

# Međudjelovanje dvaju tijela u različitim planetarnim sustavima

---

**Kapitanović, Vedran**

**Undergraduate thesis / Završni rad**

**2022**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:281262>

*Rights / Prava:* [Attribution 4.0 International](#)/[Imenovanje 4.0 međunarodna](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2024-09-19**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet

**MEĐUDJELOVANJE DVAJU TIJELA U  
RAZLIČITIM PLANETARNIM SUSTAVIMA**

Završni rad

Vedran Kapitanović

Split, rujan 2022.

## Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet  
Odjel za fiziku  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

### MEĐUDJELOVANJE DVAJU TIJELA U RAZLIČITIM PLANETARNIM SUSTAVIMA

Vedran Kapitanović

Sveučilišni preddiplomski studij Fizika

#### Sažetak:

Numerički izračun i simulacija gibanja planeta u različitim planetarnim sustavima zahtijevaju poznavanje početnih uvjeta gibanja u nekom trenutku, što je zahtjev jednadžbi gibanja. Katalozi planetarnih sustava pružaju informacije o cjelokupnoj putanji gibanja planeta, ali ne i o početnim uvjetima u bilo kojem trenutku. U ovom radu ideja je iskoristiti određene teorijske činjenice o putanjama, kao i aproksimacije istih, kako bi se izvukli što točniji početni uvjeti za neki trenutak i tako pokrenula simulacija. To se postiglo dvjema metodama. Prva metoda, koja je vrlo jednostavna, pokazala se dovoljno točnom samo u slučajevima kad je putanja približno kružnica. Druga metoda, koja aproksimira putanju elipsom i koristi više teorijskog znanja o putanjama, pokazala se mnogo točnijom i mnogo prikladnijom za širu uporabu.

**Ključne riječi:** simulacija, planet, sustav, međudjelovanje

**Rad sadrži:** 22 stranice, 20 slika, 15 tablica, 10 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku.

**Mentor:** doc. dr. sc. Martina Požar

**Ocjenjivači:** doc. dr. sc. Martina Požar,  
izv. prof. dr. sc. Bernarda Lovrinčević,  
Josipa Šćurla, mag. phys.

**Rad prihvaćen:** 16. 9. 2022.

Rad je pohranjen u Knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

<b>Basic documentation card</b>
---------------------------------

University of Split  
Faculty of Science  
Department of Physics  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Bachelor thesis

## **THE INTERACTION OF TWO BODIES IN DIFFERENT PLANETARY SYSTEMS**

Vedran Kapitanović

University undergraduate study programme Physics

### **Abstract:**

Numerical calculation and simulation of planetary motion in different planetary systems require knowledge of the initial conditions in some instant of time, which is a requirement of equations of motion. Catalogs of planetary systems provides information on the entire trajectories but not on the initial conditions at any instant of time. In this thesis, the idea is to use some theoretical facts about trajectories as well as their approximations, in order to derive initial conditions at some instant of time as accurate as possible and thus start the simulation. This was achieved by two methods. The first method, which is very simple, proved to be sufficiently accurate only in cases where the trajectory is approximately circular. The second method, which approximates the trajectory by an ellipse and uses more theoretical knowledge about trajectories, proved to be much more accurate and much more suitable for wider use.

**Keywords:** simulation, planet, system, interaction

**Thesis consists of:** 22 pages, 20 figures, 15 tables, 10 references. Original language: Croatian.

**Supervisor:** Assist. Prof. Dr. Martina Požar

**Reviewers:** Assist. Prof. Dr. Martina Požar,  
Asoc. Prof. Dr. Bernarda Lovrinčević,  
Josipa Šćurla, mag. phys.

**Thesis accepted:** September 16, 2022

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Uvod</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Teorija i metode</b>	<b>2</b>
2.1	Teorijski uvod	2
2.1.1	Problem dvaju tijela	2
2.1.2	Centralne sile	3
2.1.3	Keplerov problem	5
2.2	Metode	6
<b>3</b>	<b>Rezultati</b>	<b>8</b>
3.1	Primjeri planetarnih sustava	8
3.1.1	HD 183579	8
3.1.2	HD 132406	10
3.1.3	LHS 1610	11
3.1.4	KOI-415	13
3.1.5	KOI-1257	15
3.1.6	TOI-4562	16
3.1.7	TOI-3362	18
3.2	Objedinjenje rezultata	19
<b>4</b>	<b>Zaključak</b>	<b>21</b>

# 1 Uvod

Naš planet Zemlja jedan je od mnogih planeta u svemiru [1]. Planeti i njihovi prirodni sateliti, zajedno sa asteroidima i kometima često se gibaju oko zvijezda. Naša zvijezda Sunce jedna je od stotina milijardi zvijezda koje se gibaju oko središta naše galaksije Mliječni put. Nadalje, galaksija Mliječni put jedna je od milijardi galaksija u vidljivom svemiru. Za sve galaksije se vjeruje da posjeduju supermasivne crne rupe [2] (najmasivnije objekte u svemiru) u svojim središtima oko kojih se gibaju sve zvijezde, kao i ostala tijela.

Egzoplaneti [3] su svi oni planeti koji se nalaze izvan Sunčevog sustava, odnosno nisu vezani za našu zvijezdu Sunce. Takvi planeti se najčešće gibaju po putanjama oko zvijezda tvoreći planetarne sustave. Postoje i slobodni planeti koji se gibaju sami oko centra galaksije.

Sva spomenuta tijela u svemiru međudjeluju gravitacijskom silom [4]. Gravitacijska sila je privlačna sila koja opada s kvadratom udaljenosti, a proporcionalna je masama tijela. Ona je uzrok grupiranju tijela u svemiru.

Ovaj rad uključuje numerički izračun i simulaciju gibanja planeta koji su gravitacijski vezani za neku zvijezdu. Svaki numerički izračun gibanja između ostaloga zatjeva početne uvjete gibanja svih tijela uključenih u izračun. Katalozi planetarnih sustava pružaju određene mjerene parametre putanje tijela, ali ne i trenutne položaje i brzine u jednom određenom trenutku, u kojem bi mogli početi simulirati gibanje. Stoga je potrebno indirektno doći do početnih uvjeta koristeći zadane parametre putanje. S obzirom na to da mjerene vrijednosti podrazumijevaju određenu točnost mjerenja kao i na to da način dobivanja početnih uvjeta podrazumijeva određene aproksimacije putanja tijela, simulacija će imati određenu točnost.

Cilj mi je provjeriti točnost simulacije [5], napravljene u programskom jeziku Python, za slučaj različitih sustava koji se sastoje od jedne zvijezde i jednog planeta. Koristit ću dvije metode, odnosno dvije aproksimacije putanja tijela pri izračunu početnih uvjeta. Provjerit ću je li druga, naprednija metoda dala bolje rezultate.

U prvoj metodi aproksimirao sam putanju tijela kružnicom, te sam iz poznatih mjerenih vrijednosti perioda i udaljenosti planeta od zvijezde izračunao početne uvjete. U drugoj metodi pretpostavio sam realnu eliptičnu putanju, te iz poznatih vrijednosti oblika i veličine elipse izračunao početne uvjete, uz aproksimaciju da je zvijezda u žarištu elipse. Kao mjeru točnosti promatrao sam relativnu pogrešku između numerički izračunatog ophodnog perioda i mjerene vrijednosti perioda iz kataloga, kao i kvalitativnu usporedbu oblika elipse s očekivanim oblikom pomoću grafičkog prikaza simuliranog gibanja.

