Primjena kognitivne strategije "Korak po korak" pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka

Glavurtić, Gorana

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

GORANA GLAVURTIĆ

Primjena kognitivne strategije „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka

DIPLOMSKI RAD

Split, ožujak 2022.

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU

ODJEL ZA MATEMATIKU

Primjena kognitivne strategije „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka

DIPLOMSKI RAD

Neposredna voditeljica:

Željka Zorić, v. pred.

Studentica:

Gorana Glavurtić

Mentor:

doc. dr. sc. Nikola Marangunić

Split, ožujak 2022.

Uvod

Matematika je jedna od osnovnih akademskih i životnih kompetencija. U svakodnevnom životu se suočavamo s problemima koji uključuju matematičke vještine. Svladavanje temeljnih matematičkih vještina poput konceptualnog znanja o aritmetičkim operacijama i drugim matematičkim pojmovima omogućuje primjenu znanja o računanju u kontekstu stvarnog svijeta što je od kritične važnosti za uspješno funkcioniranje pojedinca u društvu. [1] [2] Tekstualni zadaci stavljeni u kontekst svakodnevnice povezuju matematičko gradivo sa realnim svijetom te na taj način približavaju učenicima važnost učenja matematike te im pokazuju njenu primjenu u njihovim svakodnevnim situacijama. U ovom diplomskom radu provedeno je kvantitativno istraživanje među učenicima 1. i 2. razreda trogodišnje strukovne srednje škole u nastavi matematike. Istražen je utjecaj kognitivne strategije „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka koji učenicima često predstavljaju veliki problem. Kognitivna strategija „Korak po korak“ rješavanja tekstualnih matematičkih zadataka utječe na poboljšanje sposobnosti rješavanja takve vrste zadataka kod učenika kojima je teško organizirati svoj vlastiti rad na zadatku. Smanjuje površinsko čitanje teksta zadatka, teškoće u planiranju postupka rješavanja i samo impulzivno matematičko računanje. [3] Kognitivna strategija „Korak po korak“ odabrana je na osnovu mog osobnog višegodišnjeg rada u strukovnoj srednjoj školi kao nastavnica matematike te potrebi da pronađem što bolju metodu rada u nastavi pri rješavanju tekstualnih zadataka sa svojim učenicima. Tokom svog rada s učenicima strukovne srednje škole primijetila sam da je za većinu učenika s lošijim osnovnoškolskim predznanjem uzrok nepravovremeno prepoznavanje specifičnih poteškoća u učenju prilikom pohađanja osnovne škole. Kao najveće probleme takvih učenika istakla bih nedovoljno razvijenu kompetenciju samostalnog učenja odnosno „učiti kako učiti“ i organizaciju svog vlastitog rada. Takvi učenici se lako frustriraju pri savladavanju novog gradiva te lako odustaju od rješavanja bilo kakvog zadataka već pri prvoj prepreci na koju naiđu. Kompetencija označena sintagmom „učiti kako učiti“ se nalazi na listi osam ključnih kompetencija za cjeloživotno obrazovanje Europskog parlamenta i vijeća (2006/962/EC) te je također uključena u kurikularnu reformu Republike Hrvatske „Škola za život“ u nastavnom predmetu matematike za strukovne srednje škole. Upravo odabrana kognitivna strategija

„Korak po korak“ jača kompetenciju „učiti kako učiti“ svojim konstantnim ponavljanjem sedam koraka pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka.

Sadržaj

1. Teorijska razrada teme

1.1. Teorija učenja matematike

George Polya (1887.-1985.) američki matematičar i metodičar, mađarskog podrijetla, u svojoj knjizi „Kako riješiti matematički zadatak“ (1945.) iscrpno opisuje heurističku metodu u nastavi matematike. Heuristička metoda je nastavna metoda u kojoj nastavnik vodi svoje učenike uz pomoć pravilno postavljenih pitanja kako bi samostalno došli do otkrića odnosno rješenja zadatka. Njezin naziv potječe od Arhimedovog uzvika „Heureka!“ što znači „Pronašao sam! Otkrio sam!“, što u suštini i pojašnjava samu metodu poučavanja. Ovakva vrsta nastave je proizašla iz potrebe da se nastavnici odmaknu od same tradicionalne predavačke metode u kojoj je učenik neaktivan subjekt, te da se uvede samostalan rad učenika. Učenik stječe kompetencije samostalnog rješavanja matematičkih zadataka (problema) čime mu se jača samopouzdanje i osjećaj da je sposoban sam započeti i završiti postavljeni problem. Polyev algoritam za učeničke aktivnosti koje nastavnik provodi tokom rješavanja bilo kakvog matematičkog problema prikazan je u sljedećoj tablici (Tablica 1.).

Tablica 1. Polyin algoritam za samostalno rješavanje matematičkog zadataka

1. TREBA RAZUMIJETI ZADATAK	Što je nepoznato? Što je zadano? Kako glasi uvjet koji veže poznate elemente i nepoznanicu? Nacrtaj sliku ako je potrebno! Uvedi odgovarajuće oznake!
2. POTRAŽI VEZU IZMEĐU ZADANOG I NEPOZNATOG – popisati definicije, pravila ili teoreme koji mogu pomoći pri rješavanju	Gdje početi? Što raditi? Što ću time postići? Jesam li već takav zadatak vidio? Znam li sličan zadatak?

– sastaviti plan rješavanja	Znam li neki teorem, definiciju ili pravilo koji mi mogu pomoći? Je li potrebno uvesti neki pomoćni element radi rješavanja zadataka? Mogu li zadatak izraziti drugačije? Mogu li riješiti dio zadataka? Jesam li iskoristio sve zadane elemente? Jesam li uzeo sve bitne elemente koje se nalaze u zadatku?
3. IZVRŠITI SVOJ PLAN	Gdje početi? Što raditi ? Što ću time postići? Provodim li svoj plan rješavanja? Kontroliraj svaki korak! Mogu li jasno vidjeti da je svaki korak ispravan?
4. PROVJERI DOBIVENO RJEŠENJE	Mogu li provjeriti rezultat? Mogu li rezultat dobiti na drugačiji način? Mogu li dobiveni rezultat uočiti na prvi pogled?

Učenici moraju ovladati svim koracima kako bi postali samostalni u rješavanju zadataka. Korisnost Polyinog algoritma može se vidjeti tek nakon upornog ponavljanja glavnih koraka algoritama pri rješavanju matematičkih zadataka tijekom nastave matematike. [4] [5]

Kao i sve ostale nastavne metode heuristička metoda ima svoje dobre i slabe strane.

Dobre strane:

1) Stjecanje znanja i sposobnosti predstavlja osnovu samostalnog rada i aktivnosti učenika. Osobito je važan segment nastavnikov način poučavanja matematičkog sadržaja i način rada koji bi trebao pomagati učenicima.

2) Matematički sadržaj kojeg učenici u potpunosti razumiju ima obrazovni značaj, za razliku od onoga kojeg nisu razumjeli te koji će vrlo brzo biti potpuno zaboravljen i time ga možemo smatrati obrazovnim promašajem. Stoga je bitna odrednica heurističke metode da nastavnici svojim poučavanjem vode učenikove misli, razmišljanje i zaključivanje što dovodi do razumijevanja i shvaćanja matematičkog sadržaja.
3) Bitan segment heurističke metode je neposredno komuniciranje nastavnika i učenika. Koristeći učenikovo stečeno matematičko znanje nastavnik postavljajući pomno odabrana pitanja, navodi učenike da dođu do potrebnih matematičkih činjenica na osnovu čega učenici usvajaju nove matematičke sadržaje te nadograđuje pojmove odnosno rade proces poopćavanja. Slobodan razgovor i rasprava omogućuje učenicima da postavljaju pitanja što je osobito važno ukoliko im nedostaje neka spoznajna informacija koja je okidač za napredak u rješavanju zadataka.
4) Iako heuristička nastava, za razliku od problemske nastave, ne dovodi učenike do potpuno samostalnog rada u otkrivanju matematičkih spoznaja, jer učenike još uvijek vodi nastavnik kroz svoj heuristički model poučavanja, možemo reći da su učenici ipak misaono aktivni i u određenoj mjeri subjekti nastave. Cilj heurističke nastave je učenike dovesti do shvaćanja.

Slabe strane:

1) Nemogućnost misaonog vođenja baš svih učenika zbog pomanjkanja vremena i različitih brzina shvaćanja.
2) Nemogućnost neposredne komunikacije sa svim učenicima.
3) Komunikacija s povučenim učenicima je otežana i često izostaju njihova pitanja.
4) Nepotpuna povratna informacija od strane učenika o poučenom matematičkom sadržaju.

Odlike dobrih strana prevladavaju nad slabim stranama tako da možemo zaključiti kako je heuristika ipak pogodna suvremena metoda poučavanja.

Heurističku metodu možemo u potpunosti ili djelomično primjenjivati na svaki nastavni sadržaj matematike. Osobito je pogodna za tekstualne zadatke koji učenicima stvaraju probleme zbog neuspješnog transformiranja, odnosno prevođenja teksta u matematički izraz. [6]

1.1.1. Tekstualni matematički zadaci

Rješavanje zadataka je jedna od najčešćih učenikovih djelatnosti tijekom školovanja, ono podrazumijeva kontinuirani proces u nastavi matematike. Stoga možemo zaključiti da rješavanje različitih vrsta matematičkih zadataka ima izrazito važnu ulogu u nastavi matematike. Svaki matematički zadatak s kojim se učenik susreće sadržava poznate i nepoznate elemente koji se trebaju otkriti ili objasniti rješavanjem samog zadatka. Cilj rješavanja matematičkog zadataka jest da učenik razvija sposobnosti za provedbu samostalnog i stvaralačkog istraživanja matematike čime se stvaraju dobri preduvjeti za uspješnu primjenu stečenih matematičkih znanja i umijeća.

Za ostvarivanje ciljeva matematičkog zadatka veliku ulogu igra prikladan i pogodan izbor zadataka od strane nastavnika. Zadatak je važno sredstvo za oblikovanje učenikovih osnovnih matematičkih znanja, umijeća i navika te doprinosi razvoju matematičkih kompetencija i kreativnog mišljenja.

Zadatak je složeni matematički objekt te njegov sastav možemo podijeliti na pet osnovnih sastavnica (dijelova):

1. **Uvjeti** su sastavni dijelovi svakog zadatka u užem smislu poznate ili dane veličine, nepoznate ili tražene veličine i objekti te uvjeti koji opisuju veze između danih i nepoznatih veličina i objekata. Uočavanje gore navedenih veličina i objekata u zadatku bitno je za njegovo razumijevanje.

2. **Cilj** zadataka je uglavnom vrlo lako uočiti. S obzirom na vrstu zadataka to može biti traženje rezultata odnosno određivanje nepoznatih veličina, svojstava i veza između njih ili izvođenje zaključaka i dokazivanje postavljenih tvrdnji.

3. **Teorijska osnova** za nalaženje rješenja bilo kojeg zadatka potrebno je određeno matematičko znanje. U to spadaju sve teorijske činjenice koje su u najužoj vezi s uvjetima i ciljem zadatka, a one se otkrivaju primjenom analize. Proučavanjem uvjeta, njihovim raščlanjivanjem na sastavne dijelove i primjenom teorijskih činjenica spoznaju se i određuju odnosi među danim i nepoznatim veličinama čime se otkriva put rješavanja zadatka.

4. **Rješavanje** zadatka je prijelaz od uvjeta do rezultata, tj. način postizanja cilja zadataka. Rješavanje slijedi nakon temeljite analize svih postavljenih uvjeta i ciljeva zadatka s kojima je otkriven put rješavanja.

5. **Osvrt:** Nakon određivanja rješenja zadatka prestaje učenikova pozornost na zadatak. Kada je rješenje određeno, prelazi se na sljedeći zadatak i prethodni kao da više ne postoji. Učenici uglavnom ne provjeravaju je li dobiveno rješenje korektno nego „manično" prelaze na rješavanje sljedećeg zadatka. Stoga bi mogli zaključiti kako je brzo nalaženje rješenja zadatka najvažnije u čitavom procesu rješavanja te da je to jedina njegova svrha. No, to nije tako, sama procjena rezultata na početku zadatka i provjera dobivenog rezultata su iznimno važni koraci pravilne primjene zadatka u nastavi. Svaki postavljeni zadatak mora imati veću obrazovnu ulogu od samog pronalaženja rezultata rješenja. Zato je važno naglasiti ovu sastavnicu zadatka jer ona pruža mogućnosti ispitivanja novih ideja i daljnjih usmjeravanja mišljenja učenika. [7]

1.1.2. Vrste zadataka

U nastavi matematike postoje različite vrste zadataka koje možemo podijeli na sedam kategorija.

Klasifikacija matematičkih zadataka:

1. prema složenosti: standardni i nestandardni zadatci (problemski zadatci)
2. prema cilju: odredbeni i dokazni zadatci
3. prema ulozi u nastavi
4. prema procijenjenoj težini: vrlo lagan, lagan, srednje težak, težak, vrlo težak
5. prema važnosti u odnosu na kurikulum: nužan, važan, vrijedan
6. prema konstrukciji rješenja: zadatci selekcije (alternativni izbor, višestruki izbor, sparivanje, zadatci interpretacije i dr.) i konstrukcije odgovora (zadatci nadopune, zadatci kratkih i produljenih odgovora)
7. prema razinama misaonih procesa: prema Bloomovoj, Coxovoj i Gagnovoj taksonomija.

U ovom radu značajnu ulogu imaju zadaci prve kategorije odnosno standardni i nestandardni zadatci stoga ćemo njih u ovom poglavlju detaljnije opisati. Prema složenosti zadatci se dijele na dvije skupine: standardni i nestandardni zadatci. Standardni zadatci su oni koji nemaju nepoznatih sastavnica, uvjeti su jasno i precizno postavljeni, cilj je očigledan, teorijska je osnova lako uočljiva i bez dublje analize, a način rješavanja je poznat i teče prirodno i prema očekivanjima. Ovakvi zadatci su važno sredstvo boljeg razumijevanja i temeljitog usvajanja novih matematičkih sadržaja, no oni ne doprinose mnogo razvoju kreativnog razmišljanja učenika. Nestandardni zadatci su oni kojima je barem jedna sastavnica nepoznata. Ako su nepoznate dvije ili više sastavnica tada se takvi nestandardni zadatci nazivaju još i problemski zadatci. Problemski zadatci su višestruko korisni jer razvijaju logičko mišljenje učenika. Prilikom rješavanja takvih zadataka učenik provodi niz samostalnih istraživanja pri kojima su potrebni pojačani umni napor, dublja analiza, veća koncentracija, ustrajnost i dosjetljivost pri čemu se učenik uči strpljenju, samokontroli i postepenom otkriću rješavanja zadataka. [7]

Pojmove problemski i tekstualni zadatci mnogi autori koriste kao istoznačnice (sinonime), što nije slučaj. Mogli bismo reći da su tekstualni zadatci neka podvrsta problemskih zadataka, ali svaki tekstualni zadatak ne mora nužno biti problemski zadatak. Školski tekstualni zadatci, kao što i samo ime kaže, su svi zadatci u kojima se podaci i odnosi formuliraju riječima. Tekstualni zadatak može biti stavljen u određeni kontekst, matematički ili realistički, ali i ne mora. Tekstualni zadatci matematičkog konteksta su zadatci riječima, ali nisu stavljeni u određenu situaciju iz svakodnevnice. Primjer takvog zadatka je „Od zbroja brojeva 14 i 5 oduzmi njihovu razliku“, koji jest zadan riječima, ali van konteksta svakodnevnice, njegova situacije je unutar matematička. Tekstualni zadatci s realističkim kontekstom ili situacijski zadatci su zadatci stavljeni u određen kontekst, tj. realističnu ili autentičnu situaciju. Ovakvu vrstu tekstualnih zadataka možemo smatrati podvrstom problemskih zadataka. U takvom tekstualnom zadatku cilj je riješiti zadanu problemsku situaciju, odnosno odgovarajućim matematičkim aparatom doznati nepoznati podatak, razvijati strategije rješavanja problemskih situacija unutar zadatka te razvijati matematičko izražavanje. [8] U ovom radu metodički će biti obrađeni tekstualni zadatci van i unutar konteksta svakodnevnice, a ne problemski zadatci.

1.1.3. Problematika tekstualnih matematičkih zadataka

U školskim tekstualnim zadacima broj poznatih veličina, nepoznatih veličina i uvjeta gotovo uvijek omogućuje dobivanje rješenja zadatka. No, često takvi zadatci zadaju teškoće kako učenicima tako i samim nastavnicima pa ih mnogi izbjegavaju. Objašnjenje za takvu školsku praksu leži u naravi samih tekstualnih zadataka.

Rješavanje tekstualnog zadatka sastoji se od dva zadatka:

1) postavljanje jednadžbe prevođenjem teksta s materinskog jezika na matematički jezik,
2) rješavanje postavljene jednadžbe.

Prvi od njih nije uvijek lagan, zahtjeva poprilično umni napor i poznavanje postupaka raščlanjivanja, što se nerijetko pretpostavlja da učenici znaju i bez objašnjenja nastavnika. Osim matematičkog dijela zadatka, učenik mora savladati i jezični dio odnosno iskazane veličine i uvjete riječima predočiti u matematičke simbole, odnosno prevesti ih na matematički jezik. Dodatni uzroci teškoća u rješavanju tekstualnih zadataka s kontekstom mogu proizlaziti iz nekih problema nastavne prakse i metodike, poput dominiranja proceduralnih postupaka u poučavanju, problemi nerazumijevanja teksta, prebrzog prijelaza s konkretnog na apstraktno, nedovoljna koncentracija učenika pri čitanju i razumijevanju teksta, problem postavljanja zadatka (tj. pretvaranja svakodnevnice u matematički oblik). Kao najveći problem pri rješavanju tekstualnih zadataka kod učenika s poteškoćama u učenju jest njihova loša čitalačka sposobnost iz čega proizlazi nerazumijevanje samog teksta zadatka pa time izostaje proces transformacije teksta s materinskog jezika na matematički jezik. Kako se takvi učenici i inače susreću s poteškoćama u čitanju i razumijevanju teksta, oni vrlo brzo odustaju od tekstualnih zadataka iako su njihove matematičke sposobnosti dovoljne za rješavanje jednadžbe koja se krije u tekstu zadatka. [7] [9] [10] Kao rezultat gore navedenih poteškoća s kojima se učenici susreću prilikom rješavanja tekstualnih zadataka je generalna odbojnost prema takvim zadatcima. Međutim, svođenje problema na rješavanje jednadžbi višestruko je korisno jer ono omogućuje učenicima razvijanje logičkog mišljenja, dosjetljivosti, opažanja i umijeće provođenja nevelikih samostalnih istraživanja.

U procesu svođenja problema na rješavanje jednadžbi važnu ulogu imaju pitanja koja nastavnik postavlja učenicima. Postavljanje pitanja ima dvostruku ulogu, kao prvo pomoću njih nastavnik provjerava jesu li učenici razumjeli postavljeni problem i znaju li ga opisati te izdvojiti sve njegove sastavnice, dok je druga uloga pitanja da pobuđuju učeničko mišljenje te usmjeravaju njihove misli na bitne sastavnice zadataka (problema). Umijeće postavljanja pitanja jedan je od oblika nastavnikove kreativnosti te ga je potrebno njegovati i razvijati. [7]

Kurnik [7], navodi pitanja koje nastavnik treba postavljati tijekom procesa rješavanja tekstualnih zadataka.

- Pitanja koja se odnose na razumijevanje zadatka:
  „Što je zadano? Što je nepoznato? Što treba naći? Što se zahtjeva? Koliko ima nepoznanica? Kako ćeš označiti nepoznato? Kako glasi glavni uvjet? Od koliko dijelova se sastoji uvjet? Možeš li raščlaniti uvjet na dijelove? Možeš li napisati te dijelove? Je li uvjet dovoljan za određivanje nepoznanica? Možeš li zadatak drugačije izraziti? „
- Pitanja koja se odnose na postavljanje jednadžbi:
  „Možeš li naći vezu između zadanog i nepoznatog? Je li moguće zadovoljiti uvjet? Koja bi činjenica mogla pomoći pri postavljanju jednadžbe? Koliko jednadžbi treba postaviti? Jesam li iskoristio sve zadano? Jesam li iskoristio sve dijelove uvjeta? Ima li rješenje dobiveni sustav? Znaš li riješiti dobiveni sustav jednadžbi? Jesi li rješavao sličan sustav jednadžbi? Možeš li sustav jednadžbi svesti na rješavanje jedne jednadžbe? Što se može reći o broju rješenja jednadžbe?“

1. 2. Psihološki aspekti procesa učenja matematike

1. 2. 1. Kognitivne strategije učenja matematike

Proces učenja smatramo temeljem ljudskog postojanja u svim fazama života, a osobito u školskoj dobi. Još uvijek nisu otkrivene i razjašnjene sve komponente koje utječu na proces učenja, no početkom 70-tih godina 20. stoljeća počela se razvijati kognitivna psihologija i novi modeli procesuiranja informacija unutar kojih se javlja i koncept strategija učenja. Strategije učenja definiraju se kao skup svih promišljanja i djelovanja pojedinca koje pridonose lakšem usvajanju novih informacija i objedinjavanju s već stečenim znanjem koje kasnije omogućuju uspješno izvođenje zadataka. Iako postoje mnoge različite definicije strategija učenja, sve one imaju jedan zajednički cilj, a to je bolje akademsko postignuće odnosno bolje, brže i lakše učenje te uspješno rješavanje školskih zadataka. [1] [2]

Prema Soriću [11], strategije učenja se dijele na:

- Kognitivne strategije – podrazumijevaju kognitivne aktivnosti kao što su ponavljanje gradiva, izdvajanje i organiziranje informacija, povezivanje novog gradiva s već naučenim, pohrana i prisjećanje informacija.
- Metakognitivne strategije – podrazumijevaju aktivnu kontrolu kognitivnih procesa tijekom procesa učenja, konstantno planiranje, praćenje i provjeravanje, uključujući opažanje, evaluaciju i regulaciju same primjene kognitivnih strategija. One pomažu učenicima osvijestiti proces vlastitog razmišljanja i učenja tako da mogu planirati, nadgledati i vrednovati ono što su naučili.

Većina ljudi tijekom svog života razvije i usvoji različite kognitivne strategije uz minimalno poučavanje, no postoje pojedinci koji ne razvijaju tako lako navedene vještine učenja. Istraživanja su pokazala da najuspješniji učenici posjeduju široki spektar strategija, od jednostavnih do složenih, koje koriste pri učenju i rješavanju različitih zadataka. [1] [2]

Rezultati mnogih istraživanja pokazuju korist korištenja kognitivnih strategija učenja, no mnogi ih učenici još ne koriste. Postoje učenici koji ne znaju koristiti poučene kognitivne strategije učenja ili koriste krive strategije učenja ili ih uopće ne koriste kao pomoć pri učenju. Pokazalo se da je jedan od najčešćih rezultata istraživanja strategija učenja deficit primjene – učenici uče strategiju, ali ih ne znaju primijeniti kada bi mogli ili trebali. Nastavnici poučavaju učenike činjenicama, pravilima te načinima korištenja pojedinih strategija, no najteži dio je poučiti učenike kada će i zašto primijeniti pojedinu strategiju. Kako bi nastavnik postigao da učenik zaista koristi poučene strategije potrebno je zadovoljiti nekoliko preduvjeta. Prvi preduvjet je primjerenost zadatka, odnosno učenik nema potrebu koristiti neku složeniju strategiju učenja ukoliko se u postavljenom zadatku od njega očekuje da samo „nauči i ponovi“ (reproduktivno znanje). Drugi preduvjet jest vrednovanje učenja i razumijevanje naučenog, što podrazumijeva ostvarivanje odgojno-obrazovnih ishoda korištenjem uspješnih strategija. Treći preduvjet je vjerovanje da su trud i zalaganje potrebni za primjenu strategije razumni te da će se isplatiti. Četvrti preduvjet je da učenici moraju vjerovati svojim vlastitim sposobnostima korištenja strategije, odnosno moraju iskusiti samoučinkovitost korištenja strategije u učenju gradiva.

