2). \quad (4.20)$$

(Za više detalja o Globalnom graničnom teoremu pogledati [19] i [25].)

Rezultati iz ovog odjeljka su iz [1], [24], [19] i [25].

# Poglavlje 5

## Statistika

### 5.1 Općenito

U ovom poglavlju detaljnije ćemo napraviti statističku analizu Booleovog modela jer je on izvrstan primjer parametarske statistike za slučajne zatvorene skupove. Ponajviše ćemo objasniti neke sumarne karakteristike, kao što je to na primjer gustoća intrinzičnog volumena (npr.  $p$  ili  $S_V$ ), i funkcije, kao što su to npr.  $C(r)$  te razne kontaktne funkcije distribucije koje se mogu lako procijeniti.

Osnovni cilj statističke analize Booleovog modela jest određivanje parametra modela (kao što su  $\lambda, \bar{L}, \bar{A}, \bar{b}, \bar{S}, \bar{V}$ ), zatim distribucije tipičnog zrna te funkcije gustoće vjerojatnosti polumjera ukoliko se radi o zrnima koja su kugle.

Također, još jedan vrlo važan problem tiče se odluke o tome je li Booleov model prikladan ili ne za opisivanje određenog skupa podataka, odnosno radi se o testiranju hipoteze Booleovog modela.

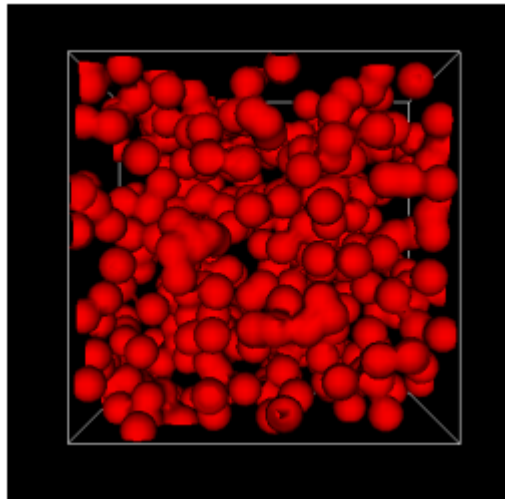
Navedeni problemi predstavljaju manje poteškoće ukoliko je moguće jasno razlikovati zrna. Zrna lako razlikujemo u slučajevima kada se radi o nižim

### 5.1. Općenito

dimenzijama, odnosno u slučaju segmenata ( $d = 2$  ili  $3$ ) ili u slučaju konveksnih ravnina ( $d = 3$ ). U takvim situacijama klice se mogu identificirati i mjeriti pojedinačno, što vodi ka odvajanju proučavanja zrna i točkovnih uzorka klica. Proučavanje zrna jedan je od problema u statistici slučajnih zatvorenih skupova, dok je proučavanje klica dio statistike točkovnih procesa.

Statistika se komplicira u slučaju kada se zrna preklapaju jer ih tada ne možemo jasno identificirati te moramo posegnuti za sumarnim karakteristikama spomenutima u prvom odlomku ovoga poglavlja.

Još jedan od problema događa se kada nije odmah jasno koju fazu ili sliku treba protumačiti kao Booleov model, ukoliko je dana neka dvofazna struktura. Na primjer, uzmemo li neki porozni medij modeliran Booleovim modelom, nije odmah jasno da li se sustav pora ili njegov komplement može opisati Booleovim modelom. Stoga je potrebno napraviti neke korake paralelne statističke analize: usporediti dobivene rezultate pod pretpostavkom da je najprije jedna, a zatim druga komponenta opisana Booleovim modelom.

