PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

IVANA MARGARETIĆ

VARIJANTE HERMITE-HADAMARDOVE NEJEDNAKOSTI

DIPLOMSKI RAD

Split, srpanj 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

VARIJANTE HERMITE-HADAMARDOVE NEJEDNAKOSTI

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Ivana Margaretić

Mentor:
izv. prof. dr. sc. Jurica Perić

Split, srpanj 2023.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

VARIJANTE HERMITE-HADAMARDOVE NEJEDNAKOSTI

Ivana Margaretić

Sažetak:
Ovaj rad istražuje ključni pojam konveksnih funkcija u matematičkoj analizi i optimizaciji, s fokusom na Hermitovu-Hadamardovu nejednakost. Cilj rada je proučiti generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti, procijeniti njihovu preciznost i promjene rezultata u kontekstu različitih vrsta konveksnosti. Također, želi se proširiti primjenjivost Hermitove-Hadamardove nejednakosti na različite klase konveksnih funkcija i istražiti kako različite vrste konveksnosti utječu na tu nejednakost.

Ključne riječi:
konveksne funkcije, Jensenova nejednakos, Lipschitz-neprekidne funkcije, izotonični linearni funkcionali, izotonični sublinearni funkcionali, Fejérove nejednakosti, log-koveksnosne funkcije, r-konveksne funkcije, m-konveksne funkcije, s-konveksne funkcije, h-konveksne funkcije

Podatci o radu:
69 stranica, 5 slika, 0 tablica, 18 literaturnih navoda, jezik izvornika: hrvatski

Mentor: *izv. prof. dr. sc. Jurica Perić*

Članovi povjerenstva:

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

red. prof. dr. sc. Milica Klaričić Bakula

dr. sc. Ana Laštre, pred.

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *14. srpnja 2023.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

VARIANTS OF HERMITE-HADAMARD INEQUALITY

Ivana Margaretić

Abstract:
This paper explores the key notion of convex functions in mathematical analysis and optimization, with a focus on the Hermit-Hadamard inequality. The aim of the paper is to study the generalizations of the Hermit-Hadamard inequality, evaluate their precision and changes in results in the context of different types of convexity. Additionally, it aims to extend the applicability of the Hermit-Hadamard inequality to various classes of convex functions and investigate how different types of convexity influence this inequality.

Key words:
convex functions, Jensen's inequality, Lipschitz-continuous functions, isotonic linear functions, isotonic sublinear functions, Fejér inequalities, log-convex functions, r-convex functions, m-convex functions, s-convex functions, h-convex functions

Specifications:
69 pages, 5 figures, 0 tables, 18 references, written in Croatian

Mentor: *associate professor Jurica Perić*

Committee:

professor Milica Klaričić Bakula

dr.sc. Ana Laštre, lecturer

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

This thesis was approved by a Thesis commettee on *July 14, 2023.*

Uvod

Konveksne funkcije su ključni pojam u matematičkoj analizi i optimizaciji te imaju široku primjenu u raznim područjima kao što ćemo vidjeti u nastavku rada. Posebno su važne u optimizaciji zbog svojstva da je svaki lokalni minimum, tj. maksimum ujedno i globalni minimum, tj. maksimum. To svojstvo omogućuje razvoj efikasnih metoda za optimizaciju pri rješavanju problema. Jedan od najvažnijih alata u proučavanju konveksnih funkcija je Hermitova-Hadamardova nejednakost, koja daje procjenu srednje vrijednosti funkcija definiranih na konveksnim skupovima. Njena važnost leži u širokoj primjeni u različitim granama matematike. Omogućuje nam razumijevanje ponašanje konveksnih funkcija i izvođenje korisnih procjena njihove vrijednosti. U radu ćemo se fokusirati na proučavanje generalizacija Hermitove-Hadamardove nejednakosti te procjenu preciznosti i promjene njenih rezultata u kontekstu različitih vrsta konveksnosti. Generalizacije ove nejednakosti proširuju primjenjivost na različite klase konveksnih funkcija, omogućujući nam da dobijemo preciznije procjene i rezultate u specifičnim okruženjima. Osim toga, istražiti ćemo kako različite vrste konveksnosti utječu na Hermitovu-Hadamardovu nejednakost.

Sadržaj

Poglavlje 1

Konveksne funkcije

1.1 Definicija i osnovna svojstva konveksnosti

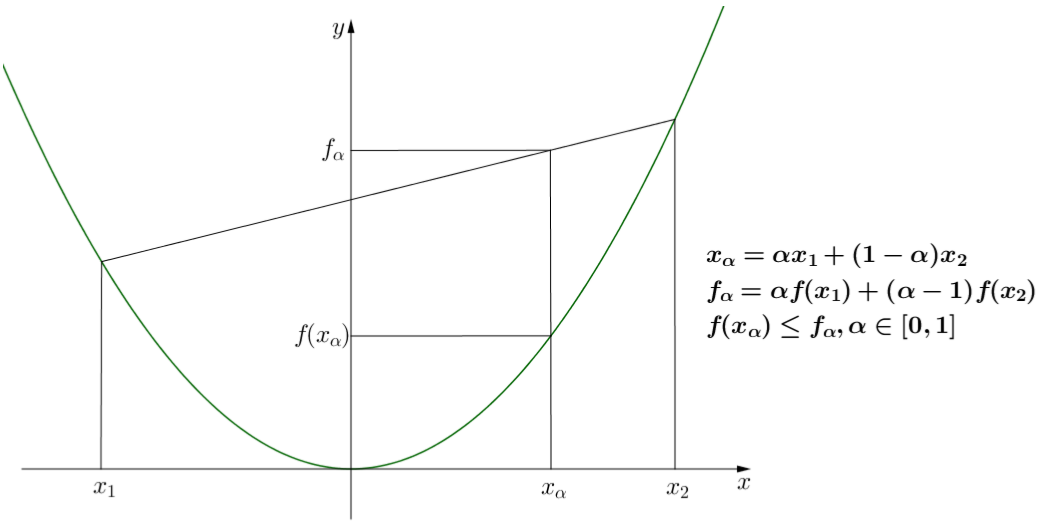
Razumijevanje pojma konveksnosti ključno je za proučavanje Hermite-Hadamardove nejednakosti. Hermite-Hadamardova nejednakost se primjenjuje u numeričkoj analizi, ekonomiji, financijama, itd., gdje se koristi za procjenu vrijednosti integrala i analizu rizika. U nastavku rada navodimo važna svojstva i definicije iz teorije konveksnih funkcija.

Definicija 1.1 *Neka je I interval na $\mathbb{R}$. Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je konveksna ako za svaki x_1, $x_2 \in I$ i svaki $\alpha \in [0,1]$ vrijedi*

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (\alpha - 1)f(x_2). \tag{1.1}$$

Ako vrijedi obrnuta nejednakost kažemo da je f konkavna funkcija.

- Ako u (1.1) vrijedi stroga nejednakost za svaki $x_1 \neq x_2$ i $\alpha \in (0,1)$ onda kažemo da je funkcija f strogo konveksna
- Ako je funkcija $-f$ konveksna (odnosno, strogo konveksna) tada je f konkavna (odnosno, strogo konkavna)



Slika 1.1: Konveksna funkcija

Geometrijska interpretacija konveksnosti funkcije $f : I \to \mathbb{R}$ govori da se točke na grafu funkcije $f|_{[x_1,x_2]}$ nalaze ispod ili na dužini čije su krajnje točke $(x_1, f(x_1))$ i $(x_2, f(x_2))$. Kao što možemo vidjeti na Slici 1.1, za svaki $x_1, x_2 \in I$ i za svaki $x_\alpha \in [x_1, x_2]$ vrijedi

$$f(x_\alpha) \leq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x_\alpha - x_1).$$

Dakle, konveksne funkcije su lokalno, tj. na bilo kojem podintervalu, dominirane afinim funkcijama.

Primijetimo da je $\frac{x_2 - x_\alpha}{x_2 - x_1} \in [0, 1]$. Sada iz konveksnosti funkcije f za

$$\alpha = \frac{x_2 - x_\alpha}{x_2 - x_1}, \qquad 1 - \alpha = \frac{x_\alpha - x_1}{x_2 - x_1}$$

iz (1.1) sljedi

$$f(x_\alpha) \leq \frac{x_2 - x_\alpha}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x_\alpha - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2).$$

U nastavku navedimo neka od osnovnih svojstava konveksnih funkcija. Od sada u radu sa I označavamo interval na $\mathbb{R}$.

Propozicija 1.2 *Ako su funkcije f i g konveksne na I, tada je funkcija $f+g$ konveksna na I.*

Dokaz. Koristeći konveksnost funkcija f i g, za svaki x_1, $x_2 \in I$ i $\alpha \in [0,1]$ dobivamo

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (\alpha - 1)f(x_2),$$

$$g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha g(x_1) + (\alpha - 1)g(x_2).$$

Zbrajanjem ovih nejednakosti dobivamo

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) + g(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq$$

$$\alpha f(x_1) + (\alpha - 1)f(x_2) + \alpha g(x_1) + (\alpha - 1)g(x_2),$$

tj.

$$(f+g)(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha(f+g)(x_1) + (\alpha - 1)(f+g)(x_2).$$

Po definiciji konveksnosti tvrdnja je dokazana. ■

Propozicija 1.3 *Ako je f konveksna funkcija na I i β pozitivan realan broj, tada je βf konveksna na I.*

Dokaz. Koristeći konveksnost funkcije f za svaki x_1, $x_2 \in I$ i $\alpha \in [0,1]$ dobivamo

$$f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (\alpha - 1)f(x_2).$$

Pomnožimo li prethodnu nejednakost s pozitivnim realnim brojem β slijedi dokaz teorema

$$\beta f(\alpha x_1 + (1-\alpha)x_2) \leq \alpha \beta f(x_1) + (\alpha - 1)\beta f(x_2).$$

■

Definicija 1.4 *Funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ je afina fukcija ako je oblika $f(x) = ax + b$ gdje su $a, b \in \mathbb{R}$.*

Propozicija 1.5 *Funkcija f je afina ako i samo ako je konveksna i konkavna.*

Propozicija 1.6 *Ako je f konveksna funkcija i g afina funkcija na I, tada je $f \circ g$ konveksna funkcija na I.*

Dokaz. Koristeći konveksnost funkcije f za svaki x_1, $x_2 \in I$ i $\alpha \in [0, 1]$ dobivamo

$$f(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \leq \alpha f(x_1) + (\alpha - 1)f(x_2).$$

Kako je funkcije g afina, za svaki x_1, $x_2 \in I$ i $\alpha \in [0, 1]$ slijedi

$$g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) = \alpha g(x_1) + (\alpha - 1)g(x_2).$$

Dobivamo

$$\begin{aligned}(f \circ g)(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) &= f(g(\alpha x_1 + (1 - \alpha)x_2) \\ &= f(\alpha g(x_1) + (\alpha - 1)g(x_2)) \\ &\leq \alpha(f \circ g)(x_1) + (\alpha - 1)(f \circ g)(x_2)\end{aligned}$$

pa je tvrdnja teorema dokazana. ■

Propozicija 1.7 *Ako su funkcije f i g konveksne na I i g je rastuća, tada je $g \circ f$ konveksna funkcija na I.*

U sljedećem teoremu dajemo jednu od karakterizacija konveksnih funkcija koju ćemo koristiti u nastavku.

Teorem 1.8 *Neka je funkcija $f : [a, b] \subseteq I \to \mathbb{R}$ takva da je f'' postoji na (a, b). Funkcija f je konveksna ako i samo ako je $f'' \geq 0$. Ako je $f'' > 0$ onda je f strogo konveksna.*

Napomena 1.9 *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R} \in C^2$ neka su konstante m, M minimum i maksimum funkcije f''. Promatranjem funkcija $\frac{1}{2}Mx^2 - f(x)$ i $f(x) - \frac{1}{2}mx^2$ vidimo da vrijedi*

$$\left(\frac{1}{2}Mx^2 - f(x)\right)'' = M - f''(x) \geq 0$$

$$\left(f(x) - \frac{1}{2}mx^2\right)'' = f''(x) - m \geq 0.$$

Sada iz Teorema 1.8 slijedi da su funkcije $\frac{1}{2}Mx^2 - f(x)$ i $f(x) - \frac{1}{2}mx^2$ konveksne. Ovaj primjer će nam također biti koristan u nastavku rada.

Nadalje, promotrimo omeđenost i neprekidnost konveksnih funkcija.

Propozicija 1.10 *Neka je f definirana na I. Funkcija f je konveksna ako i samo ako za svaki kompaktni podinterval $J \subseteq I$ i za svaku afinu funkciju g, supremum od $f + g$ na J se postiže u rubnim točkama.*

Posljedica Propozicije 1.10 je da je konveksna funkcija f omeđena na svakom kompaktnom podintervalu $[a, b] \subseteq I$. Točnije,

$$f(x) \leq M = max\{f(a), f(b)\}$$

na $[a, b]$. Neka je $x \in [a, b]$ proizvoljan, takav da $x = \frac{a+b}{2} + t$ za neki t takav da $|t| \leq \frac{a-b}{2}$. Vrijedi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{a+b}{2} - t\right),$$

odnosno

$$\begin{aligned} f(x) &= f\left(\frac{a+b}{2} + t\right) \\ &\geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - t\right). \end{aligned}$$

Ako stavimo $m = 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M$. Vrijedi

$$-f\left(\frac{a+b}{2} - t\right) \geq -M,$$

pa je

$$f(x) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M.$$

Dakle, funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je omeđena funkcija. U nastavku navodimo definiciju Lipschitz-neprekidne funkcije čiju ćemo definiciju i svojstva koristit u više navrata.

Definicija 1.11 *Kažemo da je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz*[1]*-neprekidna (L-Lipschitz) funkcija s konstantom $L > 0$ na intervalu $[a, b]$ ako za svaki $x, y \in [a, b]$ vrijedi:*

$$|f(x) - f(y)| \leq L\,|x - y|\,.$$

Najmanja konstanta L za koju vrijedi gore navedena nejednakost se zove Lipschitzova konstanta funkcije f i označava se s $||f||_{Lip}$.