Kao temeljni preduvjet navodi se posjedovanje baze znanja i/ili iskustva u određenom području jer nijedna strategija učenja ne može pomoći učeniku u savladavanju zadatka koji je iznad njegovih trenutnih mogućnosti razumijevanja. [1] [2] [11] [12]

Potrebno je educirati nastavnike i roditelje o pozitivnim učincima učenja kognitivnih strategija kako bi učenik bio uspješniji u procesu savladavanja svih komponenata pojedine strategije učenja. Osobito je važno uporno i strpljivo poučavati strategijama učenike s teškoćama u učenju. Glavni problem kod učenika s teškoćama u učenju su: teškoće u radnoj memoriji, teškoće s jezikom – nerazumijevanje postavljenog zadataka te održavanje pažnje i planiranje vlastitog rada. Učenjem i adekvatnim korištenjem kognitivnih strategija umanjuju se i ublažavaju sve navedene poteškoće pri rješavanju matematičkih zadataka. Rješavanje matematičkih zadataka uključuje integraciju nekoliko kognitivnih (pažnja, pamćenje, jezik) i metakognitivnih procesa (samoispitivanje, samomotrenje, samoevaluacija). Rješavanje matematičkih tekstualnih zadataka (zadaci s riječima) zahtjeva razumijevanje teksta, adekvatno predočavanje problema, planiranje strategije, izvršavanje plana te provjeru. Korištenjem strategija u razumijevanju matematičkog jezika u zadacima s riječima pomaže učenicima u shvaćanju problema i odabiranju adekvatne strategije, algoritma i računske operacije.

1. 2. 2. Čimbenici odgovorni za uspješno usvajanje matematike

Uobičajena je praksa nacionalnih kurikuluma da se nastavni program iz matematike temelji na kronološkoj dobi učenika po principu što je učenik stariji to mu se više matematičkog gradiva prezentira. Postoji pet kritičnih čimbenika koji utječu na proces učenja i usvajanja matematike, neovisno o kronološkoj dobi djeteta. [3]

To su:

I. Stupanj kognitivnog razvoja
II. Matematička osobnost
III. Predmatematičke vještine
IV. Matematički jezik
V. Stupanj poznavanja matematike.

I.Stupanj kognitivnog razvoja

Kognitivna sposobnost djeteta određuje njegove mogućnosti, potencijale i dubinu razumijevanja određene materije, također ukazuje i na teškoće koje može imati u savladavanju pojedinih matematičkih koncepata. Nastavnik bi trebao biti dobro upoznat sa stupnjem kognitivnog razvoja svakog pojedinog učenika kako bi mogao dobro isplanirati i organizirati način poučavanja. Kognitivna sposobnost učenika iz matematike se ne procjenjuje količinom reproduciranog znanja, njegove uvježbanosti ili sposobnosti davanja ispravnog odgovora. Mnogo su važniji djetetov stupanj mišljenja i strategije koje koristi da bi došao do odgovora na matematički zadatak nego sami točan rezultat zadatka. Nastavnik si treba postavljati pitanja: Što dijete misli? Na koji način pristupa određenom zadatku? Koje strategije bira prilikom rješavanja zadataka? Kako dolazi do ispravnog ili pogrešnog odgovora? Zbog toga je vrlo važno i korisno analiziranje neispravnih odgovora učenika. Konačan pogrešan odgovor sam po sebi ne govori o djetetovoj kognitivnoj razini. Česta je praksa u nastavi pogrešan odgovor- slaba ocjena, a da se pritom ne analizira postupak nastajanja pogrešnog odgovora. Analizom pogreške možemo doći do različitih saznanja o učenikovom stupnju kognitivnog razvoja, tako je moguće da je jedan učenik pogriješio jer nije ispravno upotrijebio naučenu strategiju, dok je drugi samostalno osmišljavao još neke strategije rješavanja pa je prilikom tog istraživanja napravio pogrešku. Iz ovog primjera, prilikom vrednovanja po principu „pogrešan odgovor-slaba ocjena“ zakidamo zapravo sposobnijeg učenika.

Kada učenik pristupa rješavanju matematičkog zadatka, on bira određene kognitivne strategije koje nastavnik mora proanalizirati kako bi saznao je li taj učenik spreman za usvajanje novog nastavnog sadržaja ili ne. Nastavnik se unutar jednog razreda susreće pred cijelim rasponom kognitivnih sposobnosti, stoga treba paziti da novi sadržaji budu prezentirani na razini dostupnoj učenicima.

Djeca s teškoćama u učenju koje su uzrokovane nedovoljnim stupnjem kognitivnog razvoja imaju teškoće u praktičnoj primjeni naučenih strategija. Kada se susreću s određenim zadatkom, takav učenik ne može pronaći strategije adekvatne za njegovo rješavanje. Postoji cijeli niz kognitivnih strategija i koncepata koji utječu na učenje matematike. Učenik s niskim stupnjem kognitivnog razvoja, ili ne može razviti potrebnu strategiju, ili nije u stanju primijeniti određenu strategiju u adekvatnim situacijama. [13]

Primjer iz prakse:

Nastavnik je trojici učenika napisao zadatak 18+9=?. Sva trojica učenika ispravno su riješila postavljeni zadatak, odnosno zapisala 18+9=27, ali svaki od njih je do odgovora došao na drugačiji način.

Prvi učenik je do odgovora došao putem zbrajanja na prste: „19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27. Odgovor je 27."

Drugi učenik je razmišljao ovako: „Ako je 18 plus 10 jednako 28, onda je 18 plus 9 za 1 manje od 28. Znači odgovor je 27."

Treći učenik je računao na sljedeći način: „8 više 9 je 17. 7 pišem, 1 pamtim. 1 više 1 je 2. Odgovor je 27."

Iz ovog primjera je vidljivo da je svaki učenik upotrijebio različitu kognitivnu strategiju kako bi došao do rezultata zadatka. Prvi učenik je upotrijebio strategiju niskog kognitivnog stupnja, drugi učenik je upotrijebio strategiju visokog kognitivnog stupnja, a treći je riješio zadatak na klasičan proceduralni način. Analiziranjem ovog primjera osim što dobivamo povratnu informaciju o kognitivnom stupnju razvoja, također dobivamo i o specifičnom kognitivnom stilu odnosno o načinu na koji pojedini učenik obrađuje informacije i uči. Ukoliko postoji razlika između stupnja kognitivne složenosti koncepta koji pokušavamo objasniti učeniku i stupnja njegova kognitivnog razvoja takav učenik će imati poteškoće u učenju matematike.

Za adekvatan kognitivni razvoj, pa tako i za učenje matematike potreban je viši stupanj funkcioniranja korteksa mozga, odnosno viši stupanj spoznaje. Djeca s poteškoćama u učenju manje su uspješna u kognitivnim zadacima pa je njihova sposobnost rješavanja matematičkih problema manja. Važno je razlikovati je li učenik neuspješan zbog niskog stupnja kognitivnog razvoja ili zbog toga što ne zna upotrijebiti svoje postojeće kognitivne sposobnosti.

Analiziranje strategija rješavanja zadataka daje nastavniku povratnu informaciju:

- o stupnju kognitivnog razvoja učenika;
- o individualnom stilu učenja;
- o spremnosti za usvajanje novog koncepta.

Postavlja se pitanje „Što nastavnik može učiniti s tim povratnim informacijama?“. Glavni cilj povratne informacije je smanjiti raskorak između trenutnog postignuća učenika i postavljenih kriterija uspjeha koje učenik mora postići. Povratna informacija mora biti usmjerena točno na pojedinog učenika, koja mu govori gdje se on trenutno nalazi u svom procesu učenja, jer grupne informacije usmjerene na cijeli razred ne prima nijedan učenik misleći kako se te informacije ne odnose na njega. Kvalitetna povratna informacija treba biti usmjerena na zadatak, zatim na postupak njegova rješavanja i na strategiju samoregulacije koja se nalazi u pozadini rješavanja zadatka. Uvažavajući stupanj kognitivnog razvoja učenika te njegov individualni stil učenja pri davanju opisnih povratnih informacija, možemo smanjiti postojeći raskorak te usmjeriti učenika kamo dalje u usvajanju novog koncepta. Dakle, povratne informacije je potrebno ukomponirati u nastavni proces matematike jer su one temelj za usmjeravanje učenika u daljnjom unaprjeđenju i poboljšavanju učenja. [14]

II.Matematička osobnost učenika

Svaki pojedinac se razlikuje u obrađivanju informacija u procesu učenja, pa tako i kod učenja matematike. Ako se samo prisjetimo svog školovanja, unutar razreda bilo je učenika koji su s lakoćom savladavali aritmetiku i algebru, a imali poteškoća u usvajanju geometrije, dok s druge strane postajali su i učenici koji su bili upravo obratan slučaj, odnosno s lakoćom su savladavali geometriju, a imali poteškoća u aritmetici i algebri. Kao nastavnica također primjećujem da pojedini učenici lakše odnosno teže savladavaju određeni koncept matematike.

Prema M. Sharmi [3], učenici se razlikuju u pogledu matematičke osobnosti odnosno u obradi matematičke informacije. Svaki pojedinac pristupa matematičkom zadatku na drugačiji način. Na primjer, kada jedan učenik čita matematički zadatak, on ga odmah dijeli na mnogo manjih dijelova, manjih zadataka te rješava svaki dio korak po korak, vrlo sustavno i metodično. Drugi učenik, koji čita taj isti zadatak se odmah prisjeća nekog drugog zadataka koji je sličan ovome i ima sličan postupak rješavanja. Navedena dva učenika su potpuno drugačije pristupila rješavanju istog zadatka, s dva različita stila. Upravo taj stil učenja matematike i pristupa matematičkoj problematici, Sharma zove matematička osobnost učenika. Taj stil određuje učenikovo razumijevanje, usvajanje i primjenu matematike. U početku su mnogi znanstvenici mislili da postoji dvočlana podjela, odnosno dva stila učenja, no ubrzo se pokazalo da postoji cijeli spektar matematičkih osobnosti. Svatko od nas, pa tako i pojedini učenik, zauzima jedinstveno mjesto u tom spektru. Sharma, jedan kraj spektra zove kvantitativna matematička osobnost, a drugi kvalitativna matematička osobnost. Većina djece, a kasnije i odraslih, nalazi se između te dvije krajnosti, dok se u razredu nastavnik susreće sa čitavim „buketom“ različitih matematičkih osobnosti (npr. jedan učenik je više kvantitativan, a manje kvalitativan, dok je drugi učenik obratno, treći u potpunosti kvantitativan itd.).

Kvantitativna matematička osobnost

Učenici s kvantitativnim tipom matematičke osobnosti obrađuju informacije metodično, postupno, od dijelova prema cjelini. Takav učenik traži specifične metode, tzv. „recepte“ i formule za svaki pojedini problem, veoma je „propisan“ u primjeni matematičkih metodi. Takav učenik svaki novi zadatak pokušava svrstati u neki „tip“ zadatka, a potom traži metodu koja se primjenjuje za rješavanje takvog tipa zadatka. Njegov tipičan pristup je raščlanjivanje zadatka na dijelove, rješavanje svakog dijela i zatim sastavljanje pojedinih rješenja u svrhu generiranja jednog općeg rješenja zadatka. On radi vrlo sustavno, primjenjujući određeni niz postupaka i metodičnih kvantitativnih radnji. Osobito je uspješan u zadatcima koji zahtijevaju postepeno nadograđivanje matematičkih radnji, kao što su: brojanje, algoritmi koji uključuju zbrajanje, oduzimanje, množenje i dugo dijeljenje različitih brojeva. Takav učenik je u stanju savršeno uvježbati standardne algebarske postupke. Kada se susreće s problemskim tipom zadataka, ovakav učenik onda traži dobro poznati i standardni algoritam za njegovo rješavanje. Kvantitativan tip učenika je uspješan u aritmetici, djelomično u algebri i u onom dijelu geometrije koji se maksimalno oslanja na sustavne postupke i aksiome. Kada se susreće sa zadatcima koji imaju nekoliko načina rješavanja tada nailazi na poteškoće. Njegova tipična izjava u takvoj situaciji je: „Nemojte me zbunjivati s nekoliko metoda, pokažite mi najlakšu i najbolju metodu rješavanja tog tipa zadatka. „

Kvalitativna matematička osobnost

Učenik s kvalitativnom matematičkom osobnosti obrađuje matematičke informacije uglavnom vizualno, od cjeline prema dijelovima, holistički pristupa zadatku te istražuje globalne načine rješavanja. Jako je uspješan u prepoznavanju prostornih i simboličkih modela, u uspoređivanju i povezivanju različitih koncepata i ideja. Prilikom susreta s problemskim zadatkom, on ispipava teren, a tek onda pristupa rješavanju zadataka. Prilikom rješavanja zadatka traži ili stvara paralelne primjere, te nakon njihovog rješavanja, pokušava generalizirati rješenje osnovnog zadatka. Matematičkim problemima pristupa intuitivno te izrazito koristi svoju prostornu percepciju i vizualizaciju. Zadatak uvijek promatra globalno, pokušavajući u svakom pojedinom zadatku pronaći globalni model. U učenju aritmetike, algebre i geometrije takav učenik uočava međusobne koncepte. No, ovakav tip učenika ima poteškoća prilikom obavljanja računskih radnji u određenom redoslijedu odnosno algoritmima, čineći greške u koracima računskog postupka tzv. „greške omaške". Često zapisuje radnje skraćeno, izostavljajući i po nekoliko koraka u računu koje je on obavio „u glavi". U zapisivanju rješenja ili samog zadatka ponekad izostavlja znakove i može biti općenito neuredan tip osobe. Proceduralne radnje doživljava kao dosadne i naporne, te brzo gubi interes za dugotrajna računanja. Kvalitativan tip učenika ne vježba dovoljno i zbog toga ne postiže dovoljnu automatizaciju računskih radnji. U krajnjoj zastupljenosti ovog tipa matematičke osobnosti, učenik nije dovoljno uvježban, odnosno ne vlada svim proceduralnim radnjama, ali za razliku od kvantitativnog tipa, sposoban je mnogo brže uočiti konceptualne veze.

Kombinirani tip matematičke osobnosti

Većina ljudi ima kombinirani tip matematičke osobnosti odnosno prilikom procesuiranja matematičkih informacija koristi oba tipa osobnosti, kvantitativan i kvalitativan. No, ipak gotovo uvijek je jedan stil dominantniji od drugoga. Za učenje matematike potrebna su oba stila, i kvantitativan i kvalitativan. Kako bi se postigla maksimalna matematička vještina, elementi obaju tipova osobnosti trebaju biti integrirani u osobi odnosno učeniku, iako jedan tip osobnosti uvijek ostane dominantan. Zato su najuspješniji i najsposobniji oni učenici koji su u stanju istodobno i lako uočavati komponente unutar zadatka i povezivati taj zadatak s već viđenim zadacima. Takvi učenici su u stanju uočiti generalne modele (ispoljavanje kvalitativne prirode) i primijeniti specifične postupke (ispoljavanje kvantitativne prirode) odnosno jednako su uspješni u konceptualizaciji i praktičnoj primjeni matematike.

Potrebno je naglasiti kako je matematička osobnost učenika vrlo važan čimbenik kojeg je potrebno uočiti i uvrstiti prilikom planiranja nastavnog procesa te prilagoditi nastavne metode svakom stilu učenja. Učenik će mnogo bolje napredovati kada stil podučavanja prilagodimo njegovom stilu učenja.

III.Predmatematičke vještine

Predmatematičke vještine (ili pomoćne vještine) nisu matematičke vještine, odnosno nisu dio matematike kao predmeta, ali su nužne za usvajanje matematičkih koncepata. Predmatematičke vještine su preduvjet za učenje matematike, odnosno dijete mora njima ovladati prije kako bi bilo u stanju razumjeti, smisleno usvajati i primjenjivati matematička znanja.

Neke od najvažnijih predmatematičkih i pomoćnih vještina:

- razvrstavanje podataka i predmeta
- uspoređivanje i ujednačavanje predmeta i skupova
- nizanje predmeta i održavanje zadanog redoslijeda
- slijeđenje niza uputa od više koraka
- orijentiranje i organiziranje u prostoru
- vizualizacija
- vizualno grupiranje predmeta
- prepoznavanje obrazaca
- procjenjivanje
- deduktivno mišljenje
- induktivno mišljenje.

IV.Matematički jezik

Matematički jezik ima svoju abecedu, simboliku, vokabular, sintaksu i gramatiku. Matematički jezik je drugi jezik s kojim se učenici u svom školovanju susreću, naravno nakon što ovladaju svojim materinskim jezikom. Koncepti koji se kriju u matematičkom jeziku su razvrstavanje i nizanje objekata, količinski skupovi, veličine, redoslijed, međuodnosi, prostor, oblik, udaljenost i vrijeme. Na višoj razini matematički jezik se koristi u izražavanju rezultata logičkog mišljenja i zaključivanja, analiziranja i tumačenja informacija. Za mnoge učenike proces savladavanja i usvajanja matematičkog jezika je težak proces. Znanstvenici su ponudili neke razloge teškog savladavanja, poput: jezični zahtjevi se naglo povećavaju, neke jednostavne i poznate riječi poprimaju nova, neočekivana značenja (npr. riječ „korijen“ ima novo značenje).

Materinski i matematički jezik imaju važnu ulogu u procesu konceptualizacije matematičkih ideja i tijekom primjene matematičkih znanja. Kada učenik ima poteškoća u rješavanju tekstualnih zadataka onda obično nije problem samo u matematici nego i u stupnju jezične kompetentnosti. Kako bi učenik mogao uspješno rješavati matematičke tekstualne zadatke treba poznavati i razumjeti matematički vokabular i sintaksu te biti u stanju prevoditi simboliku i izraze matematičkog jezika na svoj materinski jezik (transformirati) i obratno. Učenik može dobro razumjeti traženi aritmetički koncept koji se traži u tekstualnom zadatku, ali ako ima teškoće u prijevodu hrvatskih jezičnih izraza u tekstualnom zadatku na matematički jezik onda će imati teškoće u rješavanju takvih zadataka. Isto tako, ako učenik ima teškoće u prevođenju matematičkih jednadžbi na hrvatski jezik, vjerojatno će imati teškoće u uočavanju značenja matematičkih formulacija u odnosu na stvarne životne probleme.

Prema Sharmi [3] svaka matematička ideja, osim jednostavnih aritmetičkih činjenica ima 3 komponente:

1. lingvistička – matematički vokabular, matematička sintaksa i pravila prevođenja s matematičkog jezika na materinski i obratno (transformacija)
2. konceptualna – matematička ideja ili mentalna vizija pojma
3. proceduralna – računski postupak koji se primjenjuje u odnosu na koncept.

Svaka komponenta se usvaja na drugačiji način odnosno putem drugačije metode podučavanja. Uobičajena je praksa u nastavi matematike da najveći dio pažnje i vremena posvećuje proceduralnoj komponenti, a malo ili vrlo malo usvajanju matematičkog jezika, odnosno razumijevanju terminologije i prevođenja (transformiranja) teksta s materinskog jezika na matematički i obratno. Takvu ustaljenu praksu treba mijenjati te bi na početku procesa učenja, nastavnik trebao staviti naglasak na pojašnjavanje same matematičke terminologije (pojmova) i konceptualne ideje.

Jedan primjer takvog nedovoljnog poznavanja osnovnih matematičkih pojmova odnosno jezika kada je 20 % učenika 6. razreda osnovne škole odgovorilo 2 na postavljeno nastavnikovo pitanje: „Koji je najmanji zajednički višekratnik brojeva 4 i 6?“. Napomenimo da su ti učenici do tada više puta učili taj pojam, u 5. razredu i prilikom računanja s razlomcima stoga njima to nije novi matematički pojam. Iz njihova odgovora možemo uočiti kako su se učenici najviše fokusirali na riječ „najmanji“, potom „zajednički“, a tek onda na „višekratnik“, odnosno u redoslijedu u kojem su riječi i izgovorene. Pod pojmom „najmanji“ odmah su stvorili sliku kao najmanji broj koji je povezan s brojevima 4 i 6, što zaista i jeste broj 2. Možemo zaključiti da je prilikom obrade pojma „najmanji zajednički višekratnik“ ostao zanemaren najvažniji jezični aspekt, a to je riječ višekratnik. Većina tih učenika umije naći najmanji zajednički višekratnik, odnosno odraditi proceduralni dio nalaženja najmanjeg zajedničkog višekratnika, no nisu upoznati s jezičnim aspektom tog pojma. Također je potrebno obratiti pažnju i na matematičku sintaksu koja je vrlo rigidna te često dovodi do pogrešnih postupaka. Npr. na uputu „72 manje 34“ većina učenika će ispravno zapisati u matematičke simbole 72-34, no na uputu „oduzmi 34 od 72“ učenici kojima nije dovoljno razvijen matematički jezik će zapisati 34-72, te obaviti oduzimanje. [3]

1.2.3. Tekstualni matematički zadaci- psihološki aspekt

Tekstualni zadaci su divan spoj kognitivnih, jezičnih, matematičkih i perceptivnih aspekata i zbog toga igraju vrlo važnu ulogu u matematičkoj izobrazbi djece. Prilikom rješavanja tekstualnih zadataka učenici uče i usvajaju vještine koje će im biti potrebne u svakodnevnom životu u svrhu rješavanja životnih kvantitativnih situacija i problema stoga takva vrsta zadataka igra važnu ulogu u naobrazbi djece.

Zadatak zadan riječima je matematički problem formuliran pomoću riječi, odnosno zadan u jezičnom obliku. Pri rješavanju takvog zadatka, zbog jezičnog i matematičkog konteksta učenik treba:

1) Prepoznati matematički vokabular u zadatku: shvatiti značenje matematičkih riječi i prevesti ih na materinski jezik, odnosno protumačiti zadatak „svojim riječima“ i zamisliti stvarnu životnu situaciju koja je opisana u zadatku.
2) Shvatiti matematičke koncepte sadržane u zadatku i uočiti koja je računska radnja skrivena u tekstu zadatka, odnosno u lingvističkom obliku.

