PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

KARLO BALIĆ

RAZREDNO GLASANJE

DIPLOMSKI RAD

Split, lipanj 2023.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

RAZREDNO GLASANJE

DIPLOMSKI RAD

Student:
Karlo Balić

Mentorica:
doc. dr. sc. Tanja Vojković

Split, lipanj 2023.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

RAZREDNO GLASANJE

Karlo Balić

Sažetak:

Cilj ovog rada je detaljno pojasniti nastavnu tehniku razrednog glasanja. Sve njene komponente su pojedinačno objašnjene. Niz čimenika utječe na kvalitetu same provedbe glasanja, kao što su vrednovanje, upotreba tehnologije, duljina trajanja i u koliko krugova se glasa. Nakon detaljne obrade svih čimbenika, zaključak je da je tehnika efikasna i primjenjiva na satu matematike, te da je povratna informacija učenika pozitivna. U radu je također predočeno nekoliko skupina pitanja iz različitih područja matematike koja se mogu primjeniti u nastavi.

Ključne riječi:

razredno glasanje, klikeri, obojani kartoni, jednokružno, dvokružno, vrednovanje, međurazredna diskusija

Podatci o radu:

43 stranice, 9 slika i 0 tablica, 3 literaturna navoda, jezik izvornika: hrvatski

Mentor(ica): *doc. dr. sc. Tanja Vojković*

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Aljoša Šubašić

Željka Zorić v.pred.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *01.06.2023*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

CLASSROOM VOTING

Karlo Balić

Abstract:

The aim of this paper is to explain in detail the teaching technique known as class voting. All its components are explained individually. A number of factors affect the quality of the voting itself, such as evaluation, use of technology, length of time and number of voting rounds. After a detailed analysis of all factors, the conclusion is that the technique is efficient and applicable in the mathematics class, and that the feedback from the students is positive. The paper also presents several groups of questions from different areas of mathematics that can be applied in class.

Key words:

classrom voting, discusion, clickers, to grade, two-cycle voting, one-cycle voting, colored index cards

Specifications:

43 pages, 9 pictures and 0 tables, 3 references, language: croatian

Mentor: *doc. dr. sc. Tanja Vojković*

Committee:

doc. dr. sc. Aljoša Šubašić

Željka Zorić v.pred.

This thesis was approved by a Thesis commettee on *01.06.2023*

Uvod

Razredno glasanje je tehnika koja se , iako nije usko vezana uz nastavu matematike, sve češće primjenjuje na nastavi. Prilikom izvedbe ove tehnike treba uzeti u obzir nekoliko čimbenika. Jedan o njih je i primjena tehnologije, koja nije nužna ali može pridonijeti efikasnosti tehnike.

Ova nastavna tehnika primjenjiva je u svim dijelovima sata, a može se i upotrijebiti u ispitne svrhe, iako je zamišljena kao tehnika formativnog vrednovanja. Bitno je također naglasiti da se može provesti jednokružno ili dvokružno. U ovom radu ću detaljnije pojasniti nastavnu tehniku razrednog glasanja. Pokazati ću kako je njena primjena ostvariva u nastavi matematike, te podijeliti dojmove i mišljenja učenika o provedbi same tehnike. U radu ću također izložiti zadatke iz pojedinih matematičkih područja, koji bi kao takvi, mogli biti direktno korišteni na nastavi. Cilj ovog rada je pojasniti provedbu same tehnike, te s primjerima pokazati jednostavnost i efikasnost ove tehnike kako bi potaknuli učitelji da je uključe u nastavni program.

Sadržaj

Poglavlje 1

Razredno glasanje

1.1 Što je razredno glasanje?

U potrazi za novim i boljim metodama i tehnikama podučavanja matematike, kao i ostalih predmeta, profesori su posezali za nečim novim i inovativnijim. Kao posljedica toga razvila se nova nastavna tehnika "razredno glasanje". Razredno glasanje je tehnika koja je u kratko vrijeme postigla odlične rezultate u aktiviranju učenika u rad, usvajanju novih gradiva kao i poticanju učenika na argumentiranu diskusiju. Tehnika se zasniva na tome da profesor postavi pitanje, te ponudi višestruki izbor odgovora, zatim učenicima ostavlja par minuta da razmisle i ponude odgovor koristeći predviđeni način glasanja. Po završetku glasanja, profesor propitkuje dane odgovore, te se vrši međurazredna diskusija. Ovim načinom omogućen je profesoru trenutni uvid u stanje u razredu, kao i spoznavanje miskoncepcija gradiva.

Istraživanja su pokazala da sve tehnike podučavanja, kao što je i razredno glasanje, koje uključuju aktivno sudjelovanje učenika u radu, dovode do značajnog poboljšanja u razumijevanju i usvajanju novih nastavnih gradiva nego što je slučaj kada je učenik pasivni sudionik nastave.

1.2 Početci razrednog glasanja i pojašnjenje tehnike

Odrediti početke razrednog glasanja je teško jer se ne može sa sigurnošću reći u kojem trenutku se počelo primjenjivati. Međutim, prva pisana knjiga o razrednom glasanju je ideja Erica Mazura na Harvard sveučilištu. On u svojoj knjizi "Peer Instructions" opisuje tehniku razrednog glasanja koje se zasniva na dvokružnom glasanju. Prvi krug glasanja je kada učenik sam dolazi do zaključka na postavljeno pitanje, a zatim drugi put nakon diskusije u grupi. Tehnika je izvrsno prihvaćena od samih početaka te se jako brzo proširila svim sferama S.T.E.M.-a. Brojne ankete i istraživanja dovele su do zaključaka da je tehnika jednako dobro prihvaćena i među učenicima kao i učiteljima. Također iz provedenih anketa zaključeno je da se korištenjem ove tehnike povećala efikasnost prenošenja i primanja znanja. Nadalje, zaključeno je da nema utjecaja koristi li se tehnologija ili ne kod glasanja, tj isti su rezultati uspješnosti primjenom klikera ili obojanih kartona. Zapisi i istrživanja nakon Mazurove knjige također govore o pozitivnim stajalištima samih učenika pri korištenju glasanja, ali zanimljivo je da je naglasak stavljen na poboljšanje radne atmosfere u razredu. Samim tim došlo se do zaključaka da je upotreba tehnike dovela do poboljšanja prisutnosti samih učenika na predavanjima. Tehnika ne zahtjeva nužnu evaluaciju, dapače pokazalo se nebitno i nepotrebno nagrađivati točne odnosno kažnjavati pogrešne odgovore. Najbitniji dio same tehnike je međurazredna diskusija koja se u svim novijim nastavnim tehnikama pokazuje kao jedan od ključnih segmenata efektivnijeg učenja.