Napomena 1.12 *Svaka Lipschitz-neprekidna funkcija je ujedno i neprekidna funkcija.*

Teorem 1.13 *Neka je funkcija $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna. Tada je f Lipschitz-neprekidna na svakom intervalu $[a, b]$ sadržanom u I.*

Dokaz. Neka je $\epsilon > 0$ takav da su $a - \epsilon$ i $b + \epsilon \in I$. Neka su m i M gornja, tj. donja međa funkcije f na intervalu $[a - \epsilon, b + \epsilon]$, tj. neka vrijedi

$$m \leq f(x) \leq M, \forall x \in [a - \epsilon, b + \epsilon].$$

Neka su $x, y \in [a, b]$ takvi da je $x \neq y$. Označimo sa $z = y + \frac{\epsilon(y-x)}{|y-x|}$. Sada je $z \in [a - \epsilon, b + \epsilon]$. Ako uvedemo oznaku $\lambda = \frac{\epsilon}{\epsilon + |y-x|}$ imamo

$$y = (1 - \lambda)z + \lambda x.$$

[1]Rudolf Lipschitz (1832-1903), njemački matematičar

Koristeći konveksnost funkcije f dobivamo

$$\begin{aligned} f(y) &\leq (1-\lambda)f(z) + \lambda f(x) \\ f(y) - f(x) &\leq (1-\lambda)f(z) + \lambda f(x) - f(x) \\ &= (1-\lambda)(f(z) - f(x)) \\ &\leq (1-\lambda)(M-m). \end{aligned}$$

Dakle, imamo

$$f(y) - f(x) \leq (1-\lambda)(M-m) \leq \frac{M-m}{\epsilon}\left|y-x\right|, \forall x \in [a,b].$$

Sada vrijedi da je $f(y) - f(x) \leq L\left|y-x\right|$, gdje je $L = \frac{M-m}{\epsilon}$, pa je tvrdnja teorema dokazana. ■

Obrat prethodnog teorema ne vrijedi, međutim ako je funkcija Lipschitz-neprekidna na cijeloj svojoj domeni, tada je ta funkcija konveksna. Ovo svojstvo vrijedi jer Lipschitz-neprekidnost ograničava brzinu promjene funkcije, čime se osigurava da funkcija ostaje ispod svake svoje sekante.

Posljedica prethodnog teorema je sljedeći rezultat.

Propozicija 1.14 *Konveksna funkcija definirana na otvorenom intervalu je neprekidna.*

Kako je svaka konveksna funkcija na zatvorenom intervalu neprekidna, osim eventualno u krajnjim točkama, slijedi da je funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrabilna. Sljedeći rezultat nam govori da se svaka konveksna funkcija f definirana na $[a,b]$ može modificirati u krajnjim točkama kako bi postala neprekidno konveksna na cijeloj domeni.

Teorem 1.15 *Neka je funkcija $f : [a,b] \subseteq I \to \mathbb{R}$ konveksna i neka je f monotona ili postoji točka $c \in (a,b)$ takva da je $f|_{[a,c]}$ monotono padajuća* *i* $f|_{[c,b]}$ *monotono rastuća. Tada za takvu funkciju* f *postoje limesi* $f(a_+)$ *i* $f(b_-)$ *i funkcija*

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(a_+) & , x = a \\ f(x) & , x \in (a,b) \\ f(b_-) & , x = b \end{cases}$$

je neprekidna i konveksna.

U nastavku navodimo još neke važne nejednakosti za konveksne funkcije čije ćemo generalizacije koristiti. Prvo dajemo definiciju J-konveksnosti.

Definicija 1.16 *Funkcija* $f : I \to \mathbb{R}$ *je J - konveksna (konveksna u Jensenovom smislu) na intervalu* $(a,b) \subseteq I$ *ako za svaki* $x_1, x_2 \in (a,b)$ *vrijedi*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}.$$

Ako vrijedi obrnuta nejednakost kažemo da je f *J-konkavna (konkavna u Jensenovom smislu) na intervalu* $(a,b) \subseteq I$.

- Ako u (1.16) vrijedi stroga nejednakost za svaki $x_1 \neq x_2$ onda kažemo da je funkcija f strogo J-konveksna
- Ako u (1.16) vrijedi obrnuta stroga nejednakost za svaki $x_1 \neq x_2$ onda kažemo da je funkcija f strogo J-konkavna

Bitna razlika između J-konveksnih i konveksnih funkcija je u neprekidnosti na intervalu na kojem se pojam definira. Dok konveksne funkcije moraju biti neprekidne na otvorenom intervalu, J-konveksne funkcije to ne moraju biti. Drugim riječima, postoji mogućnost da postoje J-konveksne funkcije koje nisu konveksne, jer ne zadovoljavaju uvjet neprekidnosti na cijelom, otvorenom intervalu.

U nastavku navodimo jedan od najvažnijih rezultata za konveksne funkcije koji ima brojne primjene u matematici i statistici. Ime je dobio po danskom matematičaru Jensenu.[2]

Teorem 1.17 (Jensenova nejednakost) *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija. Neka su* $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in I^n$, $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ *nenegativna* n*-torka i* $P_n := \sum_{i=1}^n p_i > 0$. *Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^n p_i f(x_i). \tag{1.2}$$

Dokaz. Dokaz provodimo metodom matematičke indukcije po n.

Baza indukcije: Za $n = 2$ nejednakost (1.2) proizlazi iz definicije konveksnosti.

Pretpostavka indukcije: Pretpostavimo da nejednakost (1.2) vrijedi za svaki $2 \leq k \leq n-1$, tj.

$$f\left(\frac{1}{P_k}\sum_{i=1}^k p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_k}\sum_{i=1}^k p_i f(x_i),$$

gdje je $P_k = \sum_{i=1}^k p_i$.

Korak indukcije: Pokažimo da tvrdnja vrijedi i za n točaka. Neka je $P_n = \sum_{i=1}^n p_i$. Koristeći konveksnost funkcije f, a zatim pretpostavku

[2] Johan Ludvig William Valdemar Jensen (1902-1913), danski matematičar

matematičke indukcije dobivamo

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) &= f\left(\frac{p_n}{P_n}x_n + \frac{P_{n-1}}{P_n}\cdot\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right)\\
&\leq \frac{p_n}{P_n}f(x_n) + \frac{P_{n-1}}{P_n}\cdot f\left(\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} p_i x_i\right)\\
&\leq \frac{p_n}{P_n}f(x_n) + \frac{P_{n-1}}{P_n}\cdot\frac{1}{P_{n-1}}\sum_{i=1}^{n-1} p_i f(x_i)\\
&= \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i)
\end{aligned}$$

Po principu matematičke indukcije tvrdnja teorema je dokazana. ■

Primijetimo da se nejednakost (1.2) za $n = 2$ svodi na definiciju J-konveksnosti.

Usko vezano uz Jensenovu nejednakost su njene konverzije. Jednu od najvažnijih su dokazali Lah i Ribarič 1971. godine.

Teorem 1.18 (Lah-Ribaričeva nejednakost) *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija i $[m, M] \in I$ takvi da $-\infty < m < M < \infty$. Neka je $p = (p_1, p_2, ..., p_n)$ nenegativna n-torka takva da je $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$ i $P_n \neq 0$. Neka je $(x_1, x_2, ..., x_n)$ uređena n-torka elemenata iz $[m, M]^n$ i $\bar{x} = \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i x_i$. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i) \leq \frac{M-\bar{x}}{M-m}f(m) + \frac{\bar{x}-m}{M-m}f(M).$$

Poglavlje 2

Hermite-Hadamardova nejednakost

2.1 Povijesni kontekst

Hermite-Hadamardova nejednakost prvi put se pojavljuje pred kraj 19. stoljeća zahvaljujući Charlesu Hermiteu[1]. Njegova zapažanja objavljena su u matematičkom časopisu Mathesis gdje navodi:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) < \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx < \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

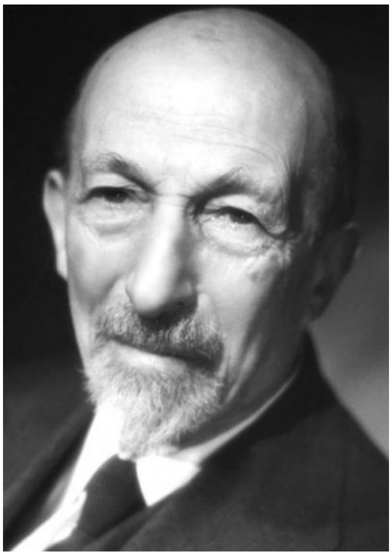
ili

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) > \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx > \frac{f(a)+f(b)}{2},$$

ovisno o tome je li funkcija f koja je definirana na intervalu $[a,b]$ konveksna ili konkavna.

[1] Charles Hermite (1822-1901), francuski matematičar

Slika 2.1: Charles Hermite



Slika 2.2: Jacques Hadamard

Iako se kasnije ispostavila jako važnom, nejednakost se dugo nije pojavljivala u matematičkoj literaturi pa je greškom pripisana Jacquesu Hadamardu[2] koji je proveo njezin dokaz ne znajući za Hermiteovo otkriće. U čast velikog doprinosa obojice matematičara nejednakost je dobila ime Hermite-Hadamardova nejednakost te se od tada koristi u mnogim granama matematike, fizike, statistike i drugim područjima. Postala je jedna od ključnih nejednakosti u teoriji konveksnih funkcija.

2.2 Dokaz Hermite-Hadamardove nejednakosti

Hermite-Hadamardova nejednakost daje gornju i donju granicu procjene srednje vrijednosti konveksne funkcije na nekom zatvorenom inervalu, što je ključno za analizu i aproksimaciju same funkcije.

[2]Jacques Salomon Hadamard (1865-1963), francuski matematičar

Teorem 2.1 (Hermite-Hadamardova nejednakost) *Neka je f konveksna funkcija definirana na intervalu $[a,b] \subset \mathbb{R}$, gdje je $a < b$. Tada vrijedi:*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.1}$$

Dokaz. Prvo ćemo dokazati da vrijedi desna strana nejednakosti, tj.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.2}$$

Za proizvoljan $x \in [a,b]$ postoji $t \in [0,1]$ takav da vrijedi $x = (1-t)a + tb$. Nakon uvođenja supstitucije $x = (1-t)a + tb$ slijedi

$$dx = (b-a)dt$$

$$x = a \to t = 0$$

$$x = b \to t = 1.$$

Sada za integral vrijedi

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{b-a}\int_0^1 f((1-t)a+tb)(b-a)\,dt \\ &= \int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt. \end{aligned}$$

Koristeći konveksnost funkcije f i linearnost integrala dobivamo $f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$ pa slijedi

$$\begin{aligned} \int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt &\leq f(a)\int_0^1 (1-t)\,dt + f(b)\int_0^1 t\,dt \\ &= f(a)(t - \frac{t^2}{2})\Big|_0^1 + f(b)\frac{t^2}{2}\Big|_0^1 \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}. \end{aligned}$$

Time smo dokazali (2.2). Sada ćemo dokazati da vrijedi lijeva strana Hermite-Hadamardove nejednakosti, tj.

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Prvo zapišimo integral na sljedeći način

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \frac{1}{b-a}\left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx\right). \tag{2.4}$$

Nakon uvođenja supstitucije $x = a + \frac{t(b-a)}{2}$ za prvi izraz u zagradi slijedi

$$\begin{aligned} dx &= \frac{b-a}{2}dt \\ x &= a \to t = 0 \\ x &= \frac{a+b}{2} \to t = 1. \end{aligned}$$

Sada za prvi izraz u zagradi iz (2.4) vrijedi

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(a + \frac{t(b-a)}{2}\right)\,dt. \tag{2.5}$$

Nakon uvođenja supstitucije $x = b - \frac{t(b-a)}{2}$ za drugi izraz u zagradi slijedi

$$\begin{aligned} dx &= -\frac{b-a}{2}dt \\ x &= \frac{a+b}{2} \to t = 1 \\ x &= b \to t = 0. \end{aligned}$$

Sada za drugi izraz u zagradi iz (2.4) vrijedi

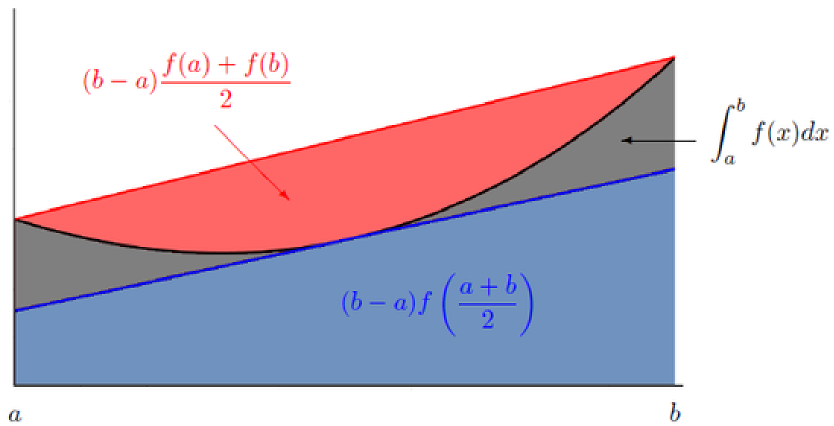
$$\begin{aligned} \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\,dx &= -\frac{b-a}{2}\int_1^0 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)\,dt \\ &= \frac{b-a}{2}\int_0^1 f\left(b - \frac{t(b-a)}{2}\right)\,dt. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Primjenom rezultata (2.5) i (2.6) u (2.4) i ponovnom primjenom svojstva konveksnosti funkcije f dobivamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx &= \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)\,dt+\int_0^1 f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\,dt\right]\\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\left[f\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+f\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]\,dt\\
&\geq \int_0^1 f\left[\frac{1}{2}\left(a+\frac{t(b-a)}{2}\right)+\frac{1}{2}\left(b-\frac{t(b-a)}{2}\right)\right]\,dt\\
&= \int_0^1 f\left[\frac{2a+2b+t(b-a)-t(b-a)}{4}\right]\,dt\\
&= \int_0^1 f\left(\frac{a+b}{2}\right)\,dt\\
&= f\left(\frac{a+b}{2}\right).
\end{aligned}$$

Time smo dokazali (2.3) pa i (2.1). ■

Hermite-Hadamardova nejednakost ukazuje da je procjena srednje vrijednosti konveksne funkcije f definirane na $[a, b]$ manja ili jednaka od prosjeka vrijednosti funkcije f u krajnjim točkama intervala $[a, b]$, tj. veća ili jednaka vrijednosti funkcije f u srednjoj točki intervala $[a, b]$.



Slika 2.3: Hermite-Hadamardova nejednakost

Hermite-Hadamardovu nejednakost također možemo geometrijski interpretirati preko usporedbe površina trapezoida na istom intervalu, kao što je prikazano na Slici 2.3. Naime, površina ispod grafa funkcije f manja je ili jednaka od površine trapezoida omeđenog sa x-osi, pravcima $x = a$, $x = b$ i pravcem koji prolazi kroz točke $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$ te veća ili jednaka od površine trapezoida ograničenog sa x-osi, pravcima $x = a$, $x = b$ i tangentom na graf funkcije f u točki $(\frac{a+b}{2}, f(\frac{a+b}{2}))$. Površine trapezoida su jednake ako je funkcija f afina, tj. postiže se jednakost sa obje strane Hermite-Hadamardove nejednakosti .