3) Prevođenje (transformiranje) jezičnih izraza na matematički jezik; uočavanje i zapisivanje matematičke jednadžbe. Potrebno je naglasiti kako je ovaj korak veoma važan. Kada učenik pita koju računsku radnju treba primijeniti u dotičnom zadatku, to znači ili da nije sposoban prevesti s jednog jezika na drugi ili želi izbjeći taj iznimno važan korak. Ukoliko se takvom učeniku često pomaže pri odabiru potrebne matematičke radnje time on propušta priliku svladati taj najvažniji korak u rješavanju tekstualnih zadataka.
4) Riješiti računsku radnju, najlakši je korak u tekstualnim zadacima, a potom zapisati odgovor, odnosno prevođenje matematičkog rezultata natrag na materinski jezik.

Psiholozi i nastavnici matematike su analizom došli do najčešćih teškoća i grešaka koje učenici rade prilikom rješavanja tekstualnih zadataka. Uočili su da učenici uglavnom griješe u odabiru potrebne računske operacije, a mnogo manje u samom postupku računanja. Pravi je razlog upravo u nesposobnosti prevođenja s materinskog jezika na matematički jezik, odnosno transformiranje jezičnih izraze u matematičke simbole. Mnogi nastavnici podučavaju učenike da tragaju za ključnim riječima ili izrazima koji ukazuju na potrebnu računsku radnju. Takav pristup podučavanja krije dva potencijalna problema, prvo neki izrazi na materinskom jeziku imaju obratno matematičko značenje (npr. Damir ima 5 olovaka. Ivan ima 3 olovke. Koliko olovaka Damir ima više od Ivana?), a drugo ako učenik isključivo traži ključne riječi ili izraze on ne pokušava shvatiti smisao cijele situacije postavljene u zadatku. Također, kao što je već spomenuto veći dio školskog programa nastave matematike se svodi na mehaničko računanje i uvježbavanje proceduralnih postupaka, dok tekstualni i problemski zadatci zauzimaju vrlo malo mjesta u nastavnom procesu. Stoga učenici često imaju tendenciju izbjegavanja takve vrste zadataka i to čak prije nego uopće pročitaju sam zadatak ili odmah krenu impulzivno računati bez ikakve povezanosti s ciljem zadatka.

Neki od jezičnih čimbenika koji učenicima stvaraju poteškoće pri rješavanju tekstualnih zadataka su:

i. suvišne informacije – odnosi se na informacije ili podatke koji ne pridonose rješavanju zadatka, to samo zbunjuje učenike osobite one koji su navikli na mehaničko računanje;
ii. neodređeni pokazatelji količine – neodređeni pokazatelji veličine su „neki“, „mnogo“, „nekoliko“ koji ukazuju na količinu ali je ne preciziraju. Učenici uglavnom ne obraćaju pažnju na takve izraze ili riječi, a umjesto toga često koriste sve brojeve, pa čak i one nepotrebne;

iii. dugačke rečenice – vrlo dugačke rečenice s puno brojeva i podataka kompliciraju razumijevanje same situacije zadatka. Učenici bolje uočavaju veze između podataka u jednostavnim rečenicama.
iv. stvarni životni problemski zadaci – prilikom stvaranja tekstualnih zadataka potrebno ih je povezati sa stvarnim životom jer na taj način pridobivamo veći interes učenika za rješavanje i on lakše može percipirati danu situaciju. Stvaranje ovakvih zadataka zahtjeva od nastavnika jako veliku kreativnost i inovativnost. [3]

1. 2. 4. Kognitivna strategija „Korak po korak"

Većina učenika s poteškoćama u učenju matematike loše se snalazi u rješavanju tekstualnih zadataka. Takvi učenici površno čitaju tekst zadatka, imaju poteškoća u razumijevanju nekih riječi ili jezičnih konstrukcija, ne mogu se organizirati u procesu rješavanja (slaba radna memorija), imaju tendenciju impulzivnog mehaničkog računanja i dr.

Kognitivna strategija rješavanja tekstualnih zadataka „Korak po korak" vodi učenike kroz proces obrađivanja informacija kroz sedam zasebnih koraka. Utječe na poboljšanje sposobnosti rješavanja tekstualnih zadataka djece koja se teško organiziraju u vlastitom radu na zadatku, kao na primjer djeca s ADHD-om, smanjuje površinsko čitanje teksta, otklanja teškoće u planiranju postupaka rješavanja kao i impulzivno mehaničko matematičko računanje.

Metoda „Korak po korak" se sastoji od sedam koraka kroz koje nastavnik vodi učenika kroz proces obrađivanja informacija, dajući mu sljedeće upute:

1. Pažljivo čitaj tekst zadatka i pitaj se:
„O čemu se ovdje radi? Zamisli situaciju koja je opisana tekstom zadatka. Jesam li dobro shvatio tekst zadatak? Ima li u danom tekstu nepoznatih riječi?"
Ako ne poznaješ značenje nekih riječi, odmah priupitaj nastavnika za objašnjenje. Ako ti barem jedna riječ ostane nepoznata, sav uložen trud može biti uzaludan.

2. Ponovo pročitaj tekst zadatka.
Pitaj se: „Što se u ovom zadatku traži?"

Zadatak treba pročitati najmanje tri puta. Prvo se pitamo što se u njemu traži, zatim pokušavamo zamisliti sličnu situaciju i odrediti postupak rješavanja:

„Što prvo moram saznati?“

„Što trebam saznati nakon toga?“

„Koje je konačno pitanje na koje moram saznati odgovor?“

3. Nastavnik pita učenika: „Što je u zadatku poznato? Koji su podaci dani?“

Tražiti od učenika da zabilježi sve činjenice navedene u zadatku.

4. Planiranje strategije. Učenik treba još jednom pročitati zadatak i pitati se:

„Koji postupak trebam primijeniti? Koje formule trebam?“

Planirajući korake potrebno je uvijek imati na umu konačan cilj tj. dati odgovor na zadano pitanje. Učenik treba nastaviti sa svojim bilješkama.

5. Procjena odgovora (rezultata). Nastavnik pita učenike: „Koji bi odgovor ovdje imao smisla?“

6. Izračunavanje.

7. Provjera dobivenog rezultata.

Tražiti od učenika da usporedi dobiveni odgovor (rezultat) sa svojom procjenom koju je učinio ranije. Neka se učenik vrati izvornoj problemskoj situaciji i provjeri zadovoljava li odgovor zadane uvjete. Nakon toga neka provjeri točnost svog izračuna. [3]

2. Provedeno istraživanje

2.1. Opis istraživanja

U ovom diplomskom radu istražen je utjecaj kognitivne strategije „Korak po korak" pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka učenika prvih i drugih razreda trogodišnje strukovne srednje škole. Intrinzičnu motivaciju, za provedbu ovog istraživanja, sam pronašla u vlastitom dugogodišnjem radu s učenicima srednje strukovne škole. Profil učenika koji pohađaju srednje strukovne škole, a osobito trogodišnje tzv. „zanatske" škole, su uglavnom učenici koji sporije i lošije savladavaju nastavno gradivo, pa tako i gradivo nastave matematike. Naime, takva pretpostavka o profilu „zanatskih" učenika je velikim dijelom opravdana, no postoje učenici koji su vlastitom voljom, željom i interesom za pojedino zanatsko zanimanje svjesno odabrali zanat kao svoje buduće zvanje. Iz svog radnog iskustva u nastavi matematike, mogu potvrditi da postoji široka lepeza predznanja, znanja i razumijevanja matematike kod učenika srednje strukovne škole, te da postoje učenici koji dobro vladaju znanjima osnovnoškolske matematike. Potrebno je naglasiti da je program nastave matematike za srednje strukovne trogodišnje škole izrazito sažeto koncipiran osnovnim znanjem matematike. Nastavni program matematike za srednje trogodišnje strukovne škole prema *Nacionalnom kurikulumu RH za predškolski, osnovnoškolski i srednjoškolski odgoj i obrazovanje* ima fond od 70 nastavnih sati na godišnjoj razini odnosno dva sata tjedno.

U svom nastavnom radu u srednjoj strukovnoj školi susrećem se s velikim brojem učenika koji imaju individualizirane ili prilagođene programe, pa potaknuta time da im olakšam i omogućim najbolji mogući način usvajanja gradiva matematike prilagođene njihovim potrebama krenula sam u istraživanje razne literature na tu temu. Prilikom istraživanja literature, znanstvenih radova i istraživanja koja su provedena s učenicima s poteškoćama u učenju (poput disgrafije, disleksije, diskalkulije i dr.), poremećajima u ponašanju ili blagim intelektualnim poteškoćama naišla sam na kognitivnu strategiju „Korak po korak" . Odabrala sam je kao najpogodniju i najprimjenjiviju u radu s učenicima koji imaju kratkotrajnu koncentraciju, manjkavu radnu memoriju, poteškoće u organizaciji svog rada te poteškoće u učenju matematike poput disleksije, disgrafije ili diskalkulije; također vrlo je slična heurističkoj metodi predavanja koja se zasniva na vođenim nastavnikovim pitanjima koja za cilj imaju usmjeravati učenikov misaoni proces pri postavljanju i rješavanju zadataka.

Kognitivnu strategiju „Korak po korak“ sam implementirala u dvije pogodne nastavne teme (cjeline) matematike, nastavna tema *Linearne jednadžbe* u 1. razredu i nastavna tema *Kvadratne jednadžbe* u 2. razredu. Obe navedene nastavne teme sadrže nastavne jedinice u kojima se obrađuju i rješavaju tekstualni matematički zadaci za koje većina učenika postiže slabu i/ili lošu riješenost prema dosadašnjem iskustvu.

2. 2. Cilj istraživanja- hipoteze

Ciljevi istraživanja su:

- istražiti usvojenost i primijenjenost kognitivne strategije „Korak po korak“ kod učenika prvih i drugih razreda prilikom rješavanja tekstualnih zadataka iz odabranih nastavnih tema
- usporediti rezultate riješenosti tekstualnih matematičkih zadataka između razreda u kojem su učenici primjenjivali kognitivnu metodu „Korak po korak“ i kontrolnog razreda
- ispitati stav učenika o usvojenosti, primijenjenosti i pomoći kognitivne strategije „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka.

U skladu s postavljenim ciljevima postavljene su hipoteze:

- Učenici 1. razreda će postići bolje rezultate pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka iz primjene linearnih jednadžbi primjenjujući kognitivnu strategiju „Korak po korak“
- Učenici 2. razreda će postići bolje rezultate pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka iz primjene kvadratnih jednadžbi primjenjujući kognitivnu strategiju „Korak po korak“

2. 3. Struktura istraživanja

Istraživanje je provedeno u Industrijskoj školi u Splitu, trogodišnjoj strukovnoj srednjoj školi sa sljedećim obrazovnim programima (zanimanjima): instalater-monter, brodomehaničar, elektromehaničar i CNC operater. Istraživanje obuhvaća ukupno četiri razreda, o čega su dva razreda učenici 1. razreda, a dva razreda učenici 2. razreda, odnosno ukupno 93 učenika. Učenici 1. i 2. razreda su podijeljeni u dva razredna odjeljenja prema obrazovnim programima (zanimanjima) na B odjeljenja sa zanimanjima: instalater-monteri i brodomehaničari, te C odjeljenje sa zanimanjima: elektromehaničari i CNC operateri. Istraživanje je koncipirano na način da jedan od dva razredna odjeljenja istog rednog razreda uči i primjenjuje kognitivnu strategiju „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka, a drugi razredni odjel ne primjenjuje (kontrolna grupa). Tablica 2. prikazuje strukturu istraživanja prema razredima:

Tablica 2. Struktura istraživanja prema razrednim odjeljenjima

Razred	Razredno odjeljenje	Primjena kognitivna strategija „Korak po korak“	Broj učenika	Broj individualiziranih programa	Broj prilagođenih programa
1. razred	1. B	DA	21	3	1
	1. C	NE	23	2	3
2. razred	2. B	NE	25	4	1
	2. C	DA	24	3	1

1. razred	1. B – primjenjuje kognitivnu strategiju „Korak po korak“ (eksperimentalna grupa)
	1. C – ne primjenjuje kognitivnu strategiju „Korak po korak“ (kontrolna grupa)
2. razred	2. B – ne primjenjuje kognitivnu strategiju „Korak po korak“ (kontrolna grupa)
	2. C – primjenjuje kognitivnu strategiju „Korak po korak“ (eksperimentalna grupa)

Prije provođenja istraživanja roditelji svih učenika su obaviješteni o provedbi istraživanja te zamoljeni za suglasnost za sudjelovanje učenika u istraživanju. Svi roditelji su pristali na sudjelovanje u istraživanju te su radovi svih 93 učenika uvršteni i analizirani u ovom istraživanju.

Na kraju obrade odabrane nastavne teme, učenici koji su primjenjivali kognitivnu strategiju „Korak po korak“ ispunjavali su anketu (anketni list).

2.4. Postupak istraživanja i metodička razrada nastavnih tema

U ovom poglavlju biti će opisan postupak istraživanja i dana metodička razrada odabranih nastavnih tema Linearne jednadžbe (1. razred) i Kvadratne jednadžbe (2. razred) u kojima se primjenjivala kognitivna strategija „Korak po korak“. Metodički razrađene nastavne podteme i njihove pisane pripreme sa popratnim nastavnim materijalima, dviju odabranih nastavnih tema nalaze se u prilozima ovog rada:

- Prilog 1. – Metodička razrada za nastavnu temu Linearne jednadžbe
- Prilog 2. – Metodička razrada za nastavnu temu Kvadratne jednadžbe.

Nastavne jedinice u kojima nije primjenjivana kognitivna strategija „Korak po korak“ nisu dio danih priloga. Prilozi također sadrže pismene ispite koji su sprovedeni na kraju nastavne teme te na osnovu kojih je napravljena analiza postavljenih ciljeva istraživanja. Ispiti se dijele na 4 grupe s obzirom na program: A i B grupa – učenici po redovnom programu, IN grupa – učenici po individualiziranom programu, PP grupa – učenici po prilagođenom programu.

2.4.1. Linearna jednadžba – 1.razred

Nastavna tema Linearne jednadžbe sadrži 7 nastavnih jedinica. Obrada nastavnog sadržaja se provodila u drugom polugodištu školske godine 2020./2021. tijekom travnja i svibnja prema planiranom nastavnom planu i programu matematike za 1. razred (70 sati godišnje). U tom vremenskom razdoblju dio nastave se održavao prema modelu C (on-line nastava), a dio prema modelu A (uživo) odlukom Ministarstva znanosti i obrazovanja uslijed tadašnje epidemiološke situacije u Republici Hrvatskoj.

U Tablici 3. prikazana je razrada nastavne teme Linearne jednadžbe prema nastavnim jedinicama te su naznačene nastavne jedinice koje se odrađene po metodi „Korak po korak“ (KPK).

Tablica 3. Nastavna tema Linearne jednadžbe prema nastavnim jedinicama

Nastavna jedinica	**Predviđena satnica**	**Ostvarena satnica**	**Metoda KPK**
1. Rješavanje linearnih jednadžbi s jednom nepoznanicom	2	4	ne
2. Primjena linearnih jednadžbi – problemi I. stupnja	2	4	da
3. Graf linearne funkcije	2	2	ne
4. Sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice	2	2	ne
5. Sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice – tekstualni zadaci	2	2	da
6. Usustavljivanje nastavnog sadržaja	2	2	da
7. Ispit znanja i analiza	2	2	da
Ukupno	12	18	10

2. 4. 2. Kvadratna jednadžba – 2.razred

Nastavna tema Kvadratne jednadžbe sadrži 7 nastavnih jedinica. Obrada nastavnog sadržaja se provodila u drugom polugodištu školske godine 2020./2021. tijekom travnja i svibnja prema planiranom nastavnom planu i programu matematike za 2. razred (70 sati godišnje). U tom vremenskom razdoblju dio nastave se održavao prema modelu C (on-line nastava), a dio prema modelu A (uživo) odlukom Ministarstva znanosti i obrazovanja uslijed tadašnje epidemiološke situacije u Republici Hrvatskoj.

U Tablici 4. prikazana je razrada nastavne teme Kvadratne jednadžbe prema nastavnim jedinicama te su naznačene nastavne jedinice koje se odrađene po metodi „Korak po korak“ (KPK).

Tablica 4. Nastavna tema Kvadratna jednadžba prema nastavnim jedinicama

Nastavna jedinica	**Predviđena satnica**	**Ostvarena satnica**	**Metoda KPK**
1. Kvadratne jednadžbe - uvod	1	2	ne
2. Nepotpune kvadratne jednadžbe – uvođenje kompleksnih brojeva	2	2	ne
3. Formula za rješavanje kvadratne jednadžbe	3	4	ne
4. Diskriminanta kvadratne jednadžbe	1	2	ne
5. Primjena kvadratne jednadžbe – tekstualni zadaci	2	2	da
6. Usustavljivanje nastavnog sadržaja	2	2	da
7. Ispit znanja i analiza	2	2	da
Ukupno	13	16	6

3. Analiza i rezultati istraživanja

U ovom poglavlju biti će prikazana statistička analiza podataka prikupljena na osnovu riješenosti tekstualnih matematičkih zadataka iz radnih lista (RL) i ispita znanja. Učenici, prvih i drugih razreda, samostalno su rješavali radne liste nakon obrađenih nastavnih jedinica Primjena linearnih odnosno kvadratnih jednadžbi. Svaka radna lista sadržavala je 4 tekstualna matematička zadatka iz primjene linearnih odnosno kvadratnih jednadžbi. Učenici eksperimentalne grupe morali su primijeniti kognitivnu strategiju „Korak po korak“ prilikom rješavanja zadataka iz radnih lista dok su učenici kontrolne grupe imali slobodu pri rješavanju tih istih zadataka. Nakon obrađene nastavne teme te usustavljivanja nastavnog sadržaja učenici su pisali ispit znanja kao konačnu provjeru usvojenosti nastavne teme. Prilikom pisanja ispita znanja, učenicima eksperimentalne grupe bilo je dozvoljeno koristiti listu s nabrojenim koracima kognitivne strategije „Korak po korak“ za rješavanje tekstualnih zadataka dok učenici kontrolne grupe nisu to koristili.

Nad prikupljenim podacima napravljena je statistička obrada podataka riješenosti tekstualnih zadataka iz radnih lista i ispita znanja tako da je izračunata riješenost svakog pojedinog zadataka te ukupna riješenost. Formula korištena za izračun riješenosti zadataka je sljedeća:

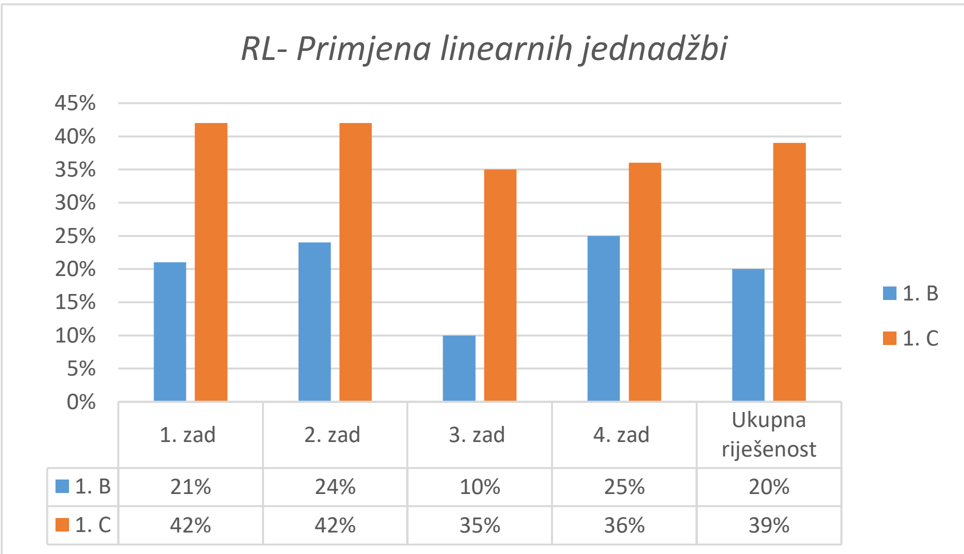
$$riješenost\ zadataka\ (\%) = \frac{\sum broj\ ostvarenih\ bodova\ za\ pojedini\ zadatak}{broj\ učenika\ u\ i\text{–}tom\ razredu * \sum maksimalan\ broj\ bodova\ za\ pojedinom\ zadataka}.$$

Za ispitivanje razlike srednjih vrijednosti rezultata korišten je neparametrijski postupak Median test za nezavisne uzorke ispitanika.

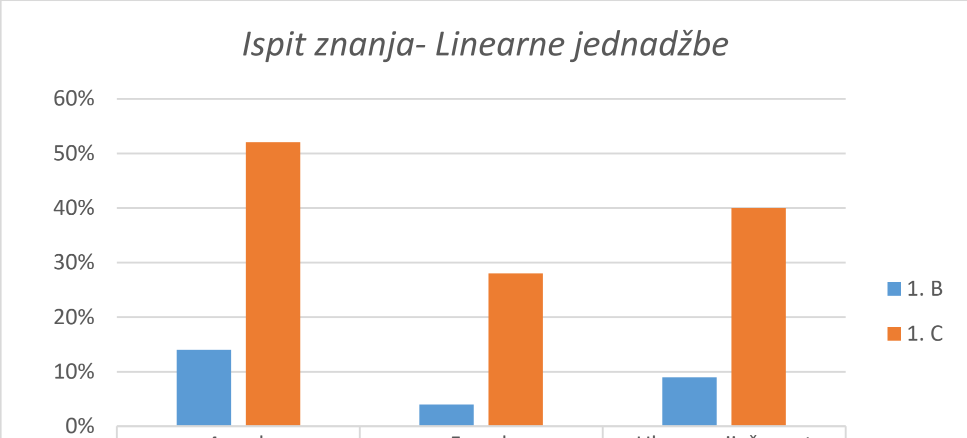
3.1. Analiza i rezultati istraživanja u 1. razredima

Prilikom obrade nastavne teme Linearne jednadžbe u eksperimentalnoj grupi (1. B) korištena je kognitivna strategija „Korak po korak" tokom 10 od ukupno 18 nastavnih sati potrebnih za obradu čitave nastavne teme (Tablica 3.). Nakon obrađene nastavne jedinice „Primjena linearnih jednadžbi- problemi I. stupnja" učenici eksperimentalne i kontrolne grupe dobili su radnu listu naslova *„Primjena linearnih jednadžbi"* za samostalno rješavanje. Radna lista sadrži 4 tekstualna matematička zadatka u kojima učenici moraju prepoznati linearnu jednadžbu opisanu riječima te stavljenu u životni kontekst odnosno od učenika se traži da izvrše proces transformacije s materinskog jezika na matematički jezik. Također, ispit znanja *„Linearne jednadžbe"* sadrži dva tekstualna matematička zadatka s kojima se provjerava i vrednuje krajnje usvajanje primjene linearnih jednadžbi. Primjeri radne liste i ispita znanja nastavne teme Linearne jednadžbe se nalaze u Prilogu 1.

Sljedeći stupčani dijagrami (Dijagram 1. i 2.) prikazuju riješenost zadataka u eksperimentalnoj i kontrolnoj grupi odnosno po razredima.