Priprema same tehnike odnosno pitanja koja se postavljaju, kao i ponuđenih odgovora, jedan je od najbitnijih dijelova. Svako pitanje, kao i odgovor, mora biti pomno i strateški odabrano da učenike potakne na razmišljanje. Pokazalo se da teža pitanja daju najbolje rezulte, jer potiču kod učenika visoku kognitivnu funkciju za pronalaženje rješenja. Nakon postavljenog pitanja učitelj odabire koju vrstu glasanja će učenici koristiti, kao i hoće li imati diskusiju u manjim grupama prije odgovora. Kada je glasnje odrađeno, dolazi se do najbitnijeg dijela tehnike, a to je međurazredna diskusija. Ključnu ulogu igra učitelj koji bi trebao izbjegavati prebrzo davanje točnog odgovora, što će potaknuti učenike na što argumentiraniju diskusiju. Tokom same diskusije potrebno je da učitelj ostane nepristran, ali da pitanjima pokuša pronaći objašnjenja za učeničke odgovore. Jako bitno je da su svi odgovori prihvatljivi osim onih kojima je objašnjenje "pogađao/la sam". Učenicima koji nemaju vlastito mišljenje i bilo kakav argument bilo bi poželjno dozvoliti da se konzultiraju sa učenicima u svojoj blizini. Na taj način se možda potakne i njihovo razvijanje ideje o rješenju zadatka. Nakon same diskusije učitelj daje odgovor i sumira argumente učenika u smišljenu ideju kao rješenje zadatka.

Neke od najplodonosnijih diskusija pokazale su se one u kojima je jako mala grupa učenika koji su dali točan odgovor. Postavljeno pitanje očigledno je dovelo do iskazivanja svih miskoncepcija i nerazumjevanja trenutnog gradiva. Takva spoznaja omogućava učitelju trenutno djelovanje, te ponovno pojašnjavanje gradiva. Zanimljivo je kako učenici nakon ovakvih situacija ostanu začuđeni da je većina učenika u krivu, ali isto tako ih potakne da se potrude doznati gdje su pogriješili u razmišljanju. Samo prozivanje učenika koji obrazlažu svoj odgovor trebalo bi biti nasumičano i trebalo bi obratiti pozornost da nisu samo prozvani učenici koji su dali točan odgovor. U slučaju da se diskusija oduži ili ne poluči očekivani rezultat, učitelj preuzima glavnu ulogu postavljanjem pitanja kojima će pomoći učenicima u pronala-

sku točnog odgovora.
Jedan od najvećih izazova kod ove tehnike je vremenski okvir. Kod samog zadatka se najčešće ponude četri odgovora i diskusija će obuhvatiti većinu razreda. Sama činjenica da je većina razreda uključena je odlična, međutim koliko vremena omogućiti za diskusiju? Predugo vrijeme diskusije, bez obzira bila u dobrom ili lošem smjeru prema rješenju, izaziva frustracije kod učenika te oduzima predviđeno vrijeme za druge dijelove predavanja. Ako se odabere dobar zadatak, samo pitanje i diskusija mogu zamijeniti dijelove sata u kojima je učenik pasivni promatrač, a učitelj jedini aktvan u nastavi. Stoga ovisno o tome što želimo postići, s kojom je svrhom postavljeno pitanje učitelj po slobodnoj procjeni određuje vremenske okvire. Valja naglasiti i da samo glasanje ne bi trebalo predstavljati striktno utvrđivanje jesu li učenici usvojili neko gradivo ili ne, već jednu vrstu vježbe samih učenika u prezentiranju i iskazivanju njihovih ideja. Bitno je isto tako da, ukoliko učitelj zaključi da su učenici došli brzo i u velikoj većini do točnog zaključka, nastavi sa predavanjem ne zadržavajući se na ovom zadatku predugo.

1.3 Ključne odluke kod primjene razrednog glasanja

Sama provedba razrednog glasanja često se poistovjećuje sa upotrebom klikra (elektronski instrumenti za glasanje). Glasanje se može provesti na više načina jer većina edukacijskih ustanova nema ili nije u mogućnosti koristiti klikere. Zamjena klikera je jednostavna upotrebom obojenih kartona ili pokazivanjem broja prstiju koji učenici smatraju da je točan odgovor. Pokazalo se da su rezultati jednaki uz upotrebu klikera ili bez nje. Također, učitelj treba odlučiti hoće li koristiti jednokružno ili dvokružno glasanje, kao i hoće li vrednovati ili ne.

1.3.1 Upotreba klikera

Upotreba klikera je jednostavna i brza. Učenicima je zabavno, ali ono najbitnije što im omogućuje je anonimnost glasanja. Sama anonimnost glasanja dovodi nas do nezavisnosti odgovora među učenicima. Budući da učenici nisu u mogućnosti doznati što su kolege glasale navodi ih da sami, koristeći svoje ideje i razmišljanja, daju odgovor na pitanje. Kliker nam omogućava brzo prikupljanje podataka i trenutno iskazivanje rezultata pomoću dijagrama. Jedna od najvećih prednosti klikera je što učenicima omogućuje odgovoranja u bilo kojem trenutku nakon postavljenog pitanja, dok mi pomoću aplikacije možemo pratiti koliko je učenika odgovorilo. Upotreba klikera omogućava bržu i efikasniju provedbu ove tehnike, međutim ne i samu veću učinkovitost.

1.3.2 Glasanje bez klikera

Većina škola, pa i samih učitelja, nije u mogućnosti korististit klikere te se služi alternativnim alatima. Samo trenutno iskazivanje odgovora pomoću dijagrama također može jako omesti učenike pri samostalnom donošenju zaključaka. Valja napomenuti da su za rješavanje matematičkih problema učenici naviknuti koristiti olovku i papir, a ne strogo razmisljanje. Provođenje ove vrste glasanja može se odraditi pomoću obojanih kartončića ili prstiju na ruci. Provedba bi i dalje trebala zadržati anonimnost, a to možemo postići tako da učenicima kažemo da pripreme svoj odgovor, zatvore oči te na znak podignu svoj odgovor. Na taj način postići ćemo relativnu nezavisnost glasanja. Mana ne korištenja klikera je veći vremenski interval za prebrojavanje broja glasova za pojedini ponuđeni odgovor. Međutim, pojedina istraživanja su pokazala da učenici preferiraju glasanje bez klikera.