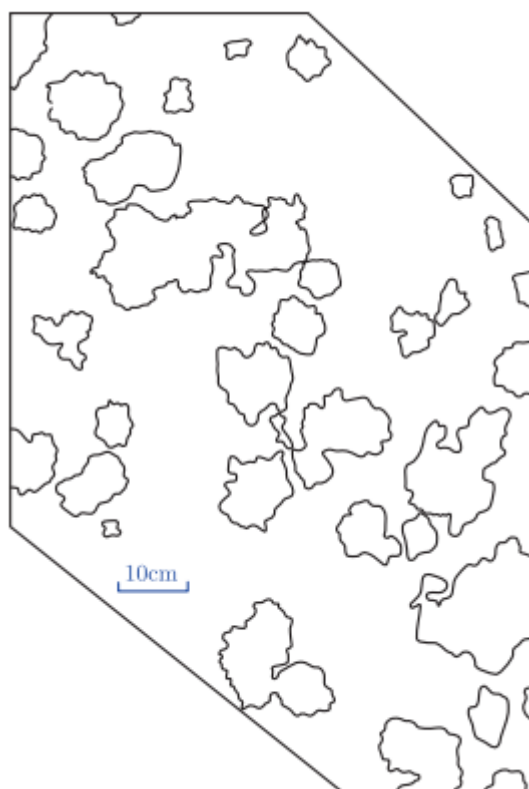


Slika 5.1: 3D realizacija Booleovog modela sa sfernim zrnima konstantnog radijusa  $r = 1$  te intenziteta  $\lambda = 5 \times 10^{-2}$ . Slika je preuzeta iz [29].



## 5.1. Općenito

Primjer slike koja se koristi za statističku analizu je Slika 5.1. Skup podataka koji se najčešće koristi za proučavanje jest dvodimenzionalna ili trodimenzionalna slika piksela. Također, kao što je to na Slici 5.2 na stranici 54., obično se podaci digitaliziraju za određivanje većine sumarnih karakteristika. Takve situacije zahtijevaju upotrebu numerički stabilnih i robusnih metoda koje dobro funkcioniraju za digitalne podatke i automatske analize, te isključuju metode koje koriste na primjer točke tangente ili zakrivljenost u graničnim točkama.



Slika 5.2: Uzorak lišajeva na kamenu. Na neki je način sličan uzorku Booleovog modela s konveksnim zrnima ako zanemarimo graničnu hrapavost. Slika preuzeta iz [1].

## 5.2. Testiranje pretpostavki modela

# 5.2 Testiranje pretpostavki modela

Ispitivanje je li pretpostavka da je Booleov model prikladan za dane podatke ili nije obično se procjenjuje promatranjem sumarnih karakteristika kao što su kovarijanca  $C(r)$ , kontaktna funkcija distribucije  $H_B(r)$  ili Meckeova morfološka funkcija. Koju funkciju ćemo koristiti ovisi o uvjetima mjerenja:

- ako su dani podaci raspršeni pod malim kutom koristi se  $C(r)$ , ali poznato je da su odgovarajuće formule tada prilično komplicirane te da  $C(r)$  nije neka snažna testna karakteristika.

Pokazalo se da su najbolje testne karakteristike, ako ih je moguće primijeniti na podacima, kvadratna, diskoidalna i sferna kontaktna funkcija distribucije. Linearna kontaktna funkcija distribucije nije dobar primjer za testiranje jer je skoro eksponencijalna za razne slučajne skupove koji nisu Booleovi.

Ispravan test značajnosti koji se koristi je test odstupanja po parametarskoj bootstrap metodi. U nastavku ćemo dati objašnjenje za slučaj kada je korištena sumarna karakteristika  $H_S(r)$ .

Simulaciju prilagođenog Booleovog modela korištenjem sferne kontaktne funkcije distribucije  $H_S(r)$  vršimo  $k$  puta, a za svaki od  $k$  uzoraka određuje se procjena  $\hat{H}_{S,i}(r)$ .