## 2 Teorija i metode

### 2.1 Teorijski uvod

#### 2.1.1 Problem dvaju tijela

U klasičnoj mehanici, problem dvaju tijela [4] odnosi se na rješavanje jednadžbi gibanja za dvije točkaste mase koje međudjeluju. Cilj je pronaći vektore položaja  $\vec{x}_1(t)$  i  $\vec{x}_2(t)$  kao funkcije vremena. Pripadne jednadžbe gibanja su tada:

$$\mathbf{F}_{12}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = m_1 \ddot{\mathbf{x}}_1 \quad (2.1)$$

$$\mathbf{F}_{21}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = m_2 \ddot{\mathbf{x}}_2, \quad (2.2)$$

gdje je  $\vec{F}_{12}$  sila koju vrši masa  $m_2$  na masu  $m_1$ , a  $\vec{F}_{21}$  sila koju vrši masa  $m_1$  na masu  $m_2$ . Za mnoge vrste međudjelovanja problem je moguće rastaviti na dva problema gibanja jednog tijela. Zbog jednostavnosti, najbolji je odabir prelazak na koordinate vektora centra mase  $\vec{R}$  i međusobne udaljenosti dvaju tijela  $\vec{r}$ , koje su definirane kao:

$$\mathbf{R} = \frac{m_1 \mathbf{x}_1 + m_2 \mathbf{x}_2}{m_1 + m_2} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2. \quad (2.4)$$

Kombinirajući jednadžbe (2.1) i (2.2) mogu se dobiti jednadžbe gibanja za koordinate  $\vec{R}$  i  $\vec{r}$ :

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad (2.5)$$

$$\ddot{\mathbf{r}} = \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) \mathbf{F}_{12}, \quad (2.6)$$

gdje je uzeto u obzir da su sile  $\vec{F}_{12}$  i  $\vec{F}_{21}$  jednakih iznosa i suprotnih smjerova, sukladno trećem Newtonovom zakonu [4]. Iz jednadžbe (2.5) je jasno da je brzina centra mase konstantna pa cjelokupno gibanje možemo promatrati iz inercijalnog sustava centra mase, što je najjednostavniji odabir. Drugi problem, odnosno jednadžba (2.6) ključ je cjelokupnog problema. Ako se definira reducirana masa kao:

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}, \quad (2.7)$$

jednadžba (2.6) se svodi na:

$$\mu \ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(\mathbf{r}), \quad (2.8)$$

gdje je  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  zapravo sila  $\mathbf{F}_{12}$ . Iz jednadžbe (2.8) je vidljivo da se problem sveo na ekvivalentan problem gibanja jednog tijela reducirane mase  $\mu$  pod utjecajem iste sile  $\mathbf{F}$ . Koordinata položaja tog tijela odgovara vektoru udaljenosti dvaju tijela  $\mathbf{r}$ . Konačno rješenje jednadžbe (2.8) ovisi o

vrsti sile međudjelovanja. Kada se do njega dođe koordinate dvaju tijela su dane s:

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{R}(t) + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t) \quad (2.9)$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{R}(t) - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}(t) \quad (2.10)$$

Ako se odabere inercijalni sustav u kojem centar mase miruje u ishodištu, formule (2.9) i (2.10) kažu da vektori položaja leže uvijek na istom pravcu i suprotne su orijentacije. Također, cijelo gibanje se odvija na jednoj plohi zbog očuvanja angularnog momenta [4].

### 2.1.2 Centralne sile

Ako je sila koja djeluje između dvaju tijela usmjerena duž njihove spojnice onda je zovemo centralnom silom [4]. Tada je možemo zapisati kao:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = f(r)\mathbf{r}_0, \quad (2.11)$$

gdje je  $\mathbf{r}_0$  jedinični vektor koji je usmjeren od jednog tijela prema drugom.

Promatra li se samo ponašanje koordinate udaljenosti od ishodišta  $r$ , efektivni potencijal [4] za taj jednodimenzionalni problem dan je s:

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{L^2}{2\mu r^2}, \quad (2.12)$$

gdje je  $L$  angularni moment. Član  $\frac{L^2}{2\mu r^2}$  se zove centrifugalni član. Očuvanje energije tada glasi:

$$\frac{1}{2}\mu\dot{r}^2 + U_{eff}(r) = E. \quad (2.13)$$

Iz prethodne jednadžbe je vidljivo da se tijelo može gibati samo u dijelu prostora za koji vrijedi  $U_{eff}(r) \leq E$ .

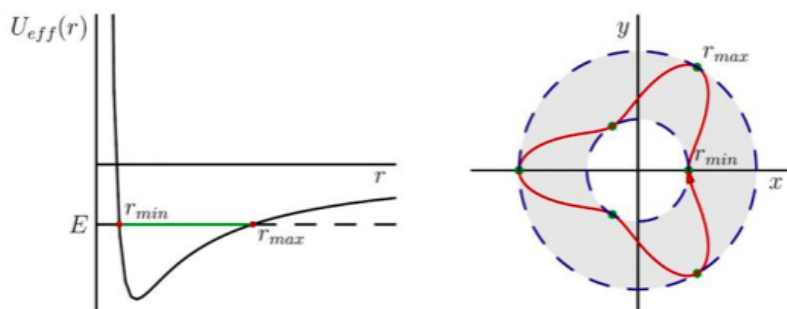
U polju centralne sile razlikuju se omeđene i neomeđene orbite, te pad u centra polja [4]. Omeđene su one orbite kod kojih se udaljenost od središta mijenja između dvije točke obrata za koje vrijedi  $U_{eff}(r) = E$ . Točka u kojoj tijelo dolazi najbliže centru zove se pericentar, a točka u kojoj je tijelo najdalje apocentar. Primjer efektivnog potencijala kod kojeg je gibanje omeđeno ako je energija negativna dan je na slici 1. Omeđene orbite mogu biti zatvorene ili otvorene. Kod zatvorenih orbita putanja se zatvara nakon određenog broja ophodnih perioda kao na slici 2, dok se kod otvorenih orbita tijelo nikad ne vrati u istu točku, kao na slici 3.

Kod neomeđenih orbita tijelo se beskonačno udaljava od centra sile.

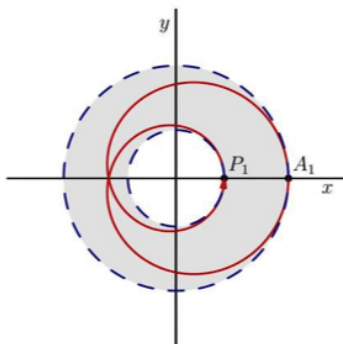
Pad u centar polja se događa ako potencijal u blizini ishodišta pada brže nego  $\frac{1}{r^2}$ , odnosno



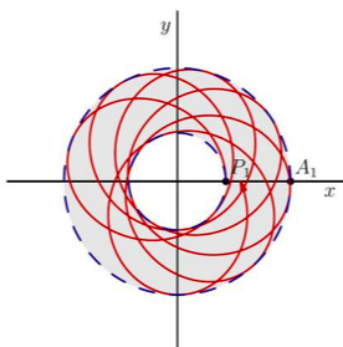
sila je dovoljno privlačna da nadvlada centrifugalnu barijeru iz jednadžbe (2.12). Tada tijelo pada u centar sile po spiralnoj putanji. Drugi način da tijelo padne u centar sile je odsutnost centrifugalne barijere, što se postiže za  $L = 0$ . Tada tijelo pada po pravcu.



**Slika 1:** *Primjer efektivnog potencijala kod kojeg je gibanje omeđeno ako je energija negativna (lijevo) i primjer gibanja u tom potencijalu uz negativnu energiju (desno). (slika preuzeta s [6])*



**Slika 2:** *Primjer zatvorene omeđene orbite. Orbita se zatvara nakon 2 ophodna perioda. (slika preuzeta s [6])*



**Slika 3:** *Primjer otvorene omeđene orbite. Tijelo nikad ne prolazi kroz istu točku, orbita se nikad ne zatvara. (slika preuzeta s [6])*

### 2.1.3 Keplerov problem

Najpoznatiji primjer problema dva tijela je Keplerov problem [4]. U njemu se tijela privlače gravitacijskom silom. Gravitacijska sila je primjer privlačne sile koja opada s kvadratom udaljenosti. Njezin oblik je:

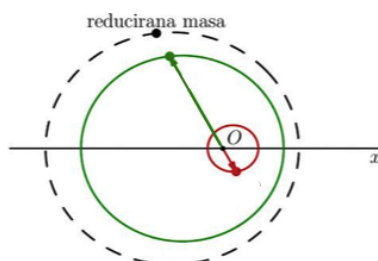
$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.14)$$

gdje je  $G$  gravitacijska konstanta.

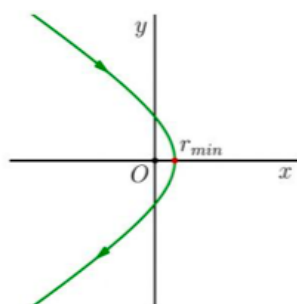
Za sile koje opadaju s kvadratom udaljenosti omeđena putanja se uvijek zatvara i to nakon jednog perioda. Omeđene putanje su stoga elipse. Ako se problem rastavi na gibanje svakog tijela posebno, iz jednadžbi (2.9) i (2.10) se može zaključiti da se tijela gibaju po elipsama istog oblika, ali različite veličine. Primjer takvog gibanja dan je na slici 4. Oba tijela se gibaju oko zajedničkog žarišta dvije elipse, odnosno oko centra mase. Veća elipsa odgovara putanji manje masivnog tijela. Ako je jedno tijelo puno masivnije od drugog dobra je aproksimacija da masivnije tijelo miruje u žarištu veće elipse.

Neomeđene putanje su hiperboličnog oblika, kao što je prikazano na slici 5.

Pad u centar polja je moguće postići samo ako angularni moment iščezava pa nema centrifugalne barijere. To znači da tijelo može padati u centar polja samo po pravcu.