1.3.3 Dvokružno glasanje

Dvokružno glasanje zasniva se na ideji da učenik sam, bez ikakvih konzultacija ponudi odgovor na postavljeno pitanje, te se zatim prije ponovljenog glasanja konzultira s kolegom u klupi. Ovakav pristup onemogućuje učeniku da se osloni samo na razmišljanje svojeg kolege, a da on pri tome uopće ne razmisli o odgovoru. Svaki učenik prvotnim razmišljanjem o odgovoru, priprema se samostalno za glavni dio metode, a to je diskusija. Razmjena ideja među kolegama može mu samo pojačati sigurnost u prvotnu ideju ili ga potaknuti da ponovno razmisli o zadatku te promjeni odgovora. Ovakvim tipom glasanja, u samoj diskusiji će sudjelovati svi učenici s barem nekom argumentacijom. Također, diskusija između kolega ohrabrit će učenika i bolje ga pripremiti za međurazrednu diskusiju. Dvokružno glasanje zahtjeva više vremena nego jednokružno.

1.3.4 Jednokružno glasanje

Jednokružno glasanje zasniva se na ideji da učenik ponudi odgovor samo jednom. Nakon postavljenog pitanja učitelj omogućava učenicima određeno vrijeme za razmišljanje. Prije samog glasanja učeniku je dopuštena konzultacija i razmjena mišljenja u paru. Pokazalo se da postoje dvije skupine učenika. Jedna skupina su učenici koji prvo samostano razmisle o odgovoru, a tek potom podijele ideju s kolegom u klupi. Druga skupina su učenici koji odmah kreću u razmjenu ideja. Korištenjem ove ideje ne možemo utjecati hoće li učenici prvo razmisliti pa krenuti u razmjenu mišljenja ili će odmah krenuti u rad u paru. Nakon glasanja jako je bitno da pri učeničkom argumentiranju ne prihvatimo odgovor "tako mi je osoba u paru rekla". Ako učitelj procjeni da je učenik bez svog razmisljaša odmah krenuo na konzultacije s kolegom, može pitati teža i specifičnija pitanja da bi ustanovio čija je zasluga za ponuđeni odgovor. Jednokružno glasanje brže se odvija i oduzima manje vremena.

1.3.5 Glasanje sa vrednovanjem

Vrednovanje ne bi trebalo biti karakteristika razrednog glasanja. Učenici koji odbiju glasati ili prihvaćaju bez razmišljanja ideje drugih učenika, samo štete sebi. Kao i svaki segment nastave koji se ne vrednuje, učenici ne shvaćaju u dovoljnoj mjeri ozbiljno, jer ne postoji nikakva kazna ako aktivno ne sudjeluju. Često učenici koji su neaktivni destruktivno djeluju na ostatak razreda pri razrednoj diskusiji. Stoga povremeno ocjenjivanje učeničkih argumentacija može dovesti do veće aktivnosti učenika. Zbog svega navedenog učitelji koriste jedno od pitanja iz razrednog glasanja za provjeru znanja i ideja pojedinog učenika pri ispitivanju. Nagrađivanjem učestalo dobrih ideja i argumenata može se zainteresirati i ostale učenike te ih potaknuti na aktivniji rad.

1.3.6 Glasanje bez vrednovanja

Glavna i najbitnija karakteristika glasnja bez vrednovanja je ohrabrivanje učenika na sudjelovanje u radu. Na ovaj način učenik bez ikakvih mentalnih blokada od kazne može iskazati svoje ideje. Kako je prozivanje učenika na međurazrednu diskusiju nasumično, pokazalo se da će se učenici potruditi prikupiti argumentaciju za svoj odgovor jer su svjesni da će vjerojatno morati obrazložiti svoj odgovor i da pri tom nema vrednovanja. Kao i sve što se odvija u razredu, a da pri tome nema ocjenjivanja, utječe na pozitivniju atmosferu razreda. Većina istraživanja je pokazala da se veća učinkovitost postiže kada se učenici osjećaju da je sat primarno edukativni, a ne sat vrednovanja njihovog znanja.

1.4 Dobra pitanja za razredno glasanje

Većina istraživanja pokazuju da svi tipovi pitanja nisu jednako efikasni i efektivni pri provedbi razrednog glasanja. Zaključak je da na pitanja višestrukog izbora, odgovori trebaju biti što jasniji i po mogućnosti pisani normalnim a ne matematičkim jezikom kada god je to moguće. Svako pitanje trebalo bi biti osmišljeno tako da učenika navede na razmišljanje, pa tek onda da ponudi odgovor. Naime, ako je pitanje jednostavno, gubi se smisao razredne diskusije te samim tim i cijela ideja ove tehnike. Kako se iz svega ovog može zaključiti da pisanje pitanja nije jednostvano, u zadnje vrijeme se poseže za kolekcijama pitanja koja su dostupna profesorima za pojedina gradiva.

Primjer: Konvergira li red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n^2+2}$?

a) Da, ovaj red konvergira.

b) Ne, ovaj red divergira.

Odgovor: Točan odgovor je a). Cilj ovog zadatka je uočiti da je brojnik realan broj. Kada red pomnožimo bilo kakvom konstantom, ona ne utječe na konvergenciju reda, pa nam preostaje za provjeriti jeli red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2}$ konvergira. Nadalje, $\frac{1}{n^2+2} < \frac{1}{n^2}$, a od ranije je poznato da red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira. Primjenom poredbenog kriterija zaključi se da i zadani red konvergira.