Dijagram 1. Rezultati riješenosti RL-Primjena linearnih jednadžbi u eksperimentalnoj (1. B) i kontrolnoj grupi (1. C)



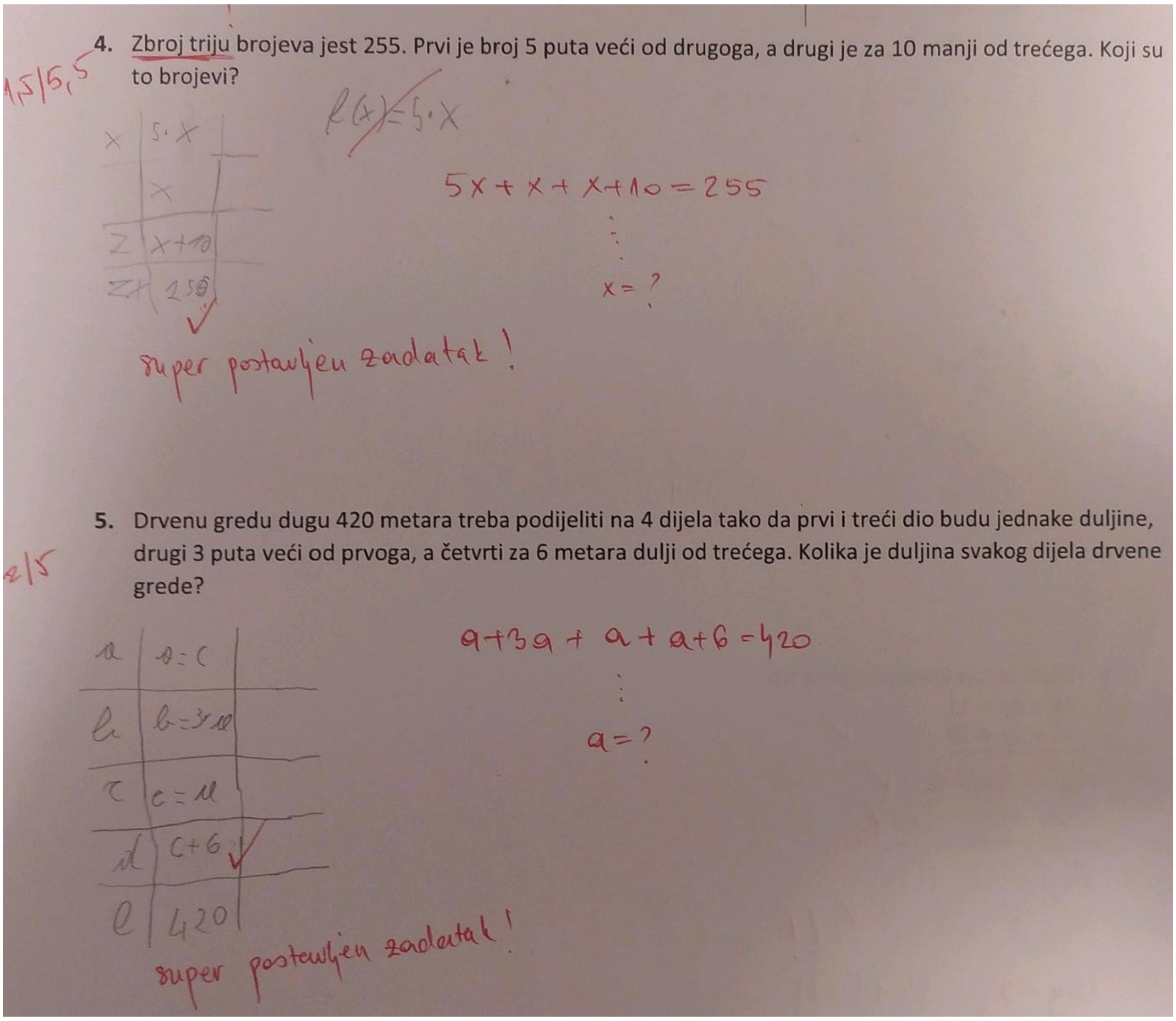
	4. zad	5. zad	Ukupna riješenost
1. B	14%	4%	9%
1. C	52%	28%	40%

Dijagram 2. Rezultati riješenosti tekstualnih zadataka iz ispita znanja- Linearne jednadžbe u eksperimentalnoj (1. B) i kontrolnoj grupi (1. C)

Rezultati statističke obrade pokazuju da postoji statistički značajna razlika između eksperimentalne i kontrolne grupe. Iz dijagrama 1. i 2. možemo iščitati da značajno bolju riješenost tekstualnih zadataka su postigli učenici kontrolne grupe (1. C) odnosno učenici koji nisu primjenjivali kognitivnu strategiju „Korak po korak“. Iz dijagrama 1. možemo uočiti da je razlika u postotku riješenosti svakog pojedinog zadataka između eksperimentalne i kontrolne grupe značajna i u prosjeku iznosi ± 18 % u korist kontrolne grupe. Naravno, navedeni rezultati su se odrazili i na ukupnu riješenost zadataka iz radne liste u korist kontrolne grupe.

No, razlika riješenosti tekstualnih matematičkih zadatak između eksperimentalne i kontrolne grupe se uvelike povećala u konačnim rezultatima ispita znanja, ona u prosjeku iznosi ± 31 % (Dijagram 2.). Kako postotak riješenosti pojedinačnih zadataka u ispitu znanja tako i ukupna riješenost ide u korist kontrolne grupe. Iz dobivenih rezultata dijagrama 1. i 2. zaključujemo da je postavljena hipoteza kojom će učenici eksperimentalne grupe postići bolje rezultate pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka opovrgnuta. Bolje rezultate ukupne riješenosti tekstualnih zadataka su postigli učenici kontrolne grupe odnosno učenici koji pri rješavanju zadataka nisu primjenjivali kognitivnu strategiju „Korak po korak“. Ipak su neki pojedini učenici eksperimentalne grupe koristili strategiju „Korak po korak“, iako nisu raspisali baš sve korake prema uputama postigli su bolju riješenost tekstualnih zadataka od drugih (Slika 1. i 2.).

Slika 1. Primjer ispitu znanja- Linearnih jednadžbi učenika iz eksperimentalne grupe (1. B)



1,5/5,5

4. Zbroj triju brojeva jest 255. Prvi je broj 5 puta veći od drugoga, a drugi je za 10 manji od trećega. Koji su to brojevi?

$5x + x + x + 10 = 255$

$x = ?$

super postavljen zadatak!

2/5

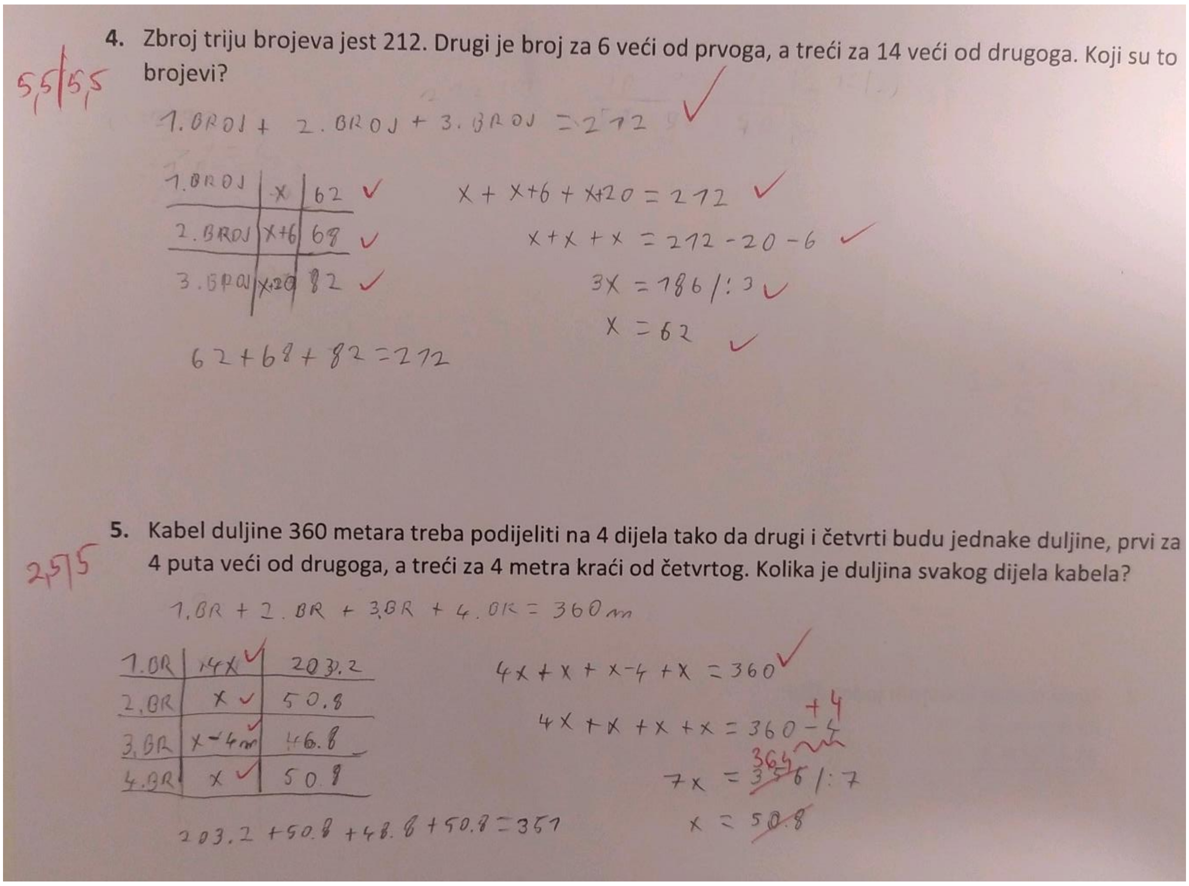
5. Drvenu gredu dugu 420 metara treba podijeliti na 4 dijela tako da prvi i treći dio budu jednake duljine, drugi 3 puta veći od prvoga, a četvrti za 6 metara dulji od trećega. Kolika je duljina svakog dijela drvene grede?

$a + 3a + a + a + 6 = 420$

$a = ?$

super postavljen zadatak!

Slika 2. Primjer ispitu znanja- Linearnih jednadžbi učenika iz eksperimentalne grupe (1. B)



5,5/5,5

4. Zbroj triju brojeva jest 212. Drugi je broj za 6 veći od prvoga, a treći za 14 veći od drugoga. Koji su to brojevi?

1. BROJ + 2. BROJ + 3. BROJ = 212

1. BROJ	x	62
2. BROJ	x+6	68
3. BROJ	x+20	82

$x + x+6 + x+20 = 212$

$x + x + x = 212 - 20 - 6$

$3x = 186 /:3$

$x = 62$

$62 + 68 + 82 = 212$

2,5/5

5. Kabel duljine 360 metara treba podijeliti na 4 dijela tako da drugi i četvrti budu jednake duljine, prvi za 4 puta veći od drugoga, a treći za 4 metra kraći od četvrtog. Kolika je duljina svakog dijela kabela?

1. BR + 2. BR + 3. BR + 4. BR = 360 m

1. BR	4x	203.2
2. BR	x	50.8
3. BR	x-4m	46.8
4. BR	x	50.8

$4x + x + x-4 + x = 360$

$4x + x + x + x = 360 - 4$ +4

$7x = \cancel{356} /:7$ 364

$x = \cancel{50.8}$

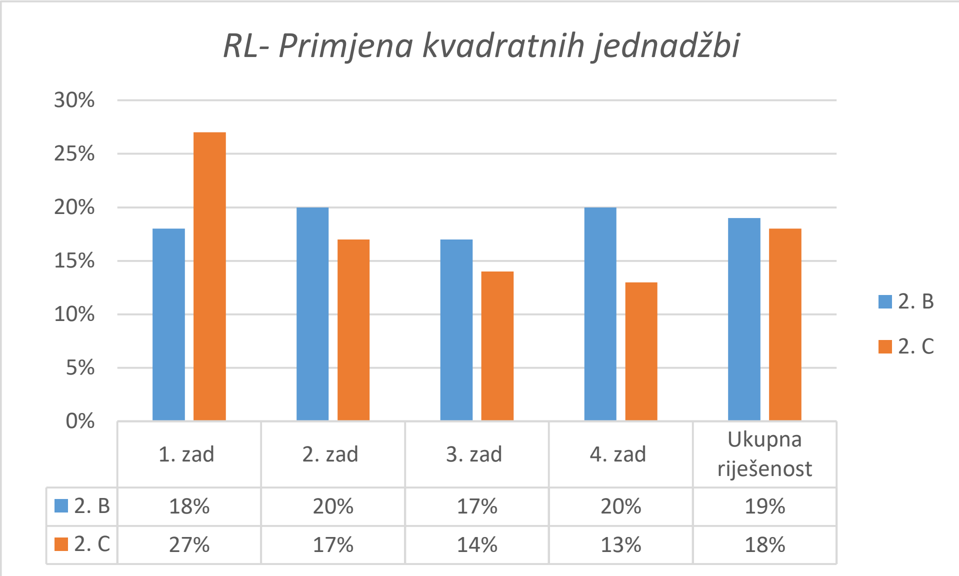
$203.2 + 50.8 + 46.8 + 50.8 = 351$

Kao moguće razloge za dobivene rezultate istraživanja mogu iznijeti svoje subjektivno mišljenje koje se temelji na dugogodišnjem radnom iskustvu u radu s učenicima prvih razreda srednje trogodišnje strukovne škole. Učenici eksperimentalne grupe (1. B) imaju lošije predznanje osnovnoškolske matematike u usporedbi s učenicima kontrolne grupe (1. C), što potvrđuju i rezultati inicijalnog testa provedenog na početku školske godine. Istraživanje nije potvrdilo postavljenu hipotezu jer se gradivo linearnih jednadžbi stečeno u osnovnoj školi nadograđuje znanjem iz primjene linearnih jednadžbi u 1. razredu srednje škole, a to učenici koji posjeduju lošije predznanje teško mogu u toliko malo nastavnih sati usvojiti. Kao još jedan od mogućih razloga ne potvrđivanja postavljene hipoteze navela bih i okruženje u kojem se odvijala obrada nastavne jedinice Primjena linearnih jednadžbi- problemi I. stupnja. Naime, nastava se odvijala prema modelu C (on-line) pri čemu izostaje direktna interakcija s učenicima pri kojoj nastavnik dobiva trenutnu povratnu informaciju od učenika o razumijevanju i usvajanju odabrane kognitivne strategije poučavanja. Učenici eksperimentalne grupe koji su sudjelovali u istraživanju pretežito imaju kratkotrajnu koncentraciju, brzo gube fokus, imaju manjak radne koncentracije te poteškoće u organizaciji svog rada stoga smatram da je premali broj nastavnih sati utrošen u poučavanje i korištenje odabrane kognitivne strategije „Korak po korak“ da bi se postigao veliki napredak u rješavanju tekstualnih zadataka. Važno je naglasiti da se radi o učenicima koji većinom neće samostalno vježbati primjenjivanje poučene kognitivne strategije rješavajući tekstualne zadatke zbog svojih poteškoća u učenju te njihovog generalnog neuspjeha u primjenjivanju različitih kognitivnih i metakognitivnih strategija učenja. Takvi učenici imaju stav da oni to ne mogu, te su indiferentni pri poučavanju novih strategija učenja jer smatraju da im to ne može pomoći te da oni jednostavni nisu „dobri“ u matematici. Također, i sam autor kognitivne strategije „Korak po korak“ u uputama poručuje nastavnicima matematike da se oboružaju strpljenjem pri poučavanju strategije te napominje kako će morati uložiti mnogo nastavnih sati da strategija poluči uspjeha pri rješavanju tekstualnih zadataka. [3]

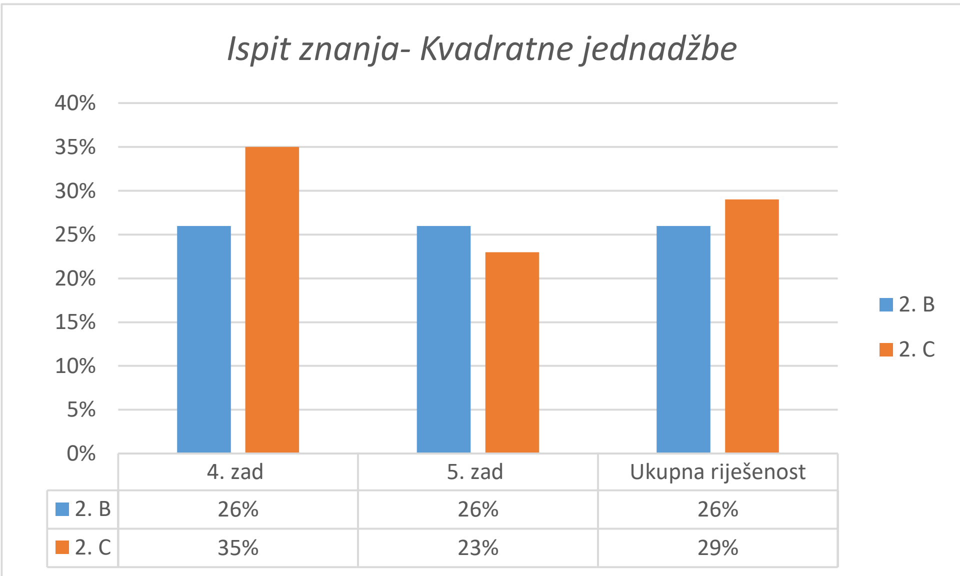
3.2. Analiza i rezultati istraživanja u 2. razredima

Tijekom obrade nastavne teme Kvadratne jednadžbe u eksperimentalnoj grupi (2. C razred) korištena je kognitivna strategija „Korak po korak“ 6 nastavnih sati od ukupno 16 sati (Tablica 4.). Prilikom obrade nastavne jedinice Primjena kvadratnih jednadžbi- tekstualni zadaci korištena je kognitivna strategija kao metoda za rješavanje tekstualnih matematičkih zadataka s učenicima eksperimentalne grupe. Nakon obrade navedene nastavne jedinice, učenici eksperimentalne (2. C razred) i kontrolne grupe (2. B razred) dobili su radnu listu (RL) naslova *„Primjena kvadratnih jednadžbi“* za samostalno rješavanje. Radna lista sadrži 4 tekstualna zadataka iz primjene kvadratne jednadžbe, dok ispit znanja iz *„Kvadratnih jednadžbi“* sadrži dva tekstualna zadatka. Primjeri radne liste i ispita znanja se nalaze u Prilogu 2.

Na osnovu dobivenih rezultata iz gore navedenih radnih lista i ispita znanja napravljeni su stupčani dijagrami koji prikazuju riješenost tekstualnih zadataka u obje grupe (Dijagram 3. i 4.).



Dijagram 3. Rezultati riješenosti RL-Primjena kvadratnih jednadžbi u eksperimentalnoj (2. C) i kontrolnoj grupi (2. B)



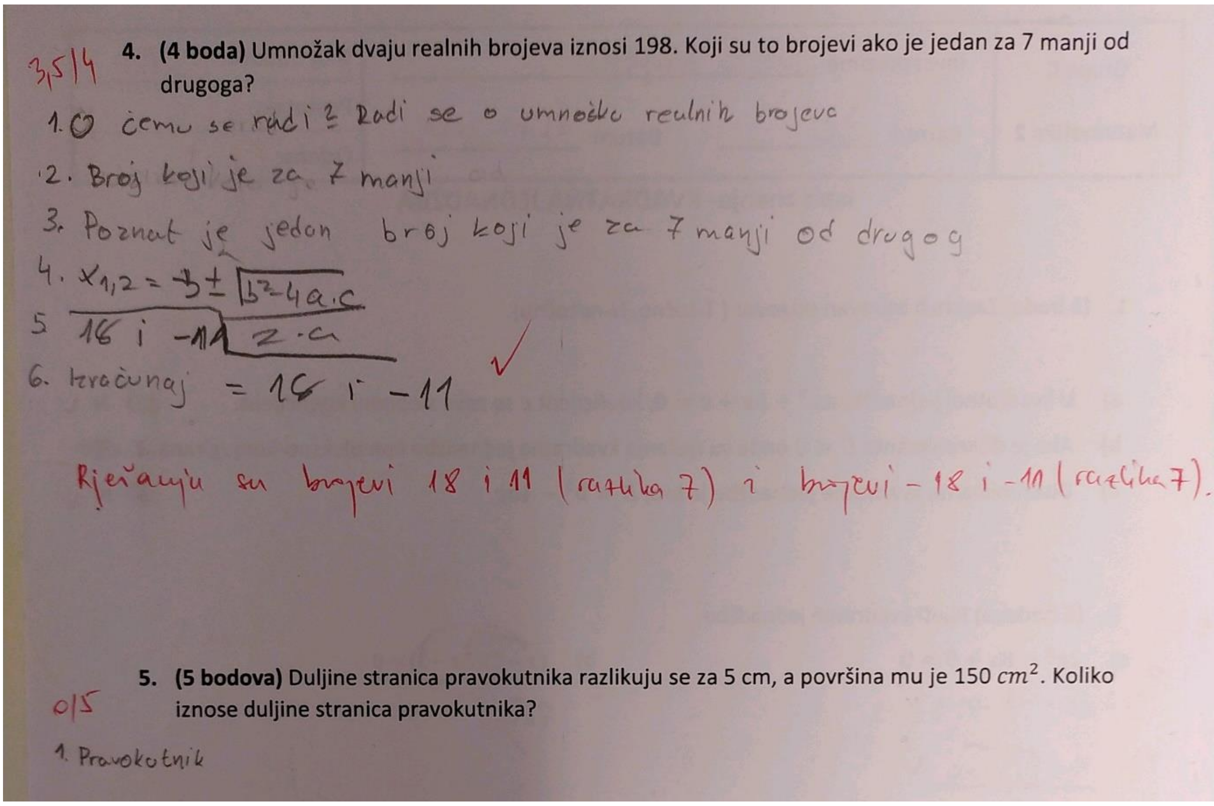
Dijagram 4. Rezultati riješenosti tekstualnih zadataka iz ispita znanja- Kvadratne jednadžbe u eksperimentalnoj (2. C) i kontrolnoj grupi (2. B)

Rezultati statističke obrade podataka pokazuju da ne postoji statistički značajna razlika između eksperimentalne (2. C) i kontrolne grupe (2. B). Dijagram 3. prikazuje rezultate riješenosti tekstualnih matematičkih zadataka iz radne liste, te možemo uočiti da razlika u postotku riješenosti između eksperimentalne i kontrolne grupe nije velika, ona u prosjeku iznosi $\pm 6\%$. Također ti su se rezultati odrazili i na ukupnu riješenost zadataka iz radne liste, koja ide u korist kontrolne grupe (2. B) za $1\ \%$ više od eksperimentalne (2. C). Iz dijagrama 3. možemo uočiti da je bolji postotak riješenosti postigla kontrolna grupa u odnosu na eksperimentalnu. No, rezultati ispita znanja prikazuju drugačije stanje riješenosti tekstualnih zadataka nego radne liste (Dijagram 4.). Rezultati ispita znanja iz Kvadratnih jednadžbi idu u korist eksperimentalnoj grupi, ali konačna razlika između grupa u postotku ukupne riješenosti tekstualnih zadataka razlikuje se tek za $\pm 3\%$. Na osnovu statističke obrade podataka i postotka riješenosti zadataka možemo zaključiti da ne postoji značajna utjecaj kognitivne strategije „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih zadataka iz primjene kvadratnih jednadžbi, odnosno postavljena hipoteza je opovrgnuta.

