Teorija dizajna i njena primjena u dizajnu igara

Džaja, Karla Josipa

Master's thesis / Diplomski rad

2022

Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj: **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

Permanent link / Trajna poveznica: https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:380004

Rights / Prava: Attribution 4.0 International/Imenovanje 4.0 međunarodna

Download date / Datum preuzimanja: **2024-04-29**

Repository / Repozitorij:

Repository of Faculty of Science

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

KARLA JOSIPA DŽAJA

TEORIJA DIZAJNA I NJENA PRIMJENA U DIZAJNU IGARA

DIPLOMSKI RAD

Split, srpanj 2022.

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

TEORIJA DIZAJNA I NJENA PRIMJENA U DIZAJNU IGARA

DIPLOMSKI RAD

Studentica:
Karla Josipa Džaja

Mentor:
doc. dr. sc. Aljoša Šubašić

Split, srpanj 2022.

Uvod

Začetak teorije dizajna nalazimo u 19. stoljeću. Točnije, 1850. godine kada je britanski svećenik Thomas Penyngton Kirkman u godišnjem matematičkom magazinu postavio problem koji je zaintrigirao profesionalne matematičare, ali i amatere. Pitanje koje je kasnije postalo poznato pod nazivom *problem školarki* glasilo je: 15 školarki putuju u školu 7 dana zaredom raspoređene tako da hodaju usporedno u grupama po 3 školarke. Treba ih rasporediti po danima tako da nikoje dvije dvaput ne hodaju usporedno.

Tek 1930-ih teorija dizajna podvrgnuta je brzom razvoju pod utjecajem razvoja konačne geometrije, algebre te povećanja zahtjeva u praksi, najviše iz statističkih eksperimenata. Do kraja 20. stoljeća primjena teorije dizajna se raširila od komunikacijskog inženjerstva do fizike, od računarstva do kriptografije, od kodiranja do dna analize i optike te od statistike do igara.

U sljedećim poglavljima ćemo se upoznati s osnovama teorije dizajna i promotriti najvažnije primjere. Nakon toga ćemo vidjeti na koji način je teorija dizajna primijenjena u izradi popularne igre *Spot It!*, a u zadnjem poglavlju i u izradi vlastite igre s matematičkim pojmovima.

Sadržaj

Poglavlje 1

Incidencijske strukture i incidencijske matrice

Najosnovniji pojam (konačne) geometrije jest incidencijska struktura. Sadrži ideju da dva objekta iz različitih klasa mogu biti *incidentna* jedno s drugim. Jedini uvjet jest da se klase ne preklapaju. Zapišimo ovo preciznije.

Definicija 1.1 *Incidencijska struktura je uređena trojka* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *gdje su* V *i* $\boldsymbol{B}$ *bilo koja dva disjunktna skupa, a* I *je binarna relacija između* V *i* $\boldsymbol{B}$. *Elemente od* V *nazivamo točkama, elemente od* $\boldsymbol{B}$ *blokovima, a elemente od* I *incidencijama.*

Za bilo koju točku p, (p) označava skup blokova koji su incidentni sa p.

(1.1.a) $(p) := \{B \in \boldsymbol{B} \,:\, pIB\}$.

Općenitije, za bilo koji podskup Q skupa točaka vrijedi

(1.1.b) $(Q) := \{B \in \boldsymbol{B} \,:\, pIB \text{ za svaki } p \in Q\}$.

Slično, pišemo

(1.1.c) $(C) := \{p \in V\ :\ pIB \,\text{za svaki}\, B \in C\}$

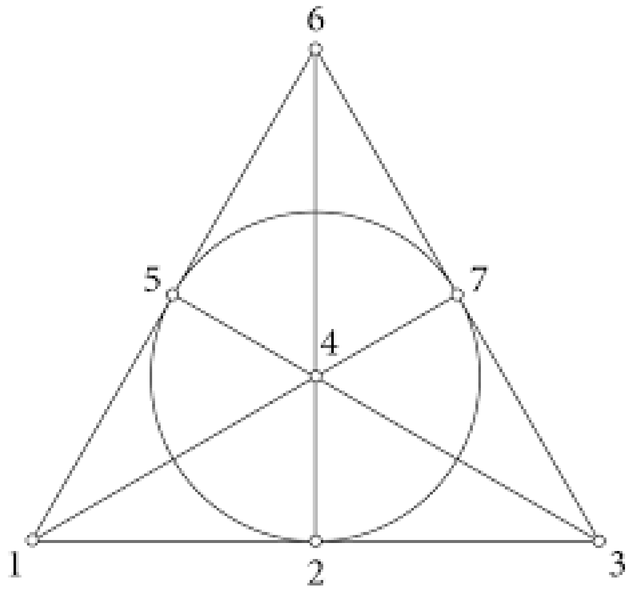
za bilo koji podskup C skupa blokova $\boldsymbol{B}$.

Za točku p, broj $|(p)|$ se naziva stupanj točke p. Slično za blokove.

Različiti blokovi G i H mogu biti incidentni s istim skupom točaka. Naprimjer, $(V, \boldsymbol{B}, I)$ gdje je $V = \{1,2,3\}, \boldsymbol{B} = \{B_1, B_2, B_3\}, (B_1) = (B_2) = \{1,2\}, (B_3) = \{1,3\}$ je incidencijska struktura. U ovom slučaju, ne možemo samo navesti skupove točaka koji su incidenti s blokom, već moramo navesti i njihove višestrukosti. Ako postoje različiti blokovi incidentni s istim skupom točaka, zovemo ih *ponavljajući blokovi.* Često ćemo promatrati incidencijske strukture gdje su različiti blokovi incidentni s različitim skupovima točaka.

Definicija 1.2 *Za incidencijsku strukturu kažemo da je jednostavna ako vrijedi* $(B) \neq (C)$ *kad god su* B *i* C *različiti. Ovdje je trag* (B) *bloka* B *skup* $\{x \in V\ :\ xIB\}$.

Primjer 1.3 *Uzmimo skup točaka* $V = \{1, \ldots, 7\}$*, skup blokova*
$\boldsymbol{B} = \{\{1,2,3\}, \{2,4,6\}, \{3,4,5\}, \{4,7,1\}, \{5,6,1\}, \{6,7,3\}, \{7,5,2\}\}$*, a za* I *relaciju 'biti element'* $\in$.
Za bilo koju jednostavnu incidencijsku strukturu možemo svaki blok B *poistovjećivati sa skupom točaka* (B)*, a relaciju* I *s relacijom* $\in$*. Svakako, ovako napisani primjer nam nije intuitivno blizak, pa možemo nacrtati sliku gdje su blokovi reprezentirani pravcima u ravnini.*



Slika 1.1

Definicija 1.4 *Neka je* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *konačna incidencijska struktura,* $p_1, \ldots, p_v$ *točke, a* $B_1, \ldots, B_b$ *blokovi. Onda matricu* $M = (m_{ij})(i = 1, \ldots, v)(j = 1, \ldots, b)$*, definiranu na način*

$$m_{ij} := \begin{cases} 1 & ako \ \ p_i I B_j \\ 0 & inače \end{cases}$$

zovemo incidencijska matrica za $\boldsymbol{D}$*. Redak matrice* M *koji pripada bloku* B *se naziva incidencijski vektor od* B*.*

Umjesto m_{ij} možemo pisati $M(p, B)(p \in V, B \in \boldsymbol{B})$.
Matrica M svakom uređenom paru $(p, B) \in V \times \boldsymbol{B}$ pridružuje element iz skupa $\{0, 1\}$. Obratno, svaka matrica s elementima 0 i 1 određuje neku incidencijsku strukturu.

Primjer 1.5 *Incidencijska struktura iz primjera 1.3 daje sljedeću incidencijsku matricu.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Željeli bismo pronaći nužne i dovoljne uvjete za postojanje općenite konačne incidencijske strukture sa zadanim stupnjevima točaka i blokova, tj. za postojanje $(0,1)$-matrice tipa $v \times b$ sa zadanim sumama redaka i stupaca. U idućoj propoziciji ćemo dati nužan (općenito ne i dovoljan) uvjet.

Propozicija 1.6 *Neka postoji incidencijska struktura sa stupnjevima točaka* $r_1, \ldots, r_v$ *i stupnjevima blokova* $k_1, \ldots, k_b$. *Onda je*

(1.6.a) $\qquad \sum_{i=1}^{v} r_i = \sum_{j=1}^{b} k_j.$

Korolar 1.7 *Neka je* $\boldsymbol{D}$ *incidencijska struktura sa* v *točaka i* b *blokova. Neka su svi stupnjevi točaka jednaki* r *i svi stupnjevi blokova jednaki* k. *Onda je*

(1.7.a) $\qquad vr = bk.$

Zaključujemo ovaj dio prvim netrivijalnim rezultatom. Rezultat je dobiven rješavanjem problema postojanja jednostavnih incidencijskih struktura s konstantnim stupnjevima točaka r i konstantnim stupnjevima blokova k. Terminologijom koju ćemo uvesti kasnije tu strukturu ćemo nazivati jednostavan 1-dizajn.

Lema 1.8 *Neka postoji jednostavna incidencijska struktura* $\boldsymbol{D}$ *sa* v *točaka,* b *blokova, konstantnim stupnjevima blokova* k *i stupnjevima točaka* $r_1, \ldots, r_v$.