1.5 Dojmovi učenika

Tokom godina provedene su brojne ankete među učenicima i studentima, te je zaključak kako imaju pozitivno misljenje o razrednom glasanju. Istraživanje provedeno na 513 učenika u 26 različitih razreda usredotočilo se na učinkovitost i prihvaćanje razrednog glasanja. Za što vjerodostojnije rezlutate korištena su razna polja matematike i razni uzrasti učenika. Zaključci su da čak 90% učenika ima pozitivno mišljenje o upotrebi razrednog glasanja, što po njihovom mišljenju čini nastavu matematike zabavnijom i dinamičnijom. Sama činjenica da ima više zabave na nastavi matematike ne znači nužno i više znanja kod učenika, ali se pokazalo da metoda djeluje ohrabrujuće i motivirajuće na učenike jer mogu svoja znanja i ideje prezentirati drugima.
Najveća podjela učenika u samom istraživanju je treba li učitelj ostati pri metodi da pojašnjava na ploči nastavu sa svim primjerima koje je pripremio ili treba koristiti razredno glasanja pri pojašnjavanju gradiva. Iako je podjeljeno mišljenje oko korištenja razrednog glasanja kod uvođenja novog gradiva, učenici su složni da ono treba biti zastupljeno u nastavi matematike. Kako se glasanje sastoji od diskusije u paru te nakon toga i međurazredne diskusije, pokazalo se da učenici nemaju problema s prezentiranjem svojih ideja, dapače, najizazovniji i najzabavniji dio im je međurazredna diskusija prije nego li se zna točno rješenje. Tek četvrtina učenika smatra da bi učitelj odmah trebao odgovoriti na pitanje te onda saslušati argumentaciju. Ovakvi rezultati dovode do zaključka da su čak i učenici spoznali bit i važnost diskusije te su s vremenom sve opušteniji.
Jedna od odlika koja ih najviše zadovoljava je činjenica da mogu pogriješiti i da će ih se saslušati, a pritom ne i kazniti već ukazati na miskoncepcije. Preferencije za kraće i dinamičnije diskusije nisu neočekivane, izrazili su se

također da ako prvih par učenika da točan odgovor sa dobrom argumentacijom da bi se jednostavno nastava trebala nastaviti a ne ulaziti u još polemike. Mišljenja oko trajanja diskusije su drugačija ako se pita učenike i učitelje. Učitelji smatraju da svaki učenik treba moći izraziti i obrazložiti svoju ideju, dok učenicima to pobuđuje osjećaje zbunjenosti i bespotrebnog gubljenja vremena. Nadalje, s učeničke strane se smatra da je razredno glasanje puno bolje i učinkovitije koristiti kao jednu vrstu sistematizacije gradiva, nego pri uvodu u novu temu. Odgovori na ovo pitanje razlikuju se ovisno o tome kojoj skupini učenici pripadaju. Odličnim učenicima pitanje postavljeno na početku cjeline predstavlja izazov mogu li oni doći do rješenja prije nego li učitelj objasni, dok lošijim učenicima to predstavlja gubitak vremena i odbojnost prema novom gradivu.

Važno je naglasiti da u ovom istaživanju nije sudjelovao prevelik uzorak učenika te da se rezultati mogu razlikovati, međutim dalo je odličan uvid u razmišljanje učenika. Na kraju se može zaključiti da su učenici jako zadovoljni uvođenjem ove tehnike kao standardni dio nastave, kao i da se treba dozirati njena upotreba.

Poglavlje 2

Primjeri pitanja

2.1 Redovi

Zadatak 1 *Koja od sljedećih tvrdnji je istinita za red* $16 + 8 + 4 + 2 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$*?*

a) Suma reda je manja od 32.

b) Suma reda je jednaka 32.

c) Suma reda je veća od 32.

d) Kako dodajemo beskonačno mogo članova od kojih je svaki od njih veći od 0 tada će i njihova suma težiti u ∞*.*

Zadatak 2 *Koja će tvrdnja biti istinita za sljedeći red* $12+4+\frac{4}{3}+\frac{4}{9}+\frac{4}{27}+\dots$*?*

a) Suma reda biti će manja od 18.

b) Suma reda će biti jednaka 18.

c) Suma reda biti će veća od 18.

d) Suma beskonačno mnogo elemenata je ∞.

Zadatak 3 *Koliko iznosi suma prvih 10 članova reda* $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$-$\frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \ldots$ *?*

a) 0.663

b) 0.664

c) 0.666

d) 0.6667

Zadatak 4 *Koliki je rezultat* $\sum_{j=1}^{5} 4j$ *?*

a) 15

b) 20

c) 40

d) 60

Zadatak 5 *Koja je tvrdanja istinita za red* $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \ldots$ *?*

a) Suma reda je jednaka 2.

b) Suma reda je između 2 i 3.

c) Suma reda je između 3 i 4.

d) Red divergira.

Zadatak 6 *Koji od sljedećih redova nije geometrijski?*

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3^n}$

b) $\sum_{n=5}^{\infty} 12^{2n+4}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} 9^{-n}$

d) $\sum_{n=1}^{\infty} 4^{\frac{1}{n}}$

Zadatak 7 *Koji od sljedećih redova divergira?*

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{8}{(-2)^n}$

b) $\sum_{n=5}^{\infty} 6^{3n+2}$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-4)^{-n}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2n}}{6^{3n}}$

Zadatak 8 *Suma reda* $\frac{15}{2} + \frac{45}{8} + \frac{135}{32} + \frac{405}{128} + \frac{1215}{512} + \ldots$*:*

a) *postoji.*

b) *ne postoji.*

Zadatak 9 *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}$*:*

a) *konvergira.*

b) *divergira.*

Zadatak 10 *Za koju vrijednost parametra* p *red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *konvergira?*

a) *Za bilo koju vrijednsot parametra* p *red konvergira.*

b) *Red konvergira ako i samo ako je* $p > 2$.

c) *Red konvergira ako i samo ako je* $p > 1$.

d) *Red divergira za bilo koju vrijednost parametra* p.

Zadatak 11 *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{2^n} + \frac{1}{n})$*:*

a) konvergira.

b) divergira.

Zadatak 12 *Je li red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{100}{n^2+2}$ *konvergira?*

a) Da.

b) Ne.

c) Nemoguće je odrediti.

Zadatak 13 *Ako je* $a_n > b_n$ *za svaki* n*, i* $\sum b_n$ *konvergira, tada :*

a) $\sum a_n$ *konvergira.*

b) $\sum a_n$ *divergira.*

c) iz zadanih informacija ne može se zaključiti je li red $\sum a_n$ *konvergira ili divergira.*

Zadatak 14 *Red* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{3^n}$*:*

a) konvergira.

b) divergira.