**Slika 4:** Dva tijela se gibaju po eliptičnim putanjama oko žarišta dvije elipse (centra mase). Također je prikazana i elipsa po kojoj bi se gibalo tijelo reducirane mase u istom potencijalu. (slika preuzeta s [6])



**Slika 5:** Primjer hiperbolične putanje. Gravitacijska sila zakrivljuje putanju tijela koje prolazi pokraj centra sile. (slika preuzeta s [6])

## 2.2 Metode

Numerički izračun i simulaciju gibanja sustava koji se sastoje od jedne zvijezde i jednog planeta napravio sam u programskom jeziku Python. Pri tome sam za numeričko rješavanje Newtonove diferencijalne jednadžbe gibanja koristio jednostavnu Eulerovu metodu [7]. Planete i zvijezde sam aproksimirao točkama.

Ključ izrade ove simulacije i njezine točnosti je način korištenja podataka iz kataloga egzoplanata [8]. Rješavanje jednadžbi gibanja zahtjeva poznavanje početnih uvjeta gibanja, ali mjerene vrijednosti koje se mogu naći u katalogu odnose se na svojstva cjelokupne putanje gibanja, a ne na početne uvjete u bilo kojem trenutku.

Moja ideja je "a priori" pretpostaviti vrstu putanje po kojoj se tijela gibaju, koristeći određene aproksimacije. Uzimajući u obzir pretpostavljeni oblik putanje i koristeći neke poznate vrijednosti o putanji iz kataloga izračunao bih početne uvjete koji bi se po toj pretpostavci trebali ostvariti na određenom dijelu putanje. Tako bih stekao uvjete za pokretanje simulacije. Na kraju bih iz simulacije numerički izračunao iste ili neke druge parametre putanje koji su dani u katalogu i time provjerio točnost simulacije. Točnost je moguće provjeriti i kvalitativno s obzirom da program grafički simulira gibanje i prizakuje na zaslonu.

Za izračun gibanja izabrao sam inercijalni sustav centra mase, tako da se sustav cjelokupno ne translacija. To sam postigao tako da sam uvijek zadavao iste početne iznose impulsa obama tijelima u suprotnim smjerovima:

$$\mathbf{p}_1(0) = -\mathbf{p}_2(0). \quad (2.15)$$

To znači da je ukupni impuls jednak nuli pa centar mase miruje. Ishodišnu točku ( $\mathbf{r} = 0$ ) sam iskoristio kao početni položaj zvijezde (masivnijeg tijela). Za izračun početnih uvjeta koristio sam poznata svojstva putanje planeta (veće putanje).

Početne uvjete sam računao koristeći dvije različite pretpostavke putanja. Cilj je provjeriti točnost za obe metode i usporediti ih.

U prvoj metodi "a priori" sam putanju planeta aproksimirao kružnicom kako bih što jednostavnije došao do početnih uvjeta. Aproksimacijom sam pretpostavio da je zvijezda puno masivnija od planeta, pa sam središte kružnice postavio u ishodište, gdje se zvijezda nalazi u početnom trenutku. Informacije o orbiti koje su dostupne iz kataloga su duljina ophodnog perioda i velika poluos stvarne eliptične putanje. Radijus pretpostavljene kružnice sam u ovoj aproksimaciji izjednačio s velikom poluosi stvarne elipse, što bi trebala biti dovoljno dobra pretpostavka ako je putanja barem približno kružnica. Na kružnim orbitama u Keplerovom potencijalu tijelo ima istu obodnu brzinu na svim dijelovima kružnice. To čini ovu metodu vrlo jednostavnom. Da bi se došlo do te obodne brzine potrebno je samo podijeliti opseg kružnice s ophodnim periodom:

$$v = \frac{2a\pi}{T}. \quad (2.16)$$

Početni uvjeti su sada:

$$\mathbf{r}_2(0) = a\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_2(0) = v\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_1(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_1(0) = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_2(0), \quad (2.17)$$

gdje se index 1 odnosi na zvijezdu, a 2 na planet,  $v$  je iznos brzine iz jednadžbe (2.16), a brzina zvijezde je postavljena na način da zadovoljava jednadžbu (2.15).

U drugoj metodi sam napravio realniju aproksimaciju. Pri izračunu početnih uvjeta za planet sam pretpostavio eliptičnu putanju sa žarištem u ishodištu gdje se zvijezda nalazi u početnom trenutku. Informacije o orbiti iz kataloga koje sam koristio za ovu metodu su duljina velike poluosi i ekscentricitet elipse [9] koji je definiran kao:

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}, \quad (2.18)$$

gdje je  $a$  velika poluos, a  $b$  mala poluos elipse. Početnu brzinu planeta sam izračunao iz "Vis-viva" jednadžbe [10]:

$$v^2 = G(m_1 + m_2) \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right), \quad (2.19)$$

gdje je  $G$  gravitacijska konstanta,  $m_1$  i  $m_2$  mase dvaju tijela,  $a$  velika poluos elipse i  $r$  udaljenost dvaju tijela u bilo kojem stadiju gibanja po putanjama. Za trenutak u kojem ću generirati početnu brzinu planeta izabrao sam točku na obodu elipse u kojoj su tijela najudaljenija. Zbog pretpostavke da je zvijezda približno u žarištu elipse, za udaljenost  $r$  u jednadžbi (2.19) koristio sam udaljenost žarišta od suprotnog kraja elipse [9], a to je zbroj duljine velike poluosi i udaljenosti od središta do žarišta:

$$l = a + (a^2 - b^2). \quad (2.20)$$

Početni uvjeti su sada:

$$\mathbf{r}_2(0) = l\hat{\mathbf{x}}, \quad \mathbf{v}_2(0) = v\hat{\mathbf{y}}, \quad \mathbf{r}_1(0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}_1(0) = -\frac{m_2}{m_1}\mathbf{v}_2(0), \quad (2.21)$$

gdje je sada  $v$  iznos brzine iz jednadžbe (2.19).

### 3 Rezultati

Za istraživanje sam odabrao sedam jednoplanetarnih sustava s različitim ekscentricitetima putanja. Sustave sam poredao po vrijednostima ekscentriciteta od najmanjeg do najvećeg. Svi sustavi imaju ekscentricitete veće od Zemljinog koji iznosi 0.017, što približno odgovara kružnici. Za putanje manjeg ekscentriciteta možemo očekivati veću točnost u prvoj metodi jer kružnica ima ekscentricitet jednak nuli. Također, što je veći omjer masa dvaju tijela točnost bi trebala biti veća s obzirom na aproksimacije koje ne uzimaju u obzir putanju masivnijeg tijela. Parametri sustava iz kataloga koje sam koristio su masa zvijezde, masa planeta, ophodni period planeta te velika poluos i ekscentricitet njegove eliptične putanje.

U nastavku ću provjeriti točnost za svaki sustav u prvoj i drugoj metodi. Kao mjeru točnosti koristit ću slike simuliranih putanja i relativnu pogrešku perioda dobivenog numerički s obzirom na period iz kataloga, što je definirano kao:

$$\delta = \left| \frac{T_{num} - T}{T} \right|. \quad (3.1)$$

#### 3.1 Primjeri planetarnih sustava

##### 3.1.1 HD 183579

**Tablica 1:** Podaci iz kataloga za HD 183579.

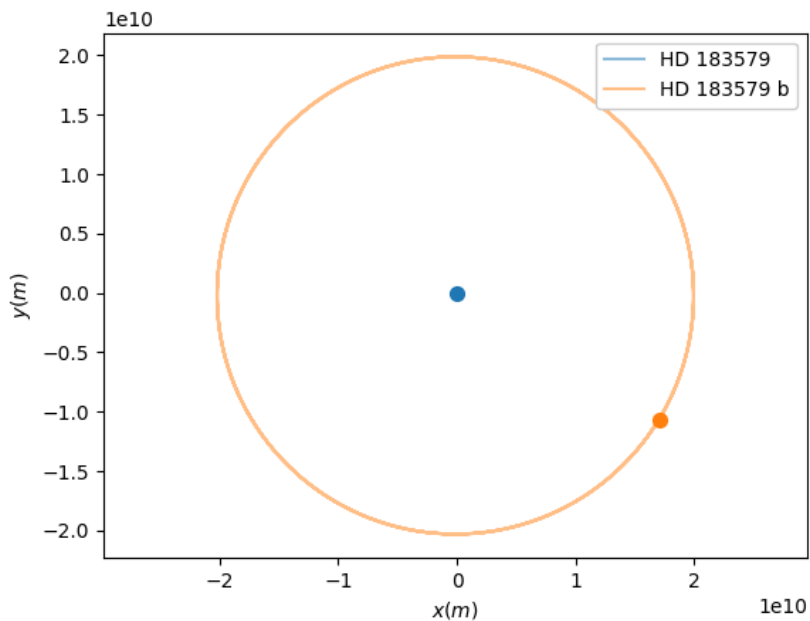
Masa zvijezde / ( $M_{Sun}$ )	1.031
Masa planeta / ( $M_J$ )	0.030
Ophodni period / ( <i>day</i> )	17.471
Velika poluos ( <i>AU</i> )	0.133
Ekscentricitet	0.280