Ako vrijedi $r_i > r_j$ za i, j takve da je $i > j$, onda postoji jednostavna incidencijska struktura $\boldsymbol{D}'$ sa v točaka, b blokova, konstantnim stupnjevima blokova k i stupnjevima točaka $r_1, \ldots, r_i - 1, r_{i+1}, \ldots, r_{j-1}, r_j + 1, \ldots, r_v$.

Teorem 1.9 *Jednostavna incidencijska struktura sa v točaka, b blokova, konstantim stupnjevima blokova k i konstantnim stupnjevima točaka r postoji ako i samo ako*

(1.9.a) $$vr = bk \quad i \quad b \leq \binom{v}{k}.$$

Definicija 1.10 *Komplementarna struktura incidencijske strukture $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ je incidencijska struktura $\overline{\boldsymbol{D}} = (V, \boldsymbol{B}, J)$ gdje je $J = (V \times \boldsymbol{B}) \backslash I$ takva da*

(1.10.a) $$xJB \iff xIB \text{ za sve } x \in V \text{ i } B \in \boldsymbol{B}.$$

Ako je M incidencijska matrica za $\boldsymbol{D}$, onda se incidencijska matrica za $\overline{\boldsymbol{D}}$ dobije zamjenom nula i jedinica u M.

Poglavlje 2

Blok dizajni i primjeri iz afine i projektivne geometrije

Sada ćemo proučavati neke geometrijske primjere, koji će nas uputiti u fundamentalni koncept blok dizajna. Prvo ćemo pogledati (konačne) projektivne i afine ravnine.

Definicija 2.1 *Incidencijska struktura* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *se naziva projektivna ravnina ako zadovoljava sljedeće aksiome:*

(2.1.a) Bilo koje dvije različite točke povezane su točno jednim pravcem.

(2.1.b) Bilo koja dva različita pravca se sijeku u točno jednoj točki.

(2.1.c) Postoji četverokut, tj. 4 točke među kojima nikoje 3 ne leže na istom pravcu.

Primjer 1.3 iz prethodnog odjeljka jest ujedno primjer i projektivne ravnine sa 7 točaka i 7 pravaca. Zapravo, to je najmanja projektivna ravnina. Također, taj primjer pokazuje izvanredan stupanj ujednačenosti: svaka točka se nalazi na 3 pravca, svaki pravac sadrži tri točke te se broj točaka i pravaca poklapa.

Pokažimo da ovo nije slučajnost:

Propozicija 2.2 *Neka je* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *konačna projektivna ravnina. Postoji prirodan broj* n *kojeg zovemo red od* $\boldsymbol{D}$*, a zadovoljava sljedeće:*

(2.2.a) $|(p)| = |(G)| = n + 1$ *za sve* $p \in V$ *i* $G \in \boldsymbol{B}$*;*

(2.2.b) $|(V)| = |(\boldsymbol{B})| = n^2 + n + 1.$

Propozicija 2.3 *Za svaki prirodan broj* q *čiji se rastav na proste faktore sastoji od samo jednog prostog broja, postoji projektivna ravnina reda* q*.*

Projektivnu ravninu reda q označavamo $PG(2, q)$. To su najvažnije projektivne ravnine. Dakako, postoje i druge ravnine. Promatrajući samo geometriju ravnine, moguće je odrediti je li nastala koristeći navedenu konstrukciju. U 3. odjeljku ćemo spomenuti tu karakterizaciju. Sada pogledajmo afine ravnine.

Definicija 2.4 *Incidencijska struktura* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *se naziva afina ravnina ako i samo ako zadovoljava sljedeće aksiome:*

(2.4.a) Bilo koje dvije različite točke su povezane točno jednim pravcem.

(2.4.b) Za bilo koju točku p *i pravac* G *takve da* pIG*, postoji točno jedan pravac* H *takav da* pIH*,a* H *ne siječe* G*.*

(2.4.c) Postoji trokut, tj. tri točke koje ne leže na istom pravcu.

Kažemo da su dva pravca G i H paralelna ako $G = H$ ili $|(G, H)| = 0$ te pišemo $G||H$. Dakle, (2.4.b) je zapravo Euklidov aksiom paralelnosti.

Propozicija 2.5 *Neka je* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *afina ravnina. Onda je paralelnost relacija ekvivalencije na* $\boldsymbol{B}$*. Ako je* $\boldsymbol{D}$ *konačna, postoji prirodan broj* n *(koji zovemo red od* $\boldsymbol{D}$*) koji zadovoljava sljedeće:*

(2.5.a) $|(p)| = n + 1$ *za sve točke* p*;*

(2.5.b) $|(G)| = n$ *za sve pravce* G*;*

(2.5.c) $|V| = n^2, \quad |\boldsymbol{B}| = n^2 + n.$

Primjere projektivne ravnine možemo dobiti ako pokažemo da su, u suštini, projektivna i afina ravnina jednaki. Da bi precizirali takvu povezanost, potrebna nam je definicija.

Definicija 2.6 *Neka je* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *incidencijska struktura te* $Q \subseteq V$ *i* $\boldsymbol{C} \subseteq \boldsymbol{B}$*. Incidencijska struktura inducirana sa* $\boldsymbol{D}$ *na* Q *i* $\boldsymbol{C}$ *je* $\boldsymbol{D}' = (Q, \boldsymbol{C}, I \,|\, Q \times \boldsymbol{C})$ *koju nazivamo inducirana substruktura incidencijske strukture* $\boldsymbol{D}$*. Umjesto* $I \,|\, Q \times \boldsymbol{C}$ *obično opet pišemo* I*.*

Propozicija 2.7 *Neka je* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *projektivna ravnina te* G *pravac iz* $\boldsymbol{D}$*. Onda je substruktura* $\boldsymbol{D}_G = (V \backslash (G), \boldsymbol{B} \backslash \{G\}, I)$ *afina ravnina. Obratno, svaka afina ravnina može se dobiti iz projektivne ravnine na ovaj način. U konačnom slučaju, red od* $\boldsymbol{D}$ *i red od* $\boldsymbol{D}_G$ *su jednaki.*

Uočimo da je proces dobivanja afine ravnine na ovakav način jedinstven do na izomorfizam. Dakle, neizomorfne afine ravnine mogu biti dobivene iz iste projektivne ravnine u ovisnosti o pravcu koji koristimo u konstrukciji.

Kao direktnu posljedicu propozicija 2.3 i 2.7 imamo sljedeći korolar.

Korolar 2.8 *Za svaki prirodan broj* q*, čiji se rastav na proste faktore sastoji od samo jednog prostog broja, postoji afina ravnina reda* q*.*

Definicija 2.9 *Konačna incidencijska struktura* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *se naziva blok dizajn s parametrima* v, k, λ $(v, k, \lambda \in \mathbb{N})$ *ako zadovoljava sljedeće uvjete:*

(2.9.a) $|V| = v$;

(2.9.b) $|(p, q)| = \lambda$ *za sve* $\{p, q\} \in \binom{V}{2}$, *tj. bilo koje dvije različite točke su povezane s točno* λ *blokova.*

(2.9.c) $|(B)| = k$ *za bilo koji blok* B.

Često za $\boldsymbol{D}$ pišemo $S_\lambda(2, k; v)$ ili u slučaju $\lambda = 1$, jednostavno $S(2, k; v)$. Slovo S je skraćenica za Steinerov sistem.
Koristeći ovu terminologiju, projektivna ravnina reda n je primjer Steinerovog sistema $S(2, n+1; n^2+n+1)$, a afina ravnina $S(2, n; n^2)$. Ovo su jedini primjeri blok dizajna s ovim parametrima.
U prethodnoj definiciji dovoljno je bilo zahtijevati samo konstantnost stupnja blokova, a ne i točaka. Razlog tome je što je uvjet konstantnosti stupnja točaka ispunjen kao posljedica sljedećeg teorema.

Teorem 2.10 *Neka je* $\boldsymbol{D}$ $S_\lambda(2, k; v)$. *Onda imamo:*

(2.10.a) $|(p)| = \lambda(v-1)/(k-1) =: r$ *za sve točke* p;

(2.10.b) $|\boldsymbol{B}| = \lambda v(v-1)/k(k-1) =: b$.

Kako r i b moraju biti prirodni brojevi, slijedi

Korolar 2.11 *Neka su* $v, k, \lambda \in \mathbb{N}$. *Nužni uvjeti za postojanje* $S_\lambda(2, k; v)$ *su:*

(2.11.a) $\lambda(v-1) \equiv 0 (mod\, k-1)$;

(2.11.b) $\lambda v(v-1) \equiv 0 (mod\, k(k-1))$.

Afine i projektivne ravnine unaprijed osiguravaju postojanje familija blok dizajna.

Definicija 2.12 *Neka je F polje i W n-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem F. Onda skup svih koseta potprostora od W, određenih inkluzijom, nazivamo n-dimenzionalnim afinim prostorom nad poljem F. Ako je F polje sa q elemenata, pišemo $AG(n,q)$. Koseti vektorskog potprostora $\{0\}$ nazivamo točke, kosete jednodimenzionalnih vektorskih potprostora nazivamo pravci, one dvodimenzionalnih potprostora nazivamo ravnine, a $(n-1)$-dimenzionalnih potprostora hiperravnine. Općenito, kosete i-dimenzionalnih vektorskih potprostora nazivamo i-dimenzionalni blokovi ili samo i-blokovi. Točke iz $AG(n,q)$ zajedno sa d-dimenzionalnim blokovima iz $AG(n,q)$ tvore incidencijsku strukturu koju označavamo $AG_d(n,q)$. Za $d = 1$, umjesto $AG_1(n,q)$, često pišemo $AG(n,q)$.*

Propozicija 2.13 *$AG_d(n,q)$ je blok dizajn s parametrima $v = q^n$, $k = q^d$, $r=\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q$, $\lambda = \begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q$ i $b=q^{n-d}\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q$. Ovdje $\begin{bmatrix} n \\ i \end{bmatrix}_q$ označava broj i-dimenzionalnih potprostora n-dimenzionalnog vektorskog prostora nad GF(q), tzv. Gausovih koeficijenata.*

Zbog lakšeg izračunavanja zadat ćemo direktnu formulu za Gausove koeficijente.