2.2 Funkcije

Zadatak 15 *Koja je domena funkcije f(x)=*$\frac{2+t}{\sqrt{t-7}}$ *?*

a) $D(f) > 7$

b) $D(f) \geq 7$

c) $D(f) = 7$

d) $D(f) \in \mathbf{R}$

Zadatak 16 *Neka je f(x)=*$\frac{1}{x+2}$*. Kolika je vrijednost x ako je f(x)=6?*

a) $\frac{1}{8}$

b) $\frac{13}{6}$

c) $\frac{-11}{6}$

d) Nista od navedenog.

Zadatak 17 *Neka je* $f(x) = ab^x$ *i* $b > 0$*. Tada je* $\frac{f(x+h)}{f(x)}$ *jednako:*

a) b^h

b) h

c) a

d) $b^{x+h} - b^x$

Zadatak 18 *Što od sljedećeg je pravilo funkcije čiji graf prolazi točkama* $(1,2)$ *i* $(3,18)$*:*

a) $f(t) = 2 \cdot 9^t$

b) $f(t) = \frac{2}{9} \cdot 9^t$

c) $f(t) = \frac{2}{3} \cdot 3^t$

d) $f(t) = 2 \cdot 3^t$

Zadatak 19 *Odnos između geografske širine* L *grada na sjevernoj polutki i prosječne temperature* T*, dan je sa* $T = -0.68L + 89.5$*. To znači:*

a) Za koji se poveća L, temperatura će se povećati za 0.68.

b) Temperaturea na ekvatoru će biti -0.68.

c) Za koji se poveća L, temperatura će se povećati za 89.5.

d) Za koji se poveća L, temperatura će se smanjiti za 0.68.

Zadatak 20 *Za koje vrijednosti parametra a je pravac opisan s* $y - (-1) = a(x - 2)$ *paralelan pravcu* $3x - 2y + 6 = 0$*?*

a) $a = 2$

b) $a = \frac{2}{3}$

c) $a = \frac{3}{2}$

d) Postoji više od jedne moguće vrijednosti parametra a.

Zadatak 21 *Koja od linearnih funkcija prolazi točkama* $(1, 1)$ *i* $(2, 4)$*?*

a) $y - 1 = 3(x - 1)$

b) $y - 4 = 3(x - 1)$

c) $y - 1 = 3x - 1$

d) $y - 4 = 3x - 2$

Zadatak 22 *U kojem su odnosu pravci opisani jednadžbama*

$$2x + 4y = 12$$

$$2x - y = 4$$

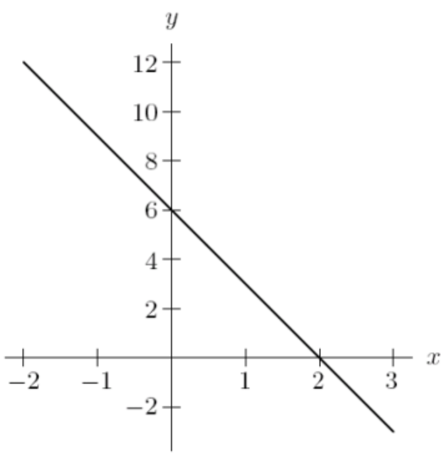
a) Paralelni su.

b) Okomiti su.

c) Nijedno od a) i b).

d) Ne možemo odrediti.