**Tablica 2:** Rezultati za HD 183579.

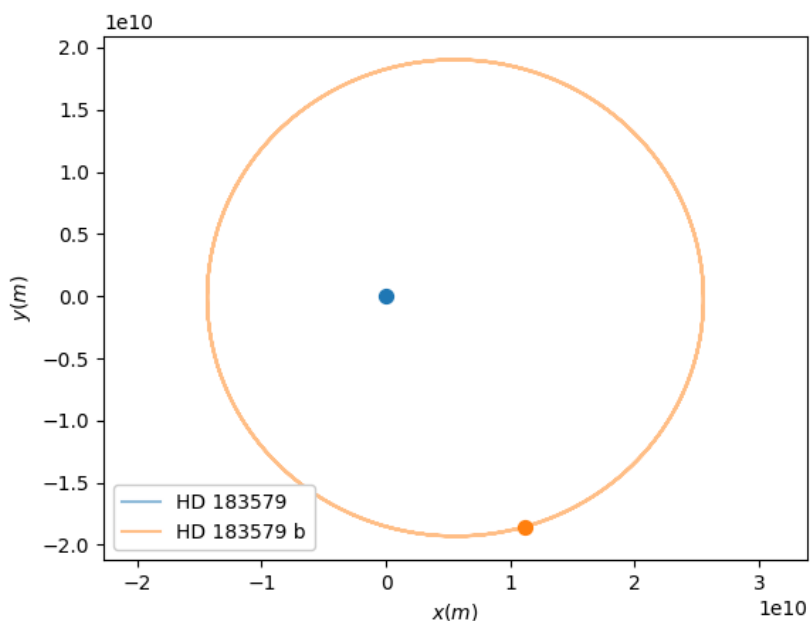
Ophodni period iz kataloga / ( <i>day</i> )	17.471
Ophodni period - metoda 1 / ( <i>day</i> )	17.650
Ophodni period - metoda 2 / ( <i>day</i> )	17.477
Relativna pogreška - metoda 1 / (%)	1.03
Relativna pogreška - metoda 2 / (%)	0.03

Provjeru točnosti simulacije započinem sa sustavom HD 183579 koji ima najmanji ekscentricitet putanje planeta u ovom istraživanju (0.28). To je sustav sa zvijezdom mase približne masi Sunca. Planet tog sustava je otprilike 10 puta masivniji od Zemlje, ali i otprilike 10 puta bliže zvijezdi nego što je Zemlja Suncu.

Ophodni period od otprilike 17 dana u prvoj metodi je dobiven s točnošću od 1.03%, što je već dobra točnost. U drugoj metodi ta je točnost još poboljšana i iznosi 0.03%. Oblik putanje dobiven drugom metodom je eliptičniji (slika 7) od onog dobivenog prvom metodom (slika 6) koji je gotovo pravilna kružnica. S obzirom na to da ovaj sustav ima mali ekscentricitet, još uvijek je teško procijeniti koja metoda je dala točniji oblik putanje.



**Slika 6:** Orbite sustava HD 183579 dobivene prvom metodom.



**Slika 7:** Orbite sustava HD 183579 dobivene drugom metodom.

## 3.1.2 HD 132406

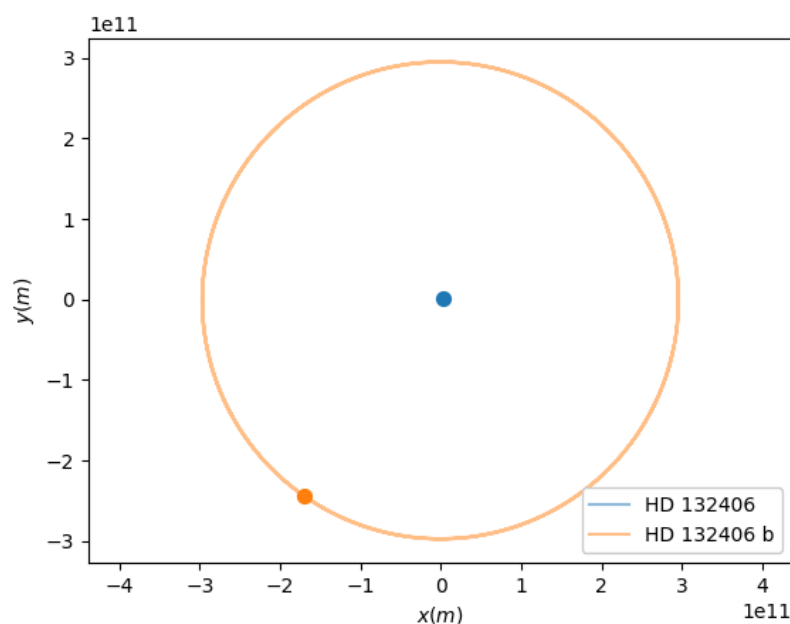
Tablica 3: Podaci iz kataloga za HD 132406.

Masa zvijezde / ( $M_{Sun}$ )	1.090
Masa planeta / ( $M_J$ )	6.700
Ophodni period / ( <i>day</i> )	974.000
Velika poluos ( <i>AU</i> )	1.980
Ekscentricitet	0.340

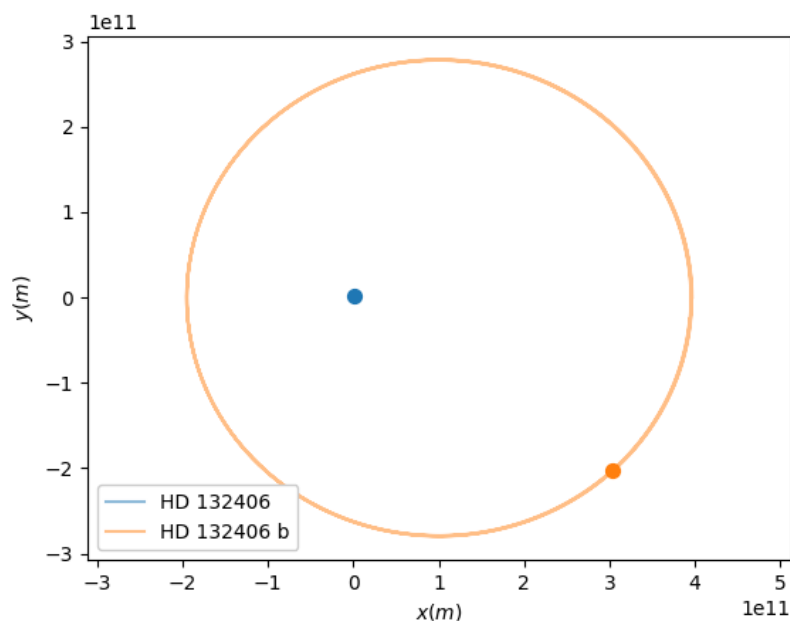
Tablica 4: Rezultati za HD 132406.

Ophodni period iz kataloga / ( <i>day</i> )	974.000
Ophodni period - metoda 1 / ( <i>day</i> )	981.481
Ophodni period - metoda 2 / ( <i>day</i> )	979.167
Relativna pogreška - metoda 1 / (%)	0.77
Relativna pogreška - metoda 2 / (%)	0.53

Još jedan sustav relativno malog ekscentriciteta putanje (0.34) je HD 132406. On ponovno sadrži zvijezdu mase približne masi Sunca, ali i planet čija je masa 6.7 puta veća od Jupiterove, što je 3 reda veličine iznad Zemljine mase. Udaljenost tog planeta od zvijezde je 2 puta od udaljenosti Zemlje i Sunca.



Slika 8: Orbite sustava HD 132406 dobivene prvom metodom.



**Slika 9:** Orbite sustava HD 132406 dobivene drugom metodom.

Period pripadnog planeta je mnogo veći od prethodnog i iznosi 974 dana. U prvoj metodi je predviđen s točnošću od 0.77%, što je još bolje nego u prvom primjeru. Druga metoda je također malo poboljšala točnost perioda (0.53%). Slike (8 i 9) prikazuju simulirane putanje. Prva je ponovno puno sličnija kružnici od druge. Iako druga putanja izgleda kao da ima malo veći ekscentricitet od stvarne, iz njih je još uvijek teško zamijetiti koja je putanja točnija.