Odstupanja

$$\tau_{emp} = \max_{r \leq r_{max}} |H_S(r) - \hat{H}_S(r)|, \quad (5.1)$$

gdje je  $\hat{H}_S(r)$  empirijska sferna kontaktna funkcija distribucije, i

$$\tau_i = \max_{r \leq r_{max}} |H_S(r) - \hat{H}_{S,i}(r)|, \text{ za } i = 1, 2, \dots, k \quad (5.2)$$

određuju se za odgovarajući  $r_{max}$ .  $r_{max}$  određujemo, na primjer, kao polovinu dijagonale pravokutnog prozora. U tom se slučaju  $k$  nezavisnih uzoraka simulira unutar takvog prozora. Vrijednosti  $\tau_i$  i  $\tau_{emp}$  sortiraju se uzlazno.

## 5.2. Testiranje pretpostavki modela

Pod hipotezom Booleovog modela,  $\tau_{emp}$  ima istu distribuciju kao i  $\tau_i$  (uniformnu na segmentu od 1 do  $k+1$ ). Veliki rang znači da odbacujemo hipotezu Booleovog modela. (Približna) p-vrijednost testa dana je formulom

$$\hat{p} = \frac{s+1}{k+1}, \quad (5.3)$$

gdje je  $s$  broj od  $\tau_i$  veći ili jednak  $\tau_{emp}$ .

Za mjerenje odstupanja može se koristiti

$$\tau_{emp} = \int_0^{r_{\max}} \left( H_S(r) - \hat{H}_S(r) \right)^2 dr \quad (5.4)$$

za odgovarajući  $r_{\max}$  i  $\tau_i$ .

**Napomena 5.1** *Ako ovako opisani test primijenimo na sliku koja je u obliku podataka u pikselima, što je čest slučaj u praksi, važno je prvo digitalizirati simulirani Booleov model na sličan (ili isti) način kao što je i originalna slika piksela. Posebice je bitno paziti na omjere veličine piksela i veličine zrna. Procjena od  $H_S(r)$  mora se provesti kao za sliku piksela, a ne kao za slike s vektorskim podacima.*

Kada koristimo kontaktne funkcije distribucije, često se vizualiziraju razlike između empirijskih i teoretskih vrijednosti u slučaju konveksnih i izotropnih zrna za  $d = 2$  i  $d = 3$ . Kao rezultat formule (2.40), logaritam od  $1 - H_B(r)$  mora biti u polinomijalnoj formi:

$$\ln(1 - H_B(r)) = -a(B)r - b(B)r^2 - c(B)r^3 \text{ za } r \geq 0, \quad (5.5)$$

s nenegativnim koeficijentima  $a(B), b(B), c(B)$ , za konveksni skup  $B$ . Za linearnu kontaktnu funkciju distribucije je

$$b(B) = c(B) = 0,$$

### 5.3. Procjena parametara modela

a u slučaju  $d = 2$  i diskoidalnu kontaktnu funkciju distribucije je

$$c(B) = 0.$$

Za različite oblike od  $B$ , empirijska kontaktna funkcija distribucije  $\hat{H}_B(r)$  izračunava se iz dane slike. Ako se normalizirani logaritam

$$\ln(1 - \hat{H}_B(r))/r \tag{5.6}$$

dobro aproksimira polinomom, kao u formuli (5.5), za bilo koji promatrani  $B$ , onda Booleov model nije prikladan model za dani skup podataka.

## 5.3 Procjena parametara modela

### 5.3.1 Metoda gustoće

Jedna od najboljih metoda za procjenu parametara Booleovog modela jest metoda gustoće ili intenziteta koju su uveli Santaló u knjizi [26] i Weil u knjizi [27]. Ta se metoda temelji na formulama

- za  $d = 2$  :

$$A_A = p = 1 - \exp(-\lambda\bar{A}), \tag{5.7}$$

$$N_A^+ = \lambda(1 - p) = \lambda \exp(-\lambda\bar{A}). \tag{5.8}$$

- za  $d = 3$  :

$$V_V = p = 1 - \exp(-\lambda\bar{V}), \tag{5.9}$$

$$N_V^+ = \lambda(1 - p) = \lambda \exp(-\lambda\bar{V}). \tag{5.10}$$

### 5.3. Procjena parametara modela

Ideja metode je procijeniti ove intenzitete te zatim koristiti formule koje u sebi sadrže njih i parametre modela, kao što su  $\lambda$  i parametri distribucije veličine zrna.