2.3 Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

Sad ćemo navesti rezultate koji nas i inače zanimaju kod raznih nejednakosti Hermite-Hadamardovog tipa. Zanimljivo je primijetiti da je prva nejednakost u (2.1) jača od druge nejednakosti. Taj rezultat zovemo Hammer-Bullenova nejednakost.

Teorem 2.2 (Hammer-Bullenova nejednakost) *Neka je funkcija f konveksna na intervalu $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \tag{2.7}$$

Dokaz. Primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti (2.1) na interval $[a, \frac{a+b}{2}]$ dobivamo:

$$\frac{1}{\frac{a+b}{2}-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(a)\right]. \tag{2.8}$$

Sada primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti na interval $[\frac{a+b}{2}, b]$ dobivamo:

$$\frac{1}{b-\frac{a+b}{2}}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]. \tag{2.9}$$

Zbrajanjem nejednakosti (2.8) i (2.9) slijedi

$$\frac{2}{b-a}\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \frac{2}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\left[2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)+f(b)\right]$$

$$\frac{2}{b-a}\left(\int_{a}^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx\right) \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

$$\frac{2}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx.$$

■

Prethodni teorem nam govori da donja međa (srednja točka intervala $[a, b]$) daje bolju aproksimaciju srednje vrijednosti funkcije f od gornje međe (trapezna formula). Osim procjene je li preciznija lijeva ili desna strana nejednakosti, zanima nas i procjena preciznosti lijeve, tj. desne strane nejednakosti. Jednu od procjena preciznosti lijeve i desne strane pomoću minimuma i maksimuma funkcije f'' nam daje sljedeći rezultat.

Teorem 2.3 *Neka je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R} \in C^2$. Neka su m i M minimun tj. maksimum funkcije f''. Tada vrijedi*

$$m\frac{(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2}) \leq M\frac{(b-a)^2}{24} \tag{2.10}$$

i

$$m\frac{(b-a)^2}{12} \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq M\frac{(b-a)^2}{12}. \tag{2.11}$$

Dokaz. Označimo s $g_1(x) = f(x) - \frac{m}{2}x^2$ i s $g_2(x) = \frac{M}{2}x^2 - f(x)$. Sada po Napomeni 1.9 slijedi da su funkcije g_1 i g_2 konveksne pa na njih možemo primijeniti Hermite-Hadamardovu nejednakost.

$$g_1(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b g_1(x)\,dx \leq \frac{g_1(a)+g_1(b)}{2}$$

$$f(\frac{a+b}{2}) - \frac{m}{2}(\frac{a+b}{2})^2 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f(x)-\frac{m}{2}x^2\right)\,dx \leq \frac{f(a)-\frac{m}{2}a^2+f(b)-\frac{m}{2}b^2}{2}$$

$$f(\frac{a+b}{2}) - \frac{m(a+b)^2}{8} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(f(x)-\frac{m}{2}x^2\right)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} + \frac{m(a^2+b^2)}{4}. \tag{2.12}$$

Analogno, zbog konveksnosti funkcije g_2 dobivamo

$$\frac{M(a+b)^2}{8} - f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \left(\frac{M}{2}x^2 - f(x)\right)\,dx \leq \frac{M(a^2+b^2)}{4} - \frac{f(a)+f(b)}{2}. \tag{2.13}$$

Sada promatramo prvu nejednakost u (2.12), pa dobivamo:

$$\begin{aligned}
&f(\frac{a+b}{2}) - \frac{m(a+b)^2}{8} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{m}{2}x^2\,dx \\
&\frac{m}{2(b-a)}\int_a^b x^2\,dx - \frac{m(a+b)^2}{8} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) - f(\frac{a+b}{2}) \\
&\frac{m(b^3-a^3)}{6(b-a)} - \frac{m(a+b)^2}{8} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) - f(\frac{a+b}{2}) \\
&\frac{m(b-a)(b^2+ab+a^2)}{6(b-a)} - \frac{m(a+b)^2}{8} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x) - f(\frac{a+b}{2}) \\
&m\frac{(b-a)^2}{24} \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2}).
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Sad ćemo promatrati prvu nejednakost u (2.13). Vrijedi:

$$\begin{aligned}
&\frac{M}{2(b-a)}\int_a^b x^2\,dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq \frac{M(a^2+b^2)}{8} - f(\frac{a+b}{2}) \\
&f(\frac{a+b}{2}) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq \frac{M(a^2+b^2)}{8} - \frac{M(b^3-a^3)}{6(b-a)} \Bigg| \cdot (-1) \\
&\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f(\frac{a+b}{2}) \leq M\frac{(b-a)^2}{24}.
\end{aligned} \tag{2.15}$$

Iz (2.14) i (2.15) slijedi (2.10). Analogno iz druge nejednakosti iz (2.12) i (2.13) dobivamo (2.11) te je dokaz gotov. ∎

2.3. Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

Sada ćemo navesti još jednu procjenu Hermite-Hadamardove nejednakosti. U ovom slučaju će nam trebati pojam Lipschitz-neprekidnih funkcija. Ako pogledamo graf Lipschitz-neprekidne funkcije, primijetit ćemo da ona ne može imati previše strmih nagiba jer su oni ograničeni konstantom L. Razlika između vrijednosti funkcije u bilo kojim dvama točkama x i y na njezinom grafu ne može biti veća od L puta razlike između samih točaka. To nam omogućuje da preciznije analiziramo i razumijemo ponašanje funkcije. Koristeći svojstvo Lipschitz-neprekidnosti dobivamo dodatne procjene preciznosti lijeve i desne strane.

Teorem 2.4 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subset \mathbb{R}$ L-Lipschitz funkcija na I i neka su $a, b \in I$ takvi da je $a < b$. Tada vrijedi*

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{L}{4}(b-a)$$

i

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{L}{3}(b-a).$$

Dokaz. Neka je $t \in [0,1]$. Tada za svaki $a, b \in I$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&|tf(a) + (1-t)f(b) - f(ta+(1-t)b)| \\
=&|t(f(a) - f(ta+(1-t)b) + (1-t)(f(b) - f(ta+(1-t)b)| \\
\le&t|f(a) - f(ta+(1-t)b)| + (1-t)|f(b) - f(ta+(1-t)b)| \qquad (2.16) \\
\le&tL|a - (ta+(1-t)b)| + (1-t)L|b - (ta+(1-t)b)| \\
=&2t(1-t)L|b-a|.
\end{aligned}$$

Ako definiramo $t = \frac{1}{2}$ vrijedi

$$\left| \frac{f(a)+f(b)}{2} - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{L}{2}|b-a|.$$

Dodatno, ako zamijenimo a sa $ta+(1-t)b$ i b sa $(1-t)a+tb$ dobit ćemo

$$\left|\frac{f(ta+(1-t)b)+f((1-t)a+tb)}{2}-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq \frac{L|2t-1|}{2}|b-a|, \forall t \in [0,1].$$

Integriranjem obje strane nejednakosti po $t \in [0,1]$ slijedi

$$\left|\frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt+\int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt\right]-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \\ \leq \frac{L|b-a|}{2}\int_0^1 |2t-1|\,dt.$$

Iz

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt = \int_0^1 f((1-t)a+tb)\,dt \\ = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

i

$$\int_0^1 |2t-1|\,dt = \frac{1}{2}$$

slijedi

$$\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{L}{4}(b-a).$$

Iz (3.1) je

$$|tf(a)+(1-t)f(b)-f(ta+(1-t)b)| \leq 2t(1-t)L(b-a), \forall t \in [0,1].$$

Integriranjem nejednakosti po $t \in [0,1]$ slijedi

$$\left|f(a)\int_0^1 t\,dt+f(b)\int_0^1 (1-t)\,dt-\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt\right| \\ \leq 2L(b-a)\int_0^1 t(1-t)\,dt.$$

Iz

$$\int_0^1 t\,dt = \int_0^1 (1-t)\,dt = \frac{1}{2}$$

i

$$\int_0^1 t(1-t)\,dt = \frac{1}{6}$$

slijedi

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{L}{3}(b-a).$$

■

U nastavku dajemo korolar prethodnog teorema koji govori o preciznosti Hermite-Hadamardove nejednakosti za diferencijabilne, konveksne funkcije.

Korolar 2.5 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ diferencijabilna, konveksna funkcija na I i $a, b \in I$ takvi da je $a < b$. Neka je $M := sup_{[a,b]}|f'(t)| < \infty$. Tada vrijede sljedeće nejednakosti*

$$0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{M}{4}(b-a)$$

i

$$0 \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{M}{3}(b-a).$$

Primijetimo da je prethodni korolar profinjenje Hammer-Bullenove nejednakosti (Teorem 2.2). Za kraj navodimo dvije poznate nejednakosti vezane uz Lipschitz-neprekidne funkcije.

Tvrdnja 1 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Lipschitz-neprekidna funkcija i*

$$||f||_{Lip} := sup\left\{\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right|; x \neq y\right\} = L < \infty.$$

Tada vrijedi:

- *nejednakost Ostrovskog*[3]

$$\left|f(x) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right| \leq \left[\frac{1}{4} + \left(\frac{x-\frac{a+b}{2}}{b-a}\right)^2\right] L(b-a)$$

[3]Alexander Ostrowski (1893-1968), ukrajinski matematičar

2.3. Preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti

- *nejednakost Iyengara*[4]

$$\left|\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt\right|\leq\frac{L(b-a)}{4}-\frac{1}{4L(b-a)}(f(b)-f(a))^2$$

Zbog važnosti i široke primjene rezultata te dobre preciznosti Hermite-Hadamardove nejdnakosti javila se potreba za njezinim generalizacijama.

[4]Kombur Sesha Iyengar (1899-1944), indijski matematičar

Poglavlje 3

Generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti

U nastavku rada dajemo neke važne generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti. Govorit ćemo o generalizacijama nejednakosti uzimajući u obzir specifične karakteristike funkcija i domena na kojima se primjenjuju. Generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti omogućuje njenu širu primjenu i jačanje originalne nejednakosti. Postoji mnogo vrsta generalizacija Hermit-Hadamardove nejednakosti od kojih svaka obuhvaća određene klase funkcija. Važno je istaknuti da ove generalizacije ne samo da proširuju originalnu nejednakost, već mogu dovesti i do novih.
Slijedi rezultat koji predstavlja generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti dobivenu razmatranjem općenitijeg oblika gornje i donje granice nejednakosti. Teorem će nam dodatno poslužiti u nastavku rada za generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti na izotonične linearne funkcionale i kod generalizacija Fejérovog tipa.

Teorem 3.1 *Neka su* p, q *pozitivni realni brojevi i* $[a,b] \subseteq I$. *Za neprekidnu konveksnu funkciju* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *i za* $A = \frac{pa+qb}{p+q}$ *vrijedi*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(x)\,dx \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}$$

ako i samo ako je

$$0 < y \leq \frac{b-a}{p+q} min\{p,q\}.$$

Primijetimo, za $p = q = 1$ i $y = \frac{b-a}{2}$ prethodna nejednakost postaje Hermite-Hadamardova nejednakost. Vrijedi,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2\frac{b-a}{2}}\int_{\frac{a+b}{2}-\frac{b-a}{2}}^{\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}} f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Pod uvjetima kao u prethodnom teoremu Hermite-Hadamardova nejednakost daje sljedeće profinjenje Teorema 3.1.

Korolar 3.2 *Neka su* p, q *pozitivni realni brojevi i* $[a,b] \subseteq I$. *Za neprekidnu konveksnu funkciju* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, $0 < y \leq \frac{b-a}{p+q} min\{p,q\}$ *i za* $A = \frac{pa+qb}{p+q}$ *vrijedi*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right) \leq \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}[f(A-y)+f(A+y)] \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}. \tag{3.1}$$

Dokaz. Neka je $0 < y \leq \frac{b-a}{p+q} min\{p,q\}$. Za pozitivne realne brojeve p i q vrijedi $0 < p \leq q$ ili $0 < q < p$. Ako je $0 < p \leq q$ tada vrijedi

$$\begin{aligned}
&y \leq \frac{b-a}{p+q}p \\
&y(p+q) \leq p(b-a) \\
&pa + qb \leq pb + qb - yp - yq \\
&pa + qb \leq (b-y)(p+q) \\
&\frac{pa+qb}{p+q} \leq b - y \\
&A + y \leq b.
\end{aligned}$$

Analogno ako je $0 < q < p$ vrijedi

$$a \leq A - y.$$

Iz $a \leq A - y < A + y \leq b$ slijedi da je funkcija f definirana na $[A-y, A+y]$. Primjenimo li Hermite-Hadamardovu nejednakost na funkciju f i zamijenimo li a i b iz Teorema 2.1 sa $A - y$ i $A + y$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&f\left(\frac{A-y+A+y}{2}\right) \leq \frac{1}{A+y-A+y}\int_{A-y}^{A+y} f(x)\,dx \leq \frac{f(A-y)+f(A+y)}{2} \\
&f\left(A\right) \leq \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\left[f(A-y)+f(A+y)\right].
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Ako imamo $x_1 < x_2 < x_3$, $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$ tada koristeći konveksnost funkcije f imamo

$$f(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3).$$

Dakle za $x_1 = a$ i $x_3 = b$ dobivamo

$$f(A-y) \leq \frac{b-(A-y)}{b-a} f(a) + \frac{A-y-a}{b-a} f(b) \tag{3.3}$$

i

$$f(A+y) \leq \frac{b-(A+y)}{b-a} f(a) + \frac{A+y-a}{b-a} f(b). \tag{3.4}$$

Uvrštavanjem (3.3) i (3.4) u (3.2) dobivamo

$$\begin{aligned}
f(A) &\leq \frac{1}{2y}\int_{A-y}^{A+y} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}\left[f(A-y)+f(A+y)\right] \\
&\leq \frac{1}{2}\left[\frac{2(b-A)}{b-a}f(a)+\frac{2(A-a)}{b-a}f(b)\right] \\
&= \frac{b-\frac{pa+qb}{p+q}}{b-a}f(a)+\frac{\frac{pa+qb}{p+q}-a}{b-a}f(b) \\
&= \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}.
\end{aligned}$$

■

3.1 Izotonični linearni funkcionali

U ovom poglavlju govorit ćemo o izotoničnim linearnim i sublinearnim funkcionalima te postepeno navoditi tvrdnje koje će nas dovesti do generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti na iste.