### 3.1.3 LHS 1610

Sustav LHS 1610 nema veliki ekscentricitet (0.369), ali je specifičan po puno manjem omjeru masa zvijezde i planeta. Sastoji se od zvijezde višestruko manje mase od Sunca i planeta koji je čak 52 puta masivniji od Jupitera. To znači da omjer masa zvijezde i planeta približno iznosi samo 3.5. Uz to, njihova udaljenost iznosi samo 5.6% udaljenosti između Zemlje i Sunca.

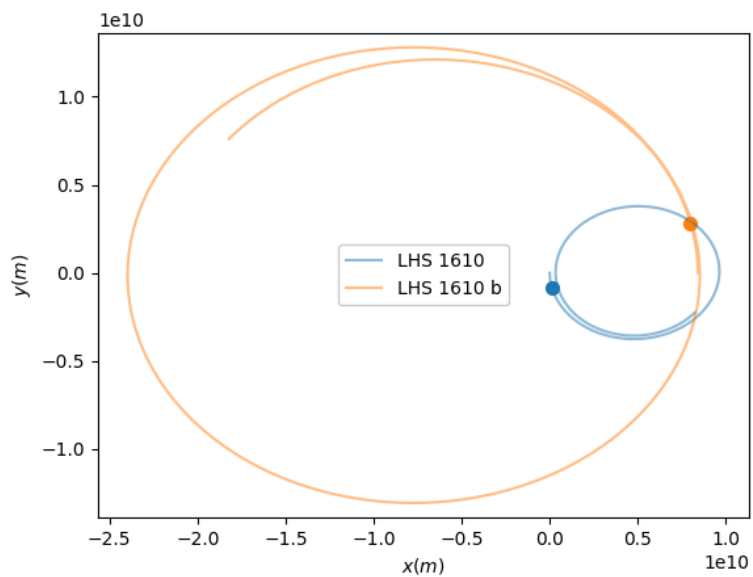
**Tablica 5:** Podaci iz kataloga za LHS 1610.

Masa zvijezde / ( $M_{Sun}$ )	0.170
Masa planeta / ( $M_J$ )	52.000
Ophodni period / ( <i>day</i> )	10.592
Velika poluos ( <i>AU</i> )	0.056
Ekscentricitet	0.369

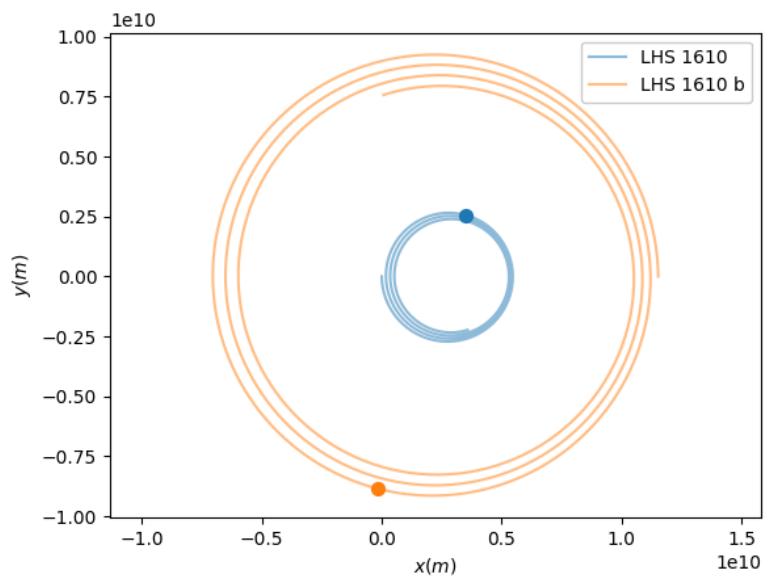


**Tablica 6:** Rezultati za LHS 1610.

Ophodni period iz kataloga / (day)	10.592
Ophodni period - metoda 1 / (day)	40.856
Ophodni period - metoda 2 / (day)	17.477
Relativna pogreška - metoda 1 / (%)	285.74
Relativna pogreška - metoda 2 / (%)	65.00



**Slika 10:** Orbite sustava LHS 1610 dobivene prvom metodom.



**Slika 11:** Orbite sustava LHS 1610 dobivene drugom metodom.

Za relativno mali period pripadnog planeta od približno 10 dana prva metoda je dala loše predviđanje. Relativna pogreška iznosi čak 285%. Velika pogreška je očekivana zbog malog omjera masa tijela i aproksimacija u metodama koje su pretpostavljale da je zvijezda puno masivnija od planeta. Druga metoda je poboljšala pogrešku na 65%, što je puno manje ali i dalje značajno. Iz slike 10 se može vidjeti da putanja dobivena prvom metodom ima puno veći ekscentricitet od stvarne. Razlog tome je vjerojatno ponovno mali omjer masa tijela. Na slici 11 se vidi da je druga metoda dala putanju koja je puno bliža stvarnoj.

### 3.1.4 KOI-415

**Tablica 7:** Podaci iz kataloga za KOI-415.

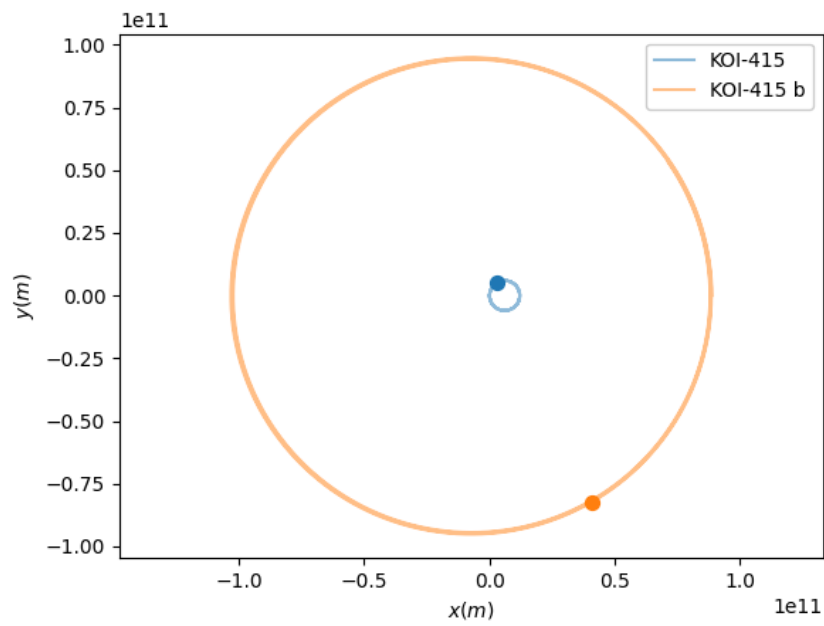
Masa zvijezde / ( $M_{Sun}$ )	0.940
Masa planeta / ( $M_J$ )	62.140
Ophodni period / ( <i>day</i> )	166.788
Velika poluos ( <i>AU</i> )	0.593
Ekscentricitet	0.698

**Tablica 8:** Rezultati za KOI-415.

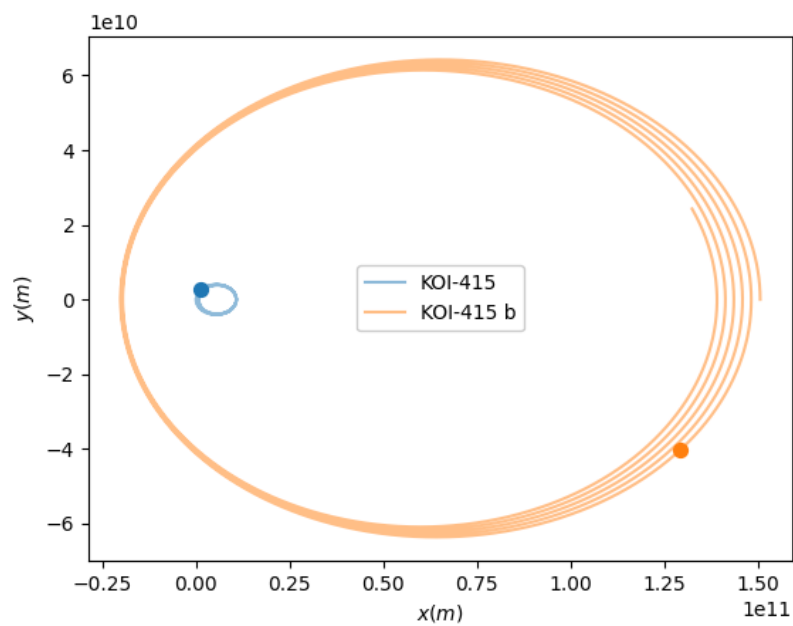
Ophodni period iz kataloga / ( <i>day</i> )	166.788
Ophodni period - metoda 1 / ( <i>day</i> )	205.440
Ophodni period - metoda 2 / ( <i>day</i> )	170.833
Relativna pogreška - metoda 1 / (%)	23.17
Relativna pogreška - metoda 2 / (%)	2.43

Prvi sustav s velikim ekscentricitetom (0.7) u ovom istraživanju je KOI-415. Velika poluos eliptične putanje planeta iznosi oko 0.6 *AU*. Zbog planeta mase koja odgovara 62 mase Jupitera i zvijezde približno Sunčeve mase ovaj sustav također ima mali omjer masa dvaju tijela. On je ipak veći od onog u prošlom primjeru i iznosi oko 16.