Zadatak 23 *Koja od navedenih funkcija predstavlja graf funkcije na slici?*



a) $y = 6x + 6$

b) $y = -3x + 6$

c) $y = -3x + 2$

d) $y = 6x - 2$

Zadatak 24 *Minimalna vrijednost funkcije* $f(x) = 2(x+3)^2 + 7$ *je:*

a) 2

b) 3

c) -3

d) 7

Zadatak 25 *Koja je najmanja vrijednost funkcije* $f(x) = 2x^2 - 8x + 11$*?*

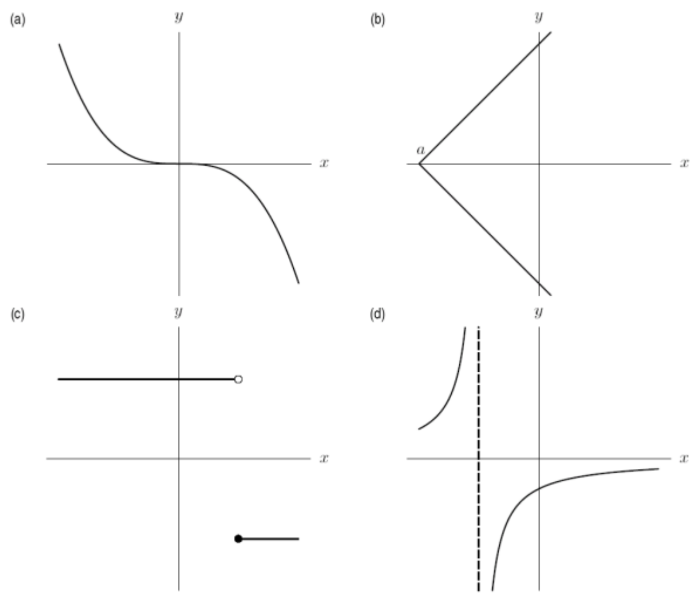
a) 11

b) 3

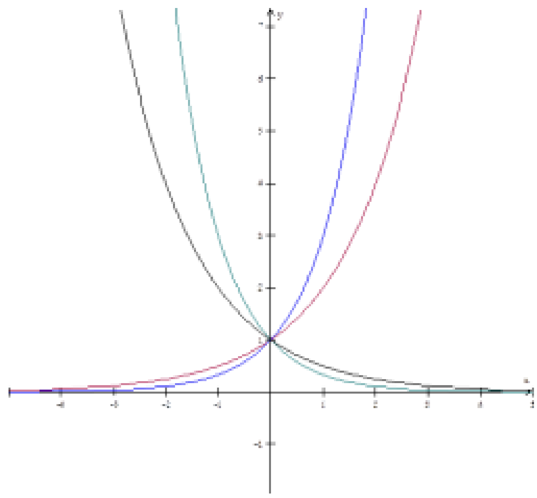
c) 2

d) -1

Zadatak 26 *Koji od grafova ne predstvalja* y *kao funkciju varijable* x*?*



Zadatak 27 *Koji od grafova na slici prikazuje funkciju s najvećom bazom?*



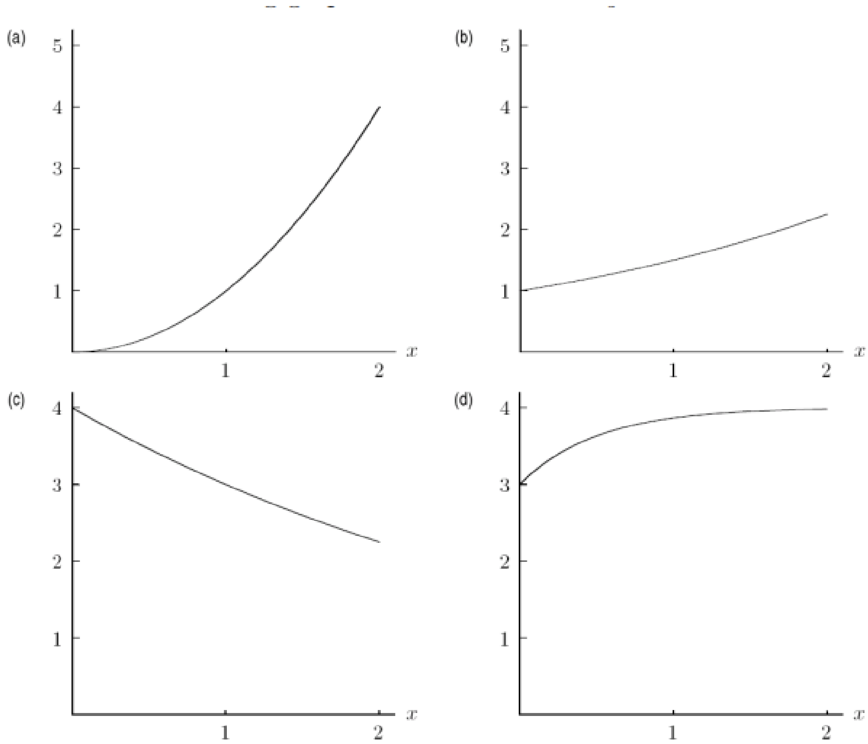
a) crni

b) zeleni

c) plavi

d) crveni

Zadatak 28 *Koji od sljedećih grafova predstavlja funkciju* $y = ab^x, b > 0$*?*



Zadatak 29 *Tijekom 1988. inflacija u Nikaragvi je prosječno iznosila* 1.3% *po danu. Koja od sljedećih funkcija predstavlja tu inflaciju, ako je* t *broj dana?*