Lema 2.14 *Neka je q prirodan broj čiji se rastavu na proste faktore sastoji samo od jednog prostog broja i neka su n i d pozitivni takvi da $d \leq n$. Onda vrijedi*

$$\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-d+1}-1)}{(q^d-1)(q^{d-1}-1)\cdots(q-1)}. \qquad \textit{(2.14.a)}$$

Definicija 2.15 *Neka je F polje i W $(n+1)$-dimenzionalan vektorski prostor nad poljem F. Onda skup svih potprostora od W, određenih inkluzijom, nazivamo n-dimenzionalnim projektivnim prostorom nad poljem F. Ako je F Galoisovo polje $GF(q)$, pišemo $PG(n,q)$. Jednodimenzionalni (dvodimenzionalni, trodimenzionalni, n-dimenzionalni) potprostori od W nazivaju se točke (pravci, ravnine, hiperravnine). Općenito, $(i+1)$-dimenzionalni vektorski potprostori nazivaju se i-blokovi. Točke iz $PG(n,q)$ zajedno sa d-dimenzionalnim blokovima iz $PG(n,q)$ tvore incidencijsku strukturu koju označavamo $PG_d(n,q)$. Za $d=1$, umjesto $PG_1(n,q)$, često pišemo $PG(n,q)$.*

Propozicija 2.16 *$PG_d(n,q)$ je blok dizajn s parametrima $v=\begin{bmatrix} n+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = (q^{n+1}-1)/(q-1)$, $k=\begin{bmatrix} d+1 \\ 1 \end{bmatrix}_q = (q^{d+1}-1)/(q-1)$, $r=\begin{bmatrix} n \\ d \end{bmatrix}_q$, $\lambda=\begin{bmatrix} n-1 \\ d-1 \end{bmatrix}_q$ i $b=\begin{bmatrix} n+1 \\ d+1 \end{bmatrix}_q$.*

Zaključit ćemo odjeljak s još nekoliko definicija. Iz onoga što slijedi bit će jasno da su ponekad zahtjevi za blok dizajn previše restriktivni. U praksi je nekad korisno promatrati uvjete (2.9.b) i (2.9.c) odvojeno.

Definicija 2.17 *Neka je λ prirodan broj i $K \subseteq \mathbb{N}$. Konačna incidencijska struktura $\boldsymbol{D}=(V,\boldsymbol{B},I)$ se naziva simetrični dizajn (PBD) gdje su veličine blokova elementi skupa K ako i samo ako zadovoljava sljedeće*

(2.17.a) $|(p,q)|=\lambda$ *za bilo koje dvije točke p i q,*

(2.17.b) $|(B)| \in K$ *za bilo koji blok B.*

Ako $\boldsymbol{D}$ ima v točaka, pišemo $S_\lambda(2,K;v)$. Za $\lambda=1$ koristimo jednostavniji zapis $S(2,K;v)$ i izraz linearni prostor (umjesto PBD). Uočimo da se ne moraju svi elementi skupa K pojaviti kao veličine blokova. Naprimjer, K može biti beskonačan. Ako je $K=\{k\}$, dolazimo do pojma blok dizajna.

Definicija 2.18 *Neka je k prirodan broj i $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ konačna incidencijska struktura. $\boldsymbol{D}$ se naziva $k - hipergraf$ ako i samo ako zadovoljava*

(2.18.a) $|(B)| = k$ *za bilo koji blok B.*

Ako $k = 2$, govorimo o grafu. Onda točke nazivamo vrhovima, a blokove rubovima.

Poglavlje 3

t-Dizajni, Steinerovi sistemi i konfiguracije

U propoziciji 2.13 smo vidjeli da je $AG_2(n, 2)$ (incidencijska struktura formirana od točaka i ravnina u n-dimenzionalnom afinom prostoru nad poljem GF(2)) Steinerov sistem $S_\lambda(2, 4; 2^n)$ gdje je $\lambda = 2^{n-1} - 1$. Specijalno, bilo koje dvije točke se nalaze na $2^{n-1} - 1$ ravnina. Postoji još značajnija ujednačenost: bilo koje tri točke se nalaze na jedinstvenoj zajedničkoj ravnini. Ovdje koristimo svojstvo da nikoje tri točke nisu na zajedničkom pravcu u vektorskom prostoru nad $GF(2)$. Ovo nas vodi do poopćenja prethodnih koncepata:

Definicija 3.1 *Neka su t i λ pozitivni brojevi, a $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ konačna incidencijska struktura. Onda se $\boldsymbol{D}$ naziva t-uravnotežena s parametrom λ ako i samo ako*

(3.1.a) $\quad |(Q)| = \lambda$ *za bilo koji t-podskup $Q \subseteq V$.*

Ako je $|V| = v$, $|(B)| \in K$ za svaki $B \in \boldsymbol{B}$, onda za $\boldsymbol{D}$ pišemo $S_\lambda(t, K; v)$. Ako je $\boldsymbol{D}$ također i k-hipergraf, onda se naziva t-dizajn s parametrima k i λ.

Za t-dizajn s v točaka pišemo $S_\lambda(t,k;v)$. U slučaju $\lambda = 1$, t-dizajn s v točaka je Steinerov sistem $S(t,k;v)$.

Dakle, afina i projektivna ravnina su Steinerovi sistemi. PBD-i su 2-uravnotežene incidencijske strukture, a blok dizajni su 2-dizajni. Dizajni $AG_2(n,2)$ su istovremeno 1, 2, 3-dizajni. Ovo je osigurano sljedećim rezultatom.

Teorem 3.2 *Neka je $\boldsymbol{D}$ t-dizajn i $s < t$ pozitivan broj. Onda je $\boldsymbol{D}$ također i s-dizajn. Specijalno, ako $\boldsymbol{D}$ ima parametre v, k i λ_t (gdje je λ_t broj blokova u t-skupu), onda je parametar λ_s (broj blokova u s-skupu) dan formulom*

$$\lambda_s = \lambda_t \binom{v-s}{t-s} \Big/ \binom{k-s}{t-s}. \tag{3.2.a}$$

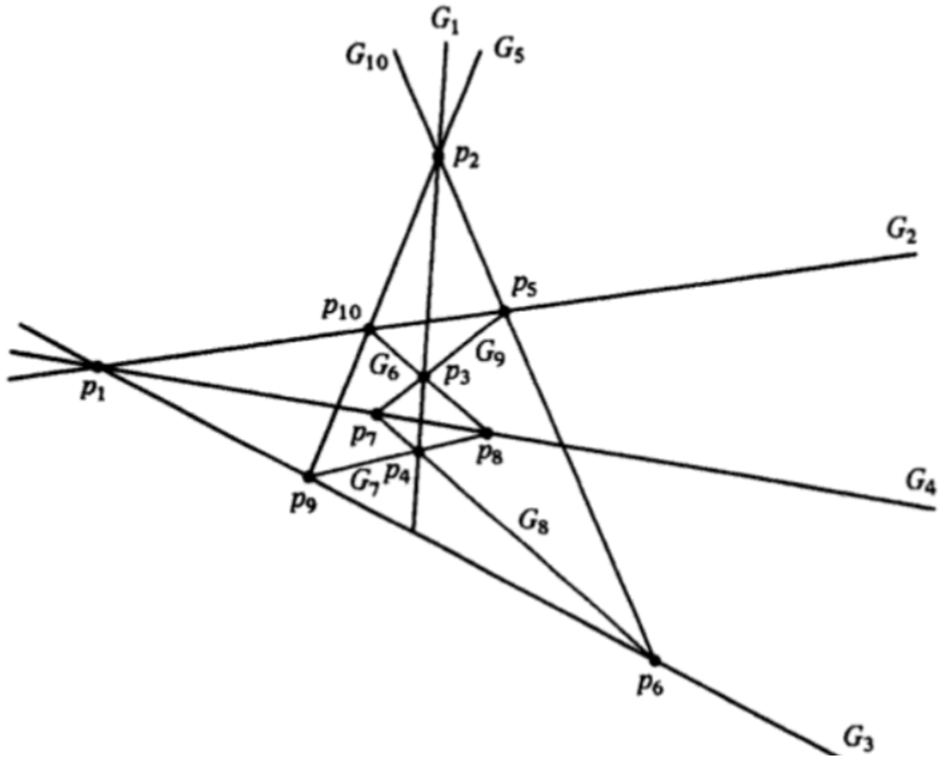
Definicija 3.3 *$S(2,3;v)$ se naziva Steinerov trostruki sistem STS(v). $S(3,4;v)$ se naziva Steinerov četverostruki sistem SQS(v).*

Sada promatramo 1-dizajne.