**Primjer 5.2** *Gustoće  $A_A, L_A, N_A^+$  i  $N_A$  su povezane s paramterima modela preko 4 jednakosti:*

$$\begin{aligned} A_A &= 1 - \exp(-\lambda\bar{A}), \\ L_A &= \lambda(1 - A_A)\bar{L}, \\ N_A^+ &= \lambda(1 - A_A), \\ N_A &= \lambda(1 - A_A) \left(1 - \frac{\lambda\bar{L}}{4\pi}\right). \end{aligned}$$

*Posljedično, kada znamo procijeniti ove gustoće, znamo procijeniti i parametre  $\lambda, \bar{L}, \bar{A}$ .*

Jedan od mogućih problema pri upotrebi ove metode u praksi jest da statistička svojstva ove metode nisu još uvijek temeljito istražena. Glavni od problema je točnost procjenitelja gustoće.

Procjenitelj

$$\hat{\lambda} = \frac{\hat{N}_A^+}{1 - \hat{A}_A} \quad (5.11)$$

za intenzitet  $\lambda$  ima svojstvo da za velike prozore  $W$

$$A(W)^{1/2}(\hat{\lambda} - \lambda), \text{ gdje je } A(W) \text{ površina prozora } W, \quad (5.12)$$

slijedi Gaussovu distribuciju s očekivanjem 0 i varijancom  $\lambda/(1 - p)$ .

Za 2-parametarski model koriste se formule  $A_A$  i  $L_A$  definirane u Primjeru 5.2 ili formule  $V_V$  i  $S_V$ . Najvažniji primjeri 2-parametarskih modela su Booleov model s identičnim kuglama (parametri modela su  $\lambda$  i radijus  $R$ ) te Booleov model s Poissonovim poliedarskim zrnima (parametri su  $\lambda$  i  $\varrho$ ).

### 5.3. Procjena parametara modela

**Primjer 5.3** (Preuzeto iz [29].) Promotrimo Booleov model s diskovima nepoznatog konstantnog radijusa  $R$  i intenziteta  $\lambda$ . Pretpostavljamo da raspoložemo skupom podataka iz kojeg možemo procijeniti površinu  $A_A$  i opseg  $L_A$ . Površina tipičnog zrna je konstantna i iznosi  $\bar{A} = \pi R^2$ . Slično, opseg tipičnog zrna iznosi  $\bar{L} = 2\pi R$ . Sada je, prema Milesovim formulama

$$A_A = 1 - \exp(-\lambda\pi R^2),$$

$$L_A = \lambda(1 - A_A)2\pi R.$$

Sada lako pronademo  $R$  te  $\lambda$ .

Za 3-parametarski model koriste se formule iz Primjera 5.2 ili formule za  $V_V, S_V, M_V, N_V, N_V^+$ . Najvažniji primjer 3-parametarskog modela je Booleov model sa zrnima koja su kugle i radijusom koji ima distribuciju s 2 parametra (npr. to može biti gamma distribucija ili lognormalna distribucija).

#### 5.3.2 Metoda minimalnog kontrasta

Metoda minimalnog kontrasta temelji se na tome da se parametri modela odrede tako da teoretska sumarna karakteristična funkcija bude što bliža empirijskoj. U slučaju Booleovog modela, preporuča se korištenje kovarijance  $C(r)$  ili funkcije korelacije  $\kappa(r)$  jer oni mogu dovesti do parametra modela različitih od  $\bar{V}, \bar{S}$  itd., a koji se mogu odrediti koristeći kontaktne funkcije distribucije. Još bolji način kojim ih možemo odrediti jest metoda gustoće. No, ponekad je metoda minimalnog kontrasta jedina metoda koju je moguće koristiti za procjenu parametra.