Jedan od mogućih razloga za dobivene rezultate bi bih zasigurno mali broj nastavnih sati u kojima se poučavala i primjenjivala kognitivna strategija „Korak po korak“, svega 6 od ukupno 16 nastavnih sati provedenih za obradu nastavne teme Kvadratne jednadžbe. Iz svog radnog iskustava s ovim učenicima od 1. razreda pa sve do trenutka provedbe istraživanja, naglasila bi kako učenici eksperimentalne grupe (2. C) generalno postižu bolje rezultate u ispitima znanja u odnosu na kontrolnu grupu (2. B), što se pokazalo i u ovom istraživanju. Mali uzorak istraživanja, svega 49 učenika 2. razreda, također utječe na rezultat ne postojanja statistički značajne razlike između grupa odnosno razreda. Pretpostavljam da bi rezultati prevagnuli u nečiju korist da je istraživanje sprovedeno na većem uzorku.

Htjela bih istaknuti, iako se pokazalo da kognitivna strategija „Korak po korak“ generalno nije polučila preveliki uspjeh pri rješavanju tekstualnih zadataka, da su ipak neki učenici napravili iskorak pri samom prevođenju jezičnih izraza u matematički jezik. Naglasila bih kako je taj korak izrazito važan te jako težak u ovakvoj vrsti zadataka jer riješiti samu kvadratnu jednadžbu je najlakši korak. Slike 3., 4. i 5. prikazuju riješene ispite znanja učenika eksperimentalne grupe (2. C) koji su pomno ispisivali svaki korak strategije te time uspjeli riješiti tekstualne zadatke.

Slika 3. Primjer ispita znanja- Kvadratne jednadžbe učenika iz eksperimentalne grupe (2.C)



3,5/4 **4. (4 boda)** Umnožak dvaju realnih brojeva iznosi 198. Koji su to brojevi ako je jedan za 7 manji od drugoga?

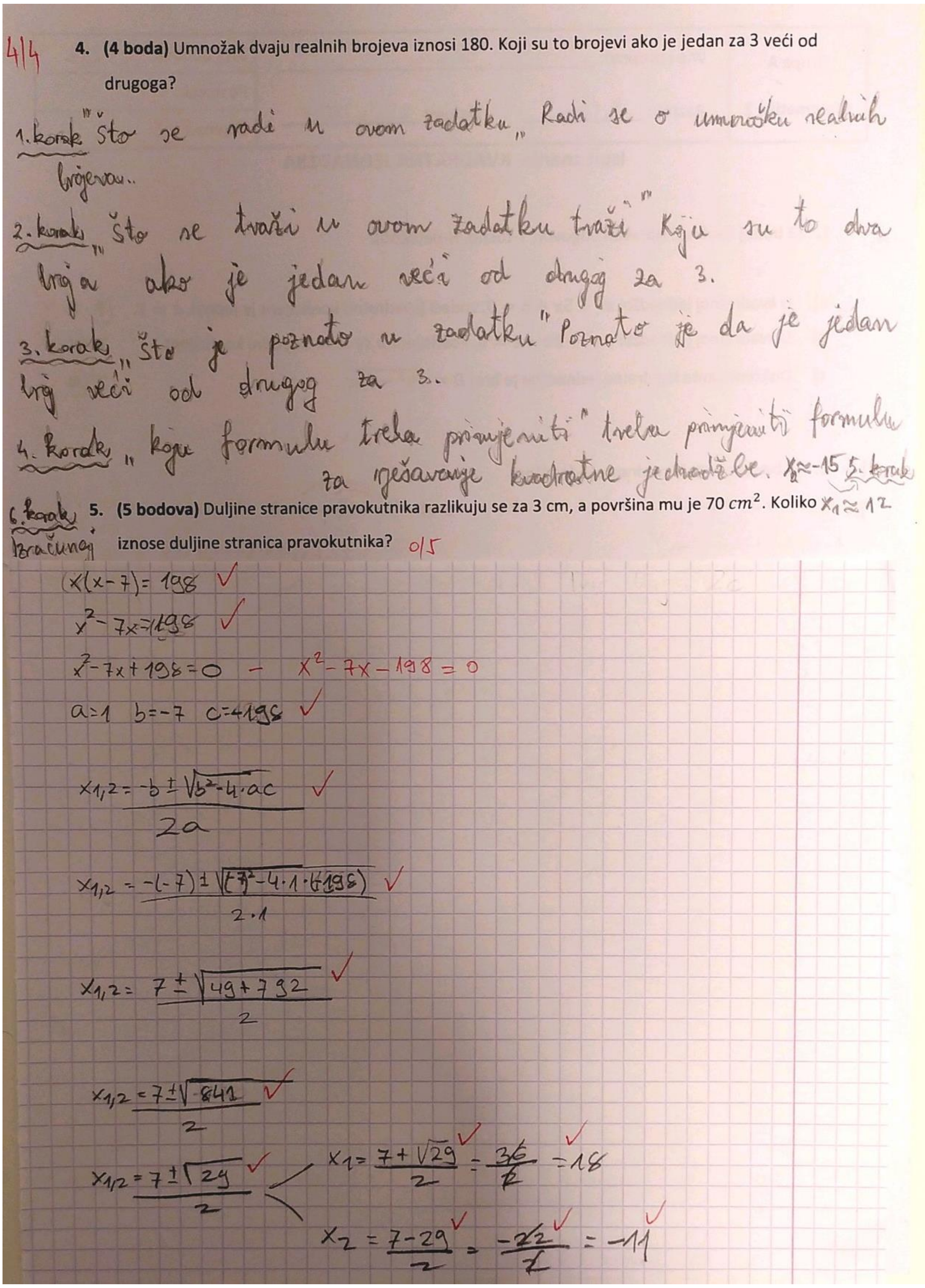
1. O čemu se radi? Radi se o umnošku realnih brojeva
2. Broj koji je za 7 manji
3. Poznat je jedan broj koji je za 7 manji od drugog
4. $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a \cdot c}}{2 \cdot a}$
5. 18 i -11
6. Izračunaj = 18 i -11

Rješenja su brojevi 18 i 11 (razlika 7) i brojevi -18 i -11 (razlika 7).

0/5 **5. (5 bodova)** Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za 5 cm, a površina mu je 150 cm^2. Koliko iznose duljine stranica pravokutnika?

1. Pravokutnik

Slika 4. Primjer ispita znanja- Kvadratne jednadžbe učenika iz eksperimentalne grupe (2.C)


4/4 **4. (4 boda)** Umnožak dvaju realnih brojeva iznosi 180. Koji su to brojevi ako je jedan za 3 veći od drugoga?

1. korak "Što se radi u ovom zadatku" Radi se o umnošku realnih brojeva..

2. korak "Što se traži u ovom zadatku traži" Koja su to dva broja ako je jedan veći od drugog za 3.

3. korak "Što je poznato u zadatku" Poznato je da je jedan broj veći od drugog za 3..

4. korak "Koju formulu treba primjeniti" treba primjeniti formulu za rješavanje kvadratne jednadžbe. $x_2 \approx -15$ 5. korak $x_1 \approx 12$

6. korak Izračunaj

5. (5 bodova) Duljine stranice pravokutnika razlikuju se za 3 cm, a površina mu je 70 cm^2. Koliko iznose duljine stranica pravokutnika? 0/5

$x(x-7)=198$ ✓

$x^2-7x=198$ ✓

$x^2-7x+198=0$ — $x^2-7x-198=0$

$a=1 \quad b=-7 \quad c=+198$ ✓

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4\cdot ac}}{2a}$ ✓

$x_{1,2}=\frac{-(-7)\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot1\cdot(+198)}}{2\cdot1}$ ✓

$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49+792}}{2}$ ✓

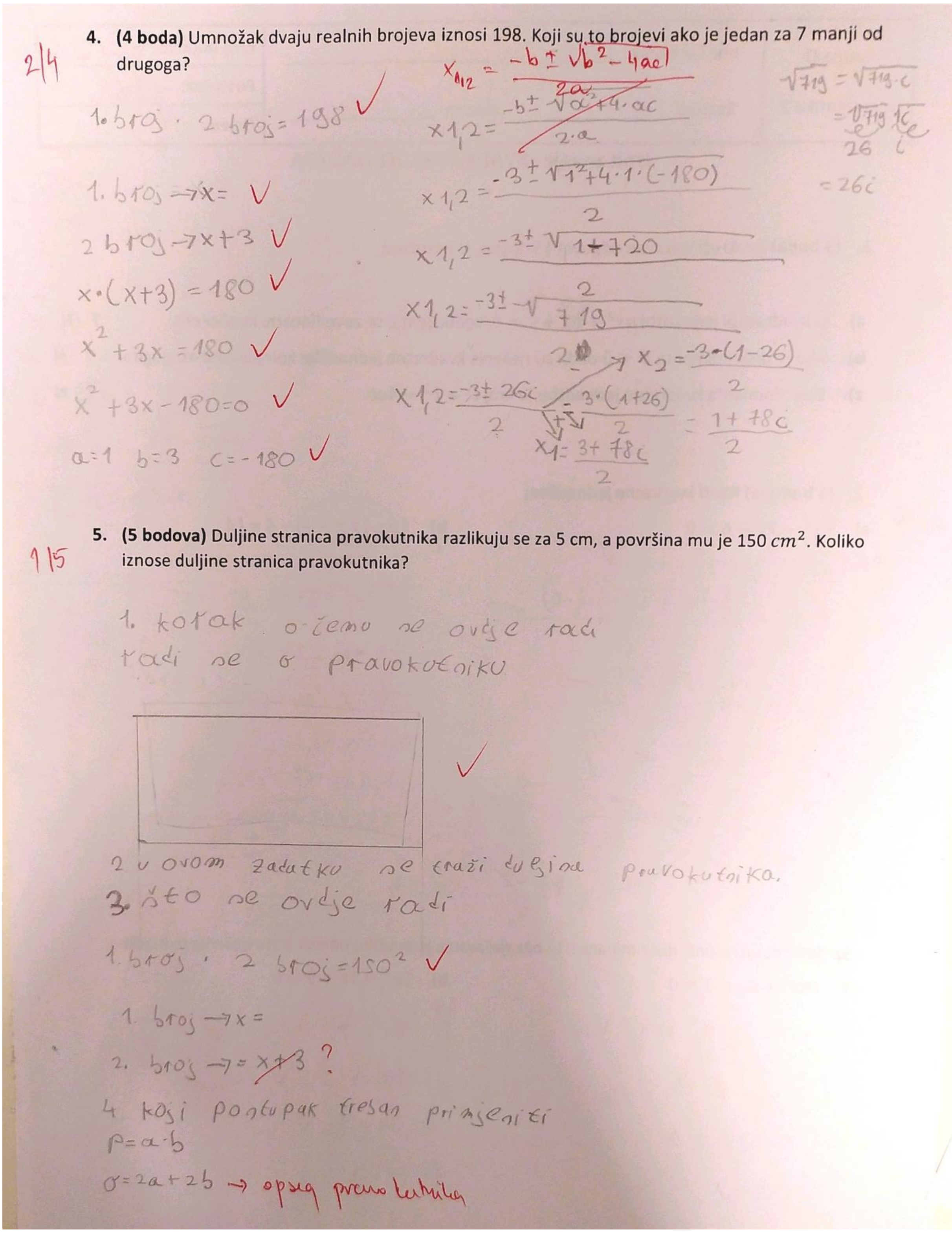
$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{841}}{2}$ ✓

$x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{29}}{2}$ ✓

$x_1=\frac{7+\sqrt{29}}{2}=\frac{36}{2}=18$ ✓

$x_2=\frac{7-29}{2}=\frac{-22}{2}=-11$ ✓

Slika 5. Primjer ispita znanja- Kvadratne jednadžbe učenika iz eksperimentalne grupe (2.C)



2/4

4. (4 boda) Umnožak dvaju realnih brojeva iznosi 198. Koji su to brojevi ako je jedan za 7 manji od drugoga?

1. broj · 2. broj = 198 ✓

1. broj → x = ✓

2. broj → x+3 ✓

$x\cdot(x+3)=180$ ✓

$x^2+3x=180$ ✓

$x^2+3x-180=0$ ✓

$a=1 \quad b=3 \quad c=-180$ ✓

$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1,2}=\cancel{\frac{-b\pm\sqrt{a^2+4\cdot ac}}{2\cdot a}}$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{1^2+4\cdot1\cdot(-180)}}{2}$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{1+720}}{2}$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{719}}{2}$

$x_{1,2}=\frac{-3\pm 26i}{2}$

$x_2=\frac{-3-(1-26)}{2}$

$x_1=\frac{3\cdot(1+26)}{2}=\frac{1+78i}{2}$

$x_1=\frac{3+78i}{2}$

$\sqrt{719}=\sqrt{719\cdot i}$

$=\sqrt{719}\ \sqrt{i}$

$26 \quad i$

$=26i$

1/5

5. (5 bodova) Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za 5 cm, a površina mu je 150 cm^2. Koliko iznose duljine stranica pravokutnika?

1. korak o čemu se ovdje radi
radi se o pravokutniku

✓

2 u ovom zadatku se traži duljina pravokutnika.

3. što se ovdje radi

1. broj · 2 broj = 150^2 ✓

1. broj → x =

2. broj → = ~~x+3~~ ?

4 koji postupak trebam primjeniti

$P=a\cdot b$

$O=2a+2b$ → opseg pravokutnika

4. Zaključak

Nakon provedenog istraživanja te prikupljanja svih podataka za analizu, a potom analiziranja i obrade prikupljenih podataka možemo donijeti generalne zaključke o istraživanju:

- da postoji statistički značajna razlika među grupama 1. razreda te da su učenici kontrolne grupe postigli bolju riješenost tekstualnih zadataka na ispitu znanja,
- da ne postoji statistički značajna razlika među grupama 2. razreda te da su učenici eksperimentalne grupe postigli bolju riješenost tekstualnih zadataka na ispitu znanja.

Potrebno je napomenuti da je ovo istraživanje provedeno na malom uzorku, odnosno na 44 učenika prvih razreda i 49 učenika drugih razreda, da bi se pokazali neki značajno utjecajni rezultati kognitivne strategije „Korak po korak“. Kao glavni razlog ne postizanje „prevelikog“ pomaka u boljoj riješenosti tekstualnih zadataka navela bih zaista mali broj nastavnih sati provedenih za poučavanje i primjenu odabrane kognitivne strategije „Korak po korak“. Kako i sam autor strategije M. C. Sharma navodi da je potrebno da nastavnik uloži mnogo truda i sati rada kako bi učenici najprije prihvatili ovu strategiju kao alat za rješavanje tekstualnih zadataka, a zatim je i sami primjenjivali u svom radu. Moramo uzeti u obzir da su u istraživanju sudjelovali učenici koji uglavnom imaju lošije predznanje osnovnoškolske matematike, pa time već na samom početku poučavanja moraju nadoknađivati svoje praznine u znanju, a ne ga samo nadograđivati s novim znanjima. Također, većina tih učenika ima određene poteškoće u učenju, poput slabe koncentracije, manjak radne memorije, disleksije, disgrafije, diskalkulije, zbog kojih ne mogu savladavati gradivo istom brzinom kao i učenici bez poteškoća u učenju. Zbog specifičnosti svakog učenika, smatram da bi odabrana kognitivna strategija „Korak po korak“ postigla veći uspjeh u razumijevanju tekstualnih zadataka ukoliko bi se poučavanje odvijalo u manjim grupama, pa čak i individualno te veći broj nastavnih sati. Navela bih da će ovakav profil učenika vrlo malo vremena provesti u samostalnom uvježbavanju nove strategije učenja jer nemaju odgovarajuće radne navike i uglavnom smatraju da je ono što su napravili na satu u školi dovoljno za savladavanje poučenog. Stoga ti učenici neće savladati sve korake kognitivne strategije „Korak po korak“, pa time nisu ni u mogućnosti koristiti njenu primjenu pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka.

No, smatram da je u ovom istraživanju ipak ostvaren pomak u rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka iz primjene linearnih odnosno kvadratnih jednadžbi kod pojedinih učenika koji su prihvatili i primjenjivali kognitivnu strategiju „Korak po korak“, što je vidljivo iz njihovih ispita znanja (Slika 1.-5.). Smatram da je kognitivna strategija „Korak po korak“ utjecala na način čitanja teksta zadatka te time smanjila površno čitanje bez razumijevanja i umanjila impulzivno matematičko računanje. Utjecala je na organizaciju vlastitog učeničkog rada pri rješavanju tekstualnih zadataka te im time omogućila svladavanje najtežeg koraka, a to je prevođenje (transformiranje) jezičnih izraza u matematički jezik. Iako je istraživanje pokazalo da je tek poneki učenik primjenjivao poučenu kognitivnu strategiju „Korak po korak“, svakako ću je u svom daljnjem nastavnom radu koristiti pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka jer smatram da ni taj mali broj učenika nije zanemariv. Svim nastavnicima matematike i roditeljima koji sudjeluju u procesu učenja svog djeteta bi preporučila da ne zanemaruju tekstualne zadatke, koji učenike uče usvajanju vještina koje će im biti potrebne u svakodnevnom životu u svrhu rješavanja različitih životnih situacija, te bi im svakako preporučila korištenje kognitivne strategije „Korak po korak“ pri njihovom rješavanju.

Literatura

[1] T. L. O. J. H. R. Reid, Strategy instruction for students with learning disabilities, New York: London: Giulford Press, 2013.

[2] A. Čavar, »Primjena kognitivnh i metakognitivnih strategija u učenju kog dječaka s poremačajem pažnje i hiperaktivnošću,« u *Edukacijsko-rehabilitacijski fakultet*, Sveučilište u Zagrebu, 2017.

[3] M. C. Sharma, Matematika bez suza: kako pomoći djetetu s teškoćama u učenju matematike, Buševac: Ostvarenje, 2001.

[4] M. Matijević, »(Na)učiti kako se uči (matematika),« *Poučak,* svez. 12, br. 45, pp. 30-38, 2011.

[5] G. Polya, Kako ću riješiti matematički zadatak, Zagreb: Školska knjiga, 1956.

[6] Z. Kurnik, »Heuristička metoda,« *Matematika i škola,* br. 34, pp. 148-153, 2006.

[7] Z. Kurnik, Posebne metode rješavanja matematičkih problema, Zagreb: Element, 2021.

[8] D. G. G. D. Kos, »Problematika tekstualnih zadataka,« *Matematika i škola,* br. 66, pp. 5-7, 2012.

[9] Z. Kurnik, »Jezik u nastavi matematike,« *Matematika i škola,* br. 66, pp. 99-105, 2006.

[10] V. Š. V. A. L. Pavlin Bernadić N., »Children's solving of mathematical word problems,« *Rewiev of Psychology,* svez. 15, pp. 35-43, 2008.

[11] I. Sorić, Samoreglacija učenja: možemo li naučiti učiti?, Jastebarsko: Naklada Slap, 2014.

[12] V. V. V. Vlahović Štetić V., Kladim se da možeš...psihološki aspekti početnog poučavanja matematike- priručnik za učitelje, Zagreb: Udruga roditelja "Korak po korak", 1998.

[13] J. H. F. J. H. ,. H. J. H. Flavell, »Developmental changes in memorization processes,« *Cognitive Psychology,* svez. 1, br. 4, pp. 324-340, 1970.

[14] M. F. I. Š. Lj. Jukić Matić, »Učinkovitost povratnih informacija u nastavi matematike,« *Matematika i škola,* br. 112, pp. 51-56, 2021.

TEMELJNA DOKUMENTACIJSKA KARTICA

PRIRODOSLOVNO-MATEMATIČKI FAKULTET
SVEUČILIŠTA U SPLITU
ODJEL ZA MATEMATIKU

DIPLOMSKI RAD

Primjena kognitivne strategije „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka

Gorana Glavurtić

Sažetak:

Tekstualni matematički zadaci su sastavni dio nastave matematike, njihovim rješavanjem učenici uče i usvajaju vještine koje će im biti potrebne u svakodnevnom životu u svrhu rješavanja životnih situacija i problema. Cilj diplomskog rada bio je istražiti utjecaj kognitivne strategije „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka iz primjene linearnih odnosno kvadratnih jednadžbi kod učenika 1. i 2. razreda trogodišnje strukovne srednje škole. Kognitivna strategija „Korak po korak“ vodi učenike kroz proces obrađivanja informacija kroz sedam koraka time utječući na poboljšanje sposobnosti rješavanja tekstualnih zadataka kod učenika s poteškoćama u učenju. Smanjuje površno čitanje teksta, otklanja poteškoće u planiranju postupaka rješavanja te utječe na impulzivno matematičko računanje. Analizom učeničkih radova o riješenosti zadanih tekstualnih zadataka iz primjene linearnih odnosno kvadratnih jednadžbi prikazani su rezultati istraživanja. Pokazalo se da kognitivna strategija „Korak po korak“ ima učinak na individualnoj razini.

Ključne riječi:

kognitivna strategija „Korak po korak“, tekstualni matematički zadaci, zadaci iz primjene linearnih jednadžbi, zadaci iz primjene kvadratnih jednadžbi

Podatci o radu:

106 stranice, 5 slika, 4 tablice, 4 dijagrama, 14 literaturnih navoda, hrvatski jezik

Mentor: doc. dr. sc., Nikola Marangunić

Neposredna voditeljica: Željka Zorić**,** v. pred.

Članovi povjerenstva:

Željka Zorić, v. pred.

doc. dr. sc., Nikola Marangunić

red. prof., Nikola Koceić Bilan

Povjerenstvo za diplomske radove je prihvatilo ovaj rad 30. ožujka 2022. godine.

BASIC DOCUMENTATION CARD

FACULTY OF SCIENCE, UNIVERSITY OF SPLIT
DEPARTMENT OF MATHEMATICS

MASTER'S THESIS

Application of cognitive learning strategy „Step by step“ in solving textual mathematical problems

Gorana Glavurtić

Abstract:

Textual mathematical problems are an integral part of mathematics teaching, by solving them students learn and acquire skills they will need in everday life in order to solve life situation and problems. The aim of this thesis was to research the impact of cognitve strategy „Step by step“ in solving textual mathematical problems from application of linear or quadratic equations in first and second grade students of three-year vocational high school. The „Step by step“ cognitive strategy guides students throug the process of processing information through seven steps, thus improving the ability to solve textual mathematical problems in students with learning disabilities. Reduces superficial reading of the text, eliminates difficulties in planning resolution procedures and effects on impulsive mathematical calculus. The results of the research are presented by the analysis of student papers on the solution of given textual mathematical problems from application of linear or quadratic equations. The research has shown that the „Step by step“ cognitive strategy have an effect on student's individual levels.

Key words:

„Step by step“ cognitive strategy, textual mathematical problems, problems from the application of linear equations, problems from the application of quadratic equations

Specifications:

106 pages, 5 pictures, 4 tables, 4 charts, 14 references, Croatian language

Mentor: doc. dr. sc., Nikola Marangunić

Supervisor: Željka Zorić, v. pred.

Committee:

Željka Zorić, v. pred.

doc. dr. sc., Nikola Marangunić

red. prof., Nikola Koceić Bilan

This thesis was approved by a Thesis commettee on March 30th, 2022.