Definicija 3.4 *1-dizajn $S_r(1,k;v)$ se naziva taktička konfiguracija (ili jednostavno konfiguracija) s parametrima v, k, r i $b := vr/k$.*

U uvjetima incidencijskih matrica, konfiguracija je karakterizirana konstantnom sumom redaka r i konstantnom sumom stupaca k. Specijalan slučaj teorema 3.2 je činjenica da je svaki 2-dizajn konfiguracija.
Sada dajemo dva primjera koja su od fundamentalne važnosti za klasičnu projektivnu geometriju.

Primjer 3.5 *Konfiguracija s parametrima v = b = 10, r = k = 3 zadana incidencijskom matricom ispod i nacrtana na Slici 3.1 se naziva Desarguesova konfiguracija. Njena geometrijska važnost je sljedeća: projektivna ravnina je izomorfna ravnini dobivenoj iz polja kao u propoziciji 2.3 ako i samo ako za svaka dva trokuta $\{p_5, p_6, p_7\}$ i $\{p_8, p_9, p_{10}\}$, koja su vidljiva iz točke p_1 (kako* *je i nacrtano), vrijedi da se sjecišta* p_2, p_3, p_4 *odgovarajućih strana trokuta nalaze na zajedničkom pravcu* G_1.



Slika 3.1

Odgovarajuća incidencijska matrica je

$$
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Slika 3.2

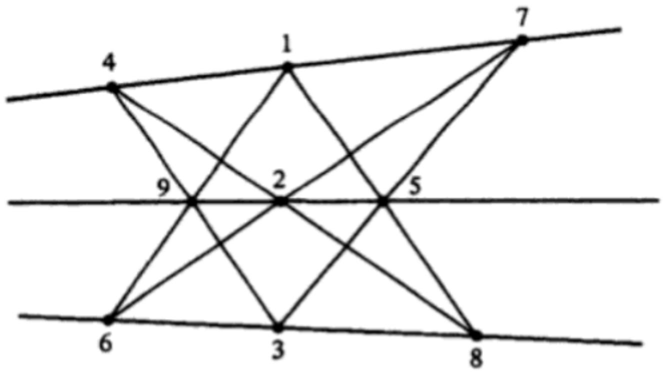
Kao posljedica ove karakterizacije, ravnine koje su dobivene iz polja nazivaju se Desarguesijanove,a ostale ne-Desarguesijanove. U definiranju projektivnih ravnina u propoziciji 2.3 nismo zahtijevali da polje bude komutativno. Je li polje komutativno ili nije, možemo razaznati iz druge konfiguracije.

Primjer 3.6 *Pappova konfiguracija s parametrima* $v = b = 9$, $r = k = 3$ *dana je incidencijskom matricom*

$$
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
$$

Slika 3.3

i izgleda kao na slici:



Slika 3.4

Njeno geometrijsko značenje je sljedeće: projektivna ravnina je izomorfna onoj dobivenoj iz komutativnog polja kao u propoziciji 2.3 ako i samo ako za bilo kojih 6 različitih točaka $p_1, \ldots, p_6$ (gdje su p_1, p_3, p_5 i p_2, p_4, p_6 kolinearne), vrijedi da su sjecišta s_i dužina $p_i p_{i+1}$ i $p_{i+3} p_{i+4}$ (i = 1,2,3; indeksi modulo 6) kolinearna.

Zaključujemo odjeljak zanimljivom digresijom. Vidjeli smo da možemo reprezentirati Pappovu i Desarguesovu kofiguraciju u realnoj ravnini koristeći pravce. Međutim, to je nemoguće učiniti za linearne prostore, osim za trivijalne. Specijalno:

Propozicija 3.7 (Silvestrov problem) $S(2, K; n)$ *s najmanje tri točke na svakom pravcu ne može biti reprezentirana u realnom prostoru (koristeći samo ravne linije), osim ako nisu sve tri točke na istom pravcu.*

Poglavlje 4

Izomorfizmi, dualnost i korelacije

Nakon što smo upoznali neke osnovne objekte teorije dizajna, možemo razmotriti pojam izomorfizma. Formalna definicija je sljedeća:

Definicija 4.1 *Neka su* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *i* $\boldsymbol{D}' = (V', \boldsymbol{B}', I')$ *incidencijske strukture i neka je* $\pi \colon V \cup \boldsymbol{B} \to V' \cup \boldsymbol{B}'$ *bijekcija.* π *zovemo izomorfizam ako i samo ako zadovoljava:*

(4.1.a) $\quad V^\pi = V'$ *i* $\boldsymbol{B}^\pi = \boldsymbol{B}'$;

(4.1.b) $\quad pIB \iff p^\pi I' B^\pi$ *za sve* $p \in V$ *i* $B \in \boldsymbol{B}$.

U ovom slučaju za $\boldsymbol{D}$ *i* $\boldsymbol{D}'$ *kažemo da su izomorfni. Ako je* $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}'$, *onda* π *zovemo automorfizam.*

U uvjetima incidencijskih matrica M i M', strukture $\boldsymbol{D}$ i $\boldsymbol{D}'$ su izomorfne ako i samo ako postoje permutacije redaka i stupaca takve da M transformiraju u M', tj. ako postoje permutacijske matrice P i Q takve da

(4.2.a) $\quad PMQ = M'$.

Očito, skup svih automorfizama dane incidencijske strukture $\boldsymbol{D}$ tvori grupu. Grupa svih automorfizama incidencijske strukture $\boldsymbol{D}$ se naziva potpuna grupa automorfizama od $\boldsymbol{D}$ i označava se $Aut\boldsymbol{D}$. Podgrupa od $Aut\boldsymbol{D}$ se naziva grupa automorfizama od $\boldsymbol{D}$.

Propozicija 4.2 *Neka je $\boldsymbol{D} = (P, \boldsymbol{B}, I)$ jednostavna incidencijska struktura. Onda je $\boldsymbol{D}$ izomorfno sa $(P, \{(B) : B \in \boldsymbol{B}\}, \in)$ (tj. u jednostavnoj incidencijskoj strukturi blok se može identificirati skupom točaka s kojima je incidentan).*

Definicija 4.3 *Konačna incidencijska struktura s jednako mnogo točaka i blokova se naziva kvadratna. Za kvadratni 2-dizajn kažemo da je simetričan.*

Propozicija 4.4 (Brauer 1941, Parker 1957) *Neka je $\boldsymbol{D}$ kvadratna incidencijska struktura i $\alpha \in Aut\boldsymbol{D}$. Ako je incidencijska matrica od $\boldsymbol{D}$ nesingularna, onda je broj fiksnih točaka od α jednak broju fiksnih blokova.*

Sada uvodimo koncept dualnosti.

Definicija 4.5 *Neka je $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ incidencijska struktura. Onda je dualna struktura $\boldsymbol{D}^*$ od $\boldsymbol{D}$ definirana kao $\boldsymbol{D}^* := (\boldsymbol{B}, V, I^*)$ gdje je $(B, p) \in \boldsymbol{I}^*$ ako i samo ako $(p, B) \in I$. Obično pišemo I umjesto I*. Neka je $\boldsymbol{D}$ incidencijska struktura. Izomorfizam sa $\boldsymbol{D}$ na njegovu dualnu strukturu $\boldsymbol{D}^*$ se naziva dualnost ili korelacija. Korelacija reda 2 se naziva polarnost. Ako postoji korelacija od $\boldsymbol{D}$, onda za $\boldsymbol{D}$ kažemo da je samodualna.*

U uvjetima incidencijskih matrica, ako je $\boldsymbol{D}$ reprezentirana sa M, onda je $\boldsymbol{D}^*$ reprezentirana sa M^T. Klasa incidencijskih struktura se naziva samodualna ako sadrži sve dualne strukture svih incidencijskih struktura. Za takve klase imamo princip dualnosti: za teorem o strukturama klasa zamjenom pojmova *točke* i *blokovi* dobivamo drugi teorem koji vrijedi za sve klase i koji zovemo dualni teorem. Ovo vrijedi jer se dualna i dana klasa podudaraju (trivijalno, vrijedi $(\boldsymbol{D}^*)^* = \boldsymbol{D}$). Naprimjer, klasa svih projektivnih ravnina je samodualna, a klasa afinih ravnina nije samodualna.

Korelacija π bijektivno preslikava točke u blokove i obratno. Za polarnost uvjet (4.1.b) možemo zapisati i na način

(4.5.a) $pIq^\pi \Longleftrightarrow qIp^\pi$ za sve točke p, q.

Ovako zapisan uvjet je ekvivalentan činjenici da $\boldsymbol{D}$ ima simetričnu incidencijsku matricu. Pokazali smo da konačna incidencijska struktura ima polarnost ako i samo ako ima simetričnu incidencijsku matricu.

Propozicija 4.6 *Neka je $\boldsymbol{D}$ konačna incidencijska struktura i neka se $\Gamma \leq Aut\boldsymbol{D}$ ponaša regularno na skupu točaka i na skupu blokova. Ako je Γ abelovska, onda $\boldsymbol{D}$ ima polarnost.*

Poglavlje 5

Potprostori

U ovom odjeljku promatramo samo incidencijske strukture za koje su bilo koje dvije točke povezane najviše jednim blokom. U ovom slučaju, blokove možemo doživljavati kao skupove točaka i izostaviti simbol I za relaciju incidencije. Također, koristimo naziv pravci umjesto blokovi te ćemo za pravac koji povezuje dvije točke x i y koristiti oznaku xy. Incidencijska struktura ovog tipa se uobičajeno naziva parcijalni linearni prostor (semilinearni prostor). Ako su svake dvije točke povezane pravcem, koristimo izraz linearni prostor. Sada želimo proučavati generalizaciju pojma bloka u afinim i projektivnim prostorima.