Definicija 3.3 *Neka je E neprazan skup i L vektorski prostor funkcija $f : E \to \mathbb{R}$ sa svojstvima:*

(L1) $\alpha f + \beta g \in L$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in L$ (zatvorenost na zbrajanje i množenje skalarom)

(L2) Ako je $f(t) = 1$ za svaki $t \in E$ onda je $f \in L$, tj. $\mathbf{1} \in L$(posjedovanje jedinice)

Funkcija $A : L \to \mathbb{R}$ je izotoničan linearni funkcional ako zadovoljava svojstva:

(A1) $A(\alpha f + \beta g) = \alpha A(f) + \beta A(g)$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall f, g \in L$

(A2) $A(f) \geq 0$, $\forall f \in L$ takav da je $f(t) \geq 0$ na E

(A3) $0 \leq f \leq g \rightarrow A(f) \leq A(g)$

Definicija 3.4 *Izotoničan linearni funkcional* $A : L \rightarrow \mathbb{R}$ *je izotoničan normalizirani linearni funkcional na* L *ako vrijedi* $A(\mathbf{1}) = 1$.

Za nastavak rada trebat će nam Jessenova nejednakost, to je jedna od najpoznatijih generalizacija Jensenove nejednakosti na izotonične linearne funkcionale.

Teorem 3.5 (Jessenova nejednakost) *Neka* L *zadovoljava svojstva* $(L1)$ *i* $(L2)$ *na nepraznom skupu* E *i neka je* ϕ *neprekidna konveksna funkcija na* I. *Neka je* $\phi \circ g \in L$ *za svaki* $g \in L$. *Ako je* A *izotoničan normaliziran linearan funkcional na* L *tada vrijedi* $A(g) \in I$ *i*

$$\phi(A(g)) \leq A(\phi(g)).$$

Pogledajmo za koje izbore iz prethodnog teorema dobivamo Jensenovu nejednakost. Ako postavimo $E = I$, tada L postaje vektorski prostor $\mathbb{R}^I$. Neka je $g \in L$ takva da $g = id_E$ i $\phi = f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Primijetimo da za izotonični linearni funkcional $A(h) := \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^{n} p_i h(x_i)$ za svaki $h \in L$, gdje je $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $(x_1, ..., x_n)$ uređena n-torka elemenata iz I^n i $(p_1, ..., p_n)$ nenegativna n-torka dobivamo Teorem 1.17 (Jensenova nejednakost).
Sljedeći rezultat je jedan od najpoznatijih generalizacija konverzija Jensenove nejednakosti poznata kao Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost. Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost je generalizacija Teorema 1.18.

Teorem 3.6 (Edmundson-Lah-Ribaričeva nejednakost) *Neka* L *zadovoljava svojstva* $(L1)$ *i* $(L2)$ *na nepraznom skupu* E *i neka je* $\phi : [m, M] \rightarrow \mathbb{R}$ *konveksna funkcija na* $[m, M] \subset \mathbb{R}$, $m < M$. *Neka je* $g \in L$ *takav da je*

$\phi(g) \in L$ $(g(t) \in [m,M], \forall t \in E)$. Ako je A izotonični normalizirani linearni funkcional na L tada vrijedi

$$A(\phi(g)) \leq \frac{M - A(g)}{M - m}\phi(m) + \frac{A(g) - m}{M - m}\phi(M).$$

Dokaz. Koristeći konveksnost funkcije ϕ za $x_1, x_2, x_3 \in [m, M]$ takve da je $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, $x_1 < x_3$ i zapis

$$x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}x_3$$

dobivamo

$$\phi(x_2) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\phi(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\phi(x_3).$$

Uvrštavanjem $x_1 = m$, $x_2 = g(t)$ i $x_3 = M$ dobivamo

$$\phi(g(t)) \leq \frac{M - g(t)}{M - m}\phi(m) + \frac{g(t) - m}{M - m}\phi(M).$$

Zbog svojstava $(A1), (A2)$ izotoničnog linearnog funkcionala A za svaki $t \in E$ dobivamo

$$A(\phi(g(t))) \leq \frac{A([M - g(t)]\,\phi(m)) + A([g(t) - m]\,\phi(M))}{A(M - m)}$$

$$A(\phi(g)) \leq \frac{(M - A(g))\phi(m) + (A(g) - m))\phi(M)}{M - m}.$$

■

Pogledajmo za koje izbore iz prethodnog teorema dobivamo Lah-Ribaričevu nejednakost. Ako postavimo $E = [m, M]$, tada L postaje vektorski prostor $\mathbb{R}^{[m,M]}$. Neka je $g \in L$ takva da $g = id_E$ i $\phi = f : I \to \mathbb{R}$. Primijetimo da za izotonični linearni funkcional $A(h) := \frac{1}{P_n}\sum_{i=1}^{n} p_i h(x_i)$ za svaki $h \in L$, gdje je $P_n = \sum_{i=1}^{n} p_i$, $(x_1, ..., x_n)$ uređena n-torka elemenata iz $[m, M]^n$ i $(p_1, ..., p_n)$ nenegativna n-torka dobivamo Teorem 1.18 (Lah-Ribaričeva nejednakost).
Teorem koji ćemo sada izložiti predstavlja generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti na izotonične normalizirane linearne funkcionale.

Teorem 3.7 *Neka L zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E. Neka je ϕ neprekidna konveksna funkcija na I i neka je $[m, M] \subset I$, $m < M$. Neka je funkcija $g : E \to \mathbb{R}$ takva da $g(t) \in [m, M]$ za svaki $t \in E$ i za svaki $g \in L$ i $\phi(g) \in L$. Ako je $A : L \to \mathbb{R}$ izotoničan normalizirani linearni funkcional na L takav da $A(g) \in [m, M]$, tada vrijedi*

$$\phi\left(\frac{pm + qM}{p + q}\right) \leq A(\phi(g)) \leq \frac{p\phi(m) + q\phi(M)}{p + q} \tag{3.5}$$

za nenegativne realne brojeve p, q takve da $p + q > 0$ i

$$A(g) = \frac{pm + qM}{p + q}.$$

Dokaz. Kako je $A(g) \in [m, M]$, postoje $p, q \geq 0$ takvi da je $p + q > 0$ takvi da vrijedi

$$A(g) = \frac{pm + qM}{p + q}.$$

Prvu nejednakost iz (3.5) dobivamo direktnom primjenom Teorema 3.5

$$\phi\left(\frac{pm + qM}{p + q}\right) \leq A(\phi(g)).$$

Drugu nejednakost iz (3.5) dobivamo primjenom Teorema 3.6

$$\begin{aligned}
A(\phi(g)) &\leq \frac{(M - A(g))\phi(m) + (A(g) - m)\phi(M)}{M - m} \\
&= \frac{(M - \frac{pm+qM}{p+q})\phi(m) + (\frac{pm+qM}{p+q} - m)\phi(M)}{M - m} \\
&= \frac{\frac{p(M-m)}{p+q}\phi(m) + \frac{q(M-m)}{p+q}\phi(M)}{M - m} \\
&= \frac{\frac{M-m}{p+q}(p\phi(m) + q\phi(M))}{M - m} \\
&= \frac{p\phi(m) + q\phi(M)}{p + q}.
\end{aligned}$$

■

Promotrimo poseban slučaj prethodnog teorema kada je $E = [a, b]$, $-\infty <$

$a < b < \infty$, $m = a$ i $M = b$. Neka je L klasa svih integrabilnih funkcija $g : E \to \mathbb{R}$. Izotonični normalizirani linearni funkcional $A : L \to \mathbb{R}$ definiramo na sljedeći način

$$A(h) := \frac{\int_a^b h(t)\,dt}{b-a}, \forall h \in L.$$

Za $g(t) = t$ dobivamo

$$A(g) = \frac{\int_a^b t\,dt}{b-a} = \frac{a+b}{2}.$$

Na kraju, za bilo koju konveksnu funkciju f na $[a, b] \subset I$ koja zadovoljava uvjete Teorema 3.7 i $p = q = \frac{1}{2}$ iz nejednakosti (3.5) dobivamo Hermite-Hadamardovu nejednakost

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

U nastavku dajemo daljnju generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti za izotonične normalizirane linearne funkcionale. Za dokaz rezultata treba nam sljedeća lema.

Lema 3.8 *Neka je X realni vektorski prostor i C njegov konveksni podskup. Tada su za funkciju $f : X \to \mathbb{R}$ sljedeće tvrdnje ekvivalentne*

(i) funkcija f je konveksna na C

(ii) funkcija $g_{x,y} : [0, 1] \to \mathbb{R}$,

$$g_{x,y}(t) = f(tx + (1-t)y)$$

je konveksna na $[0, 1]$

Dokaz. $(i) \to (ii)$ Neka je f konveksna na C. Neka su $x, y \in C$, $t_1, t_2 \in [0, 1]$ i $\alpha, \beta \geq 0$ takvi da je $\alpha + \beta = 1$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} g_{x,y}(\alpha t_1 + \beta t_2) &= f\left[(\alpha t_1 + \beta t_2)x + (1 - \alpha t_1 - \beta t_2)y\right] \\ &= f\left[(\alpha t_1 + \beta t_2)x + \left[\alpha(1-t_1) + \beta(1-t_2)\right]y\right] \\ &\leq \alpha f(t_1 x + (1-t_1)y) + \beta f(t_2 x + (1-t_2)y). \end{aligned}$$

Zadnju nejednakost smo dobili koristeći konveksnost funkcije f na C. Time smo dokazali da je $g_{x,y}$ konveksna na $[0,1]$.

$(ii) \to (i)$ Neka je $g_{x,y}$ konveksna funkcija i $x, y \in C$ i $\alpha, \beta \geq 0$ takvi da je $\alpha + \beta = 1$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f(\alpha x + \beta y) &= f(\alpha x + (1-\alpha)y) \\ &= g_{x,y}(\alpha \cdot 1 + \beta \cdot 0) \\ &\leq \alpha g_{x,y}(1) + \beta g_{x,y}(0) \\ &= \alpha f(x) + \beta f(y). \end{aligned}$$

Zadnju nejednakost smo dobili primjenom konveksnosti funkcije $g_{x,y}$. Time smo dokazali da je f konveksna na C. ■

Kada vrijede uvjeti iz prethodne leme, zbog konveksnosti funkcije $g_{x,y}$, primjenom Hermite-Hadamardove nejednakosti dobivamo sljedeću nejednakost

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \int_0^1 f(tx + (1-t)y)\, dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2},$$

za $x, y \in C$ i $t \in [0,1]$. Stoga, iz prethodno spomenutih rezultata, dolazimo do još jedne generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti na izotonične normalizirane linearne funkcionale.

Teorem 3.9 *Neka L zadovoljava svojstva $(L1)$ i $(L2)$ na nepraznom skupu E. Neka je $C \subseteq X$ konveksni podskup realnog vektorskog prostora i $f : C \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Neka je $h : E \to \mathbb{R}$, $h \in L$ takva da $h(t) \in [0,1]$ i $g_{x,y} \circ h \in L$, $\forall x, y \in C$. Ako je A izotoničan normalizirani linearni funkcional onda vrijedi nejednakost*

$$\begin{aligned} f(A(h)x + (1 - A(h))y) &\leq A\left[f(hx + (\boldsymbol{1} - h)y)\right] \\ &\leq A(h)f(x) + (1 - A(h))f(y). \end{aligned}$$

Dokaz. Promotrimo funkciju $g_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}$ gdje je $g_{x,y}(t) := f(tx + (1-t)y)$. Zbog konveksnosti funkcije f na konveksnom skupu C možemo primijeniti Lemu 3.8 pa vrijedi da je $g_{x,y}$ konveksna na $[0,1]$. Sada za svaki $t \in E$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
&g_{x,y}(h(t)\cdot 1 + (1-h(t))\cdot 0) \leq h(t)g_{x,y}(1) + (1-h(t))g_{x,y}(0)\\
&A(g_{x,y}(h)) \leq A(h)g_{x,y}(1) + (1-A(h))g_{x,y}(0)\\
&A\left[f(hx + (\mathbf{1}-h)y)\right] \leq A(h)f(x) + (1-A(h))f(y).
\end{aligned}
$$

Preostaje nam dokazati prvu nejednakost. Primjenom Teorema 3.5 na funkciju $g_{x,y}$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
&g_{x,y}(A(h)) \leq A(g_{x,y}(h))\\
&f(A(h)x + (1-A(h))y) \leq A\left[f(hx + (\mathbf{1}-h)y)\right].
\end{aligned}
$$

■

Primijetimo da ako definiramo $h : E \to [0,1]$ tako da za izotonični linearni funkcional A vrijedi $A(h) = \frac{1}{2}$. Iz Teorema 3.9 dobivamo

$$f(\frac{x+y}{2}) \leq A(f(hx + (\mathbf{1}-h)y)) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}, \forall x,y \in C$$

- Neka je $E = [0,1]$ i $A : L \to \mathbb{R}$ izotonični linearni funkcional takav da je $A(h) = \int_0^1 h$. Neka je $h(t) = t$, $h \in L$ gdje je $t \in [0,1]$. Za $C = [x,y] \subset \mathbb{R}$ dobivamo Hermite-Hadamardovu nejednakost

$$
\begin{aligned}
&f(\frac{x+y}{2}) \leq \int_0^1 f(h(t)x + (\mathbf{1}(t) - h(t))y)\,dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}\\
&f(\frac{x+y}{2}) \leq \int_0^1 f(tx + (1-t)y)\,dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}\\
&f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{1}{y-x}\int_x^y f(t)\,dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.
\end{aligned}
$$

- Neka je $E = [0, \frac{\pi}{2}]$ i $A : L \to \mathbb{R}$ izotonični linearni funkcional takav da je $A(h) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h$. Neka je $h(t) = sin^2t$, $h \in L$ gdje je $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Za $C = [x, y] \subset \mathbb{R}$ dobivamo nejednakost
$$f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(xsin^2t + ycos^2t)\, dt \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

- Neka je $E = [0, 1]$ i $A : L \to \mathbb{R}$ izotonični linearni funkcional takav da je $A(h) = \int_0^1 h$. Neka je $h(t) = t$, $h \in L$ gdje je $t \in [0, 1]$. Za normalizirani vektorski prostor X i $f(x) = ||x||^p$, gdje je $p \geq 1$ (da bi funkcija f bila konveksna) za svaki $x, y \in X$, vrijedi
$$||\frac{x+y}{2}||^p \leq \int_0^1 ||tx + (1-t)y||^p\, dt \leq \frac{||x||^p + ||y||^p}{2},$$
a za $p = 1$ dobivamo oblik formule za nejednakost trokuta
$$||\frac{x+y}{2}|| \leq \int_0^1 ||tx + (1-t)y||\, dt \leq \frac{||x|| + ||y||}{2}.$$

3.2 Izotonični sublinearni funkcionali

Definicija 3.10 *Neka je E neprazan skup i K vektorski prostor funkcija $g : E \to \mathbb{R}$ koje imaju svojstva:*

(K1) $f + g \in k$, $\forall f, g \in K$ (zatvorenost na zbrajanje)

(K2) $\alpha f \in K$, $\forall f \in K$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ (zatvorenost na množenje skalarom)

(K3) $\mathbf{1} \in K$ (posjedovanje jedinice)

Funkcija $S : K \to \mathbb{R}$ je izotoničan sublinearni funkcional ako zadovoljava svojstva:

(S1) $S(f + g) \leq S(f) + S(g)$, $\forall f, g \in K$

(S2) $S(\alpha f) = \alpha S(f)$, $\forall \alpha \geq 0$, $\forall f \in K$

(S3) $0 \leq f \leq g \to S(f) \leq S(g)$

Definicija 3.11 *Izotoničan sublinearni funkcional* $S : K \to \mathbb{R}$ *je izotoničan normalizirani sublinearni funkcional na* K *ako vrijedi* $S(\boldsymbol{1}) = 1$. *Ako dodatno vrijedi i svojstvo* $S(-\boldsymbol{1}) = -1$, *tada je* S *izotoničan potpuno normalizirani sublinearni funkcional na* K.