Prilog 1. – Metodička razrada za nastavnu temu Linearne jednadžbe

Prilog 1. sadrži sljedeće pisane metodičke razrade:

Nastavna jedinica	**Predviđena satnica**	**Metoda KPK**
1. Primjena linearnih jednadžbi – problemi I. stupnja	2	da
2. Sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice – tekstualni zadaci	2	da
3. Usustavljivanje nastavnog sadržaja	2	da
4. Ispit znanja i analiza	2	da
Ukupno	8	8

Nastavna jedinica (podtema):	***Primjena linearnih jednadžbi – problemi I. stupnja***
Tip nastavnog sata:	*obrada novog gradiva (1. školski sat)* *uvježbavanje (2. školski sat)*

Odgojno-obrazovni ishodi:

MAT SŠ B. 1. 3	**Primjenjuje proporcionalnost, postotke, linearne jednadžbe i sustave.**

Ishodi učenja:

Učenici će...	• *upoznati sedam koraka kognitivne strategije „Korak po korak“ koju će primjenjivati pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka (problemi I. stupnja)* • *pažljivo iščitavati tekst zadataka te pomoću sedam koraka metode „Korak po korak“ ispisivati tražene podatke* • *napisati tražene jednadžbe prevođenjem teksta zadatka na matematički jezik* • *rješavati linearne jednadžbe*

Nastavna sredstva i pomagala:

Literatura:	Matematika 1, K. Brleković, M. Zarožinski, Školska knjiga, (2019) Matematika 1, S. Varošanec, Element, (2019)
Nastavna sredstva:	udžbenik s zbirkom zadataka papir s ispisanim sedam koraka metode „Korak po korak“ RL – Primjena linearnih jednadžbi (problemi I. stupnja)
Nastavna pomagala:	ploča (whiteboard), kreda, radni list, računalo

Makroplan nastavnog sata:

Uvod:

Nastavnik će učenicima pojasniti naslov nastavne jedinice odnosno kako će linearne jednadžbe primjenjivati na tekstualne zadatke, na svakidašnje životne probleme (zadatke).

Nastavnik će upoznati učenike s kognitivnom strategijom „Korak po korak“. Svaki učenik će dobiti papir sa nabrojenim sedam koraka metode „Korak po korak“, koji je dužan čuvati do kraja obrade ove nastavne cjeline. Nastavnik će svaki pojedini korak detaljno objasniti učenicima što znači i koji je njihov zadatak te na koji način će primjenjivati odabranu metodu pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka.

Glavni dio sata:

Nastavnik će rješavati *Primjere 1. , 2., 3.* i *4.* pri tome vodeći učenike kroz misaoni proces upotrebljavajući kognitivnu strategiju „Korak po korak“.

Učenici samostalno rješavaju *RL – Primjena linearne jednadžbe (problemi I. stupnja)* primjenjući kognitivnu metodu „Korak po korak“.

Završni dio sata:

Ukoliko učenici ne završe sve zadatke iz RL (Radna lista) što je vrlo vjerojatno, završiti će za domaću zadaću, te sljedeći sat predati nastavniku na pregled.
Nastavnik podjeli svakom učeniku *RL – Primjena linearne jednadžbe (problemi I. stupnja)*, te ima da jasne i precizne upute za samostalno rješavanje. U prilogu se nalaze papir s kognitivnom metodo „Korak po korak“ i *RL – Primjena linearne jednadžbe (problemi I. stupnja).*

Tijek nastavnog sata:

Nastavnik:

Problemi I. stupnja (problemi s jednom nepoznanicom) su zadaci zadani riječima tzv. tekstualni matematički zadaci u kojima se krije neka nepoznata veličina odnosno nepoznanica. Već smo naučili što je nepoznanica, nepoznanica nam označava veličinu odnosno broj koji je nepoznat te ga želimo izračunati. U takvim problemima koristiti ćemo se znanjem koje smo i koristili pri rješavanju linearnih jednadžbi kako bismo pronašli traženu nepoznatu veličinu.

Zašto ovo radimo/učimo? Navedeni problemi se često javljaju u svakodnevnom životu, koje rješavamo bez stroge matematičke procedure, no ako naučimo primijeniti matematičku proceduru na jednostavne primjere onda će nam ona pomoći pri rješavanju složenijih problema.

Prilikom rješavanja tekstualnih zadataka koristiti ćemo se metodom „Korak po korak“ koja će nam služiti kao alat pri rješavanju takvih problema. Ona će nam omogućiti bolje razumijevanje postavljenog problema, pa samim time uspješnije i točnije rješavanje zadanih problema. Nastavnik podijeli svim učenicima papir s ispisanim sedam koraka kognitivne metode „Korak po korak“, te vodi učenike kroz svaki korak i detaljno ih objasni. U prilogu ove pripreme se nalazi taj papir.

Razrada *Primjera 1., 2. 3.* i *4.* uz primjenu kognitivne strategije „Korak po korak“.

Primjer 1. *Trebamo prijeći put od 754 km. Ako smo već prešli 235 km, koliko nam je kilometara ostalo za prijeći?*

1. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?“* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	**Bilješke učenika:** – U zadataku se radi o prelasku nekog puta (dionice) koja iznosi 754 km
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “* *„ Što prvo moram saznati?“* *„ Što trebam saznati nakon toga?“* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“*	– Traži se koliko je kilometara ostalo do kraja puta odnosno ostatak puta
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?“* *„ Koji su podaci dani u zadatku?“* Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.	– Poznajemo da ukupan put iznosi 754 km te da je prijeđen dio puta od 235 km. Označimo: 754 km $\rightarrow$ ukupan put 235 km $\rightarrow$ prijeđeni put od ukupnog puta x km $\rightarrow$ ostatak puta od ukupnog puta Zapišimo jednadžbu: $754 = 235 + x$
4. Korak: Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se: *„ Koji postupak trebam primjeniti?“* *„ Koje formule trebam?“*	– Trebamo rješiti linearnu jednadžbu s jednom nepoznanicom odnosno naći vrijednost x.
5. Korak: Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.	Zapisati svoju procjenu!
6. Korak: Izračunavanje.	$754 = 235 + x$ $x = 754 - 235$ $x = 519$
7. Korak: Provjeri dobiveni rezultat.	Provjera: $754 = 235 + x$ $754 = 235 + 519$ $754 = 754$

Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka. Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadataku.	Odgovor: Ostatak puta kojeg moramo prijeći iznosi 519 km.

Primjer 2. *Marko želi zadiviti svog prijatelja Nikolu. Traži od Nikole da zamisli neki cijeli broj, pa da ga zatim pomnoži s 6 i rezultatu pribroji četvrtinu zamišljenog broja. Rezultat koji je Nikola dobio je 43. Marko tvrdi da je Nikola pogriješio. Tko je u pravu?*

1. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?"* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?"* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?"* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	Bilješke učenika: – u zadatku se radi o pogađanju zamišljenog broja tj. o traženju broja kojeg je Nikola zamislio i provjeri je li taj broj cijeli
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? "* *„ Što prvo moram saznati?"* *„ Što trebam saznati nakon toga?"* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?"*	– traži se broj koji je zamislio Nikola i potrebno je provjeriti je li taj broj cijeli broj
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?"* *„ Koji su podaci dani u zadatku?"* Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.	Poznajemo: – da je Nikola navodno zamislio neki cijeli broj – da taj broj treba pomnožiti s 6 – da rezultatu množenja treba pribrojiti četvrtinu zamišljenog broja – da je krajnji rezultat 43 Zapišimo jednadžbu: $x \cdot 6 + \frac{x}{4} = 43$
4. Korak: Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se: *„ Koji postupak trebam primjeniti?"* *„ Koje formule trebam?"*	– Trebamo riješiti linearnu jednadžbu odnosno naći x.
5. Korak: Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.	Zapisati svoju procjenu! npr. $x \approx 5,6$
6. Korak: Izračunavanje.	$x \cdot 6 + \frac{x}{4} = 43 \quad /\cdot 4$ $24x + x = 172$ $25x = 172$ $x = \frac{172}{25} = 6\frac{22}{25}$
7. Korak:	Provjera:

<table>
<tr>
<td>Provjeri dobiveni rezultat.
Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka.
Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadatku.</td>
<td>$$x \cdot 6 + \frac{x}{4} = 43$$
$$\frac{172}{25} \cdot 6 + \frac{1}{4} \cdot \frac{172}{25} = 43$$
$$\frac{1032}{25} + \frac{43}{25} = 43$$
$$\frac{1075}{25} = 43$$
$$43 = 43$$
Odgovor: Marko je bio u pravu. Nikola je očito ili pogriješio u računu ili nije zamislio cijeli broj.</td>
</tr>
</table>

Primjer 3. *Tri osobe podijelile su 4 400 kuna. Prva osoba je dobila 120 kn manje od druge, a treća koliko prva i druga osoba zajedno. Koliko kuna je dobila svaka osoba?*

<table>
<tr>
<td>1. Korak:
Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se:
„O čemu se ovdje radi?“
Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku.
„Jesam li dobro shvatio zadatak?“
„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“
Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.</td>
<td>Bilješke učenika:
– u zadatku treba podijeliti ukupnu svotu novca od 4 400 kn na tri osobe, ali ne u jednakim dijelovima</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Korak:
Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas.
Pitaj se:
„ Što se u ovom zadatku traži? “
„ Što prvo moram saznati?“
„ Što trebam saznati nakon toga?“
„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“</td>
<td>– trebamo odrediti koliko svaka od osoba dobije novaca na osnovu zadanih uvjeta</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Korak:
Pitaj se: „ Što je u zadatku poznato?“
„ Koji su podaci dani u zadatku?“
Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.</td>
<td>Poznajemo:
– da ukupna svota novca koju treba podijeliti iznosi 4 400 kn
– da 1. osoba ima 120 kn manje od 2. osobe
– da 3.osoba ima koliko 1. osoba + 2.osoba zajedno
Koja se osoba pojavljuje u opisu ostale dvije?
2. osoba → x
<table>
<tr><td></td><td>novci</td><td>iznos</td></tr>
<tr><td>1. osoba</td><td>$x - 120$</td><td></td></tr>
<tr><td>2. osoba</td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>3. osoba</td><td>$2x - 120$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\Sigma\, 4400$</td><td>$\Sigma\, 4400$</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>4. Korak:
Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se:
„ Koji postupak trebam primjeniti?“
„ Koje formule trebam?</td>
<td>Trebamo zapisati linearnu jednadžbu i riješiti je:
$$x - 120 + x + 2x - 120 = 4400$$</td>
</tr>
</table>

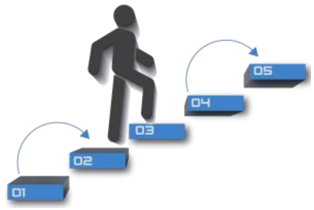
<table>
<tr><td>5. Korak:
Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.</td><td>Zapisati svoju procjenu!
npr. $x \approx 1000$</td></tr>
<tr><td>6. Korak:
Izračunavanje.</td><td>$x - 120 + x + 2x - 120 = 4400$
$4x - 240 = 4400$
$4x = 4400 + 240$
$4x = 4640$
$x = 1160$
<table>
<tr><th></th><th>novci</th><th>iznos</th></tr>
<tr><td>1. osoba</td><td>$x - 120$</td><td>1040 kn</td></tr>
<tr><td>2. osoba</td><td>x</td><td>1160 kn</td></tr>
<tr><td>3. osoba</td><td>$2x - 120$</td><td>2200 kn</td></tr>
<tr><td></td><td>Σ 4400</td><td>Σ 4400</td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>7. Korak:
Provjeri dobiveni rezultat.
Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka.
Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadatku.</td><td>Provjera:
$x - 120 + x + 2x - 120 = 4400$
$4x - 240 = 4400$
$4 \cdot 1160 - 240 = 4400$
$4640 - 240 = 4400$
$4400 = 4400$
Odgovor: Prva osoba je dobila 1040 kuna, druga osoba je dobila 1160 kuna, a treća 2200 kuna.</td></tr>
</table>

Primjer 4. *Na isti vodomjer priključena su tri poslovna prostora.*
Prvi poslovni prostor potroši 6 m^3 *vode dnevno, drugi 11* m^3 *vode dnevno, a treći 9* m^3 vode dnevno. *Koliko svaki od triju vlasnika poslovnih prostora mora platiti za potrošnju vode ako skupni račun za svibanj iznosi 3 224 kune?*

<table>
<tr><td>1. Korak:
Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se:
„O čemu se ovdje radi?“
Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku.
„Jesam li dobro shvatio zadatak?“
„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“
Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.</td><td>Bilješke učenika:
– radi se o tri poslovna prostora koja dijeli jedan priključak za vodu tj. imaju isti vodomjer</td></tr>
<tr><td>2. Korak:
Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas.
Pitaj se:
„ Što se u ovom zadatku traži? “
„ Što prvo moram saznati?“
„ Što trebam saznati nakon toga?“
„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“</td><td>– u zadatku se traži koliko svaki od vlasnika triju poslovnih prostora mora platiti za račun za 5. mjesec
– prvo moramo saznati koliko iznosi cijena vode po 1 m^3
– koliko dana ima mjesec svibanja? 31 dan
– koliko iznosi ukupan račun za svibanj? 3224 kn</td></tr>
<tr><td>3. Korak:
Pitaj se: „ Što je u zadatku poznato?“
„ Koji su podaci dani u zadatku?“</td><td>Poznanjemo:
– dnevnu potrošnju svakog poslovnog prostora
– ukupan iznos računa za svibanj
– broj dana u svibnju</td></tr>
</table>

<table>
<tr>
<td></td>
<td>Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.</td>
<td>
$x \to cijena\ vode\ po\ m^3$
<table>
<tr><th></th><th>dnevna potrošnja</th><th></th><th>iznos</th></tr>
<tr><td>1. prostor</td><td>$6\ m^3$</td><td>$6\ m^3 \cdot x$</td><td></td></tr>
<tr><td>2. prostor</td><td>$11\ m^3$</td><td>$11\ m^3 \cdot x$</td><td></td></tr>
<tr><td>3. prostor</td><td>$9\ m^3$</td><td>$9\ m^3 \cdot x$</td><td></td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>4.</td>
<td>Korak:
Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se:
„ Koji postupak trebam primjeniti?“
„ Koje formule trebam?“</td>
<td>Trebamo zapisati linearnu jednadžbu i riješiti je:
$(6x + 11x + 9x) \cdot 31 = 3224$</td>
</tr>
<tr>
<td>5.</td>
<td>Korak:
Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.</td>
<td>Zapisati svoju procjenu!
npr. $x \approx 4,5\ ili\ 6$</td>
</tr>
<tr>
<td>6.</td>
<td>Korak:
Izračunavanje.</td>
<td>
$$(6x + 11x + 9x) \cdot 31 = 3224$$
$$6x + 11x + 9x = 104$$
$$26x = 104$$
$$x = \frac{104}{26}$$
$$x = 4$$
<table>
<tr><th></th><th>dnevna potrošnja</th><th></th><th>iznos</th></tr>
<tr><td>1. prostor</td><td>$6\ m^3$</td><td>$6\ m^3 \cdot x$</td><td>$6 \cdot x \cdot 31$
$= 744\ kn$</td></tr>
<tr><td>2. prostor</td><td>$11\ m^3$</td><td>$11\ m^3 \cdot x$</td><td>$11 \cdot x \cdot 31$
$= 1364\ kn$</td></tr>
<tr><td>3. prostor</td><td>$9\ m^3$</td><td>$9\ m^3 \cdot x$</td><td>$9 \cdot x \cdot 31$
$= 1116\ kn$</td></tr>
</table>
</td>
</tr>
<tr>
<td>7.</td>
<td>Korak:
Provjeri dobiveni rezultat.
Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka.
Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadataku.</td>
<td>Provjera:
$$(6x + 11x + 9x) \cdot 31 = 3224$$
$$26x \cdot 31 = 3224$$
$$26 \cdot 4 \cdot 31 = 3224$$
$$3224 = 3224$$
Odgovor:
Iznos svibanjskog računa za 1. poslovni prostor iznosi 744 kn, za 2. poslovni prostor 1364 kn i za 3. poslovni prostor iznosi 1116 kn.</td>
</tr>
</table>

Metoda „Korak po korak“



1. **Korak:**
   Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“*
   Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku.
   „Jesam li dobro shvatio zadatak?“
   „Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“
   Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.

2. **Korak:**
   Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas.
   Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “*
   „ Što prvo moram saznati?“
   „ Što trebam saznati nakon toga?“
   „ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“
3. **Korak:**
   Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?“*
   „ Koji su podaci dani u zadatku?“
   Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.

4. **Korak:**
   Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se:
   „ Koji postupak trebam primjeniti?“
   „ Koje formule trebam?“

5. **Korak:**
   Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.

6. **Korak:**
   Izračunavanje.

7. **Korak:**
   Provjeri dobiveni rezultat.
   Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka.
   Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadataku.

RL- Primjena linearnih jednadžbi- problemi I. stupnja

UPUTE:

Zadane zadatke riješi koristeći se metodom „Korak po korak“. Svaki korak metode zapiši i napiši odgovore na postavljena pitanja. Ukoliko postoje neke nepoznate riječi u zadatku pokušaj pronaći njihovo značenje koristeći se internet pretražiteljem ili pitaj svoje ukućane ili nastavnicu.

Zad. 1.

Lektira ima 180 stranica. Učenik je pročitao polovinu svoje lektire te idući dan još 30 stranica. Koliko je učeniku ostalo stranica za pročitati da dovrši lektiru do kraja?

Zad. 2.

Šime, Ivan i Ante su imali 32 bombona koje su podijelili na ovaj način: Ivan je dobio dva puta više od Šime, a za 2 bombona manje od Ante. Koliko bombona je dobio svaki od dječaka?

Zad. 3.

Broj 27 rastavi na tri pribrojnika tako da je drugi pribrojnik jednak trećini prvog pribrojnika, dok je treći pribrojnik polovina drugog. Koliki su ti pribrojnici?

Zad. 4.

Most preko rijeke dugačak je 234 m, a sastoji se od 5 dijelova, od kojih su 4 dijela jednake duljine, a peti dio je 14 metara dulji od svakog od njih. Koliko su dugi ti dijelovi?

Nastavna jedinica (podtema):	***Sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice – primjena***
Tip nastavnog sata:	*obrada novog gradiva (1. školski sat)* *uvježbavanje (2. školski sat)*

Odgojno-obrazovni ishodi:

MAT SŠ B. 1. 3	**Primjenjuje proporcionalnost, postotke, linearne jednadžbe i sustave.**

Ishodi učenja:

Učenici će...	• *primjenivati kognitivnu strategiju „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka* • *pažljivo iščitavati tekst zadataka te pomoću metode „Korak po korak“ ispisivati tražene podatke* • *napisati tražene jednadžbe prevođenjem teksta zadatka na matematički jezik* • *rješavati sustave linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice*

Nastavna sredstva i pomagala:

Literatura:	Matematika 1, K. Brleković, M. Zarožinski, Školska knjiga, (2019) Matematika 1, S. Varošanec, Element, (2019)
Nastavna sredstva:	udžbenik s zbirkom zadataka papir s ispisanim sedam koraka metode „Korak po korak“ *RL-Sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice - primjena*
Nastavna pomagala:	ploča (whiteboard), kreda, radni list, računalo

Makroplan nastavnog sata:

Uvod:

Nastavnik će zajedno s učenicima ponoviti gradivo o sustavima linearnih jednadžba s dvije nepoznanice, koje su metode rješavanja takvih sustava, način provjere rezultata i dr.

Glavni dio sata:

Nastavnik će riješavati *Primjere 1. , 2.* i *3.* pri tome vodeći učenike kroz misaoni proces upotrebljavajući kognitivnu strategiju „Korak po korak".

Učenici samostalno rješavaju *RL –Sustavi linearnih jednadžbi s dvije neoznanice – primjena* primjenjući kognitivnu metodu „Korak po korak".

Završni dio sata:

Ukoliko učenici ne završe sve zadatke iz RL (Radna lista) što je vrlo vjerojatno, završiti će za domaću zadaću, te sljedeći sat predati nastavniku na pregled.

Tijek nastavnog sata:

Primjer 1. *Učenici nekog razreda idu na izlet. Ako svaki učenik plati 520 kn, za izlet nedostaje 1280 kn. Ako bi svaki učenik uplatio 580kn ostalo bi još 640 kn viška. Koliko stoji izlet za cijeli razred i koliko učenika ima u razredu?*

Rješenje:

1. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?"* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?"* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?"* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	**Bilješke učenika:** – U zadataku se radi o odlasku jednog razreda na izlet odnosno učenici tog razreda skupljaju novce za taj izlet.
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? "* *„ Što prvo moram saznati?"* *„ Što trebam saznati nakon toga?"* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?"*	– U zadatku se traži da odredimo ukupnu cijenu izleta za čitav razred te koliko ima učenika u tom razredu jer očito o tome ovisi cijena samog izleta.
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?"* *„ Koji su podaci dani u zadatku?"*	Poznajemo da: – ako svaki učenik da 520 kn onda nedostaje 1280 kn za čitav izlet

Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.	– ako svaki učenik da 580 kn onda ima višak od 640 kn za čitav izlet Formuliramo matematičkim simbolima: $x \to broj\ učenika\ u\ razredu$ $y \to\ ukupna\ cijena\ izleta.$ Zapišimo jednadžbe: $520 \cdot x = y - 1280$ $580 \cdot x = y + 640$
4. Korak: Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se: *„ Koji postupak trebam primjeniti?“* *„ Koje formule trebam?“*	– Trebamo rješiti sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice odnosno naći vrijednost x i y. Odrediti koju metodu upotrebiti za rješavanje sustava.
5. Korak: Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.	Zapisati svoju procjenu! npr. $x \approx 20$ $y \approx 20000\ kn$
6. Korak: Izračunavanje.	$\begin{cases} 520x = y - 1280 \\ 580x = y + 640 \end{cases}$ $\begin{cases} 520x - y = -1280\ /\cdot(-1) \\ 580x - y = 640 \end{cases}$ $\begin{cases} -520x + y = 1280 \\ 580x - y = 640 \end{cases}$ $60x = 1920$ $x = 32$ $y = 17920$
7. Korak: Provjeri dobiveni rezultat. Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka. Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadataku.	Provjera: $520x = y - 1280$ $580x = y + 640$ $520 \cdot 32 = 17920 - 1280$ $580 \cdot 32 = 17920 + 640$ $16640 = 16640$ $18560 = 18560$ Odgovor: Izlet za cijeli razred iznosi 17 920 kuna i u razredu ima 32 učenika.