Definicija 5.1 *Neka je $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B})$ parcijalni linearni prostor. Podskup U skupa V se naziva potprostor ako je svaki pravac ili potpuno sadržan u U ili presijeca U u najviše jednoj točki:*

$$p, q \in U, p \neq q \quad i \quad p, q, r \in B \in \boldsymbol{B} \text{ uvijek implicira } r \in U. \tag{5.1.a}$$

Potprostor U definira induciranu podstrukturu $\boldsymbol{U} = (U, \boldsymbol{C})$ gdje $\boldsymbol{C}$ sadrži sve pravce koji sijeku U u najmanje 2 točke. Općenito ćemo poistovjećivati U i $\boldsymbol{U}$.

Primjer 5.2 *(a) Trivijalno, prazan skup, svaka točka, svaki pravac, cijeli V te svi skupovi u parovima nepovezanih točaka su potprostori. Za potprostor kažemo da je pravi ako nije ni prazan skup ni cijeli V.*
(b) Lako vidimo da su i-blokovi u projektivnim i afinim ravninama potprostori dizajna $PG_1(n,q)$ *i* $AG_1(n,q)$*. Preciznije, u slučaju projektivne ravnine sa svakim i-blokom U (tj. sa svakim (i+1)-dimenzionalnim potprostorom (n+1)-dimenzionalnog vektorskog prostora W nad poljem GF(q)) možemo povezati odgovarajući potprostor*

(5.2.a) $U' := \{\langle x\rangle : x \in U \setminus \{0\}\}$*, gdje je* $\langle x\rangle = xGF(q)$

dizajna $PG_1(n,q)$*. To radimo jer U sam po sebi nije potprostor (ne sastoji se od točaka nego unija točaka). Mi svejedno smatramo U potprostorom od* $PG_1(n,q)$*.*

Propozicija 5.3 *Potprostori dizajna* $AG_1(n,q)$ *gdje je* $q > 2$ *i* $PG_1(n,q)$ *su točno i-blokovi i prazan skup.*

Propozicija 5.4 *Neka je* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B})$ *linearni prostor, a* k *i* k^* *redom najmanja i najveća veličina pravca koja se pojavljuje u* $\boldsymbol{D}$*. Onda je veličina* u *svakog pravog potprostora U ograničena sa*

(5.4.a) $$u \geq (v-1)/(k-1).$$

Specijalno,

(5.4.b) $$k^* \leq (v-1)/(k-1).$$

Spominjemo jednostavnu i veoma važnu posljedicu propozicije 5.4.

Korolar 5.5 (Fisherova nejednakost) *Za bilo koji Steinerov sistem* $S(2,k;v)$ *gdje je* $v > k$*, parametar* r *zadovoljava*

(5.5.a) $\qquad k \leq r$

ili ekvivalentno

(5.5.b) $\qquad v \leq b.$

Slučaj jednakosti u (5.3.a) je od posebnog interesa:

Propozicija 5.6 *Neka je $\boldsymbol{D}$ linearni prostor $S(2, K; v)$, a U pravi potprostor te $u := |U|$ i $k := minK$. Onda je $u = (v-1)/(k-1)$ ako i samo ako uklanjanjem potprostora U iz $\boldsymbol{D}$ dobivamo razrješiv Steinerov sistem $RS(2, k-1; v-u)$.*

Sljedeće ćemo navesti jednostavnu konstrukciju novih linearnih prostora.

Lema 5.7 *Svaki potprostor U linearnog prostora može biti zamijenjen svakim linearnim prostorom sa $|U|$ točaka. Specijalno, bilo koji potprostor može biti zamijenjem pravcem i svaki pravac se može razdijeliti na linearni prostor.*

Pogledajmo generalizaciju propozicije 5.4.

Propozicija 5.8 *Neka je $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B})$ linearni prostor i neka je k najmanja veličina pravca koji se pojavljuje u $\boldsymbol{D}$. Nadalje, neka su U i W dva prava potprostora takva da $U \nsubseteq W \nsubseteq U$. Onda imamo*

(5.10.a) $\qquad (k-1)|U \cap W| \geq |U| + (k-1)|W| - v.$

Poglavlje 6

Hadamardovi dizajni

Zadnje poglavlje je posvećeno konstrukciji još jedne važne familije simetričnih 2-dizajna, koji se mogu podudarati sa dizajnima $PG_{d-1}(d,q)$ samo za $q = 2$. To je familija takozvanih Hadamardovih dizajna koji nisu samo zanimljivi sami za sebe već i u teoriji kodiranja, komunikacijskom inženjerstvu i optici.

Definicija 6.1 *(a) Hadamardov dizajn je (simetrični)* $S_\lambda(2, 2\lambda+1; 4\lambda+3)$. *Onda je*

$$n = k - \lambda = \lambda + 1, \quad k = 2n - 1, \quad v = 4n - 1. \tag{6.1.a}$$

(b) Hadamardova matrica reda m *je* $m \times m$*-matrica* H *s elementima iz skupa* $\{1, -1\}$ *takva da*

$$HH^T = mI, \tag{6.1.b}$$

$$H^T H = mI. \tag{6.1.c}$$

Hadamardova matrica očito zadovoljava jednakost u sljedećoj nejednakosti. Ovdje $|x|$ *označava duljinu vektora* x.

Ako je A *kompleksna* $(n \times n)$*-matrica sa ne nula redovima* $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$*, onda*

$$|detA| \leq |\boldsymbol{a}_1| \cdot \ldots \cdot |\boldsymbol{a}_n|$$

s jednakošću ako i samo ako su bilo koja dva različita reda iz A ortogonalna.

Primjer 6.2 *(a) Već smo vidjeli sljedeće primjere Hadamardovih dizajna. Blok dizajni* $PG_{m-1}(m,2)$ *iz propozicije 2.16 su simetrični dizajni gdje je* $v = b = 2^{m+1} - 1, k = r = 2^m - 1, \lambda = 2^{m-1} - 1$ *tj.* $(v, k, \lambda) = (7,3,1)$ *ili* $(15,7,3)$.
(b) Matrice

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

su Hadamardove matrice.

Lema 6.3 *(Simetrični)* $S_{n-1}(2, 2n-1; 4n-1)$ *postoji ako i samo ako postoji Hadamardova matrica reda 4n.*

Lema 6.4 *Ako je H* $m \times m$*-Hadamardova matrica, onda* $m = 1$, $m = 2$ *ili* $m \equiv 0 (mod\, 4)$.

Lema 6.5 *Ako postoje Hadamardove matrice reda m i* m'*, onda postoji Hadamardova matrica reda* mm'.

Definicija 6.6 *(a) Izvedena incidencijska struktura u točki* $x \in V$ *incidencijske strukture* $\boldsymbol{D} = (V, \boldsymbol{B}, I)$ *je inducirana podstruktura* $\boldsymbol{D}_x = (V_x, \boldsymbol{B}_x, I_x)$ *gdje je* $V_x := V/\{x\}$, $\boldsymbol{B}_x = \{B \in \boldsymbol{B} : xIB\}$ *i* $I_x = I/V_x \times \boldsymbol{B}_x$. $\boldsymbol{D}$ *zovemo ekstenzija od* $\boldsymbol{D}_x$.
(b) Hadamardov 3-dizajn je definiran kao $S_{n-1}(3, 2n; 4n)$. *Ova definicija je motivirana sljedećim teoremom.*

Teorem 6.7 *Hadamardov dizajn* $S_{n-1}(2, 2n-1; 4n-1)$ *se može proširiti do Hadamardovog 3-dizajna* $S_{n-1}(3, 2n; 4n)$.

Za kraj ovog poglavlja pogledat ćemo teorem koji doprinosi konstrukciji mnogih Hadamardovih dizajna.

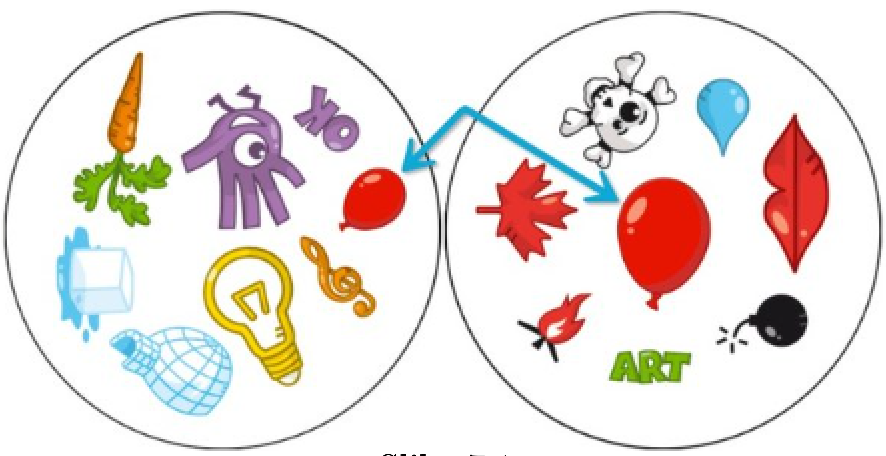
Teorem 6.8 *Ako je q neparna potencija prostog broja, onda postoji Hadamardova matrica reda $m = 2^e(q+1)$ gdje je e pozitivan broj takav da $m \equiv 0 (mod\, 4)$.*