Neka je  $F(r; \theta_1, \theta_2)$  sumarna karakteristična funkcija koja ovisi o nepoznatim parametrima  $\theta_1$  i  $\theta_2$  te neka je  $\hat{F}(r)$  odgovarajuća empirijska funkcija. Tada su procjenitelji  $\hat{\theta}_1$  i  $\hat{\theta}_2$  od  $\theta_1$  i  $\theta_2$  redom one vrijednosti  $\zeta_1$  i  $\zeta_2$  koje

#### 5.4. Generalizacija i varijacije

minimiziraju

$$\int_{r_1}^{r_2} \left( F(r; \zeta_1, \zeta_2) - \hat{F}(r) \right)^2 dr \quad (5.13)$$

za odgovarajuće  $r_1$  i  $r_2$ . Često se ovaj integral zamjenjuje sa sumom (umjesto kvadrata razlike) od  $F(r_i; \zeta_1, \zeta_2)$  i  $\hat{F}(r_i)$  za niz  $r_i$  vrijednosti.

#### 5.3.3 Procjena distribucije radijusa sfernih zrna

Mnogi autori razvili su statističke metode za određivanje funkcije gustoće vjerojatnosti radijusa  $f_R(r)$  u slučaju sfernih (ili diskoidalnih) zrna. Mnoge od tih metoda su numerički nestabilne te zahtijevaju teška mjerenja. Jedna od tih metoda opisana je u knjizi Thoverta et al. iz 2001. godine (vidi [28]). Promatra se mreža testnih točaka u  $\Xi$  i za svaku od njih odredi se najveća kugla koja u cjelosti leži u  $\Xi$  i koja pokriva zadanu testnu točku. Dobiveni uzorak radijusa, koji su isti za testne točke koje su blizu jedna drugoj, smatra se uzorkom koji odgovara volumenski ponderiranoj verziji gustoće  $f_R(r)$ .

### 5.4 Generalizacija i varijacije

Neke generalizacije Booleovog modela koriste se za opis struktura koje su kompleksnije. Sama generalizacija uključuje slabljenje pretpostavki modela, a to se posebice odnosi na pretpostavku da klice tvore Poissonov proces. Slučajne strukture koje su u biti Booleovi modeli, ali koriste opće točkaste procese za dobivanje klica, zovemo modeli klica-zrno. Takvi modeli mogu imati veću ili manju nepravilnost u strukturi od Booleovog modela, a to ovisi o određenim svojstvima samog procesa klica.

Za dobivanje uzorka koji ima veće nepravilnosti od klasičnog Booleovog modela mogu se koristiti dva nezavisna Booleova modela  $\Xi^{(1)}$  i  $\Xi^{(2)}$ . Očito je

#### 5.4. Generalizacija i varijacije

unija  $\Xi^{(1)} \cup \Xi^{(2)}$  dva Booleova modela također Booleov model. U nastavku promotrimo 3 različite varijacije koje su malo kompliciranije.

##### Varijacija 1.

Pretpostavimo da  $\Xi^{(1)}$  i  $\Xi^{(2)}$  imaju volumne udjele  $p^{(1)}$  i  $p^{(2)}$  te kovarijance  $C^{(1)}(r)$  i  $C^{(2)}(r)$ . Tada je presjek

$$\Xi^{(i)} = \Xi^{(1)} \cap \Xi^{(2)} \quad (5.14)$$

slučajni zatvoreni skup (za primjer vidi Sliku 5.3 pod (a)). Osnovne karakteristike ovog modela su:

- $p^{(i)} = p^{(1)} \cdot p^{(2)}$
- $C^{(i)}(r) = C^{(1)}(r) \cdot C^{(2)}(r)$ , za  $r \geq 0$ .

Određivanje funkcionala kapaciteta je kompliciranije. Ovaj model korišten je u knjizi Savary *et al.* [30] u kontekstu klastera s malim zrnima.