Dodatno, navodimo generalizaciju Jessenove nejednakosti za izotonične sublinearne funkcionale za koju možemo povući poveznicu sa Teoremom 3.5.

Teorem 3.12 *Neka* K *zadovoljava svojstva* $(K1)$, $(K2)$ *i* $(K3)$ *na nepraznom skupu* E *i neka je* $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ *neprekidna konveksna funkcija na* $[m, M] \subset \mathbb{R}$. *Neka je* $g : E \to [m, M]$, $g \in K$ *takva da je* $\phi \circ g \in K$. *Ako je* S *izotoničan potpuno normalizirani sublinearni funkcional na* K *tada vrijedi* $S(g) \in [m, M]$ *i*

$$S(\phi(g)) \geq \phi(S(g)).$$

Ako je $S = A$ normalizirani izotonični linearni funkcional na L dobivamo Jessenovu nejednakost iz Teorema 3.5.
Na sličan način dobivamo i rezultat vezan uz generalizaciju Lah-Ribariča za izotonične sublinearne funkcionale.

Teorem 3.13 *Neka* K *zadovoljava svojstva* $(K1)$, $(K2)$ *i* $(K3)$ *na nepraznom skupu* E. *Neka je* $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ *konveksna funkcija na* $[m, M] \subset \mathbb{R}$, $m < M$. *Neka je* $g : E \to [m, M]$, $g \in K$ *takva da je* $\phi \circ g \in K$ *i* $\lambda := sgn(\phi(M) - \phi(m))$. *Ako je* S *potpuno normalizirani izotonični sublinearni funkcional na* K *tada vrijedi*

$$S(\phi(g)) \leq \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} + \frac{|\phi(M) - \phi(m)|}{M - m} S(\lambda g).$$

Dokaz. Iz konveksnosti funkcije ϕ za $x_1, x_2, x_3 \in [m, M]$ takve da je $x_1 \leq x_2 \leq x_3$, $x_1 < x_3$ vrijedi

$$\phi(x_3) \leq \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\phi(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\phi(x_3).$$

Dakle, za $x_1 = m$, $x_2 = g(t)$ i $x_3 = M$ dobivamo da za svaki $t \in E$ vrijedi

$$\phi(g(t)) \leq \frac{M - g(t)}{M - m}\phi(m) + \frac{g(t) - m}{M - m}\phi(M),$$

tj.

$$\phi \circ g \leq \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m}\mathbf{1} + \frac{\phi(M) - \phi(m)}{M - m}g.$$

Iz svojstava potpuno normaliziranog izotoničnog sublinearnog funkcionala S dobivamo

$$\begin{aligned} S(\phi \circ g) &\leq S\left(\frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m}\mathbf{1} + \frac{\phi(M) - \phi(m)}{M - m}g\right) \\ &= \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} + S\left(\frac{\phi(M) - \phi(m)}{M - m}g\right) \\ &= \frac{M\phi(m) - m\phi(M)}{M - m} + \frac{|\phi(M) - \phi(m)|}{M - m}S(\lambda g). \end{aligned}$$

■

Ako je $S = A$ normalizirani izotonični linearni funkcional na L tada dobivamo upravo Teorem 3.6.

Slijedi generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti na potpuno normalizirane izotonične sublinearne funkcionale koju dokazujemo pomoću prethodnih tvrdnji.

Teorem 3.14 *Neka K zadovoljava svojstva $(K1)$, $(K2)$ i $(K3)$ na nepraznom skupu E i neka je $\phi : [m, M] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija na $[m, M] \subset \mathbb{R}$, $m < M$. Neka je $g : E \to [m, M]$, $e \in K$ takva da je $\phi \circ g \in K$ i $\lambda := sgn(\phi(M) - \phi(m))$. Ako je S potpuno normalizirani izotonični sublinearni funkcional na K takav da je*

$$S(\lambda g) = \lambda\frac{m + M}{2} \qquad S(g) = \frac{m + M}{2}$$

tada vrijedi nejednakost

$$\phi\left(\frac{m+M}{2}\right) \leq S(\phi \circ g) \leq \frac{\phi(m)+\phi(M)}{2}. \tag{3.6}$$

Dokaz. Prvu nejednakost iz (3.6) dobivamo direktnom primjenom Teorema 3.12 na funkciju e

$$S(\phi(g)) \geq \phi(S(g)) = \phi\left(\frac{m+M}{2}\right).$$

Drugu nejednakost iz (3.6) dobivamo primjenom Teorema 3.13 na funkciju e

$$\begin{aligned} S(\phi(g)) &\leq \frac{M\phi(m)-m\phi(M)}{M-m} + \frac{|\phi(M)-\phi(m)|}{M-m} S(\lambda g) \\ &= \frac{M\phi(m)-m\phi(M)}{M-m} + \frac{|\phi(M)-\phi(m)|}{M-m} \lambda \frac{m+M}{2} \\ &= \frac{M\phi(m)-m\phi(M)}{M-m} + \frac{(m+M)(\phi(M)-\phi(m))}{2(M-m)} \\ &= \frac{(\phi(m)-\phi(M))(M-m)}{2(M-m)} \\ &= \frac{\phi(m)-\phi(M)}{2}. \end{aligned}$$

■

Promotrimo, ako je $S = A$ izotoničan normaliziran linearni funkcional i $g : E \to [m, M], e \in L$ takva da su $\phi(g) \in L$ i $A := \frac{m+M}{2}$ tada vrijedi generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti na izotonične normalizirane linearne funkcionale jer imamo zadovoljene sve uvjete Teorema 3.7. Zatim, iz tog oblika, pod uvjetima koje smo već opisali možemo dobiti Hermite-Hadamardovu nejednakost.

3.3 Fejérova generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti

Godine 1906. Fejer[1] je proučavajući trigonometrijske polinome otkrio nejednakosti koje generaliziraju Hermiteovu. Unatoč tome Hermiteov doprinos, kao što smo spomenuli na početku rada, nije bio opažen još dugo vremena. U sljedećem teoremu navodimo Fejérov rezultat.

Teorem 3.15 *Neka je $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funkcija gustoće na $[a, b]$, tj. g je nenegativna, integrabilna funkcija takva da vrijedi $\int_a^b g(x)\,dx = 1$. Ako je funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna i g simetriča na $[a, b]$, tada vrijedi*

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Dokaz. Koristimo konveksnost funkcije f i zapis od x dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &= \int_a^b f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) g(x)\,dx \\ &\leq \int_a^b \left[\frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)\right] g(x)\,dx \\ &= \frac{bf(a)-af(b)}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\int_a^b xg(x)\,dx.\end{aligned}$$

Zbog simetričnosti funkcije g vrijedi $\int_a^b xg(x)\,dx = \frac{a+b}{2}$. Stoga dobivamo

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,dx &\leq \frac{bf(a)-af(b)}{b-a} + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot\frac{a+b}{2} \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{2}.\end{aligned}$$

Za dokaz drugog dijela nejednakosti ćemo koristiti činjenicu

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(b+a-x)\right),$$

[1]Lipót Fejér (1880-1959), mađarski matematičar

pa zbog konveksnosti funkcije f dobivamo

$$\frac{1}{2}(f(x) + f(b + a - x)) \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right), \forall x \in [a, b]$$
$$\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) + f\left(\frac{b-x}{b-a}b + \frac{x-a}{b-a}a\right)\right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

Pomnožimo li sa $g(x)$ i integriramo po x od a do b dobit ćemo

$$\frac{1}{2}\left[\int_a^b f\left(\frac{b-x}{b-a}a + \frac{x-a}{b-a}b\right) g(x)\, dx + \int_a^b f\left(\frac{b-x}{b-a}b + \frac{x-a}{b-a}a\right) g(x)\, dx\right] \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right). \tag{3.7}$$

Neka je $y = a + b - x$. Zbog simetričnosti funkcije g za drugi integral iz (3.7) vrijedi

$$\int_a^b f\left(\frac{y-a}{b-a}b + \frac{b-y}{b-a}a\right) g(a+b-y)\, dy$$
$$= \int_a^b f\left(\frac{y-a}{b-a}b + \frac{b-y}{b-a}a\right) g(y)\, dy.$$

Prvi i drugi integral iz (3.7) imaju jednaku vrijednost $\int_a^b f(x)g(x)\, dx$ pa je

$$\int_a^b f(x)g(x)\, dx \geq f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

■

U nastavku se navodi jedan od poznatijih nejednakosti Fejérovog tipa koju nazivamo Hermite-Hadamard-Fejérova nejednakost.

Teorem 3.16 (Hermite-Hadamard-Fejérova nejednakost) *Neka je $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Ako je $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ nenegativna integrabilna funkcija koja je simetrična s obzirom na pravac $\frac{a+b}{2}$, tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \int_a^b g(x)\, dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\, dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2} \int_a^b g(x)\, dx. \tag{3.8}$$

Dokaz. Iz konveksnosti funkcije f i zapisa $a = ta + (1-t)b, b = tb + (1-t)a$ za svaki $t \in [0,1]$ vrijedi

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta+(1-t)b) + f(tb+(1-t)a)}{2}.$$

Množenjem nejednakosti sa $2g(tb+(1-t)a)$ i zatim integriranjem nejednakosti s obzirom na varijablu t od 0 do 1 slijedi

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_0^1 g(tb+(1-t)a)\,dt \leq \int_0^1 [f(ta+(1-t)b)+f(tb+(1-t)a)]g(tb+(1-t)a)\,dt.$$

Koristeći supstituciju $x = tb + (1-t)a$ iz prethodnog dobivamo

$$\begin{aligned}\frac{2}{b-a}f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)\,dx &\leq \frac{1}{b-a}\left[\int_a^b f(a+b-x)g(x)\,dx + \int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]\\ &\leq \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx.\end{aligned}$$

Preostaje nam pokazati drugu nejednakost iz (3.8). Ponovno, zbog konveksnosti funkcije f i zapisa $a = ta + (1-t)b, b = tb + (1-t)a$ za svaki $t \in [0,1]$ vrijedi

$$f(ta+(1-t)b) + f(tb+(1-t)a) \leq f(a) + f(b).$$

Množenjem nejednakosti sa $g(tb+(1-t)a)$ i zatim integriranjem nejednakosti s obzirom na varijablu t od 0 do 1 slijedi

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)g(tb+(1-t)a)\,dt + \int_0^1 f(tb+(1-t)a)g(tb+(1-t)a)\,dt$$

$$\leq (f(a)+f(b))\int_0^1 g(tb+(1-t)a)\,dt.$$

Ponovnom koristeći supstituciju $x = tb+(1-t)a$ dobivamo rezultat teorema

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{b-a}\int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx$$

■

Ako je $g \equiv 1$, tada iz prethodnog teorema dobivamo Hermite–Hadamardovu nejednakost

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}.$$

Slijedi generalizacija Teorema 3.1 i Teorema 3.16.

Teorem 3.17 *Neka je $g : [a,b] \to [0,\infty)$ integrabilna i simetrična funkcija s obzirom na $A = \frac{pa+qb}{p+q}$, gdje su p, q pozitivni realni brojevi. Vrijedi*

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\int_{A+y}^{A-y} g(x)\,dx \leq \int_{A+y}^{A-y} f(x)g(x)\,dx \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}\int_{A+y}^{A-y} g(x)\,dx \tag{3.9}$$

za konveksnu funkciju f na $[a,b]$ i $0 \leq y \leq \frac{b-a}{p+q} min\{p,q\}$.

Za kraj ćemo navesti još jednu generalizacuju, do sada tri navedena teorema, čiji ćemo utjecaj moći vidjeti i u poglavlju Lipschitzove funkcije. Najprije iskažimo pomoćnu tvrdnju.

Propozicija 3.18 *Neka je $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Neka je $A = \alpha a + (1-\alpha)b$ i neka je $z_0 = (b-a)min\{\frac{\alpha}{1-\beta}, \frac{1-\alpha}{\beta}\}$ za $\alpha, \beta \in [0,1]$. Definiramo funkciju g kao*

$$g(z) = (1-\beta)f(A-\beta z) + \beta f(A+(1-\beta)z), z \in [0, z_0].$$

Tada je g rastuća konveksna funkcija na $[0, z_0]$ i za svaki $z \in [0, z_0]$ vrijedi

$$f[\alpha a + (1-\alpha)b] \leq g(z) \leq \alpha f(a) + (1-\alpha)f(b). \tag{3.10}$$

Slijedi generalizacija Teorema 3.17, Teorema 3.16 i Teorema 2.1.