Poglavlje 7

Primjena teorije dizajna u dizajnu igara

7.1 Društvena igra *Spot It!*

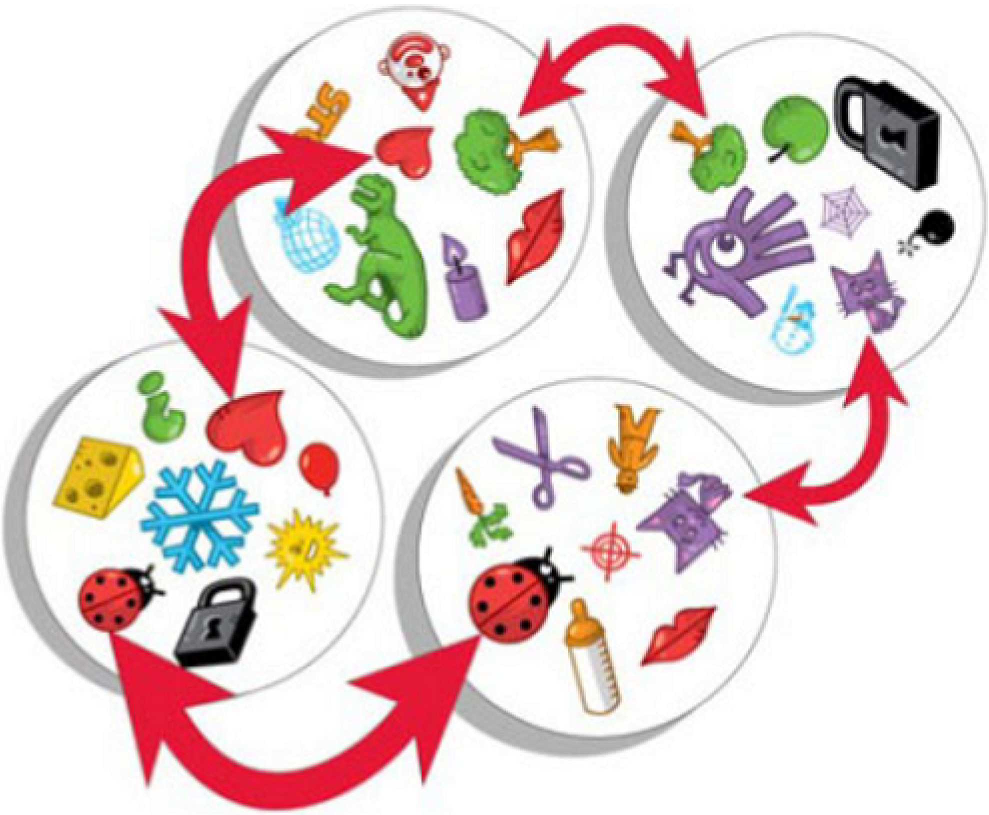
U ovom poglavlju od posebnog interesa nam je primjena teorije dizajna u konstrukciji popularne društvene igre *Spot It!*.



Slika 7.1

7.1. Društvena igra *Spot It!*

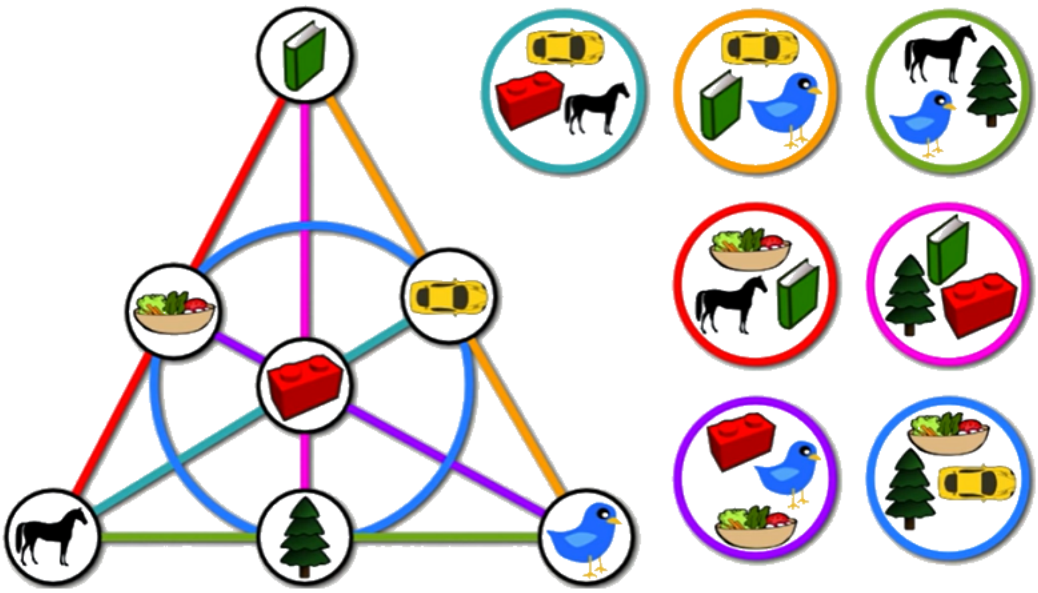
Spot It! je zabavna igra brzoga tempa za 2 do 8 igrača svih uzrasta. Igra se sastoji od 55 kartica po 8 simbola te se svake dvije kartice podudaraju u točno jednom simbolu. Cilj igre je pronaći zajednički simbol dviju kartica prije protivničkog igrača. Špil karata je zapravo nepotpun, odnosno nedostaju mu dvije karte koje su kreatori igre izbacili. Dakle, maksimalan broj kartica je 57, a što je jednako ukupnom broju simbola koji se pojavljuju na karticama.



Slika 7.2

Svatko imalo znatiželjan će se zapitati kako je moguće da se svake dvije kartice podudaraju u točno jednom simbolu, a da se ta dva simbola više ne pojavljuju zajedno ni na jednoj preostaloj kartici. Nije magija, već nešto

malo realnije, ali jednako zanimljivo - matematika! Da budemo precizniji, teorija dizajna.
Odgovor leži u pojmu konačne projektivne ravnine. Podsjetimo se:
Projektivna ravnina je incidencijska struktura za koju vrijedi
(a) bilo koje dvije točke povezane su točno jednim pravcem;
(b) bilo koja dva različita pravca se sijeku u točno jednoj točki (Euklidov princip);
(c) postoji četverokut (4 točke među kojima nikoje 3 ne leže na istom pravcu).
Primjer 1.3 najmanje projektivne ravnine sa 7 točaka i 7 pravaca je primjer matematičke strukture na kojoj se temelji igra *Spot It!*.



Slika 7.3

Ako promotrimo igru *Spot It!* kroz definiciju projektivne ravnine i ako poistovjetimo simbole na karticama s točkama, a kartice s blokovima tj. pravcima, lako možemo uočiti da su zadovoljena sva tri svojstva projektivne ravnine.

7.1. Društvena igra *Spot It!*

Kako je svaka projektivna ravnina incidencijska struktura, *Spot It!* zadovoljava svojstva incidencijskih struktura iz prve cjeline.

Podsjetimo se, stupanj bloka je broj točaka koje su incidentne s određenim blokom, a stupanj točke je broj blokova incidentan s određenom točkom. U kontekstu igre *Spot It!*, to bi značilo da je stupanj bloka broj simbola koji se nalazi na kartici. Svaka kartica sadrži točno 8 simbola, pa zaključujemo da je stupanj blokova konstantan i jednak 8. Analogno, stupanj točaka je također jednak 8 jer se svaki simbol pojavljuje na točno 8 kartica.

Dakle, *Spot It!* je incidencijska struktura s konstantnim stupnjevima blokova i točaka. Ako pogledamo Korolar 1.7, zaključujemo da vrijedi jednakost korolara $vr = bk$.

Pojasnimo najprije oznake:

v - ukupni broj simbola (57)

b - ukupni broj kartica (57)

r - broj kartica na kojima se pojavljuje jedan simbol (8)

k - broj simbola koje sadrži jedna kartica (8)

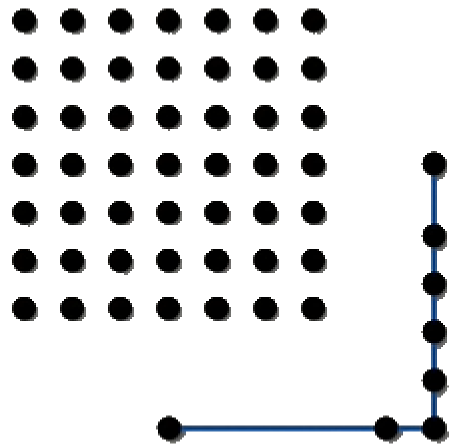
Sada pogledajmo propoziciju 2.2. Iz (2.2.a) i (2.2.b) zaključujemo da je igra *Spot It!* konačna projektivna ravnina reda 7 ($|(p)| = |(G)| = 7 + 1$, $|(V)| = |(\boldsymbol{B})| = 7^2 + 7 + 1$).

Dalje, iz definicije 2.9 vidimo da je *Spot It!* također i blok dizajn, tj. Steinerov sistem S(2,8;57) ($\lambda = 1$).

Iz teorema 2.10 i korolara 2.11 vidimo da su ispunjeni nužni i dovoljni uvjeti za postojanje takvog Steinerovog sistema.