Primjer 2. *Za izgradnju kanalizacijske mreže u duge 320 m korišteno je ukupno 150 cijevi koje se razlikuju po promjeru i duljini. Ako su prve 160 cm, a druge 240 cm, koliko je upotrebljeno cijevi dugih 160 cm, a koliko dugih 240 cm?*

Rješenje:

1. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?“* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“*	**Bilješke učenika:** – U zadataku se radi o izgradnji kanalizacijske mreže ukupne duljine 320 m. Mrežu moramo izgraditi s dvije različite vrste cijevi koje se razlikuju po duljini: 1. vrsta cijevi $\to$ 160 cm 2. vrsta cijevi $\to$ 240 cm

Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “* *„ Što prvo moram saznati?“* *„ Što trebam saznati nakon toga?“* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“*	– U zadatku se traži da odredimo broj cijevi 1. vrste i 2. vrste za izgradnju ove kanalizacijske mreže. Označimo: $x \rightarrow broj\ cijevi\ 1. vrste\ (160\ cm)$ $y \rightarrow broj\ cijevi\ 2. vrste\ (240\ cm)$
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?“* *„ Koji su podaci dani u zadatku?“* Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.	Poznajemo da: – ukupnu duljinu kanalizacijske mreže $\rightarrow 320\ m = 32000cm$ – ukupan broj cijevi za izgradnju ove kanalizacijske mreže $\rightarrow 150\ cijevi$ Zapišimo jednadžbe: $160\ cm \cdot x + 240cm \cdot y = 32000cm$ $x + y = 150$
4. Korak: Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se: *„ Koji postupak trebam primjeniti?“* *„ Koje formule trebam?“*	– Trebamo rješiti sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice odnosno naći vrijednost x i y. Odrediti koju metodu upotrebiti za rješavanje sustava.
5. Korak: Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.	Zapisati svoju procjenu! npr. $x \approx 90$ $y \approx 100$
6. Korak: Izračunavanje.	$\begin{cases} 160x + 240y = 32000 \\ x + y = 150 \end{cases}$ $\begin{cases} 160x + 240y = 32000 \\ x = 150 - y \end{cases}$ $160(150 - y) + 240y = 32000$ $24000 - 160y + 240y = 32000$ $80y = 8000$ $y = 100$ $x = 150 - y$ $x = 150 - 100$ $x = 50$
7. Korak: Provjeri dobiveni rezultat. Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka.	Provjera: $160x + 240y = 32000$ $160 \cdot 50 + 240 \cdot 100 = 32000$ $8000 + 24000 = 32000$ $32000 = 32000$ $x + y = 150$ $50 + 100 = 150$ $150 = 150$

Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadatku.	Odgovor: Za izgradnju kanalizacijske mreže ukupne duljine 320 m potrebno je 50 cijevi duljine 160 cm i 100 cijevi duljine 240 cm.

Primjer 3. *Za 284 kune kupljeno je 8 kg naranči i 20 kg limuna. Kolko košta 1 kg naranči, a koliko 1kg limuna, ako 3 kg naranči košta 2 kune više od 2 kg limuna?*

Rješenje:

1. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?“* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	**Bilješke učenika:** – U zadataku se radi o kupnji 8 kg naranči i 20 kg limuna za 284 kune. Želimo doznati koliko košta 1 kg naranči i 1 kg limuna.
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “* *„ Što prvo moram saznati?“* *„ Što trebam saznati nakon toga?“* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“*	– U zadatku se traži da odredimo cijenu 1 kg naranči i 1 kg limuna. Označimo: $x \rightarrow 1\ kg\ naranči$ $y \rightarrow 1\ kg\ limuna$
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?“* *„ Koji su podaci dani u zadatku?“* Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.	Poznajemo da: – 8 kg naranči 20 kg limuna košta 284 kn $8kg \cdot x + 20kg \cdot y = 284\ kn$ – 3 kg naranči košta 2 kn više od 2 kg limuna $3kg \cdot x = 2\ kn + 2kg \cdot y$ Zapišimo jednadžbe: $8x + 20y = 284$ $3x = 2 + 2y$
4. Korak: Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se: *„ Koji postupak trebam primjeniti?“* *„ Koje formule trebam?“*	– Trebamo rješiti sustav linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice odnosno naći vrijednost x i y. Odrediti koju metodu upotrebiti za rješavanje sustava.
5. Korak: Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.	Zapisati svoju procjenu! npr. $x \approx 9\ kn$ $y \approx 11\ kn$
6. Korak: Izračunavanje.	$\begin{cases} 8x + 20y = 284 \\ 3x = 2 + 2y \end{cases}$ $\begin{cases} 8x + 20y = 284 \\ 3x - 2y = 2\ /\cdot 10 \end{cases}$

	$\begin{cases} 8x + 20y = 284 \\ 30x - 20y = 20 \; /+ \end{cases}$ $8x + 30x = 284 + 20$ $38x = 304$ $x = 8$ $y = 11$
7. **Korak:** Provjeri dobiveni rezultat. Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka. Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadatku.	Provjera: $8x + 20y = 284$ $3x = 2 + 2y$ $8 \cdot 8 + 20 \cdot 11 = 284$ $3 \cdot 8 = 2 + 2 \cdot 11$ $64 + 220 = 284$ $24 = 2 + 22$ $284 = 284$ $24 = 24$ Odgovor: 1 kg naranči košta 8 kn, a 1 kg limuna košta 11 kn.

Radni list- Sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepoznanice-primjena na probleme

<u>Upute:</u>

Zadane zadatke riješi u svojoj bilježnci. Zadatke riješi koristeći se metodom „Korak po korak", od tebe se očekuješ da ispisuješ svaki korak te metode prilikom rješavanja.

Svoju zadaću predaj u virtualnu učionicu iz matematike pod naslovom *RL-Sustavi linearnih jednadžbi s dvije nepozanice-primjena.*
Sva pitanja vezano za RL možete me pitati u našoj virtualnoj učionici i/ili uživo.

Zad. 1. Ukupna cijena računa za olovake i bilježnice je 204,90 kn. Koliko ima olovaka, a koliko bilježnica ako je cijena jedne olovke 1,70 kn, a cijena jedne bilježnice 7,80 kn i ima ih ukupno 38?

Zad. 2. Teret od 108 tona treba prevesti kamionima. Ukupno ima 24 kamiona nosivosti 3 tone i 5 tona. Koliko ima kamiona nosivosti od 3 tone, a koliko nosivosti od 5 tona?

Zad. 3. Učenici 1. B razreda žele organizirati maturalnu večer u restoranu sa večerom od 3 slijeda. Ako svaki učenik plati večeru 570 kn tada ostaje 420 kn viška. Ako svaki učenik uplati 510 kn tada nedostaje još 840 kn za cjelokupnu maturalnu večer. Koliko košta maturalna večer za cijeli razred i koliko učenika ima 1. B razred?

Nastavna jedinica (podtema):	***Usustavljivanje nastavnog sadržaja***
Tip nastavnog sata:	*uvježbavanje (2 školska sata)*

Odgojno-obrazovni ishodi:

MAT SŠ B. 1. 3	**Primjenjuje proporcionalnost, postotke, linearne jednadžbe i sustave.**

Ishodi učenja:

Učenici će...	• *rješavati linearne jednadžbe i provjeravati ispravnost svojih rezultata* • *rješavati sustave linearnih jednadžbe s dvije nepoznanice* • *prepoznati i crtati graf linearne funkcije te određivati sjecišta s koordinatnim osima i tok zadane funkcije* • *primjenivati kognitivnu strategiju „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka* • *pažljivo iščitavati tekst zadataka te pomoću metode „Korak po korak“ napisati tražene jednadžbe prevođenjem teksta zadatka na matematički jezik*

Nastavna sredstva i pomagala:

Literatura:	Matematika 1, K. Brleković, M. Zarožinski, Školska knjiga, (2019) Matematika 1, S. Varošanec, Element, (2019)
Nastavna sredstva:	udžbenik s zbirkom zadataka papir s ispisanim sedam koraka metode „Korak po korak“ *RL-Sistematizacija gradiva: Linearne jednadžbe*
Nastavna pomagala:	ploča (whiteboard), kreda, radni list, računalo

Makroplan nastavnog sata:

Uvod:

Nastavnik će zajedno s učenicima ponoviti gradivo o linearnim jednadžbama, linearnoj funkciji, sustavima linearnih jednadžba i dr. Učenici definiraju ili prepoznaju osnovne pojmove linearne jednadžbe i funkcije te znaju objasniti te matematičke pojmove.

Glavni dio sata:

Nastavnik podijeli svakom učeniku *RL- Sistematizacija gradiva: Linearne jednadžbe*, te prozivajući pojedinačno učenike rješavaju zadatake na ploči uz diskusiju o postupcima i rezultatima zadataka.

Završni dio sata:

Nastavnik zadaje učenicima domaću zadaću kao pripremu za predstojeći ispit znanja iz cjeline Linearne jednadžbe.

Tijek nastavnog sata:

SISTEMATIZACIJA GRADIVA: Linearne jednadžbe

Zad. 1. *Riješi linearne jednadžbe i provjeri ispravnost svojih rješenja:*

	Rješenja:
a) $3x + 2 = 7x + 3$	$x = -\frac{1}{4}$
b) $8x - 3 + 5x = 9x + 3x + 5 - 8$	$x = 0$
c) $8(x - 1) = 13(x + 3)$	$x = -\frac{37}{3}$
d) $5(7 - 3x) - 11(3x + 1) = 0$	$x = \frac{1}{2}$
e) $\frac{7}{2} + \frac{7}{4}x + \frac{1}{8} = x - \frac{1}{2}$	$x = -\frac{11}{2}$
f) $\frac{3}{2}x + \frac{1}{6} - \frac{2}{5} = x - \frac{7}{15}$	$x = \frac{3}{5}$

Zad. 2. *Riješi sustave linearnih jednadžbi:*

a) $-3x + y - 5 = 0$
$2x + y - 2 = 0$

b) $x - 4(y - 5) = 3$
$(x - y) + 4 = 6$

Rješenja:

a) $(x, y) = \left(-\frac{3}{5}, \frac{16}{5}\right)$

b) $(x, y,) = \left(\frac{25}{3}, \frac{19}{3}\right)$

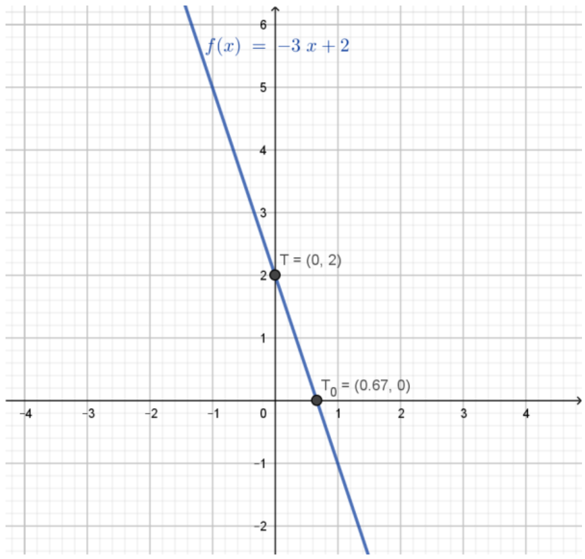
Zad. 3. *Nacrtaj graf linerane funkcije* $f(x) = -3x + 2$.

Iščitaj sljedeće podatke s grafa:

a) točku u kojoj siječe os y,
b) točku u kojoj siječe os x (nul-točka),
c) je li rastuća ili padajuća funkcija.

Rješenje:

$\boldsymbol{x}$	1	2
$\boldsymbol{f(x) = y}$	-1	-4
$\boldsymbol{T(x, y)}$	$(1, -1)$	$(2, -4)$



Zad. 4. *Zbroj triju brojeva je 850. Prvi je broj 3 puta veći od drugoga, a drugi za 75 veći od trećega. Koji su to brojevi?*

Rješenje:

1. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?“* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	**Bilješke učenika:** – U zadatku se radi o zbroju triju brojeva. 1. broj + 2. broj + 3. broj = 850
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “* *„ Što prvo moram saznati?“* *„ Što trebam saznati nakon toga?“* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“*	– U zadatku se traži koliko iznosi pojedini broj u zbroju tj.potrebno je odredi svaki od brojeva.
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?“*	Poznajemo da: – zbroj triju brojeva iznosi 850

<table>
<tr>
<td>„ Koji su podaci dani u zadatku?“
Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.</td>
<td>$1.broj + 2.broj + 3.broj = 850$
– da je 1. broj tri puta veći od 2. broja
– da je 2. broj za 75 veći od 3. broja
Koji se broj pojavljuje u opisu svih brojeva?
<table>
<tr><td></td><td></td><td>iznos</td></tr>
<tr><td>1. broj</td><td>$3(x + 75)$</td><td></td></tr>
<tr><td>2. broj</td><td>$x + 75$</td><td></td></tr>
<tr><td>3. broj</td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>$\Sigma\, 850$</td><td>$\Sigma\, 850$</td></tr>
</table>
Zapišimo jednadžbu:
$3(x + 75) + x + 75 + x = 850$</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Korak:
Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se:
„ Koji postupak trebam primjeniti?“
„ Koje formule trebam?“</td>
<td>– Trebamo rješiti linearnu jednadžbu.</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Korak:
Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.</td>
<td>Zapisati svoju procjenu!
npr. $x \approx 80$</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Korak:
Izračunavanje.</td>
<td>$3(x + 75) + x + 75 + x = 850$
$3x + 225 + x + 75 + x = 850$
$5x + 300 = 850$
$5x = 550$
$x = 110$
<table>
<tr><td></td><td></td><td>iznos</td></tr>
<tr><td>1. broj</td><td>$3(x + 75)$</td><td>555</td></tr>
<tr><td>2. broj</td><td>$x + 75$</td><td>185</td></tr>
<tr><td>3. broj</td><td>x</td><td>110</td></tr>
<tr><td></td><td>$\Sigma\, 850$</td><td>$\Sigma\, 850$</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>7. Korak:
Provjeri dobiveni rezultat.
Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka.
Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadatku.</td>
<td>Provjera:
$3(x + 75) + x + 75 + x = 850$
$3(110 + 75) + 110 + 75 + 110 = 850$
$3 \cdot 185 + 295 = 850$
$850 = 850$

Odgovor: Radi se o brojevima: 555, 185 i 110.</td>
</tr>
</table>

Zad. 5. *Cijev dugu 68 metara treba prerezati na 4 dijela tako da prva dva dijela budu jednaka, treći dvaput dulji od prvog, a četvrti 3 metra dulji od drugog. Kolika će biti duljina svakog dijela cijevi?*

Rješenje:

<table>
<tr>
<td>1. Korak:
Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se:
„O čemu se ovdje radi?“
Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku.
„Jesam li dobro shvatio zadatak?“
„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“</td>
<td>Bilješke učenika:
– U zadataku se radi o cijevi dugačkoj 68 m koju treba podijeli na 4 nejednaka dijela.</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr>
<td>Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.</td>
<td></td>
</tr>
<tr>
<td>2. Korak:
Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas.
Pitaj se:
„ Što se u ovom zadatku traži? “
„ Što prvo moram saznati?“
„ Što trebam saznati nakon toga?“
„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“</td>
<td>– U zadatku se traži odrediti duljinu svakog dijela cijevi. Treba ispisati odnose među dijelovima i ukupnu duljinu cijevi.</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Korak:
Pitaj se: „ Što je u zadatku poznato?“
„ Koji su podaci dani u zadatku?“
Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.</td>
<td>Poznajemo da:
– ukupna duljina cijevi iznosi 68 m
– je 1. dio cijevi jednak 2. dijelu cijevi
– je 3. dio cijevi dvostruko veći od 1. dijela
– je 4. dio cijevi za 3 m dulji od 2. dijela

Koji se dio cijevi pojavljuje u opisu svih dijelova?
<table>
<tr><td>dio cijevi</td><td></td><td>duljina</td></tr>
<tr><td>1. dio</td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>2. dio</td><td>x</td><td></td></tr>
<tr><td>3. dio</td><td>$2 \cdot x$</td><td></td></tr>
<tr><td>4. dio</td><td>$x + 3$</td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>Σ 68</td><td>Σ 68</td></tr>
</table>
Zapišimo jednadžbu:
$x + x + 2x + x + 3 = 68$</td>
</tr>
<tr>
<td>4. Korak:
Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se:
„ Koji postupak trebam primjeniti?“
„ Koje formule trebam?“</td>
<td>– Trebamo rješiti linearnu jednadžbu.</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Korak:
Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.</td>
<td>Zapisati svoju procjenu!
npr. $x \approx 10\ m$</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Korak:
Izračunavanje.</td>
<td>$x + x + 2x + x + 3 = 68$
$5x + 3 = 68$
$5x = 65$
$x = 13$
<table>
<tr><td>dio cijevi</td><td></td><td>duljina</td></tr>
<tr><td>1. dio</td><td>x</td><td>$13\ m$</td></tr>
<tr><td>2. dio</td><td>x</td><td>$13\ m$</td></tr>
<tr><td>3. dio</td><td>$2 \cdot x$</td><td>$26\ m$</td></tr>
<tr><td>4. dio</td><td>$x + 3$</td><td>$16\ m$</td></tr>
<tr><td></td><td>Σ 68</td><td>Σ 68</td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>7. Korak:
Provjeri dobiveni rezultat.
Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka.</td>
<td>Provjera:
$napravljena\ u\ tablici\ u\ stupcu\ duljina$</td>
</tr>
</table>

Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadatku.	Odgovor: 1. dio i 2. dio cijevi su dugi 13 m, 3. dio cijevi je dug 26 m i 4. dio je dug 16 m.

Zad. 6. *Na isti vodomjer priključena su tri poslovna prostora. Prvi poslovni prostor potroši 5* m^3 *vode dnevno, drugi 13* m^3 *vode dnevno, a treći 2* m^3 *vode dnevno.*
Koliko svaki od triju vlasnika poslovnih prostora mora platiti za potrošnju vode ako je skupni račun za lipanj iznosi 9 600 kn?

Rješenje:

<table>
<tr>
<td>1. Korak:
Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se:
„O čemu se ovdje radi?“
Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku.
„Jesam li dobro shvatio zadatak?“
„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“
Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.</td>
<td>Bilješke učenika:
– radi se o tri poslovna prostora koja dijeli jedan priključak za vodu tj. imaju isti vodomjer</td>
</tr>
<tr>
<td>2. Korak:
Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas.
Pitaj se:
„ Što se u ovom zadatku traži? “
„ Što prvo moram saznati?“
„ Što trebam saznati nakon toga?“
„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“</td>
<td>– u zadatku se traži koliko svaki od vlasnika triju poslovnih prostora mora platiti za račun za 6. mjesec
– prvo moramo saznati koliko iznosi cijena vode po $1\ m^3$
– koliko dana ima mjesec lipanj? 30 dan
– koliko iznosi ukupan račun za lipanj? 9600 kn</td>
</tr>
<tr>
<td>3. Korak:
Pitaj se: „ Što je u zadatku poznato?“
„ Koji su podaci dani u zadatku?“
Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.</td>
<td>Poznanjemo:
– dnevnu potrošnju svakog poslovnog prostora
– ukupan iznos računa za svibanj
– broj dana u lipnju
$x \rightarrow cijena\ vode\ po\ m^3$
<table>
<tr><td></td><td>dnevna potrošnja</td><td></td><td>iznos</td></tr>
<tr><td>1. prostor</td><td>$5\ m^3$</td><td>$5\ m^3 \cdot x$</td><td></td></tr>
<tr><td>2. prostor</td><td>$13\ m^3$</td><td>$13\ m^3 \cdot x$</td><td></td></tr>
<tr><td>3. prostor</td><td>$2\ m^3$</td><td>$2\ m^3 \cdot x$</td><td></td></tr>
</table></td>
</tr>
<tr>
<td>4. Korak:
Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se:
„ Koji postupak trebam primjeniti?“
„ Koje formule trebam?“</td>
<td>Trebamo zapisati linearnu jednadžbu i riješiti je:
$(5x + 13x + 2x) \cdot 30 = 9600$</td>
</tr>
<tr>
<td>5. Korak:
Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.</td>
<td>Zapisati svoju procjenu!
npr. $x \approx 14$</td>
</tr>
<tr>
<td>6. Korak:
Izračunavanje.</td>
<td>$(5x + 13x + 2x) \cdot 30 = 9600$
$5x + 13x + x = 320$
$20x = 320$</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td></td><td>

$$x = \frac{320}{20}$$
$$x = 16$$

<table>
<tr><td></td><td>dnevna potrošnja</td><td></td><td>iznos</td></tr>
<tr><td>1. prostor</td><td>$5\ m^3$</td><td>$5\ m^3 \cdot x$</td><td>$5 \cdot x \cdot 30 = 2400\ kn$</td></tr>
<tr><td>2. prostor</td><td>$13\ m^3$</td><td>$13\ m^3 \cdot x$</td><td>$13 \cdot x \cdot 30 = 6240\ kn$</td></tr>
<tr><td>3. prostor</td><td>$2\ m^3$</td><td>$2\ m^3 \cdot x$</td><td>$2 \cdot x \cdot 30 = 960\ kn$</td></tr>
</table>

</td></tr>
<tr><td>

7. Korak:
Provjeri dobiveni rezultat.
Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka.
Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadatku.

</td><td>

Provjera:

$$(5x + 13x + 2x) \cdot 30 = 9600$$
$$20x \cdot 30 = 9600$$
$$20 \cdot 16 \cdot 30 = 9600$$
$$9600 = 9600$$

Odgovor:
Iznos lipanjskog računa za 1. poslovni prostor iznosi 2400 kn, za 2. poslovni prostor 6240 kn i za 3. poslovni prostor iznosi 960 kn.

</td></tr>
</table>

Grupa **A** **Matematika 1**	Ime i prezime: ______________________________ Razred:__________	Broj bodova: **/ 26,5** Postotak: Ocjena:

4. ispit znanja- LINEARNE JEDNADŽBE

1. (8 bod.) Riješi linearne jednadžbe:

a) $10x - 7 + 5x = 33 + 5x$

Rješenje:

$10x + 5x - 5x = 33 + 7$ (0,5)
$10x = 40$ (0,5)
$x = \frac{40}{10}$ (0,5)
$x = 4$ (0,5)

b) $7(2x - 1) - (5x - 4) = 7x - 9$

Rješenje:

$14x - 7 - 5x + 4 = 7x - 9$ (1)
$14x - 5x - 7x = -9 + 7 - 4$ (0,5)
$2x = -6$ (0,5)
$x = \frac{-6}{2}$ (0,5)
$x = -3$ (0,5)

c) $\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 2$

Rješenje:

$\frac{x}{4} - \frac{x}{5} = 2 \quad /\cdot 20$ (1)

$20 \cdot \frac{x}{4} - 20 \cdot \frac{x}{5} = 20 \cdot 2$ (1)

$5x - 4x = 40$ (0,5)
$x = 40$ (0,5)

2. (5 bod.) Riješi sustav linearnih jednadžbi:

$$\begin{aligned} 2x + y &= -3 \\ 4x + 3y &= 3 \end{aligned}$$

Rješenje:

$2x + y = -3 \quad /\cdot(-2)$ (0,5)
$4x + 3y = 3$

$-4x - 2y = 6$ (1)
$4x + 3y = 3$

$-2y + 3y = 6 + 3$ (1)
$y = 9$ (0,5)

$2x + y = -3$
$2x + 9 = -3$ (0,5)

$2x = -3 - 9$ (0,5)
$2x = -12 \quad /:2$

$x = -6$ (0,5)

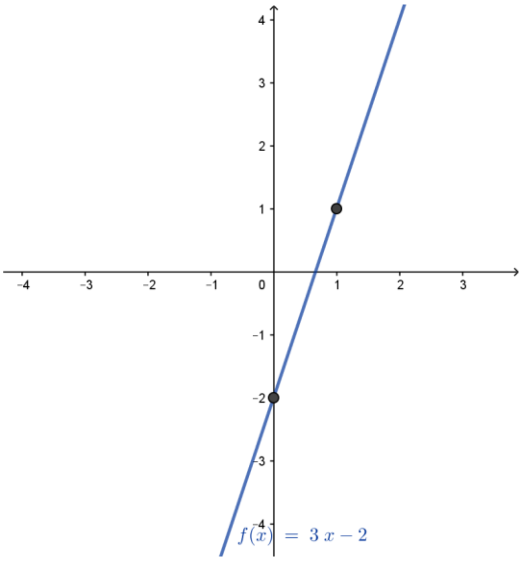
Rješenje sustava: $(-6,\ 9)$ (0,5)

3. (3 bod.) Nacrtaj graf linearne funkcije $f(x) = 3x - 2$.