Teorem 3.19 *Neka su α, β, A i z_0 definirani kao u Propoziciji 3.18 i neka je $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ nenegativna i integrabilna funkcija takva da vrijedi*

$$g(A-\beta z) = g(A+(1-\beta)z), \forall z \in [0, z_0]. \tag{3.11}$$

Tada vrijedi

$$
\begin{aligned}
f[\alpha a+(1-\alpha)b]\int_{A-\beta z}^{A+(1-\beta)z} g(x)\,dx \leq & \frac{1-\beta}{\beta}\int_{A-\beta z}^{A} f(x)g(x)\,dx \\
& + \frac{\beta}{1-\beta}\int_{A}^{A+(1-\beta)z} f(x)g(x)\,dx \\
& \leq [\alpha f(a)+(1-\alpha)f(b)]\int_{A-\beta z}^{A+(1-\beta)z} g(x)\,dx.
\end{aligned} \tag{3.12}
$$

Dokaz. Za svaki $z \in [0, z_0]$ vrijedi

$$
\begin{aligned}
\int_{A-\beta z}^{A+(1-\beta)z} g(x)\,dx &= \int_{A-\beta z}^{A} g(x)\,dx + \int_{A}^{A+(1-\beta)z} g(x)\,dx \\
&= \beta\int_0^z g(A-\beta x)\,dx + (1-\beta)\int_0^z g(A-\beta x)\,dx \qquad (3.13) \\
&= \int_0^z g(A-\beta x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Kako su zadovoljeni uvjeti Teorema 3.18, pomnožimo li (3.10) sa $g(A-\beta x)$ gdje je g nenegativna funkcija te zatim integriramo dobiveni rezultata po x na $[0, z]$ dobivamo

$$
\begin{aligned}
f[\alpha a+(1-\alpha)b]\int_0^z g(A-\beta x)\,dx \leq & (1-\beta)\int_0^z f(A-\beta x)g(A-\beta x)\,dx \\
& + \beta\int_0^z f(A+(1-\beta)x)g(A+(1-\beta)x)\,dx \\
= & \frac{1-\beta}{\beta}\int_{A-\beta z}^{A} f(x)g(x)\,dx \\
& + \frac{\beta}{1-\beta}\int_{A}^{A+(1-\beta)z} f(x)g(x)\,dx \\
\leq & [\alpha f(a)+(1-\alpha)f(b)]\int_0^z g(A-\beta x)\,dx.
\end{aligned}
$$

Formula (3.12) slijedi korištenjem (3.13). ■

Primijetimo,

- Pomoću (3.12), definiramo li $\alpha = \frac{p}{p+q}, \beta = \frac{1}{2}$ i $z = 2y$ dobit ćemo (3.9) iz Teorema 3.17

$$f\left(\frac{pa+qb}{p+q}\right)\int_{A-y}^{A+y} g(x)\,dx \leq \int_{A-y}^{A+y} f(x)g(x)\,dx \leq \frac{pf(a)+qf(b)}{p+q}\int_{A-y}^{A+y} g(x)\,dx$$

- Pomoću (3.12), definiramo li $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ i $z = z_0 = b - a$ dobit ćemo (3.8) iz Teorema 3.16

$$f(\frac{a+b}{2})\int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)g(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx$$

- Pomoću (3.12), definiramo li $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ i $z = z_0 = b - a$ i $g \equiv \mathbf{1}$ dobit ćemo Hemite-Hadamardovu nejednakost

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

Poglavlje 4

Hermite-Hadamardova nejednakost za različite vrste konveksnosti

U ovom poglavlju ćemo promatrati različite vrste konveksnih funkcija te koja je njihova veza sa običnom (tj. klasičnom) konveksnosti. Hermitova-Hadamardova nejednakost predstavlja temelj za razvoj brojnih generalizacija koje proširuju njen opseg primjene. Spomenut ćemo log-konveksne, r-konveksne, m-konveksne, s-konveksne i h-konveksne funkcije. Za svaku od njih navodimo različite verzije nejednakosti dobivene iz Hermite-Hadamardove nejednakosti. Na samom kraju rada ćemo spomenuti Lipschitz-neprekidne funkcije zbog njihovog važnog utjecaja pri procjeni preciznosti Hermite - Hadamardove nejednakosti.

4.1 Log-konveksne funkcije

Definicija 4.1 *Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$. Funkcije $f : I \to (0, \infty)$ je log-konveksna ili multiplikativno konveksna ako za svaki $x, y \in I$ i $t \in [0, 1]$ vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}.$$

Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada kažemo da je f log-konkavna funkcija.

Napomena 4.2 *Primjetimo da je funkcija $f : I \to (0, \infty)$ log-konveksna ako i samo ako je $log \circ f$ konveksna funkcija. Vrijedi*

$$(log \circ f)(tx + (1-t)y) \leq t(log \circ f)(x) + (1-t)(log \circ f)(y)$$
$$log(f(tx + (1-t)y)) \leq log([f(x)]^t [f(y)]^{1-t})$$
$$f(tx + (1-t)y) \leq [f(x)]^t [f(y)]^{1-t}.$$

Propozicija 4.3 *Neka je funkcija $f : I \to (0, \infty)$ log-konveksna. Tada je f konveksna.*

Dokaz. Iz log-konveksnosti funkcije f iz prethodne napomene slijedi da je $log \circ f$ konveksna funkcija. Korištenjem konveksnosti funkcije $log \circ f$ za svaki $x, y \in I$ i $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$(log \circ f)(tx + (1-t)y) \leq t(log \circ f)(x) + (1-t)(log \circ f)(y)$$
$$log(f(tx + (1-t)y)) \leq log(tf(x) + (1-t)(f(y)))$$
$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)(f(y)),$$

gdje smo drugu nejednakost dobili iz konkavnosti funkcije log. ■

Obrat prethodne propozicije ne vijedi kao što možemo vidjeti u sljedećem primjeru.

Primjer 4.4 *Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana sa $f(x) = x^2$. Funkcija f je konveksna, ali nije log-konveksna. Vrijedi*

$$(tx + (1-t)y)^2 \leq tx^2 + (1-t)y^2,$$

ali kako je $log f(x) = 2log|x|$ funkcija koja nije konveksna slijedi da f nije log-konveksna.

Neka je $f : I \to (0, \infty)$ log-konveksna funkcija na I i $a, b \in I$ takvi da je $a < b$. Kako je tada $log \circ f$ konveksna funkcija možemo na nju primijeniti Hermite-Hadamardovu nejednakost

$$log\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b (log \circ f)(x)\, dx \leq \frac{(log \circ f)(a) + (log \circ f)(b)}{2},$$

pa iz gornje nejednakosti dobivamo Hermite-Hadamardovu nejednakost za log-konveksne funkcije

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b log(f(x))\, dx\right] \leq \sqrt{f(a)f(b)}.$$

Označimo s $A(a, b)$ aritmetičku sredinu nenegativnih realnih brojeva a i b te s $G(a, b)$ njihovu geometrijsku sredinu.

$$A(a, b) = \frac{a+b}{2} \qquad G(a, b) = \sqrt{ab}$$

Nadalje, primijetimo da vrijedi

$$f(A(a, b)) \leq exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b log(f(x))\, dx\right] \leq G(f(a), f(b)).$$

Nastavno na prethodnu nejednakost u sljedećem teoremu ,uz pomoć geometrijske sredine, navodimo još jednu generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti za log-konveksne funkcije.

Teorem 4.5 *Neka je $f : I \to (0, \infty)$ log-konveksna funkcija na I i $a, b \in I$ takvi da je $a < b$. Tada vrijedi*

$$f(A(a, b)) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\, dx \leq G(f(a), f(b)). \tag{4.1}$$

Dokaz. Iz log-konveksnosti funkcije f za svaki $t \in [0,1]$ vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq [f(a)]^t [f(b)]^{1-t}, \forall t \in [0,1]$$

i

$$f((1-t)a + tb) \leq [f(a)]^{1-t} [f(b)]^t, \forall t \in [0,1].$$

Množenjem, a zatim korjenovanjem gornjih nejednakosti dobivamo

$$G(f(ta + (1-t)b), f((1-t)a + tb)) \leq G(f(a), f(b)), \forall t \in [0,1].$$

Integriranjem gornjih nejednakosti po t dobivamo

$$\int_0^1 G(f(ta + (1-t)b), f((1-t)a + tb))\, dt \leq G(f(a), f(b)).$$

Nakon uvođenja supstitucije $x = (1-t)a + tb$, $t \in [0,1]$ slijedi

$$\begin{aligned} dt &= \frac{1}{b-a} dx \\ t &= 0 \to x = b \\ t &= 1 \to x = a. \end{aligned}$$

Sada za integral vrijedi

$$\int_0^1 G(f(ta+(1-t)b), f((1-t)a+tb))\, dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b G(f(a+b-x), f(x))\, dx$$

pa je druga nejednakost iz 4.3 dokazana. Sada iz definicije log-konveksnosti funkcije f za $t = \frac{1}{2}$ i za svaki $x, y \in I$ slijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \sqrt{f(x)f(y)}.$$

Definiramo li $x = ta + (1-t)b$ i $y = (1-t)a + tb$ dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq G(f(ta + (1-t)b), f((1-t)a + tb)), \forall t \in [0,1].$$

Integriranjem gornje nejednakosti po t dobivamo prvu nejednakost iz 4.3

$$f(A(a,b)) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b G(f(x), f(a+b-x))\, dx.$$

■

U nastavku navodimo definiciju logaritamske sredine koja nam je potrebna za sljedeću generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti na log-konveksne funkcije, a također ćemo je koristiti i kod generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti na r-konveksne funkcije.

Definicija 4.6 *Logaritamska sredina pozitivnih brojeva x, y, u oznaci $L(x, y)$, je definirana sa*

$$L(x,y) = \begin{cases} \frac{x-y}{lnx-lny} & ,x \neq y \\ x & ,x = y \end{cases}$$

i generalizirana logaritamska sredina reda r pozitivnih brojeva x, y u oznaci $L_r(x, y)$ je definirana sa

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \frac{r}{r+1} \cdot \frac{x^{r+1}-y^{r+1}}{x^r-y^r} & ,r \neq 0,-1, x \neq y \\ \frac{x-y}{lnx-lny} & ,r = 0, x \neq y \\ \frac{lnx-lny}{x-y} & ,r = -1, x \neq y \\ x & ,x = y. \end{cases}$$

Teorem 4.7 *Neka je f log-konveksna funkcija na $[a, b], 0 < a < b < +\infty$ Tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq L(f(a), f(b)).$$

Dokaz. Iz log-konveksnosti funkcije f slijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq [f(a)]^t [f(b)]^{1-t}, \forall t \in [0, 1].$$

Integriranjem nejednakosti po t na $[0,1]$ dobivamo
$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt \leq \int_0^1 [f(a)]^t[f(b)]^{1-t}\,dt.$$
Koristeći supstituciju $x = tb + (1-t)a$ dobivamo
$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$
Također, vrijedi za $f(a) \neq f(b)$
$$\begin{aligned}\int_0^1 [f(a)]^t[f(b)]^{1-t}\,dt &= f(a)\int_0^1 \left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^t dt \\ &= f(a)\frac{\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)^t}{ln\left(\frac{f(b)}{f(a)}\right)} \\ &= \frac{f(b)-f(a)}{ln(f(b))-ln(f(a))} \\ &= L(f(a),f(b))\end{aligned}$$
i za $f(a) = f(b)$
$$\begin{aligned}\int_0^1 [f(a)]^t[f(b)]^{1-t}\,dt &= \int_0^1 f(a)\,dt \\ &= L(f(a),f(b)),\end{aligned}$$
pa je tvrdnja teorema dokazana. ∎

4.2 R-konveksne funkcije

Za početak dajemo definiciju potencijalne sredine reda r koja nam je potrebna za uvođenje definicije r-konveksnih funkcija.

Definicija 4.8 *Potencijalnu sredinu reda r pozitivnih brojeva x, y, u oznaci $M_r(x,y;\lambda)$, definiramo sa*
$$M_r(x,y;\lambda) = \begin{cases}(\lambda x^r + (1-\lambda)y^r)^{\frac{1}{r}} & ,r \neq 0 \\ x^\lambda y^{1-\lambda} & ,r = 0\end{cases}$$

U slučaju da je $\lambda = \frac{1}{2}$ *potencijalnu sredinu reda* r *pozitivnih brojeva* x, y *označavamo sa* $M_r(x, y)$.

Definicija 4.9 *Pozitivna funkcija* f *je r-konvesna na* $[a, b]$ *ako za sve* $x, y \in [a, b]$ *i* $\lambda \in [0, 1]$ *vrijedi*

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq M_r(f(x), f(y); \lambda)$$

Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je f r-konkavna funkcija.

- 0-konveksne funkcije se svode na log-konveksne funkcije
- 1-konveksne funkcije se svode na obične konveksne funkcije

Sljedeći teorem predstavlja generalizaciju desne strane Hermite-Hadamardove nejednakosti na r-konveksne funkcije.

Teorem 4.10 *Neka je* f *pozitivna r-konveksna funkcija na* $[a, b]$. *Tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx \leq L_r(f(a), f(b)).$$

Dokaz. Pretpostavimo da je $r = 0$. Tada je f log-konveksna funkcija pa tvrdnja teorema sljedi iz Teorema 4.7.

Pretpostavimo da je $r \neq 0, -1$. Za $f(a) \neq f(b)$ iz definicije r-konveksnosti slijedi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &= (b-a) \int_0^1 f(\lambda b + (1-\lambda)a)\,d\lambda \\ &\leq (b-a) \int_0^1 (\lambda f^r(b) + (1-\lambda) f^r(a))^{\frac{1}{r}}\,d\lambda\end{aligned}$$

Nakon uvođenja supstitucije $t = \lambda f^r(b) + (1 - \lambda)f^r(a)$ imamo

$$d\lambda = \frac{1}{f^r(b) - f^r(a)} dt$$

$$\lambda = 0 \to t = f^r(a)$$

$$\lambda = 1 \to t = f^r(b)$$

te vrijedi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\leq (b-a)\int_{f^r(a)}^{f^r(b)} \frac{t^{\frac{1}{r}}}{f^r(b)-f^r(a)}\,dt \\ &= (b-a)\frac{r}{r+1}\cdot\frac{f^{r+1}(b)-f^{r+1}(a)}{f^r(b)-f^r(a)} \\ &= (b-a)L_r(f(a),f(b)).\end{aligned}$$

Za $f(a)=f(b)$ slično vrijedi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\leq (b-a)\int_0^1 (\lambda f^r(a)+(1-\lambda)f^r(a))^{\frac{1}{r}}\,d\lambda \\ &= (b-a)f(a) \\ &= (b-a)L_r(f(a),f(b)).\end{aligned}$$

Pretpostavimo da je $r=-1$. Za $f(a)\neq f(b)$ iz definicije r-konveksnosti slijedi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\leq (b-a)\int_0^1 (\lambda f^{-1}(b)+(1-\lambda)f^{-1}(a))^{-1}\,d\lambda \\ &= \frac{b-a}{\frac{1}{f(b)}-\frac{1}{f(a)}}\int_{\frac{1}{f(a)}}^{\frac{1}{f(b)}} t^{-1}\,dt \\ &= \frac{b-a}{\frac{1}{f(b)}-\frac{1}{f(a)}}\left(ln\frac{1}{f(b)}-ln\frac{1}{f(a)}\right) \\ &= (b-a)f(a)f(b)\frac{lnf(a)-lnf(b)}{f(a)-f(b)} \\ &= (b-a)L_{-1}(f(a),f(b)).\end{aligned}$$

Slično se dokaže za $f(a)=f(b)$.