##### Varijacija 2.

Još jedan skup koji se može izgraditi iz modela  $\Xi^{(1)}$  i  $\Xi^{(2)}$  je presjek jednog modela sa zatvaračem komplementa od drugog modela, tj.

$$\Xi^{(ic)} = \Xi^{(1)} \cap ((\Xi^{(2)})^c)^{cl}. \quad (5.15)$$

U ovom slučaju je  $((\Xi^{(2)})^c)^{cl}$  zatvarač komplementa od  $\Xi^{(2)}$ . Za ilustraciju vidjeti Sliku 5.3 pod (b). Osnovne karakteristike ovog modela su:

- $p^{(ic)} = p^{(1)} \cdot (1 - p^{(2)})$
- $C^{(ic)}(r) = C^{(1)}(r) \cdot (1 - 2p^{(2)} + C^{(2)}(r))$ , za  $r \geq 0$ .

Savary *et al.* u knjizi [30] koristio je i model  $\Xi^{(1)} \cap \Xi^{(2)} \cap ((\Xi^{(3)})^c)^{cl}$ .

##### Varijacija 3.

Skupovi  $\Xi^{(1)}$  i  $\Xi^{(2)}$  mogu se koristiti za izgradnju trofaznog modela kao na Slici 5.3 pod (c). Njegove komponente su:



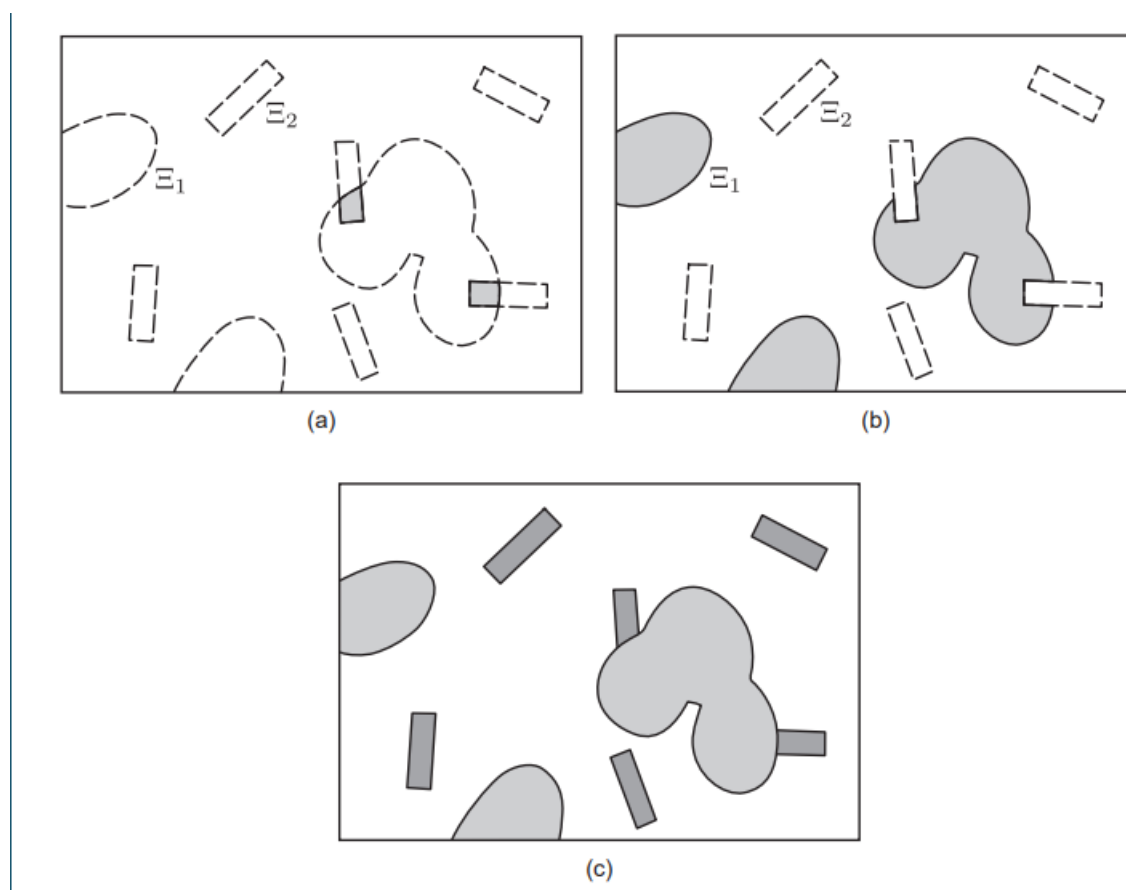
#### 5.4. Generalizacija i varijacije

1.  $\Xi^{(1)}$
2.  $\Xi^{(2)} \setminus \Xi^{(1)}$  (razlika skupova koju možemo interpretirati kao uzorak od  $\Xi^{(2)}$ , ali djelomično uništen od  $\Xi^{(1)}$ )
3. ostatak:  $(\Xi^{(1)} \cup \Xi^{(2)})^c$ .

Ovaj model koristio je Greco *et al.* u knjizi [31] za opis sinter metala. U tom slučaju prva komponenta modelira hematite, druga komponenta trosku, a treća modelira kalcijev ferit.

Rezultati cijelog Poglavlja 5 su iz [1] i [29].

#### 5.4. Generalizacija i varijacije



Slika 5.3: 3 varijacije Booleovog modela: (a) presjek 2 Booleova modela; (b) presjek Booleovog modela sa zatvaračem komplementa drugog Booleovog modela; (c) jednostavni model s 3 komponente. Slika preuzeta iz [1].

# Zaključak

U središtu cijeloga rada naglasak je bio na opisu Booleovog modela i njegovih statističkih karakteristika. U svakodnevnoj praksi Booleov model je važan primjer slučajnog zatvorenog skupa i dio stohastičke geometrije. Kroz navedenu literaturu možemo zaključiti da je Booleov model primijenjiv u različitim područjima i znanostima, kao što su na primjer biologija i znanost o materijalima, što ga čini važnim predmetom proučavanja u statistici. Pod pojmom proučavanja ponajprije mislimo na ispitivanje svojstva ili karakteristika samog modela (primjerice kovarijance ili volumnog udjela) i proučavanje povezanosti između tih svojstva. Također, proučavali smo kontaktne funkcije distribucije i njihovu povezanost s funkcionalom kapaciteta. U radu su navedene najbitnije formule za takva svojstva koje koristimo u statistici, a na samome kraju rada naveli smo neke osnovne metode i testove za procjenu parametara samog modela te testiranje možemo li uopće neku pojavu u prirodi opisati Booleovim modelom ili ne.

# Literatura

- [1] Sung Nok Chiu, Dietrich Stoyan, Wilfrid S. Kendall, Joseph Mecke (2013) *Stochastic Geometry and its Applications, treće izdanje*, United Kingdom
- [2] Bacceli F., Błaszczyszyn B. (2010) *Stochastic Geometry and Wireless Networks: Volume I Theory*, Paris
- [3] Weil W., Baddeley A., Barany I., Schneider R. (2004), Karlsruhe, Italy
- [4] Jukić D. (2012) *Mjera i integral*, Osijek, Sveučilište J. J. Strossmayera, Odjel za matematiku
- [5] Ivanković D (2021) Teorija slučajnih skupova, Zagreb, Prirodoslovno-matematički fakultet. Dostupno na linku: `file:///C:/Users/Korisnik/Downloads/teorija-slucajnih-skupova%20(1).pdf`
- [6] Ungar Š. (2016), Uvod u teoriju skupova i matematičku logiku, Osijek, Sveučilište J. J. Strossmayera. Dostupno na linku: `https://www.mathos.unios.hr/~sime/HR/skupovi/skupovi.pdf`
- [7] Armitage, P. (1949). An overlapp problem arising in particle counting. *Biometrika* 36