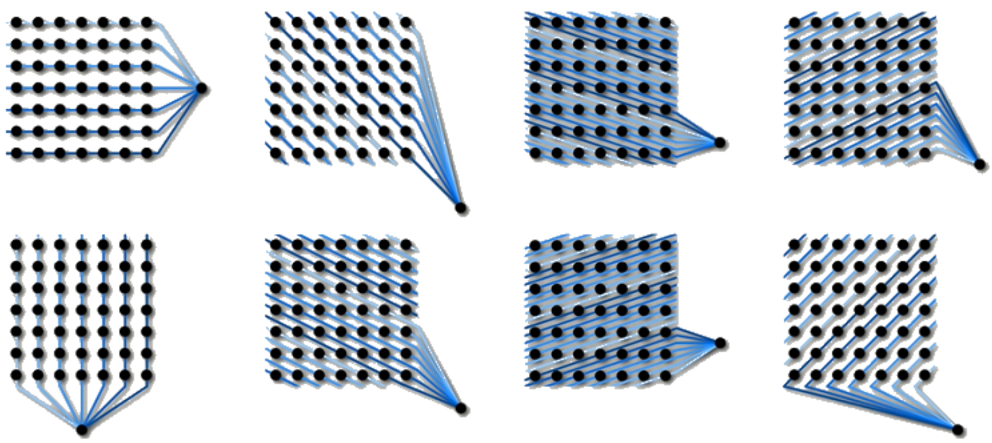
Promatrajući treću cjelinu uočavamo da ovakva projektivna ravnina zadovoljava uvjete još nekih lijepih konstrukcija kao što su k-hipergraf i t-dizajn.

Kako konstruiramo projektivnu ravninu za igru *Spot It!*?
Prvo rasporedimo točke u matricu 7×7. Preostalih 8 točaka rasporedimo sa strane kao na slici. Spojimo tih 8 točaka i time smo stvorili jedan blok.



Slika 7.4

Dalje, iz svake od tih 8 točaka povlačimo pravce spajajući tu točku sa 7 točaka iz matrice na načine kao na slici.



Slika 7.5

Na taj način smo zaista dobili 57 blokova tako da svaki blok sadrži 8 različitih točaka, svaka točka se nalazi na 8 blokova te se svaka dva bloka sijeku u točno jednoj točki. Sada smo pokazali da u igri *Spot It!* nema misterije, a ni slučajnosti.

Pogledajmo to u kontekstu kartica i simbola.

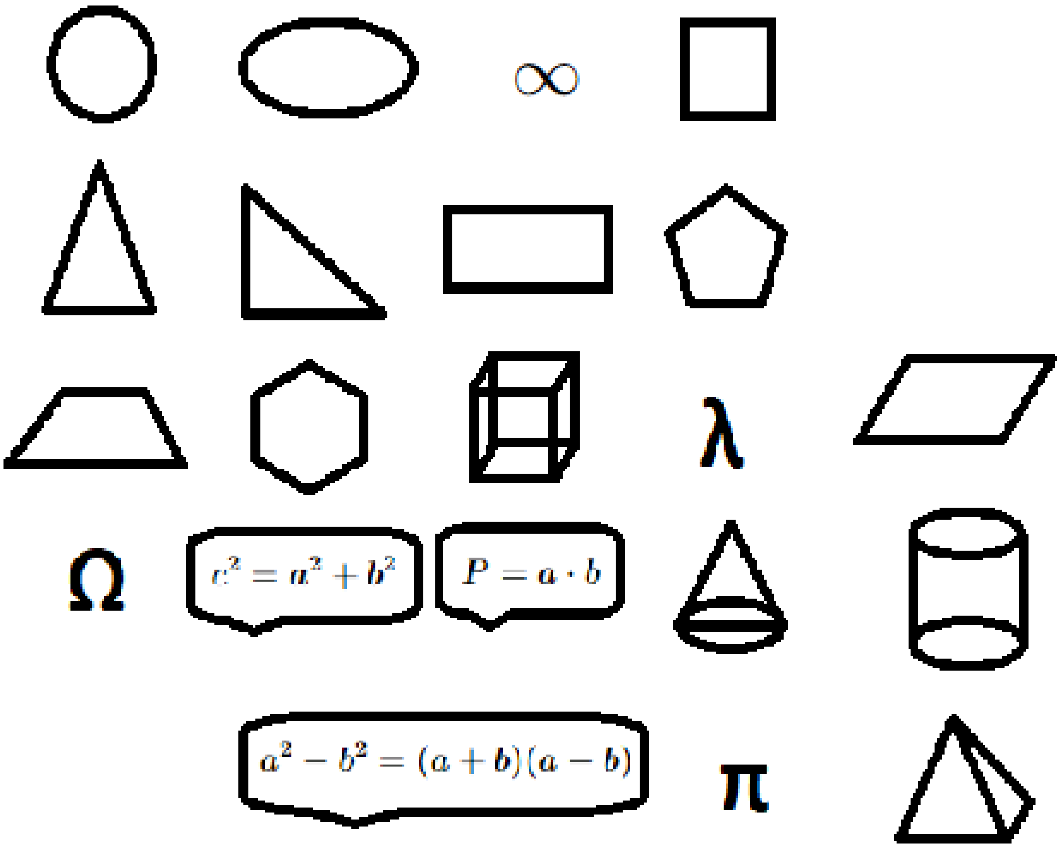
Slika 7.6

Poglavlje 8

Primjena teorije dizajna u dizajnu vlastite igre

U zadnjem poglavlju ćemo pogledati kako izgleda modificirana igra *Spot It!* s matematičkim pojmovima. Korišteni su geometrijski likovi, tijela, matematičke formule te slova grčkog alfabeta. Igra je reda 4, tj. ima 21 simbol i 21 karticu, a na svakoj kartici se nalazi 5 različitih sličica. Princip i cilj igre je isti kao i kod originalne igre. Kako bi igra i dalje imala smisla i zadržala težinu, sve sličice su stavljene u crno bijeli format.

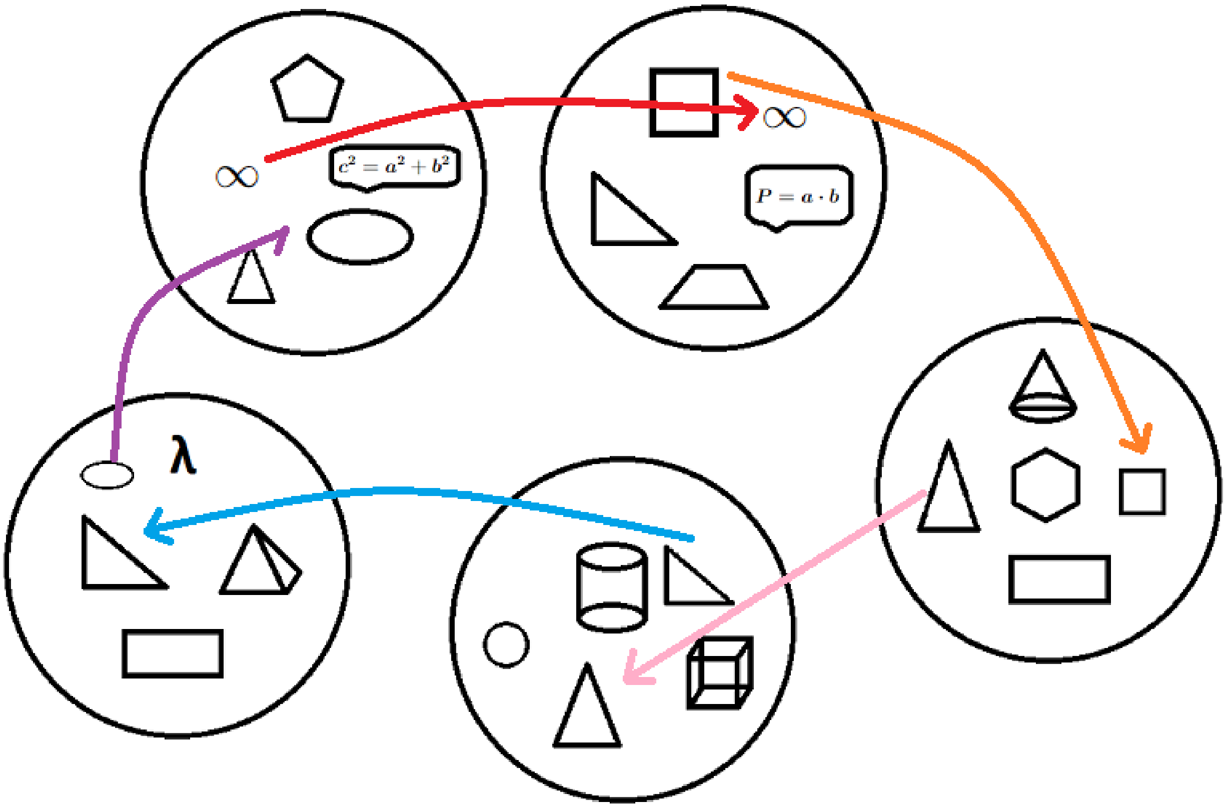
Pogledajmo prvo sve simbole raspoređene u matricu 4×4, a preostalih 5 sličica sa strane kao u prethodnoj cjelini.