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,dx &\leq (b-a)\int_0^1 (\lambda f^{-1}(b)+(1-\lambda)f^{-1}(a))^{-1}\,d\lambda \\ &= (b-a)\frac{1}{f(a)} \\ &= (b-a)L_{-1}(f(a),f(a)).\end{aligned}$$

■

Primijetimo da za $r = 1$ dobivamo desnu stranu klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti za konveksne funkcije.

4.3 M-konveksne funkcije

Definicija 4.11 *Neka je $m \in [0,1]$. Funkcija $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ je m-konveksna ako za svaki $x, y \in [0,\infty)$ i $t \in [0,1]$ vrijedi*

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y).$$

Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je f m-konkavna funkcija.

Napomena 4.12 *M-konveksne funkcije za razliku od konveksnih funkcija mogu imati prekide u točkama koje nisu rubne točke domene kao što ćemo vidjeti u sljedećem primjeru.*

Primjer 4.13 *Promotrimo funkciju $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ takvu da*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & , 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} & , 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

Funkcija je m-konveksna, ali nije neprekidna jer ima prekid u točki $x = 1$.

Slijede Hermite-Hadamardovi tipovi nejednakosti za m-konveksne funkcije.

Teorem 4.14 *Neka je funkcija $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ m-konveksna, gdje je $m \in (0,1]$. Ako su $a, b \in [0,\infty)$ i $f \in L_1$ tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq min\left\{\frac{f(a) - mf(\frac{b}{m})}{2}, \frac{f(b) - mf(\frac{a}{m})}{2}\right\}.$$

Dokaz. Iz m-konveksnosti funkcije f slijedi da za svaki $x, y \geq 0$ i $t \in [0,1]$ vrijedi

$$f(tx + m(1-t)y) \leq tf(x) + m(1-t)f(y).$$

Za $x = a$ i $y = \frac{b}{m}$, $m \in (0,1]$ dobivamo

$$f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + m(1-t)f\left(\frac{b}{m}\right)$$

i za $x = b$ i $y = \frac{a}{m}$, $m \in (0,1]$ dobivamo

$$f(tb + (1-t)a) \leq tf(b) + m(1-t)f\left(\frac{a}{m}\right).$$

Integriranjem prethodnih nejednakosti po t slijedi

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)\, dt \leq \frac{f(a) + mf(\frac{b}{m})}{2}$$

i

$$\int_0^1 f(tb + (1-t)a)\, dt \leq \frac{f(b) + mf(\frac{a}{m})}{2}.$$

Lako se pokaže da je

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)\, dt = \int_0^1 f(tb + (1-t)a)\, dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx,$$

pa je

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\, dx \leq min\left\{\frac{f(a) - mf(\frac{b}{m})}{2}, \frac{f(b) - mf(\frac{a}{m})}{2}\right\}.$$

■

M-konveksnost se za $m = 1$ svodi na običnu konveksnost pa iz Teorema 4.14 dobivamo drugi dio klasične Hermite-Hadamardove nejednakosti za konveksne funkcije.

Sljedeći rezultat predstavlja još jednu generalizaciju Hermite-Hadamardove nejednakosti na m-konveksne funkcije.

Teorem 4.15 *Neka je funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je m-konveksna, $m \in (0, 1]$. Ako su $a, b \in [0, \infty)$ i $f \in L_1$ tada vrijedi*

$$\begin{aligned} f(\frac{a+b}{2}) &\leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)+mf(\frac{x}{m})}{2}\,dx \\ &\leq \frac{m+1}{4}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + m\frac{f(\frac{a}{m})+f(\frac{b}{m})}{2}\right] \end{aligned} \tag{4.2}$$

Dokaz. Zbog m-konveksnosti funkcije f za svaki $x, y \in [0, \infty)$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f(x) + mf(\frac{x}{m})\right].$$

Neka je $x = ta + (1-t)b$ i $y = (1-t)a + tb$. Sada za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[f(ta+(1-t)b) + mf\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right)\right].$$

Integriranjem gornje nejednakosti po $t \in [0, 1]$ dobivamo

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{1}{2}\left[\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt + m\int_0^1 f\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right)\,dt\right]. \tag{4.3}$$

Uzevši u obzir da vrijedi

$$\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

i

$$\begin{aligned} \int_0^1 f\left(t\frac{a}{m} + (1-t)\frac{b}{m}\right)\,dt &= \frac{m}{b-a}\int_{\frac{a}{m}}^{\frac{b}{m}} f(y)\,dy \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{x}{m}\right)\,dx, \end{aligned}$$

iz (4.3) dobivamo prvi dio nejednakosti (4.2)

$$f(\frac{a+b}{2}) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)+mf(\frac{x}{m})}{2}\,dx.$$

Koristeći m-konveksnost funkcije f za svaki $t \in [0,1]$ vrijedi

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\left[f(ta+(1-t)b)+mf\left(t\frac{a}{m}+(1-t)\frac{b}{m}\right)\right]\\ \leq&\frac{1}{2}\left[tf(a)+(1-t)f(b)+mtf\left(\frac{a}{m}\right)+m^2(1-t)f\left(\frac{b}{m}\right)\right].\end{aligned}$$

Integriranjem gornje nejednakosti po $t \in [0,1]$ te korištenjem prikladnih supstitucija slijedi

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)+mf(\frac{x}{m})}{2}\,dx \leq \frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+mf(b)}{2}+\frac{mf(\frac{a}{m})+m^2f(\frac{b}{m})}{2}\right].$$

Sličnim argumentima dolazimo do

$$\begin{aligned}&\frac{1}{b-a}\int_a^b \frac{f(x)+mf(\frac{x}{m})}{2}\,dx\\ \leq&\frac{1}{4}\left[\frac{f(a)+f(b)+m(f(a)+f(b))}{2}+m\frac{f(\frac{a}{m})+f(\frac{b}{m})+m(f(\frac{a}{m})+f(\frac{b}{m}))}{2}\right]\\ =&\frac{m+1}{4}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+m\frac{f(\frac{a}{m})+f(\frac{b}{m})}{2}\right]\end{aligned}$$

■

U Teoremu 4.15 za $m = 1$ možemo zanemariti pretpostavku da je $f \in L_1$. Tada (4.2) postaje klasična Hermite-Hadamardova nejednakost.

4.4 S-konveksne funkcije

Definicija 4.16 *Neka je* $0 < s \leq 1$ *. Funkcija* $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ *je s-konveksna u prvom smislu, ako za svaki* $x, y \in [0,\infty)$ *i* $\alpha, \beta \geq 0$ *takve da je* $\alpha^s + \beta^s = 1$ *vrijedi*

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y).$$

Skup svih s-konveksnih funkcija u prvom smislu označavamo s K_1^s*. Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je* f *s-konkavna funkcija u prvom smislu.*

Za dokazivanje generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti za s-konveksne funkcije potreban je sljedeći rezultat.

Propozicija 4.17 *Neka je* $0 < s < 1$. *Ako je* $f \in K_1^s$ *onda je* f *nepadajuća funkcija na* $(0, \infty)$ *i*

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) \leq f(0).$$

Slijede generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti za s-konveksne funkcije.

Teorem 4.18 *Neka je* $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ *s-konveksna funkcija u prvom smislu,* $s \in (0, 1)$ *i neka su* $a, b \in [0, \infty)$ *takvi da je* $a < b$. *Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.$$

Dokaz. Ako u definiciji s-konveksnosti u prvom smislu stavimo $\alpha = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$ i $\beta = \frac{1}{2^{\frac{1}{s}}}$ vrijedi da je $\alpha^s + \beta^s = 1$ i za svaki $x, y \in [0, \infty)$ je

$$f\left(\frac{x+y}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Ako stavimo $x = ta + (1-t)b$ i $y = (1-t)a + tb$, $t \in [0, 1]$ dobivamo

$$f\left(\frac{a+b}{2^{\frac{1}{s}}}\right) \leq \frac{1}{2}[f(ta + (1-t)b) + f((1-t)a + tb)].$$

Kako je f monotono nepadajuća na $[0, \infty)$, integrabilan na $[a, b]$. Dakle, možemo integrirati po t gornju nejednakost.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(ta + (1-t)b)\, dt &= \int_0^1 f((1-t)a + tb)\, dt \\ &= \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx.\end{aligned}$$

Time je tvrdnja teorema dokazana. ■

Teorem 4.19 *Neka je $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ s-konveksna funkcija u prvom smislu, $s \in (0, 1)$ i neka su $a, b \in [0, \infty)$ takvi da je $a < b$. Tada vrijedi*

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a) + sf(b)}{s+1}.$$

Dokaz. Kako je f s-konveksna u prvom smislu, za svaki $t \in [0, 1]$ takav da $t^s + (1-t)^s = 1$ vrijedi

$$\begin{aligned} f(ta + (1-t)b) &\leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b) \\ &\leq t^s f(a) + (1-t^s) f(b) \\ &= t^s (f(a) - f(b)) + f(b). \end{aligned}$$

Kako je f monotono nepadajuća na $[0, \infty)$, integrabilan na $[a, b]$. Integriranjem nejednakosti po t na $[0, 1]$ dobivamo

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(ta + (1-t)b)\, dt &\leq (f(a) - f(b)) \int_0^1 t^s\, dt + f(b) \int_0^1 dt \\ &\leq \frac{f(a) + sf(b)}{s+1}. \end{aligned}$$

Kako je

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b)\, dt = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

slijedi

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a) + sf(b)}{s+1}$$

i tvrdnja teorema je dokazana. ■

Definicija 4.20 *Neka je $0 < s \leq 1$. Funkcija $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ je s-konveksna u drugom smislu, ako za svaki $x, y \in [0, \infty)$ i $\alpha, \beta \geq 0$ takve da je $\alpha + \beta = 1$ vrijedi*

$$f(\alpha x + \beta y) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y).$$

Skup svih s-konveksnih funkcija u drugom smislu označavamo s K_2^s. Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je f s-konkavna funkcija u drugom smislu.

Teorem 4.21 *Neka je $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ s-konveksna funkcija u drugom smislu, $s \in (0, 1)$ i neka su $a, b \in [0, \infty)$ takvi da je $a < b$. Ako je $f \in L_1[a, b]$ tada vrijedi*

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{s+1}. \tag{4.4}$$

Dokaz. Iz s-konveksna u drugom smislu funkcije f za svaki $t \in [0, 1]$ vrijedi

$$f(ta + (1-t)b) \leq t^s f(a) + (1-t)^s f(b).$$

Integriranjem nejednakosti po t na $[0, 1]$ dobivamo

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(ta + (1-t)b)\, dt &\leq f(a) \int_0^1 t^s\, dt + f(b) \int_0^1 (1-t)^s\, dt \\ &= \frac{f(a)+f(b)}{s+1}.\end{aligned}$$

Preostaje pokazati prvu nejednakost iz (4.21). Za svaki $x, y \in [0, \infty)$ vrijedi

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2^s}.$$

Neka je $x = ta + (1-t)b$ i $y = tb + (1-t)a$ pa je

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(ta + (1-t)b) + f(tb + (1-t)a)}{2^s}.$$

Integriranjem nejednakosti po t od 0 do 1 dobivamo

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\, dx$$

pa je tvrdnja dokazana. ■

Prethodna tri teorema su generalizacija Hermite-Hadamardove nejednakosti koju dobivamo kada je s=1 jer se u tom slučaju s-konveksnost svodi na običnu konveksnost funkcije.

4.5 Modificirane h-konveksne funkcije

Definicija 4.22 *Neka je* $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *nenegativna funkcije. Za nenegativnu funkciju* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kažemo da je h-konveksna ako za svaki* $x, y \in I$ *i* $t \in [0,1]$ *vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + h(1-t)f(y).$$

Klasu svih h-konveksnih funkcija definiranih na I *označavamo s* $SX(h, I)$. *Ako je prethodna nejednakost obrnuta tada je* f *h-konkavna funkcija.*

Definicija 4.23 *Neka je* $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ *nenegativna funkcija. Za* $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *kažemo da je modificirana h-konveksna funkcija ako za svaki* $x, y \in I$ *i* $t \in [0,1]$ *vrijedi*

$$f(tx + (1-t)y) \leq h(t)f(x) + (1 - h(t))f(y).$$

- Ako je $h(t) = t$ h-konveksnost i modificirana h-konveksnost se svodi na običnu konveksnost.

- Ako je $h(t) = t^s$ h-konveksnost se svodi na s-konveksnost.

U nastavku navodimo generalizacije Hermite-Hadamardove nejednakosti za modificirane h-konveksne funkcije.

Teorem 4.24 *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$ *modificirana h-konveksna funkcija na intervalu* $[a, b]$, $a < b$. *Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq f(a) + (f(a) + f(b))\int_0^1 h(t)\,dt.$$

Dokaz. Neka je $u = ta + (1-t)b$ i $v = (1-t)a + tb$. Tada je

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &= f\left(\frac{u+v}{2}\right) \\ &= f\left(\frac{ta+(1-t)b+(1-t)a+tb}{2}\right) \\ &\le \left[1-h\left(\frac{1}{2}\right)\right] f(ta+(1-t)b) + h\left(\frac{1}{2}\right) f((1-t)a+tb). \end{aligned}$$

Integriranjem nejednakosti po $t \in [0,1]$ slijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\le \left[1-h\left(\frac{1}{2}\right)\right] \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx + h\left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \\ &= \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Također, vrijedi

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= (b-a)\int_0^1 f(ta+(1-t)b)\,dt \\ &\le (b-a)\int_0^1 [(1-h(t))f(a)+h(t)f(b)]\,dt \\ &= (b-a)\left[f(a) + (f(b)-f(a))\int_0^1 h(t)\,dt\right]. \end{aligned}$$

Dakle,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le f(a) + (f(b)-f(a))\int_0^1 h(t)\,dt. \tag{4.6}$$

Kombiniranjem (4.5) i (4.6) završavamo dokaz teorema. ■

Ako u prethodnom teoremu stavimo $h(t) = t$ dobivamo klasičnu Hermite-Hadamardovu nejednakost.

Prethodno u radu smo spomenuli Hermite-Hadamard-Fejérovu nejednakost. Kako bi pokazali njenu generalizaciju za modificirane h-konveksne funkcije potrebna nam je sljedeća lema.

Lema 4.25 *Neka je f modificirana h-konveksna funkcija. Tada za svaki $x \in [a,b]$ vrijedi*

$$f(a+b-x) \le f(a) + f(b) - f(x)$$

gdje je $x = ta + (1-t)b$, $t \in [0,1]$.

U nastavku navodimo Hermite-Hadamard-Fejérovu nejednakost za modificirane h-konveksne funkcije.