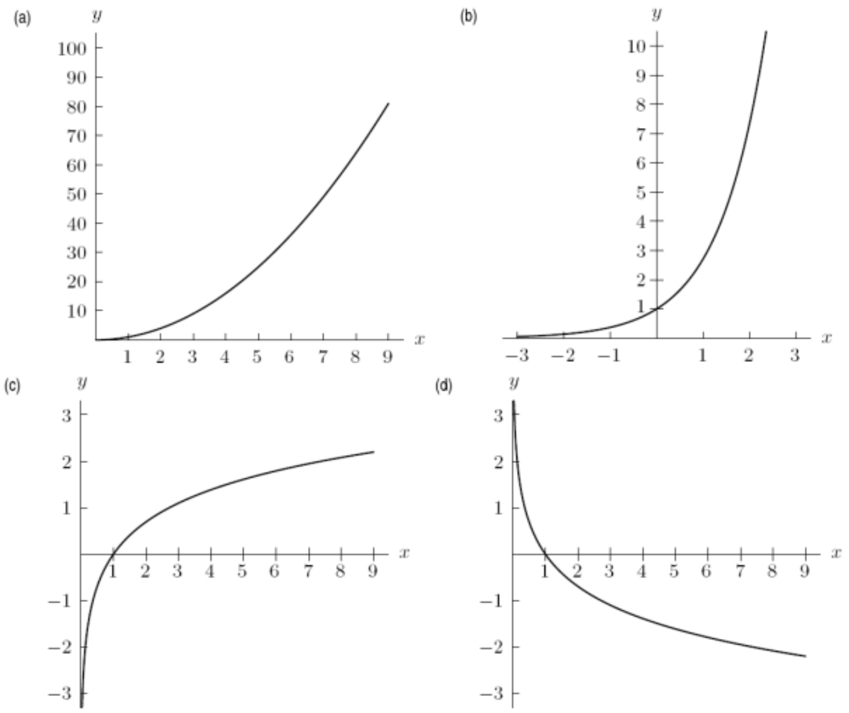
a) $I = I_0 e^{0.013t}$

b) $I = I_0 (0.013)^t$

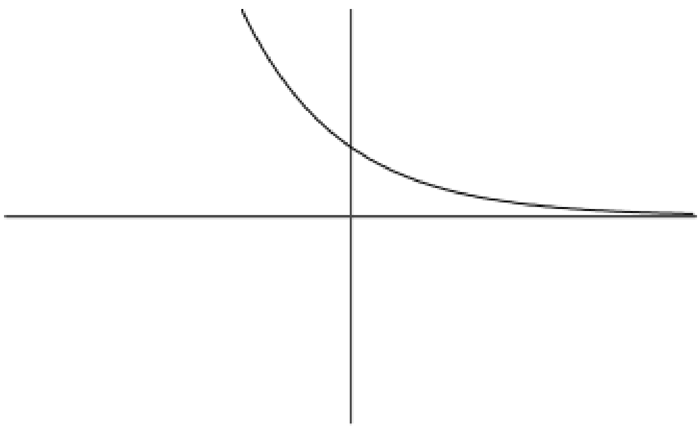
c) $I = I_0 (0.013) t$

d) $I = I_0 (1.3)^t$

Zadatak 30 *Koji od sljedećih grafova predstavlja funkciju* $y = \ln x$*?*



Zadatak 31 *Koja od sljedećih funkcija predstavlja sljedeći graf?*



a) $y = b^x, \quad b > 1$

b) $y = b^x, \quad 0 < b < 1$

c) $y = \log_b x, \quad b > 1$

d) $y = \log_b x, \quad 0 < b < 1$

Zadatak 32 *Kojoj od sljedećih funkcija je vertikalna asimptota* $x = 3$*?*

a) $y = \ln \frac{x}{3}$

b) $y = \ln (x - 3)$

c) $y = \ln (x + 3)$

d) $y = 3 \ln x$

Zadatak 33 *Ako je* $\log_{10}(x - a) = n$*, onda je* x *jednak:*

a) 10^{a+n}

b) $a + 10^n$

c) $n + 10^a$

d) $n + a^1 0$

Zadatak 34 *Ako je* $8y = 3\mathbf{e}^x$*, onda je*

a) $x = \ln 8 + \ln 3 + \ln y$

b) $x = \ln 3 - \ln 8 + \ln y$

c) $x = \ln 8 + \ln y - \ln 3$

d) $x = \ln 3 - \ln 8 - \ln y$

Zadatak 35 $\log(\frac{a^4b^7}{c^5}) =$

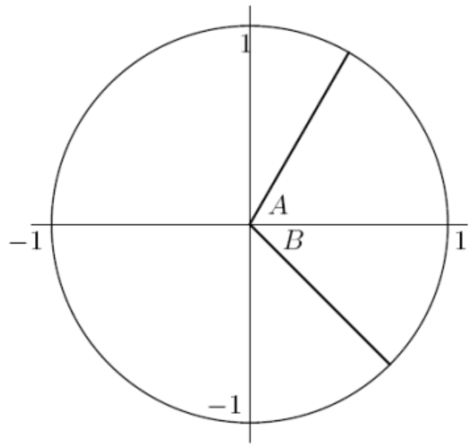
a) $\log a^4 + \log b^7 + \log c^5$

b) $4\log a + 7\log b - 5\log c$

c) $28\log ab - 5\log c$

d) $\frac{28}{5}(\log a + \log b - logc)$

Zadatak 36 *Koja tvrdnja označava približnu vrijednost za* sin *i* cos *kuta A i B na brojevnoj kružnici ispod?*



a) $\sin A \approx 0.5$, $\cos A \approx 0.85$; $\sin B \approx -0.7$, $\cos B \approx 0.7$

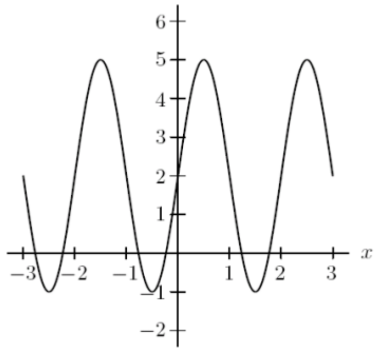
b) $\sin A \approx 0.85$, $\cos A \approx 0.5$; $\sin B \approx -0.7$, $\cos B \approx 0.7$

c) $\sin A \approx 0.5$, $\cos A \approx 0.85$; $\sin B \approx 0.7$, $\cos B \approx 0.7$

d) $\sin A \approx 0.85$, $\cos A \approx 0.5$; $\sin B \approx 0.7$, $\cos B \approx 0.7$

Zadatak 37 *Koliki su amplituda i period zadane funkcije?*

a) amplituda=2, period=2



b) *amplituda*=2*, period*=3

c) *amplituda*=2*, period*=$\frac{1}{2}$

d) *amplituda*=3*, period*=2

Zadatak 38 *Funkcija* $f(x) = 3\sin(2x+4)$ *se dobije pomakom funkcije* $f(x) = 3\sin(2x)$*:*

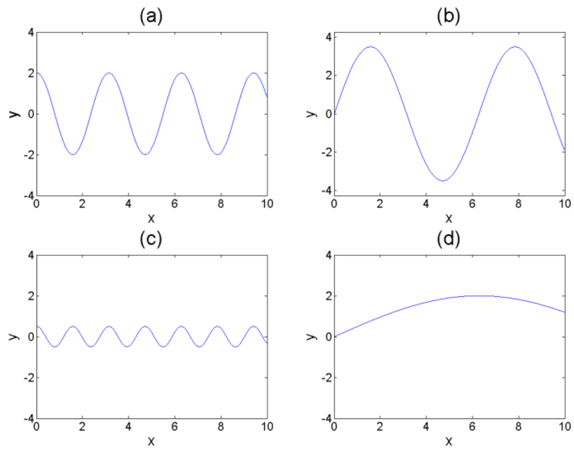
a) *u lijevo za* 4

b) *u desno za* 4

c) *u desno za* 2

d) *u lijevo za* 8

Zadatak 39 *Svi grafovi funkcija odgovaraju funkciji oblika* $f(x) = A\sin(Bx+C)$*. Koja funkcija ima najveću vrijednost parametra B?*



Zadatak 40 *Koja od sljedećih funkcija je parna funkcije?*

a) $f(x) = \sin x$

b) $f(x) = \cos x$

c) $f(x) = \tan x$

2.3 Polinomi

Zadatak 41 *Kojeg je stupnja polinom* $y = 3x^2 + 2x^7 + 10$*?*

a) 2

b) 3

c) 7

d) 10

Zadatak 42 *Koji je vodeći koeficijent polinoma* $y = 3x^2 + 2x^7 + 10$ *?*

a) 2

b) 3

c) 7

d) 10

Zadatak 43 *Pojednostavni izraz* $2x^2y - 3xy^2 + 7xy^2 + 8x^2y$*:*

a) $14x^2y^2$

b) $9x^2y$+$5xy^2$

c) $-x^2y$+$15xy^2$

d) $10x^2y$+$4xy^2$

Zadatak 44 *Pojednostavni izraz* $(3x^4 - x^2 + 7) - (-9x^2 + 1)$*:*

a) $3x^4 - x^2 + 7$+$9x^2 - 1$

b) $3x^4 + 8x^2 + 6$

c) $3x^4 - 8x^2 + 6$

d) $3x^4 - 10x^2 + 8$

Zadatak 45 *Primjenom pravila za računske operacije pojednostavni izraz* $(9x^2 + 8x - 2) - [(-6x^3 + 3x^2 + 7) + (-2x + 15)]$*:*

a) $-6x^3 + 6x^2 + 6x + 20$

b) $6x^3 + 6x^2 + 10x - 24$

c) $6x^3 + 12x^2 + 6x + 20$

d) $-6x^3 + 12x^2 + 10x + 20$

Zadatak 46 *Neka* $P(x) = -x^2 + 17x - 30$ *predstavlja profit u nekoj valuti. Koliko iznosi P(5)?*