Ophodni period od približno 166 dana prvom metodom je predviđen s relativno velikom pogreškom od 23.17%. Na slici 12 se može vidjeti da je simulacija u toj metodi, koja koristi aproksimaciju kružnice doista i dala približno kružnu putanju koja značajno odstupa od stvarne putanje velikog ekscentriciteta. Druga metoda je značajno smanjila pogrešku, koja je sada 2.43%. Na slici 13 se može vidjeti da i putanja značajno poboljšana, odnosno da ima veliki ekscentricitet kakav bi otprilike trebala imati.



**Slika 12:** *Orbite sustava KOI-415 dobivene prvom metodom.*



**Slika 13:** *Orbite sustava KOI-415 dobivene drugom metodom.*

## 3.1.5 KOI-1257

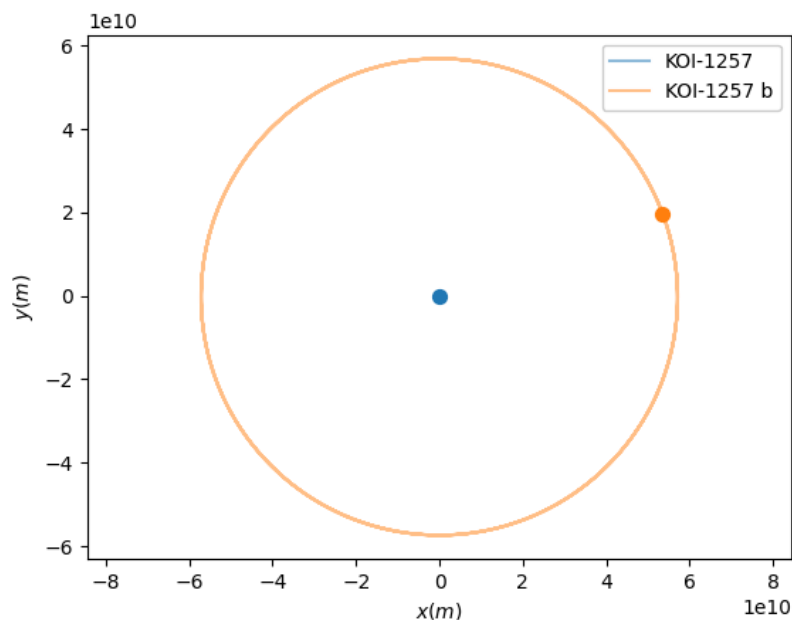
**Tablica 9:** Podaci iz kataloga za KOI-1257.

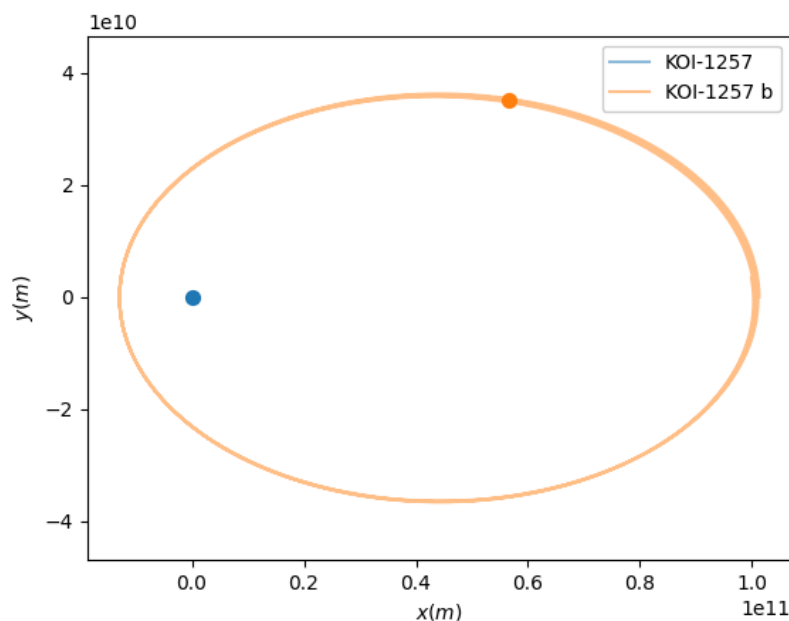
Masa zvijezde / ( $M_{Sun}$ )	0.990
Masa planeta / ( $M_J$ )	1.450
Ophodni period / ( <i>day</i> )	86.648
Velika poluos ( <i>AU</i> )	0.382
Ekscentricitet	0.772

**Tablica 10:** Rezultati za KOI-1257.

Ophodni period iz kataloga / ( <i>day</i> )	86.648
Ophodni period - metoda 1 / ( <i>day</i> )	86.806
Ophodni period - metoda 2 / ( <i>day</i> )	86.574
Relativna pogreška - metoda 1 / (%)	0.18
Relativna pogreška - metoda 2 / (%)	0.08

Sustav KOI-1257 ekscentriciteta 0.77 ima zvijezdu približno Sunčeve mase i planet mase oko 1.5 puta veće od Jupitera. Njegova udaljenost od zvijezde je od 14 puta manja od udaljenosti Jupitera i Sunca, odnosno 0.38 *AU*.

**Slika 14:** Orbite sustava KOI-1257 dobivene prvom metodom.



**Slika 15:** Orbite sustava KOI-1257 dobivene drugom metodom.

Za razliku od prethodna dva primjera u ovom sustavu je masa planeta zanemariva u odnosu na masu zvijezde pa je prva metoda ponovno dala dobro predviđanje perioda. Pogreška iznosi samo 0.18%, ali sa slike 14 je jasno da to predviđanje nije vrijedno s obzirom na to da je putanja ponovno kružna kao u prethodnom primjeru. Osim što je druga metoda značajno poboljšala oblik putanje (slika 15), dala je još bolje predviđanje perioda. Pogreška sada iznosi samo 0.08%.

### 3.1.6 TOI-4562

Sustav TOI-4562 sastoji se od zvijezde mase oko 1.3 Sunčeve mase i planeta mase oko 3.3 Jupiterove mase. Putanja planeta ima ekscentricitet 0.81 i veliku poluos od 0.77 AU.

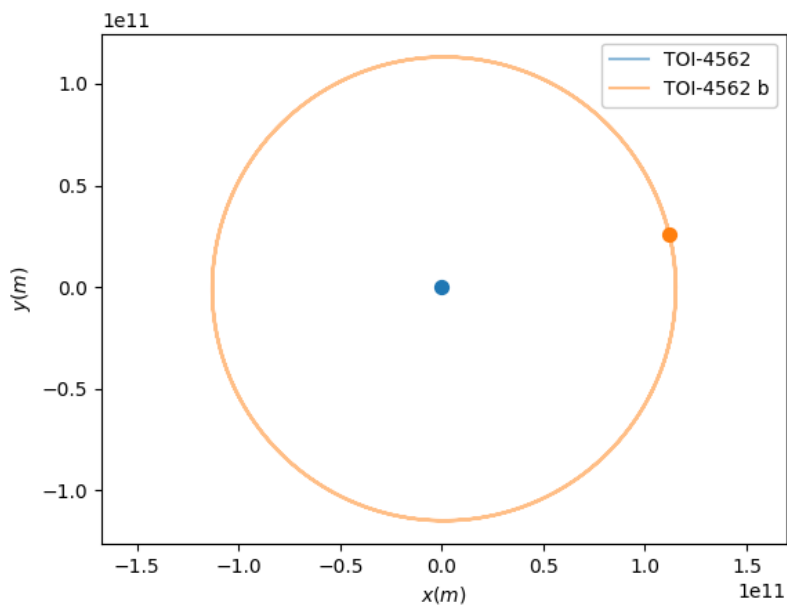
Među sustavima s velikim ekscentricitetima iz ovog istraživanja ovaj sustav ima najveći ophodni period (225 dana). I u ovom primjeru prva metoda je dala dobro predviđanje perioda s pogreškom od 1.8% i kružnom putanjom (slika 16) koja se ne slaže dobro sa stvarnom. Druga metoda je smanjila pogrešku na 0.51% i značajno poboljšala oblik putanje (17).