Slika 8.1

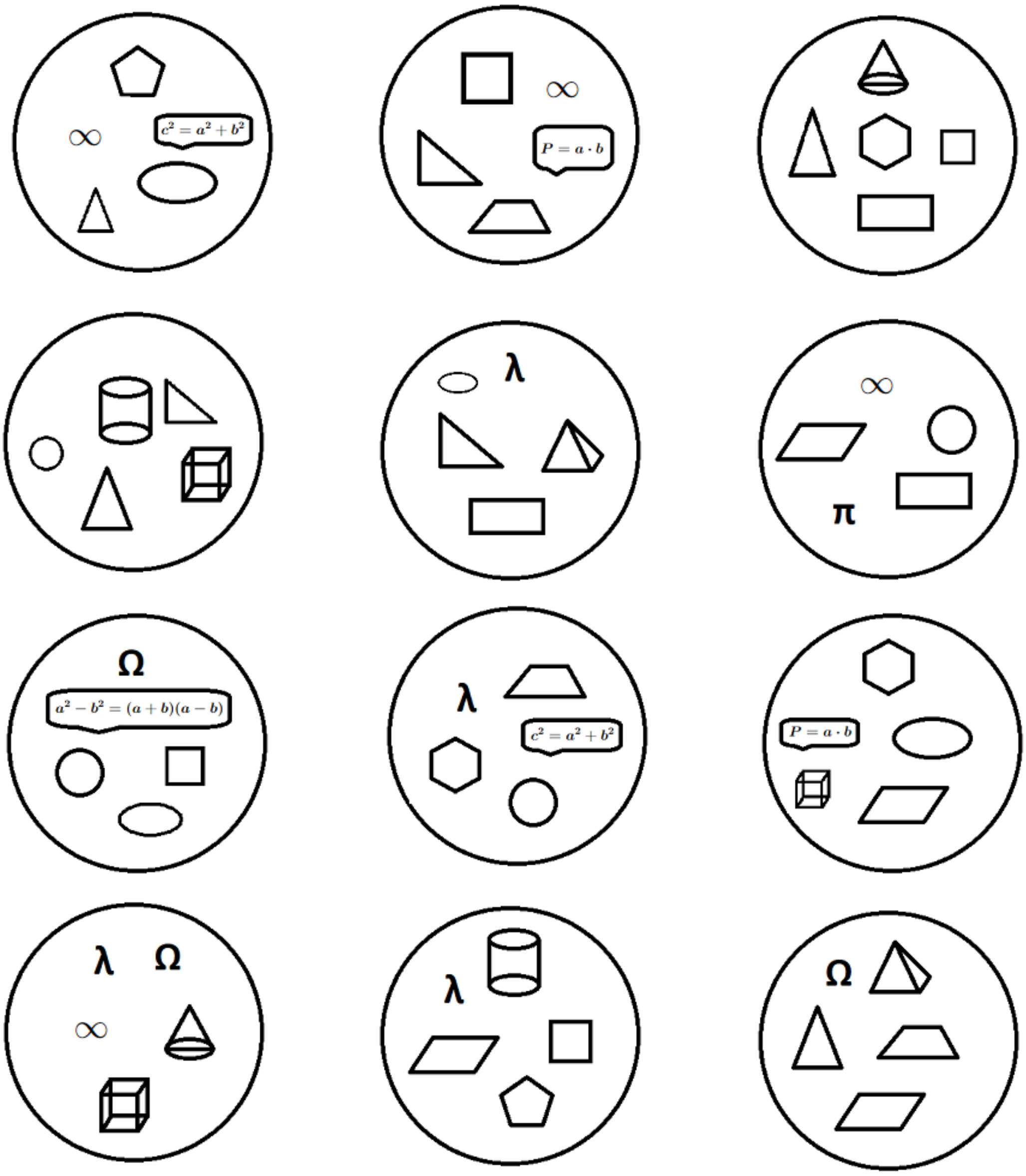
Koristeći metode dizajna igre *Spot It!* iz prethodne cjeline, uspjeli smo dizajnirati novu igru sa 21 karticom koja zadovoljava sve uvjete originalne igre.

Ova igra može biti korisna u nastavi za djecu u prva četiri razreda osnovne škole kod bržeg savladavanja novih pojmova i simbola. Nije ograničena samo na matematiku, već se lako prilagođava raznim gradivima drugih predmeta.



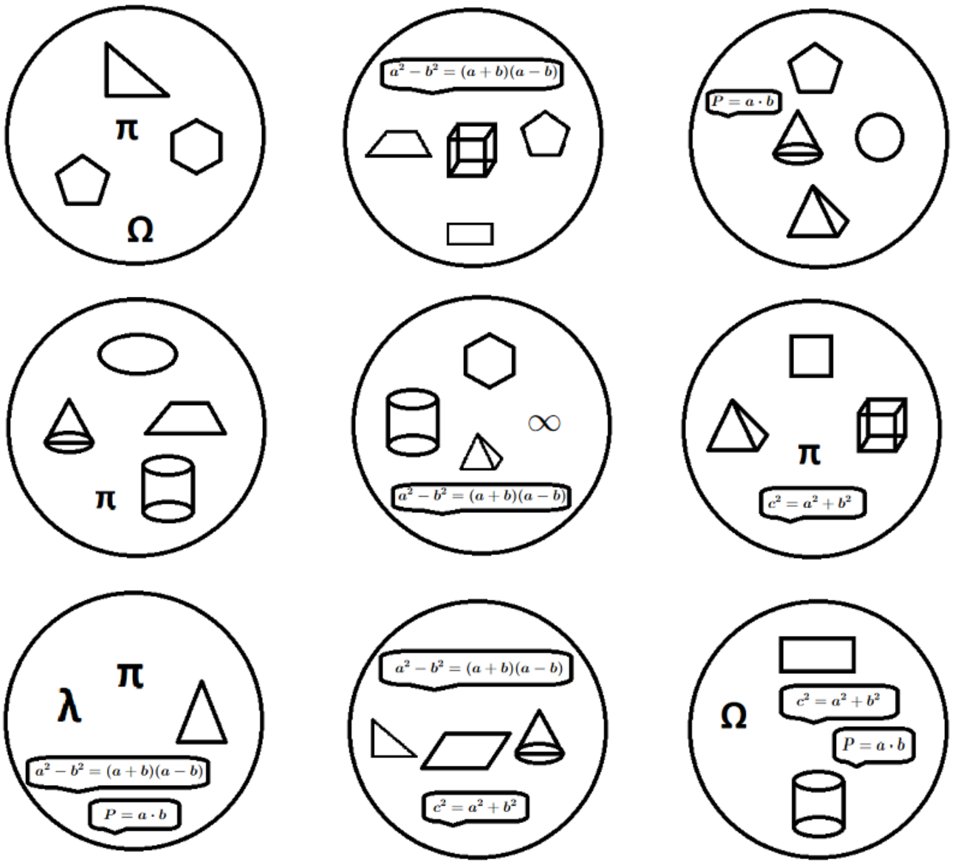
Slika 8.2

Pogledajmo sve kartice.



∞
$c^2 = a^2 + b^2$
∞
$P = a \cdot b$
λ
∞
π
Ω
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
λ
$c^2 = a^2 + b^2$
$P = a \cdot b$
λ Ω
∞
λ
Ω

Tablica 1


π
Ω
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$P = a \cdot b$
π
∞
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
π
$c^2 = a^2 + b^2$
π
λ
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$P = a \cdot b$
$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$
$c^2 = a^2 + b^2$
Ω
$c^2 = a^2 + b^2$
$P = a \cdot b$

Tablica 2

Literatura

[A1] T. Beth, D. Jungnickel, H. Lenz, Design Theory Volume I Second edition

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

TEORIJA DIZAJNA I NJENA PRIMJENA U DIZAJNU IGARA

Karla Josipa Džaja

Sažetak:

U ovom radu smo obradili osnove teorije dizajna počevši s incidencijskom strukturom te projektivnom i afinom ravninom i njihovim svojstvima. Nakon toga smo definirali pojmove blok dizajna i Steinerovog sistema. Promatrali smo izomorfizme i potprostore incidencijskih strukutra te smo spomenuli familiju Hadamardovih dizajna i njihove primjene. Zadnja dva poglavlja posvećena su primjeni teorije dizajna u dizajnu igre 'Spot It!' te vlastite igre s matematičkim pojmovima.

Ključne riječi:

Incidencijska struktura, blok dizajn, afina geometrija, projektivna geometrija, Steinerov sistem, izomorfizam, dualnost, potprostor

Podatci o radu:

38 stranica, 13 slika, 2 tablice

Mentor: *doc. dr. sc. Aljoša Šubašić*

Članovi povjerenstva:

doc. dr. sc. Tanja Vojković

doc. dr. sc. Goran Erceg

Povjerenstvo za diplomski rad je prihvatilo ovaj rad *18. srpnja 2022.*

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

Design theory and it's application in game design

Karla Josipa Džaja

Abstract:
In this thesis we explained basic notions of design theory such as incidence structure, affine and projective geometry and their properties. After that, we defined the notion of a block design and that of a Steiner system. We have seen examples of isomorphisms and subspaces of incidence structures and mentioned family of Hadamard designs and it's applications. Last two chapters were devoted to design theory application in designing game 'Spot It!' and our own mathematical game.

Key words:
Incidence structure, block design, affine geometry, projective geometry, Steiner system, isomorphism, duality, subspaces

Specifications:
38 pages, 13 pictures, 2 tables

Mentor: *assisstant professor Aljoša Šubašić*

Committee:

assisstant professor Tanja Vojković
assisstant professor Goran Erceg

This thesis was approved by a Thesis commettee on *July 18, 2022.*