a) -30

b) 12

c) 30

d) 80

Zadatak 47 *Pojednostavni izraz* $x(4x - 3) + 6(x^2 + 5x)$*:*

a) $10x^2 + 27x$

b) $7x^2 + 30$

c) $37x^2$

d) $10x^2 + 30x - 3$

Zadatak 48 *Pojednostavni do kraja* $(2x + 5)(3x + 2)$*:*

a) $6x^2 + 10$

b) $6x^2 + 19x + 10$

c) $6x^2 + 17x + 10$

d) $6x^2 + 5x + 10$

Zadatak 49 *Izraz* $(2x - 7)^2$ *odgovara izrazu :*

a) $4x^2 - 49$

b) $4x^2 - 14x - 49$

c) $4x^2 - 14x + 49$

d) $4x^2 - 28x + 49$

Zadatak 50 *Pojednostavni* $(3x - 4)(3x + 4)$*:*

a) $9x^2 - 16$

b) $9x^2 + 16$

c) $9x^2 - 24x + 16$

d) $9x^2 + 24x - 16$

Zadatak 51 *Izluči najveći zajednički faktor* $16x^3y^2 - 24x^4y + 32x^2y$*:*

a) $4xy(4x^2y - 6x^3 + 8x)$

b) $8x^2y(2xy - 3x^2 + 4)$

c) $16x^3y^2(1 - 2x + 2y)$

d) $8xy^2(2x - 3x^2 + 4y)$

Zadatak 52 *Faktorizitaj* $x^2 + 10x - 11$*:*

a) $(x + 1)(x - 11)$

b) $(x + 1)(x + 11)$

c) $(x - 1)(x - 11)$

d) $(x - 1)(x + 11)$

2.4 Skupovi brojeva

Zadatak 53 *Ako je a cijeli broj onda je:*

a) $-a > 0$

b) $a = -a$

c) $-a \leq 0$

d) *-a cijeli broj*

Zadatak 54 *Što je od sljedećeg istina tvrdnja?*

a) *Ne postoji najveći nenegativni cijeli broj*

b) *Postoji najmanji pozitivni realni broj*

c) *Ne postoji najveći negativni cijeli broj*

d) *Ne postoji najmnji nenegativni cijeli broj*

Zadatak 55 *Što je od sljedećeg istinita tvrdnja?*

a) *Razlika iracionalnog i racionalnog broja je uvijek iracionalan broj*

b) *Zbroj racionalnog i iracionalnog broja može biti racionalan broj*

c) *Razlika iracionalnog i racionalnog broja je uvijek racionalan broj*

Zadatak 56 *Što je od sljedećeg istinita tvrdnja?*

a) *Skup iracionalnih brojeva je zatvoren na množenje*

b) *Skup iracionalnih brojeva je zatvoren na zbrajanje*

c) *Skup iracionalnih brojeva je polje uz zbrajanje i množenje* *d) Ništa od navedenog*

Zadatak 57 *U razvoju $(a+b)^n = \cdots + ka^5b^x + \ldots$ vrijednost parametra x je?*

a) 5

b) n

c) $n-5$

d) ne možemo zaključiti

Zadatak 58 *U razvoju $(a+b)^n = \ldots + ka^5b^x + \ldots$ vrijednost parametra k je?*

a) n

b) $\binom{n}{5}$

c) ne možemo zaključiti

Zadatak 59 *Neka je $a = 393939\ldots$ i $b = 677667766677\ldots$ Njihova suma a+b je :*

a) nije realan broj

b) nije racionaln broj

c) nije iracionalan broj

d) nije definirana

Zadatak 60 *Neka je z kompleksan broj. Što je od sljedećeg istina?*

a) $z + \overline{z}$ *je uvijek realan broj.*

b) $z \cdot \overline{z}$ *je uvijek realan broj.*

c) $\overline{z}^2$ *nikad nije realan broj.*

Zadatak 61 *Što je od sljedećeg istina?*

a) $\frac{1}{\mathbf{i}} = \mathbf{i}$

b) $\frac{1}{\mathbf{i}} = \mathbf{i}^2$

c) $\frac{1}{\mathbf{i}} = \mathbf{i}^3$

d) $\frac{1}{\mathbf{i}} = \mathbf{i}^4$

Zadatak 62 *Svi brojevi koji imaju isti modul kao broj* $z = 1 + i\sqrt{3}$ *nalaze se:*

a) *u I. kvadrantu.*

b) *na imaginarnoj osi.*

c) *na realnoj osi.*

d) *na kružnici.*

Zadatak 63 *Svi kompleksni brojevi* z *za koje je* $\mathbf{Im}z < \mathbf{Re}z$ *leže:*

a) *ne možemo odrediti jer* $\mathbf{C}$ *nije uređen.*

b) *iznad osi* x.

c) *u gornjoj poluravnini određenoj pravcem* $y = x$.

d) *u donjoj poluravnini određenoj pravcem* $y = x$.

Zadatak 64 *Svi kompleksni brojevi za koje je* $|\mathbf{Im}z| > 2$ *leže:*

a) *na osi* y.

b) iznad osi x.

c) izvan kruga $x^2 + y^2 \leq 4$

d) lijevo od pravca $x = 2$.

Zadatak 65 *Neka je* $z = 3(\cos\frac{2\pi}{3} + \mathbf{i}\sin\frac{2\pi}{3})$. *Što je od sljedećih tvrdnji istina?*

a) Modul broja z^2 *isti je kao modul broja* z.

b) Argument broja z^3 *je* 2π .

c) Broj zi se nalazi u IV. kvadrantu.

d) Jednadžba $w^2 = z$ *ima 3 rješenja.*

2.5 Rješenja zadataka

2.5.1 Redovi

1-b; 2-b; 3-c; 4-d; 5-d; 6-d; 7-b; 8-a; 9-b; 10-c; 11-b; 12-a; 13-c; 14-a

2.5.2 Funkcije

15-a; 16-c; 17-a; 18-c; 19-d; 20-c; 21-a; 22-b; 23-b; 24-d; 25-b;26-b; 27-c; 28-b; 29-b; 30-c; 31-b; 32-b; 33-b; 34-c; 35-b; 36-a; 37-d; 38-a; 39-c; 40-b

2.5.3 Polinomi

41-c; 42-a; 43-d; 44-b; 45-b; 46-c; 47-a; 48-b; 49-c; 50-a; 51-b; 52-d

2.5.4 Skupovi brojeva

53-d; 54-a; 55-a; 56-d; 57-c; 58-c; 59-d; 60-b; 61-c; 62-d; 63-d; 64-b; 65-b

Literatura

[1] http://mathquest.carroll.edu/libraries/SER.teacher1.edition.pdf

[2] http://mathquest.carroll.edu/

[3] Cline, K. S., Zullo, H. (Eds.). (2011). Teaching Mathematics with Classroom Voting: With and Without Clickers (No. 79). MAA.