**Tablica 11:** Podaci iz kataloga za TOI-4562.

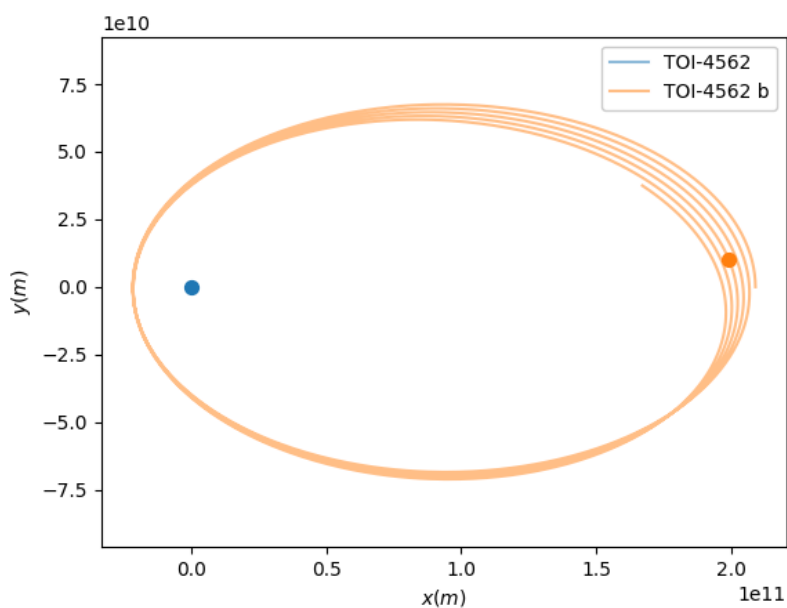
Masa zvijezde / ( $M_{Sun}$ )	1.218
Masa planeta / ( $M_J$ )	3.290
Ophodni period / (day)	225.118
Velika poluos (AU)	0.771
Ekscentricitet	0.810

**Tablica 12:** Rezultati za TOI-4562.

Ophodni period iz kataloga / ( <i>day</i> )	225.118
Ophodni period - metoda 1 / ( <i>day</i> )	221.065
Ophodni period - metoda 2 / ( <i>day</i> )	223.958
Relativna pogreška - metoda 1 / (%)	1.80
Relativna pogreška - metoda 2 / (%)	0.51



**Slika 16:** Orbite sustava TOI-4562 dobivene prvom metodom.



**Slika 17:** Orbite sustava TOI-4562 dobivene drugom metodom.

## 3.1.7 TOI-3362

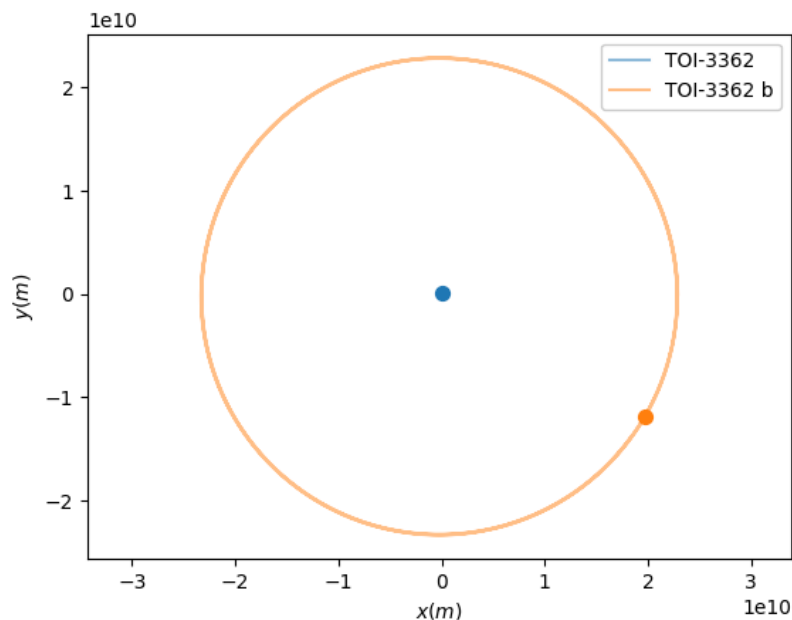
**Tablica 13:** Podaci iz kataloga za TOI-3362.

Masa zvijezde / ( $M_{Sun}$ )	1.445
Masa planeta / ( $M_J$ )	5.029
Ophodni period / ( <i>day</i> )	18.095
Velika poluos ( <i>AU</i> )	0.153
Ekscentricitet	0.815

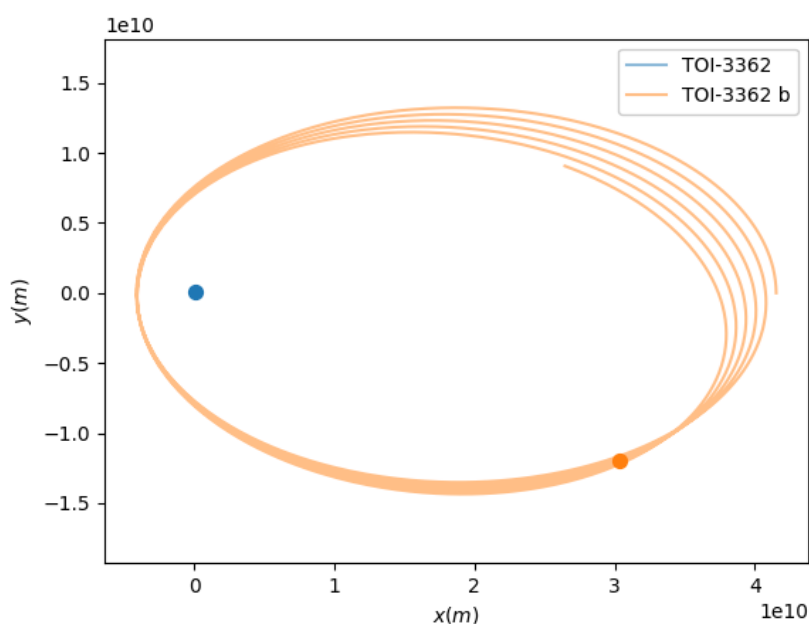
**Tablica 14:** Rezultati za TOI-3362.

Ophodni period iz kataloga / ( <i>day</i> )	18.095
Ophodni period - metoda 1 / ( <i>day</i> )	18.461
Ophodni period - metoda 2 / ( <i>day</i> )	18.229
Relativna pogreška - metoda 1 / (%)	2.02
Relativna pogreška - metoda 2 / (%)	0.74

Zadnji sustav u ovom istraživanju je TOI-3362. Po putanji sličnog ekscentriciteta kao u prethodnom primjeru (0.82) giba se planet mase od oko 5 maas Jupitera, oko zvijezde mase od gotovo 1.5 masa Sunca.

**Slika 18:** Orbite sustava TOI-3362 dobivene prvom metodom.

Ovaj zadnji primjer sustava ima najmanji period među ovdje razmatranim sustavima velikog ekscentriciteta. Taj period iznosi oko 18 dana, a pogođen je s pogreškom od 2.02% prvom



**Slika 19:** Orbite sustava TOI-3362 dobivene drugom metodom.

metodom i 0.74% drugom metodom. Kao i u svim prethodnim primjerima putanja velikog ekscentriciteta iz slika (18 i 19) je vidljivo da druga metoda daje puno realnije eliptične putanje, što čini cijelu simulaciju i njezina predviđanja puno točnijima.

## 3.2 Objedinjenje rezultata

**Tablica 15:** Objedinjeni rezultati za sve razmatrane sustave. U tablici je za svaki sustav prikazana vrijednost ekscentriciteta ( $e$ ), omjera masa dvaju tijela ( $m_1/m_2$ ) te relativnih pogrešaka numeričkih perioda dobivenih u prvoj i drugoj metodi ( $\delta_1$  i  $\delta_2$ ).