## Literatura

- [8] Diggle, P. J. (1981). Binary mosaics and the spatial pattern of heather. *Biometrics* 37
- [9] Jacod, J. and Joathon, P. (1971). Use of random genetic models in the study of sedimentary processes. *J. Assoc. Math. Geol.* 3
- [10] Hermann, H. (1991). *Stochastic Models of Heterogeneous Materials*. Materials Science Forum 78. Trans Tech Publications Inc., Zurich
- [11] Jeulin, D., Monnaie, P., and Peronnet, F. (2001). Gypsum morphological analysis and modeling. *Cement Concrete Comp.* 23
- [12] Mecke, K. (1994). *Integralgeometrie in der Statistischen Physik: Perkolatation, komplexe Flüssigkeiten und die Struktur des Universums*. Reihe Physik 25. Verlag Harry Deutsch, Frankfurt
- [13] Stoyan, D. and Mecke, K. (2005). The Boolean model: from Matheron till today. In Bilodeau, M., Meyer, F., and Schmitt, M., eds, *Space, Structure and Randomness*, Lecture Notes in Statistics 183, pp. 151–81. Springer-Verlag, New York
- [14] Matheron, G. (1975). *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley and Sons, Inc., New York
- [15] Hall, P. (1988). *Introduction to the Theory of Coverage Processes*. John Wiley and Sons, Inc., New York
- [16] Błaszczyszyn, B., Rau, C., and Schmidt, V. (1999). Bounds for clump size characteristics in the Boolean model. *Adv. Appl. Prob.* 31, 910–28
- [17] Gilbert, E. N. (1961). Random plane networks. *J. SIAM* 9, 533–43

## Literatura

- [18] Baccelli, F. and Błaszczyszyn, B. (2009). Stochastic geometry and wireless networks I: Theory. Foundations and Trends in Networking 3, 249–449.
- [19] Hall, P. (1985). On continuum percolation. Ann. Probab. 13, 1250–66
- [20] Meester, R. and Roy, R. (1994). Uniqueness of unbounded occupied and vacant components in Boolean models. Ann. Appl. Probab 4, 933–51
- [21] Mecke, K. R. and Wagner, H. (1991). Euler characteristic and related measures for random geometric sets. J. Stat. Phys. 64
- [22] Mecke, K. R. and Seyfried, A. (2002). Strong dependence of percolation thresholds on polydispersity. Europhys. Lett. 58, 28–34
- [23] Stoyan, D. and Mecke, K. (2005). The Boolean model: from Matheron till today. In Bilodeau, M., Meyer, F., and Schmitt, M., eds, Space, Structure and Randomness, Lecture Notes in Statistics 183, pp. 151–81. Springer-Verlag, New York
- [24] Molchanov, I. S. (1996). A limit theorem for scaled vacancies of the Boolean model. Stoch. Stoch. Rep. 58, 45–65
- [25] Aldous, D. (1989). Probability Approximations via the Poisson Clumping Heuristic. Springer-Verlag, New York, p. 149.
- [26] Santalo, L. (1976). Integral Geometry and Geometric Probability. Addison-Wesley, Reading, MA
- [27] Weil, W. and J. A. Wieacker (1984). Densities for stationary random sets and point processes. Advances in applied probability, pages 324–346

## Literatura

- [28] Thovert, J.-F., Yousefian, F., Spanne, P., Jacquin, C. G., and Adler, P. M. (2001). Grain reconstruction of porous media: Application to a low-porosity Fontainebleau sandstone. *Phys. Rev. E* 63
- [29] Figliuzzi B. (2015). *Introduction to stochastic geometry*
- [30] Savary, L., Jeulin, D., and Thorel, A. (1999). Morphological analysis of carbon-polymer composite materials from thick sections. *Acta Stereol.* 18, 297–303
- [31] Greco, A., Jeulin, D., and Serra, J. (1979). The use of the texture analyser to study sinter structure: application to the morphology of calcium ferrites encountered in basic sinters of rich iron ores. *J. Microsc*