Teorem 4.26 *Neka je* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *modificirana h-konveksna funkcija,* $w : [a,b] \to \mathbb{R}$, $w \leq 0$ *integrabilna i simetrična s obzirom na* $\frac{a+b}{2}$. *Tada vrijedi*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\,dx \leq \int_a^b f(x)w(x)\,dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx.$$

Dokaz. Kako je f modificirana h-konveksna funkcija iz Leme 4.25 slijedi

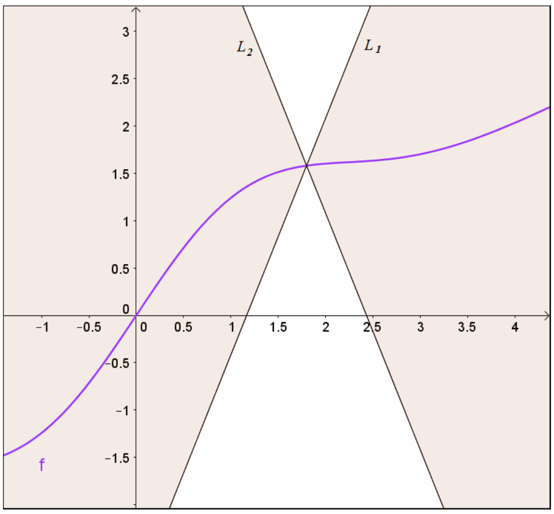
$$\begin{aligned}
f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b w(x)\,dx &= \int_a^b f\left(\frac{a+b-x+x}{2}\right)w(x)\,dx \\
&\leq \int_a^b \left[\left(1-h\left(\frac{1}{2}\right)\right)f(a+b-x) + h\left(\frac{1}{2}\right)f(x)\right]w(x)\,dx \\
&= \left(1-h\left(\frac{1}{2}\right)\right)\int_a^b f(a+b-x)w(a+b-x)\,dx \\
&\quad + h\left(\frac{1}{2}\right)\int_a^b f(x)w(x)\,dx \\
&= \int_a^b f(x)w(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b f(a+b-x)w(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)w(x)\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_a^b (f(a)+f(b)-f(x))w(x)\,dx + \frac{1}{2}\int_a^b f(x)w(x)\,dx \\
&= \frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b w(x)\,dx.
\end{aligned}$$

■

Prethodni teorem je, kao što smo već rekli, generalizacija Hermite-Hadamard-Fejérove nejednakosti koju dobivamo kada je $h(t) = t$ jer se u tom slučaju modificirana h-konveksnost svodi na običnu konveksnost funkcije.

4.6 Lipschitz-neprekidne funkcije

Lipschitz-neprekidne funkcije su zanimljive radi specifičnog ponašanja na grafu koje nam omogućuje da ih preciznije istražimo. Intuitivno, Lipschitzovo svojstvo kaže da je Lipschitz-neprekidna funkcija ograničena brzinom kojom se može mijenjati. Točnije, daju nam bolji uvid u preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti, kao što smo naveli u Poglavlju 1.4 gdje smo također imali rezultate povezane sa Lipschitzovim svojstvom (Slika 4.6). Važno je napomenuti da u ovom poglavlju ne uvodimo specijalnu konveksnost nego koristimo činjenicu da su sve konveksne funkcije Lipschitz-neprekidne na svakom intervalu $[a, b]$ sadržanom u domeni koja doprinosi boljoj procjeni preciznosti Hermite-Hadamardove nejednakosti.



Slika 4.1: Lipschitz svojstvo

Uz pomoć Teorema 1.13 upravo nam Lipschitz-neprekidne funkcije mogu dobro predočiti preciznost Hermite-Hadamardove nejednakosti. Stoga u ovom poglavlju promatramo posebno nam zanimljive sljedeće Lipschitz-neprekidne funkcije :

Za L-Lipschitz funkciju $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ definiramo funkcije $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ i $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ sa

$$H(t) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(tx + (1-t)\frac{a+b}{2})\,dx$$

i

$$F(t) := \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b \int_a^b f(tx + (1-t)y)\,dx\,dy.$$

Zanemarivanjem konveksnosti, a korištenjem dvije prethodno definirane funkcije dolazimo do procjena preciznosti lijeve i desne strane originalne Hermite-Hadamardove nejednakosti.

Teorem 4.27 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ L-Lipschitz funkcija na I i neka su $a, b \in I$ takvi da je $a < b$. Vrijedi*

(i) Funkcija H je $\frac{L}{4}(b-a)$-Lipschitz funkcija na $[0,1]$

(ii) $\forall t \in [0,1]$ vrijede nejednakosti

$$\left| f\left(\frac{a+b}{2}\right) - H(t) \right| \le \frac{Lt}{4}(b-a), \tag{4.7}$$

$$\left| H(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \right| \le \frac{L(1-t)}{4}(b-a), \tag{4.8}$$

$$\left| H(t) - t\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - (1-t) f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right| \le \frac{t(1-t)L}{2}(b-a). \tag{4.9}$$

Dokaz. Za $t_1, t_2 \in [0,1]$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&|H(t_2) - H(t_1)| \\
=&\frac{1}{b-a}\left|\int_a^b f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right)dx - \int_a^b f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)dx\right| \\
\leq&\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|f\left(t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2}\right) - f\left(t_1x + (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right)\right| dx \\
\leq&\frac{L}{b-a}\int_a^b \left|t_2x + (1-t_2)\frac{a+b}{2} - t_1x - (1-t_1)\frac{a+b}{2}\right| dx \\
=&\frac{L|t_2-t_1|}{b-a}\int_a^b \left|x - \frac{a+b}{2}\right| dx \\
=&\frac{L(b-a)}{4}|t_2-t_1|,
\end{aligned} \tag{4.10}$$

iz čega slijedi da je H $\frac{L}{4}(b-a)$-Lipschitz funkcija na $[0,1]$. Nejednakost (4.7) dobivamo iz (4.10) ako je $t_1 = 0, t_2 = t$

$$\begin{aligned}
|H(t_2) - H(t_1)| &\leq \frac{L(b-a)}{4}|t_2-t_1| \\
\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b f\left(\frac{a+b}{2}\right)dx - H(t)\right| &\leq \frac{Lt}{4}(b-a) \\
\left|f\left(\frac{a+b}{2}\right) - H(t)\right| &\leq \frac{Lt}{4}(b-a).
\end{aligned}$$

Nejednakost (4.7) dobivamo iz (4.10) ako je $t_1 = 1, t_2 = t$

$$\begin{aligned}
|H(t_2) - H(t_1)| &\leq \frac{L(b-a)}{4}|t_2-t_1| \\
\left|H(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| &\leq \frac{L(1-t)}{4}(b-a).
\end{aligned}$$

Nejednakost (4.8) dobivamo dodavanjem t puta (4.10) i (1-t) puta (4.10)

$$\left|H(t) - t\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - (1-t)f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right| \leq \frac{t(1-t)L}{2}(b-a).$$

■

Korolar 4.28 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ diferencijabilna, konveksna funkcija na I i $a, b \in I$ takvi da je $a < b$. Neka je $M := sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| < \infty$.*

Tada za svaki $t \in [0,1]$ vrijede sljedeće nejednakosti

$$0 \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - H(t) \leq \frac{M(1-t)}{4}(b-a),$$
$$0 \leq H(t) - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{Mt}{4}(b-a),$$
$$0 \leq \frac{f(tb+(1-t)\frac{a+b}{2}) + f(ta+(1-t)\frac{a+b}{2})}{2} - H(t) \leq \frac{Mt}{3}(b-a).$$

Teorem 4.29 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ L-Lipschitz funkcija na I i neka su $a, b \in I$ takvi da je $a < b$. Vrijedi*

(i) Funkcija F je simetrična, $f(t) = F(1-t), \forall t \in [0,1]$

(ii) Funkcija F je $\frac{L}{3}(b-a)$-Lipschitz funkcija na $[0,1]$

(iii) $\forall t \in [0,1]$ vrijede nejednakosti

$$\left|F(t) - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy\right| \leq \frac{L|2t-1|}{6}(b-a), \tag{4.11}$$
$$\left|F(t) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{Lt}{3}(b-a), \tag{4.12}$$
$$|F(t) - H(t)| \leq \frac{(1-t)L}{4}(b-a). \tag{4.13}$$

Dokaz. Prva tvrdnja slijedi iz definicije funkcije F. Za $t_1, t_2 \in [0,1]$ vrijedi

$$\begin{aligned}
|F(t_2) - F(t_1)| &= \frac{1}{(b-a)^2}\left|\int_a^b\int_a^b [f(t_2x+(1-t_2)y) - f(t_1x+(1-t_1)y)]\,dx\,dy\right| \\
&\leq \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |f(t_2x+(1-t_2)y) - f(t_1x+(1-t_1)y)|\,dx\,dy \\
&\leq \frac{L|t_2-t_1|}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b |x-y|\,dx\,dy.
\end{aligned}$$

Znamo

$$\int_a^b\int_a^b |x-y|\,dx\,dy = \frac{(b-a)^3}{3}$$

pa vrijedi

$$|F(t_2) - F(t_1)| \leq \frac{L|t_2 - t_1|}{3}(b-a), \forall t_1, t_2 \in [0,1] \tag{4.14}$$

iz čega slijedi da je F $\frac{L}{3}(b-a)$-Lipschitz funkcija na $[0,1]$. Nejednakost (4.11) dobivamo iz (4.14) ako je $t_1 = \frac{1}{2}, t_2 = t$

$$\left|F(t) - F\left(\frac{1}{2}\right)\right| \leq \frac{L|t-\frac{1}{2}|}{3}(b-a)$$

$$\left|F(t) - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f(\frac{x+y}{2})\,dx\,dy\right| \leq \frac{L|2t-1|}{6}(b-a).$$

Nejednakost (4.12) dobivamo iz (4.14) ako je $t_1 = 0, t_2 = t$

$$|F(t) - F(0)| \leq \frac{Lt}{3}(b-a)$$

$$\left|F(t) - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f(y)\,dx\,dy\right| \leq \frac{Lt}{3}(b-a)$$

$$\left|F(t) - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \frac{Lt}{3}(b-a).$$

Kako je funkcija f L-Lipschitz funkcija za svaki $t \in [0,1]$ i $x, y \in [a,b]$ vrijedi

$$\begin{aligned}
&\left|f(tx + (1-t)y) - f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\right| \\
\leq &L\left|tx + (1-t)y - tx - (1-t)\frac{a+b}{2}\right| \\
= &(1-t)L\left|y - \frac{a+b}{2}\right|.
\end{aligned}$$

Integriranjem nejednakosti na $[a,b] \times [a,b]$ dobivamo

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b \int_a^b f(tx+(1-t)y)\,dx\,dy - \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f\left(tx + (1-t)\frac{a+b}{2}\right)\,dx\right| \\
&\leq (1-t)L\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|y - \frac{a+b}{2}\right|\,dy \\
&= \frac{L(1-t)(b-a)}{4}, \forall t \in [0,1].
\end{aligned}$$

■

Korolar 4.30 *Neka je $f : I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$ diferencijabilna, konveksna funkcija na I i $a, b \in I$ takvi da je $a < b$. Neka je $M := sup_{x\in[a,b]}|f'(x)| < \infty$. Tada za svaki $t \in [0,1]$ vrijede sljedeće nejednakosti*

$$
\begin{aligned}
&0 \le F(t) - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b\int_a^b f\left(\frac{x+y}{2}\right)dx\,dy \le \frac{M|2t-1|}{6}(b-a),\\
&0 \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx - F(t) \le \frac{Mt}{2}(b-a),\\
&0 \le F(t) - H(t) \le \frac{M(1-t)}{4}(b-a).
\end{aligned}
$$

Literatura

[1] M. Anwar, J. Pečarić, G. Roquia. On generalized Hermite Hadamard's inequality. Jordan Journal of Mathematics and Statistics (JJMS) 6(3), 2013, pp.225 - 249

[2] A.G. Azpeitia. Convex Functions and the Hadamard Inequality. Revista Colombiana de Matemáticas, Vol. 28 (1994), 7-12

[3] P. Cerone, S.S. Dragomir. Mathematical inequalities, Taylor & Francis Group, New York, 2011.

[4] K.S. Chou. 2018 Fall MATH3060 Mathematical Analysis III: Elementary Inequalities, Department of mathematics The Chines University of Hong Kong.

[5] S.S. Dragomir, S. Fitzpatrick. The Hadamard's inequality for s-convex functions in the second sense. Demonstratio Math., 32 (4) (1999), 687-696

[6] S.S. Dragomir, C.E M. Pearce. Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications. RGMIA Monographs, Victoria University, Melbourne, Victoria, Australia, 2000.

[7] S.S.Dragomir. Superadditivity and monotonicity of some functionals associated with the Hermite-Hadamard Inequality foe convex functions

in linear space. The Rocky Mountain Journal of Mathematics , Vol. 42, No. 5 (2012), pp. 1447-1459

[8] M. Iqbal. Hadamard-type Inequalities with Applications. Department of Mathematics, University of Engineering and Technology, Lahore-Pakistan, 2014.

[9] M. Master. Inégalité d'Hermite-Hadamard pour Différents Types de Convexité. Université de Abdelhamid Ibn Badis de Mostaganem, Faculté des Sciences Exactes et d'Informatique, 2017.

[10] D.S. Mitrinović, J.E. Pečarić, A.M. Fink. Classical and New Inequalities in Analysis. Kluwer Academic Publisher, Dodrecht, 1993.

[11] C.P. Niculescu, L.E.Persson. Old and New on the Hermite-Hadamard Inequality, Vol. 29(2), 2003/2004, 663-685

[12] C.P. Niculescu, L.E. Persson. Convex Functions and Their Applications: A Contemporary Approach (CMS Books in Mathematics), Springer-Verlag, New York, 2005.

[13] M. A. Noor, K. I. Noor, M. U. Awan: Hermite-Hadamard inequalities for modified h-convex functions. Trans. J. Math. Mechanics. Vol. 6., 2014.

[14] Z. Pavić, M.A. Ardic: The most important inequalities of m-convex functions. Turkish Journal of Mathematics, 2017, Vol. 41, No.3.

[15] J. Pečarić, P.R. Beesack. On Jessen's inequality for convex functions II. Journal of mathematical analysis and applications 1,Vol. 118, Issue 1, 1986, Pages 125-144

[16] J.E. Pečarić, F. Proschan, Y.L. Tong. Convex functions, partial orderings and statistical applications. ACADEMIC PRESS, INC., 1992.

[17] Đ. Pečarić, J. Pečarić and J. Perić. Refinement of the discrete Lah-Ribarič Inequality and applications on Csiszar divergence, 2022.

[18] G.S. Yang, K.L. Tseng. Inequalities of Hadamard's Type for Lipschitzian Mappings. Journal of Mathematical Analysis and Applications Vol. 245, Issue 2, 2000, Pages 489-501