R.Br.	Sustav	$e$	$m_1/m_2$	$\delta_1(\%)$	$\delta_2(\%)$
1	HD 183579	0.280	36014.4	1.03	0.03
2	HD 132406	0.340	170.5	0.77	0.53
3	LHS 1610	0.69	3.4	285.74	65.00
4	KOI-415	0.698	15.9	23.17	2.43
5	KOI-1257	0.772	715.5	0.18	0.08
6	TOI-4562	0.810	388.0	1.80	0.51
7	TOI-3362	0.815	301.1	2.02	0.74

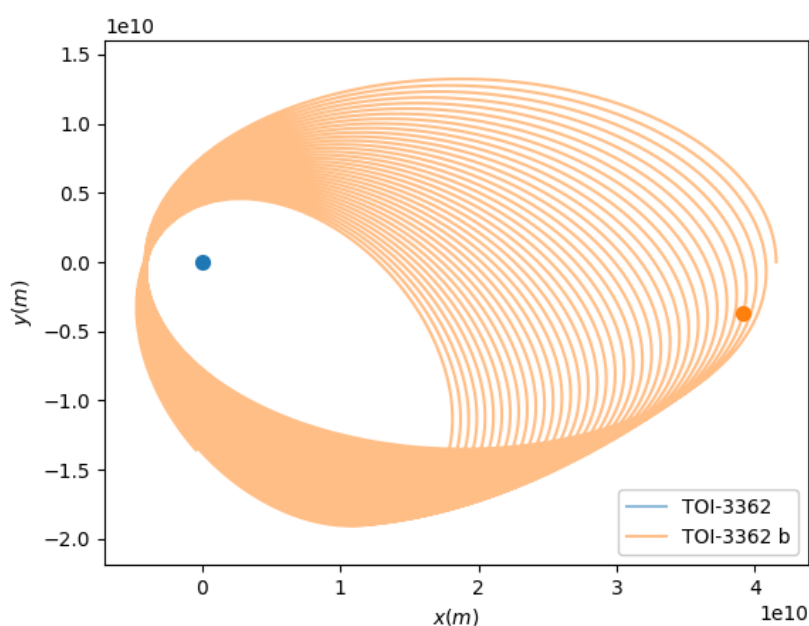
Tablica 15 prikazuje objedinjene rezultate iz svih primjera. Iz nje se može zaključiti da je predviđanje loše kad je omjer masa zvijezde i planeta mali kao u slučaju 3. i 4. sustava. To je očekivano s obzirom na to da u obje metode nije uzeta u obzir putanja zvijezde pri izračunavanju početnih uvjeta. Kada je taj omjer velik točnost perioda dobivena u prvoj metodi je vrlo



visoka, međutim, predviđene putanje su kružnice i onda kad je ekscentricitet stvarne putanje jako velik. Zato takva simulacija nije pogodna za putanje većeg ekscentriciteta. Njezina točnost u predviđanju perioda se može pripisati tome da je stvarni period "apriori" korišten za izračun početnih uvjeta, odnosno pokretanje simulacije. Pritom je pretpostavljena kružna putanja, koja se uglavnom i dobije u simuliranom gibanju te stoga izračunati period nemože znatno odstupiti od pretpostavljenog. Zaključak je da točnost perioda sama po sebi nije dobra mjera za točnost simulacije napravljene prvom metodom. Druga metoda ne koristi stvarni period u pretpostavkama već Vis-viva jednadžbu [10] koja se temelji na jednadžbama gibanja i uzima u obzir mase tijela. Ta metoda je dala neusporedivo realnije eliptične putanje. Njezina točnost se također može vidjeti po činjenici da je u svim slučajevima dala i točnije periode od prve metode koja period dobiva na "lagan" način jer "apriori" uzima u obzir stvarni period.

U sustavu LHS 1610 koji ima mali omjer masa zvijezde i planeta prva metoda nije dala realnu putanju iako stvarna putanja nema puno veći ekscentricitet od kružnice. Ovdje se druga metoda također pokazala puno boljom.

Pri izračunu gibanja Eulerovom metodom može biti značajan efekt nakupljanja pogreške [7]. S obzirom na to da su numeričke vrijednosti perioda u ovim simulacijama mjerene nakon jednog simuliranog perioda, taj efekt nebi trebao biti značajan. Nakupljanje pogreške moguće je vidjeti ako se simulacija pusti preko velikog broja perioda kao na slici 20, na kojoj se vidi približavanje planeta zvijezdi, kao i rotiranje eliptične putanje u primjeru sustava TOI-3362. Takvo gibanje fizikalno nije moguće jer su putanje u Keplerovom problemu uvijek eliptične, odnosno zatvaraju se nakon jednog perioda [4].



**Slika 20:** Nakupljanje pogreške nakon velikog broja ophodnih perioda u simulaciji sustava TOI-3362. Vidljivo je smanjivanje i rotiranje eliptične putanje.

## 4 Zaključak

Točnost simulacije gibanja planeta u planetarnim sustavima dvaju tijela provjerio sam na sedam primjera takvih sustava, za dvije metode izračuna početnih uvjeta iz danih parametara putanje. Prva metoda izračuna početnih uvjeta dala je simulaciju koja je postizala vrlo dobru točnost vrijednosti ophodnog perioda, osim u slučajevima kad masa planeta nije zanemariva u odnosu na masu zvijezde. Dobra točnost perioda dobivenog prvom metodom, ipak, nije dobar pokazatelj točnosti simulacije s obzirom na to da je period iz kataloga "apriori" korišten u izračunu početnih uvjeta. Kao rezultat toga simulacija obično daje kružnu putanju sa periodom koji je "apriori" pretpostavljen. Ova metoda daje dobru simulaciju samo u slučajevima kad je putanja približno kružnica i kad je masa planeta zanemariva u odnosu na masu zvijezde. Druga metoda značajno je poboljšala cjelokupnu simulaciju. To se vidi iz puno točnijih oblika simuliranih putanja, kao i iz činjenice da je dala još bolje predviđanje perioda od prve metode koja period koristi "apriori". U slučajevima kada masa planeta nije zanemariva u odnosu na masu zvijezde obje metode daju loše predviđanje perioda. To je očekivano jer obje metode uzimaju u obzir samo putanju planeta, pretpostavljajući da je zvijezda u jednoj točki. Moglo se vidjeti da druga metoda bitno poboljšava predviđanje perioda i u ovom slučaju, iako je pogreška i dalje značajna.

Druga metoda je bolji izbor u gotovo svim situacijama. Ta je metoda dala bolje rezultate od prve metode čak i u slučajevima putanja vrlo malog ekscentriciteta. Prvu metodu bi se moglo koristiti zbog jednostavnosti, u slučajevima kad je putanja gotovo kružna i kad je zvijezda puno masivnija od planeta, jer tada iz teorije znamo da je obodna brzina na kružnici konstantna.

Simulacija bi se mogla unaprijediti na način da se uzme u obzir i eliptična putanja zvijezde. To bi značajno poboljšalo simulaciju u slučajevima kad je omjer masa zvijezde i planeta mali. Također bi se mogle uzeti u obzir stvarne dimenzije tijela, umjesto da ih se aproksimira točkama. To bi unaprijeđenje vjerojatno znatnije došlo do izražaja za vremenski duge simulacije, kao i u slučajevima kad simulacija uključuje i neke druge efekte, kao što je, na primjer, razvoj klime na planetu.

Nakupljanje pogreške bi se moglo smanjiti prelazeći na naprednije metode numeričkog rješavanja diferencijalnih jednadžbi.

Ova simulacija izračunava gibanje dvaju tijela koja međudjeluju. Za slučajeve u kojima postoji više tijela u sustavu za koja postoje podaci o putanji u katalogu, simulacija bi se moglo unaprijediti. Međudjelovanje više tijela lako se može dodati u programskom kodu, ali izračun početnih uvjeta svih tijela zahtijevao bi nove metode, odnosno modele.

## 5 Literatura

- [1] NASA, Exoplanet exploration, What is the Universe? URL:  
<https://exoplanets.nasa.gov/what-is-an-exoplanet/what-is-the-universe/> (15. 9. 2022.)
- [2] Space.com, Supermassive black hole, URL:  
<https://www.space.com/supermassive-black-hole> (15. 9. 2022.)
- [3] NASA, Exoplanet exploration, What is as Exoplanet? URL:  
<https://exoplanets.nasa.gov/what-is-an-exoplanet/overview/> (15. 9. 2022.)
- [4] Goldstein, Herbert; Poole, C. P.; Safko, J. L., *Classical Mechanics* (3rd ed.), Addison-Wesley, USA 2001.
- [5] Programski kod simulacije, URL: [https://github.com/VKapitan4/Planetarna\\_fizika.git](https://github.com/VKapitan4/Planetarna_fizika.git)
- [6] T.Nikšić, *Klasična mehanika 1*, URL:  
<https://archive.org/details/KlaMehTamara/page/n145/mode/2up?view=theater>  
(2.9.2022.).
- [7] Atkinson, Kendall E., *An Introduction to Numerical Analysis* (2nd ed.), John Wiley & Sons, New York 1989.
- [8] The extrasolar planets encyclopaedia, catalogue, URL: <http://exoplanet.eu/catalog/>.
- [9] Ellipse, Wikipedia, URL: <https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse> (2. 9. 2022.).
- [10] Astrophysics I: Lecture 6, URL: <https://web.njit.edu/~gary/320/Lecture6.html> (16. 8. 2022.).