Rješenje:

x	0	1
$f(x)$	-2 (0,5)	1 (0,5)
$T(x,y)$	$(0,-2)$ (0,5)	$(1,1)$ (0,5)

(1) - nacrtati graf



4. (5,5 bod.) Zbroj triju brojeva jest 212. Drugi je broj za 6 veći od prvoga, a treći za 14 veći od drugoga. Koji su to brojevi?

Rješenje:

		iznos
1. broj	x (0,5)	62 (0,5)
2. broj	$x+6$ (0,5)	68 (0,5)
3. broj	$x+6+14$ (0,5)	82 (0,5)
	$\Sigma\, 212$	$\Sigma\, 212$

$$x + x + 6 + x + 6 + 14 = 212 \quad (1)$$
$$3x + 26 = 212 \quad (0,5)$$
$$3x = 212 - 26 \quad (0,5)$$
$$3x = 186 \quad /:3$$
$$x = 62 \quad (0,5)$$

Odgovor: Traženi brojevi su: 62, 68, 82.

5. (5 bod.) Kabel duljine 360 metara treba podijeliti na 4 dijela tako da drugi i četvrti budu jednake duljine, prvi za 4 puta veći od drugoga, a treći za 4 metra kraći od četvrtog. Kolika je duljina svakog dijela kabela?

Rješenje:

dio kabela		duljina
1. dio	$4x$ (0,5)	$208\,m$
2. dio	x (0,5)	$52\,m$
3. dio	$x-4$ (0,5)	$48\,m$
4. dio	x (0,5)	$52\,m$
	$\Sigma\, 360\,m$	$\Sigma\, 360\,m$

(1)

$$4x + x + x - 4 + x = 360 \quad (1)$$
$$7x - 4 = 360$$
$$7x = 360 + 4 \quad (0,5)$$
$$7x = 364 \quad /:7$$
$$x = 52 \quad (0,5)$$

Odgovor: Traženi dijelovi kabela su duljina: 208 m, 52 m, 48 m i 52 m.

Grupa **B** **Matematika 1**	Ime i prezime: _____________________________________ Razred:____________	Broj bodova: **/ 26,5** Postotak: Ocjena:

4. ispit znanja- LINEARNE JEDNADŽBE

1. **(8 bod.)** Riješi linearne jednadžbe:

a) $7x - 10 - x = -3x - 10 - 5x$

Rješenje:

$7x - 10 - x = -3x - 10 - 5x$ (0,5)

$14x = 0$ (0,5)

$x = \frac{0}{14}$ (0,5)

$x = 0$ (0,5)

b) $9(8 - 5x) - (3x + 1) = -26x - 159$

Rješenje:

$72 - 45x - 3x - 1 = -26x - 159$ (1)

$-45x - 3x + 26x = -159 - 72 + 1$ (0,5)

$-22x = -230$ (0,5)

$x = \frac{-230}{-22}$ (0,5)

$x = -\frac{115}{11}$ (0,5)

c) $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1$

Rješenje:

$\frac{x}{3} - \frac{x}{4} = 1 \quad / \cdot 12$ (1)

$12 \cdot \frac{x}{3} - 12 \cdot \frac{x}{4} = 1 \cdot 12$ (1)

$4x - 3x = 12$ (0,5)

$x = 12$ (0,5)

2. **(5 bod.)** Riješi sustav linearnih jednadžbi:

$3x + 4y = 11$

$4x + 3y = 10$

Rješenje:

$3x + 4y = 11 \quad / \cdot (-4)$ (0,5)

$4x + 3y = 10 \quad / \cdot 3$ (0,5)

$-12x - 16y = -44$ (1)

$12x + 9y = 30 \quad /+$

$-16y + 9y = -44 + 30$ (1)

$7y = -14$

$y = -2$ (0,5)

$3x + 4y = 11$

$3x = 11 - 4y$

$3x = 11 - 4 \cdot 2$ (0,5)

$3x = 3 \quad /:3$

$x = 1$ (0,5)

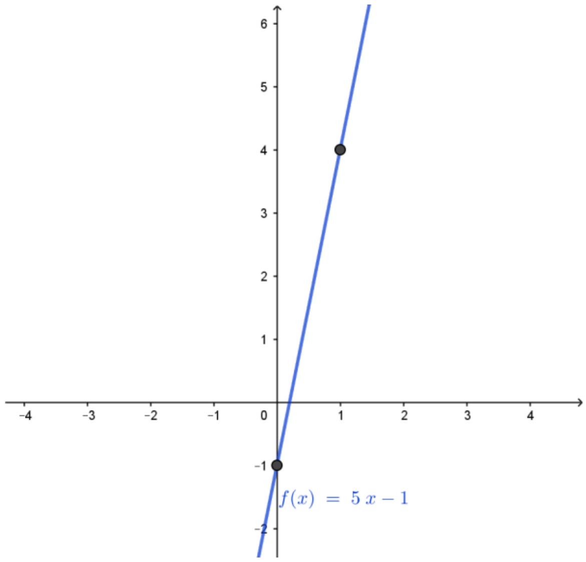
Rješenje sustava: $(1,\ 2)$ (0,5)

3. **(3 bod.)** Nacrtaj graf linearne funkcije $f(x) = 5x - 1$.

Rješenje:

x	0	1
$f(x)$	-1 (0,5)	4 (0,5)
$T(x,y)$	$(0,-1)$ (0,5)	$(1,4)$ (0,5)

(1) - nacrtati graf



4. **(5,5 bod.)** Zbroj triju brojeva jest 255. Prvi je broj 5 puta veći od drugoga, a drugi je za 10 manji od trećega. Koji su to brojevi?

Rješenje:

		iznos
1. broj	$5x$ (0,5)	175 (0,5)
2. broj	x (0,5)	35 (0,5)
3. broj	$x + 10$ (0,5)	45 (0,5)
	$\Sigma\, 255$	$\Sigma\, 255$

$5x + x + x + x + 10 = 255$ (1)
$7x + 10 = 255$ (0,5)
$7x = 255 - 10$ (0,5)
$7x = 245 \quad /:7$
$x = 35$ (0,5)

Odgovor: Traženi brojevi su: 175, 35, 45.

5. **(5 bod.)** Drvenu gredu dugu 420 metara treba podijeliti na 4 dijela tako da prvi i treći dio budu jednake duljine, drugi 3 puta veći od prvoga, a četvrti za 6 metara dulji od trećega. Kolika je duljina svakog dijela drvene grede?

Rješenje:

dio grede		duljina
1. dio	x (0,5)	$69\ m$
2. dio	$3x$ (0,5)	$207\ m$
3. dio	x (0,5)	$69\ m$
4. dio	$x + 6$ (0,5)	$75\ m$
	$\Sigma\, 420\ m$	$\Sigma\, 420\ m$

(1)

$x + 3x + x + x + 6 = 420$ (1)
$6x + 6 = 420$
$6x = 420 - 6$ (0,5)
$6x = 414 \quad /:6$
$x = 69$ (0,5)

Odgovor: Traženi dijelovi grede su duljina: 69 m, 207 m, 69 m i 75 m.

Grupa **IN** **Matematika 1**	Ime i prezime: ___________________________________ Razred: ______________	Broj bodova: **/ 21** Postotak: Ocjena:

4. ispit znanja- LINEARNE JEDNADŽBE

1. (8, 5 bod.) Riješi linearne jednadžbe:

a) $3x + 6 = 0$

Rješenje:

$3x = -6 \ /:3$ (0,5)

$x = -\frac{6}{3}$ (0,5)

$x = -2$ (0,5)

b) $4x = 3 + 3x$

Rješenje:

$4x - 3x = 3$ (0,5)

$x = 3$ (0,5)

c) $-5x - 6 = -7x + 4$

Rješenje:

$-5x + 7x = 4 + 6$ (1)

$2x = 10 \ /:2$ (0,5)

$x = \frac{10}{2}$ (0,5)

$x = 5$ (0,5)

d) $2 \cdot (x + 5) = 8 \cdot (x + 2)$

Rješenje:

$2x + 10 = 8x + 16$ (1)

$2x - 8x = 16 - 10$ (1)

$-6x = 6 \ /:(-6)$ (0,5)

$x = -\frac{6}{6}$ (0,5)

$x = -1$ (0,5)

2. (5 bod.) Riješi sustav linearnih jednadžbi:

$$x - 3y = -2$$
$$2x - y = 1$$

Rješenje:

$x - 3y = -2 \ /\cdot(-2)$ (0,5)
$2x - y = 1$

$-2x + 3y = 4$ (1)
$2x - y = 1 \ /+$

$3y - y = 4 + 1$ (0,5)
$5y = 5 \ /:5$

$y = 1$ (0,5)

$x - 3y = -2$
$x = -2 + 3y$ (0,5)

$x = -2 + 3 \cdot 1$ (0,5)
$x = -2 + 3$

$x = 1$ (0,5)

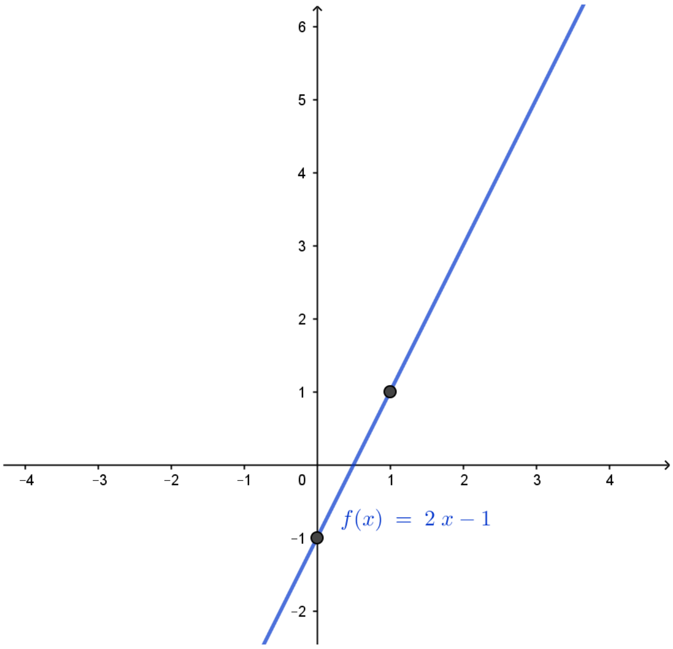
Rješenje sustava: $(1,\ 1)$ (0,5)

3. **(3 bod.)** Nacrtaj graf linearne funkcije $f(x) = 2x - 1$.

Rješenje:

x	0	1
$f(x)$	-1 (0,5)	1 (0,5)
$T(x,y)$	$(0,-1)$ (0,5)	$(1,1)$ (0,5)

(1) - nacrtati graf



4. **(5,5 bod.)** Ako je zbroj dvaju brojeva 36 tako da je prvi broj za 8 veći od drugog broja. Koji su to brojevi?

Rješenje:

		iznos
1. broj	$x + 8$ (0,5)	22 (0,5)
2. broj	x (0,5)	14 (0,5)
	$\Sigma\, 36$	$\Sigma\, 36$

$x + 8 + x = 36$ (1)

$2x + 8 = 36$ (0,5)

$2x = 36 - 8$ (0,5)

$2x = 28 \ /:2$ (0,5)

$x = 14$ (0,5)

Odgovor: Traženi brojevi su 14 i 22. (0,5)

Grupa **PP** **Matematika 1**	Ime i prezime: ______________________________ Razred: ____________	Broj bodova: / **17,5**
		Postotak:
		Ocjena:

4. ispit znanja- LINEARNE JEDNADŽBE

1. (5 bod.) Riješi linearne jednadžbe:

a) $3x + 6 = 0$

Rješenje:

$3x = -6\ /:3$ (0,5)

$x = -\frac{6}{3}$ (0,5)

$x = -2$ (0,5)

b) $4x = 3 + 3x$

Rješenje:

$4x - 3x = 3$ (0,5)

$x = 3$ (0,5)

c) $-5x - 6 = -7x + 4$

Rješenje:

$-5x + 7x = 4 + 6$ (1)

$2x = 10\ /:2$ (0,5)

$x = \frac{10}{2}$ (0,5)

$x = 5$ (0,5)

2. (5 bod.) Riješi sustav linearnih jednadžbi:

$$\frac{\begin{array}{l} x - 3y = -2 \\ 2x - y = 1 \end{array}}{}$$

Rješenje:

$$\frac{\begin{array}{l} x - 3y = -2\quad /\cdot(-2) \\ 2x - y = 1 \end{array}}{}$$ (0,5)

$$\frac{\begin{array}{l} -2x + 3y = 4 \\ 2x - y = 1\ /+ \end{array}}{}$$ (1)

$3y - y = 4 + 1$ (0,5)

$5y = 5\ /:5$

$y = 1$ (0,5)

$x - 3y = -2$

$x = -2 + 3y$ (0,5)

$x = -2 + 3 \cdot 1$ (0,5)

$x = -2 + 3$

$x = 1$ (0,5)

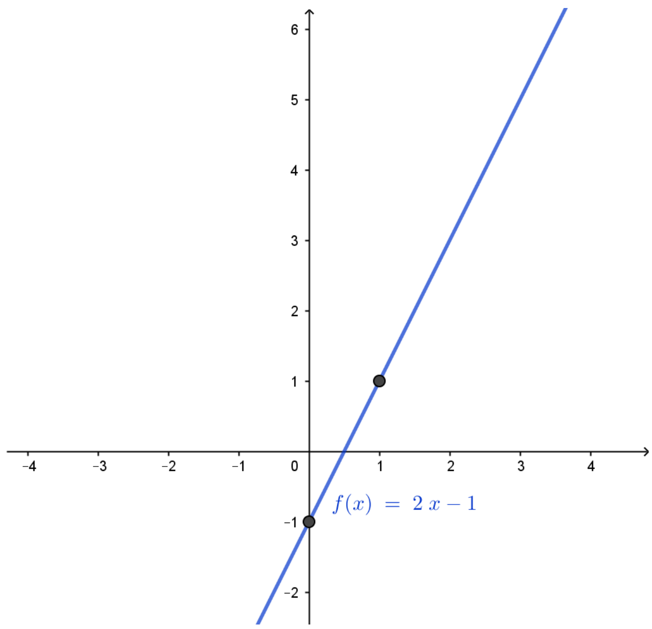
Rješenje sustava: $(1,\ 1)$ (0,5)

3. (3 bod.) Nacrtaj graf linearne funkcije $f(x) = 2x - 1$.

Rješenje:

x	0	1
$f(x)$	-1 (0,5)	1 (0,5)
$T(x,y)$	$(0,-1)$ (0,5)	$(1,1)$ (0,5)

(1) - nacrtati graf



4. (5,5 bod.) Ako je zbroj dvaju brojeva 36 tako da je prvi broj za 8 veći od drugog broja. Koji su to brojevi?

Rješenje:

		iznos
1. broj	$x + 8$ (0,5)	22 (0,5)
2. broj	x (0,5)	14 (0,5)
	Σ 36	Σ 36

$$x + 8 + x = 36 \quad (1)$$
$$2x + 8 = 36 \quad (0{,}5)$$
$$2x = 36 - 8 \quad (0{,}5)$$
$$2x = 28 \ /:2 \quad (0{,}5)$$
$$x = 14 \quad (0{,}5)$$

Odgovor: Traženi brojevi su 14 i 22. (0,5)

Prilog 2. – Metodička razrada za nastavnu temu Kvadratne jednadžbe

Prilog 2. sadrži sljedeće pisane metodičke razrade:

Nastavna jedinica	**Predviđena satnica**	**Metoda KPK**
1. Primjena kvadratne jednadžbe – tekstualni zadaci	2	da
2. Usustavljivanje nastavnog sadržaja	2	da
3. Ispit znanja i analiza	2	da
Ukupno	6	6

Nastavna jedinica (podtema):	***Primjena kvadratnih jednadžbi – tekstualni zadaci***
Tip nastavnog sata:	*obrada novog gradiva (1. školski sat)* *uvježbavanje (2. školski sat)*

Odgojno-obrazovni ishodi:

MAT SŠ B.2.2.	**Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu.**

Ishodi učenja:

Učenici će...	• *upoznati sedam koraka kognitivne strategije „Korak po korak“ koju će primjenjivati pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka* • *pažljivo iščitavati tekst zadataka te pomoću sedam koraka metode „Korak po korak“ ispisivati tražene podatke* • *napisati tražene jednadžbe prevođenjem teksta zadatka na matematički jezik* • *rješavati kvadratne jednadžbe*

Nastavna sredstva i pomagala:

Literatura:	Matematika 2, S. Varošanec, Element, (2019)
Nastavna sredstva:	udžbenik s zbirkom zadataka papir s ispisanim sedam koraka metode „Korak po korak“ RL – Primjena kvadratnih jednadžbi
Nastavna pomagala:	ploča (whiteboard), kreda, radni list, računalo

Makroplan nastavnog sata:

Uvod:

Nastavnik će učenicima pojasniti naslov nastavne jedinice odnosno kako će kvadratne jednadžbe primjenjivati na tekstualne zadatke, odnosno na koji način modelirati problemsku situaciju.

Nastavnik će upoznati učenike s kognitivnom strategijom „Korak po korak". Svaki učenik će dobiti papir sa nabrojenim sedam koraka metode „Korak po korak", koji je dužan čuvati do kraja obrade ove nastavne cjeline. Nastavnik će svaki pojedini korak detaljno objasniti učenicima što znači i koji je njihov zadatak te na koji način će primjenjivati odabranu metodu pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka.

Glavni dio sata:

Nastavnik će rješavati *Primjere 1. , 2.* i *3.* pri tome vodeći učenike kroz misaoni proces upotrebljavajući kognitivnu strategiju „Korak po korak".

Učenici samostalno rješavaju *RL – Primjena kvadratne jednadžbe* primjenjući kognitivnu strategiju „Korak po korak".

Završni dio sata:

Ukoliko učenici ne završe sve zadatke iz RL (Radna lista) što je vrlo vjerojatno, završiti će za domaću zadaću, te sljedeći sat predati nastavniku na pregled.

Tijek nastavnog sata:

Nastavnik:

Sve što smo do sada naučili o kvadratnim jednadžbama i način kako ih rješavati ćemo primijeniti na problemske situacije koje su nam opisane tekstom pa često takve zadatke nazivamo tekstualni zadaci. Pokušati ćemo tekst zadatka prevesti na matematički jezik odnosno modelirati matematičku jednadžbu čija rješenja donese nam odgovor na postavljeno pitanje zadatka.

Prilikom rješavanja tekstualnih zadataka koristiti ćemo se metodom „Korak po korak" koja će nam služiti kao alat pri rješavanju takvih problema. Ona će nam omogućiti bolje razumijevanje postavljenog problema, pa samim time uspješnije i točnije rješavanje zadanih problema.

Nastavnik podijeli svim učenicima papir s ispisanim sedam koraka kognitivne metode „Korak po korak", te vodi učenike kroz svaki korak i detaljno ih objasni. U prilogu ove pripreme se nalazi taj papir.

Razrada *Primjera 1., 2.* i *3.* uz primjenu kognitivne strategije „Korak po korak".

Primjer 1. *Umnožak dvaju uzastopnih cijelih brojeva iznosi 56. Koji su to brojevi?*

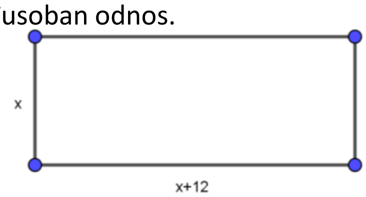
Rješenje:

1. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?“* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	**Bilješke učenika:** – O množenju dvaju uzastopnih cijelih brojeva.
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “* *„ Što prvo moram saznati?“* *„ Što trebam saznati nakon toga?“* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“*	– Odrediti uzastopne cijele brojeve čiji umnožak je 56.
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?“* *„ Koji su podaci dani u zadatku?“* Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.	– Poznajemo da je umnožak dvaju uzastopnih cijelih brojeva jednak 56. Označimo te tražene cijele brojeve: x $\rightarrow$ 1. cijeli broj x+1 $\rightarrow$ 2. cijeli broj (uzastopni broj) Zapišimo jednadžbu: $x \cdot (x+1) = 56$
4. Korak: Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se: *„ Koji postupak trebam primjeniti?“* *„ Koje formule trebam?“*	– Trebamo rješiti kvadratnu jednadžbu odnosno naći njena rješenja. – Trebamo znati formulu za rješenja kvadratne jednadžbe.
5. Korak: Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.	Zapisati svoju procjenu!
6. Korak: Izračunavanje.	$x \cdot (x+1) = 56$ $x^2 + x = 56$ $x^2 + x - 56 = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-56)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2}$ $x_1 = 7 \qquad x_2 = -8$ <u>1. rješenje:</u> 1. cijeli broj $\rightarrow$ 7 2. cijeli broj (uzastopni) $\rightarrow$8 <u>2. rješenje:</u> 1. cijeli broj $\rightarrow$ -8 2. cijeli broj (uzastopni) $\rightarrow$-7

7. Korak: Provjeri dobiveni rezultat. Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka. Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadatku.	<u>1. rješenje:</u> $x_1 \cdot (x_1 + 1) = 56$ $7 \cdot 8 = 56$ <u>2. rješenje:</u> $x_2 \cdot (x_2 + 1) = 56$ $-8 \cdot (-7) = 56$ Odgovor: Traženi uzastopni cijeli brojevi su 7 i 8 te brojevi -8 i -7.

Primjer 2. *Jedna stranica pravokutnika je za 12 dm dulja od njegove druge stranice. Ako mu je površina 36,25 dm^2, izračunaj duljine stranica tog pravokutnika.*

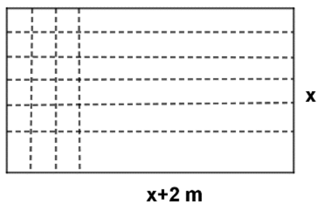
Rješenje:

.. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?“* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	Bilješke učenika: – U zadatku je zadan pravokutnik čije duljine stranica ne znamo, no poznajemo njihov međusoban odnos. 
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “* *„ Što prvo moram saznati?“* *„ Što trebam saznati nakon toga?“* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“*	– Odrediti duljine stranica danog pravokutnika.
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?“* *„ Koji su podaci dani u zadatku?“* Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.	Poznajemo: – da je jedna stranica pravokutnika za 12 dm dulja od druge – površinu danog pravoknika koja iznosi 36,25 dm^2 $P_{pravokutnika} = x \cdot (x + 12)$ $36{,}25 = x \cdot (x + 12)$ Zapišimo jednadžbu: $x \cdot (x + 12) = 36{,}25$ $x^2 + 12x - 36{,}25 = 0$
4. Korak: Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se: *„ Koji postupak trebam primjeniti?“* *„ Koje formule trebam?“*	– Trebamo rješiti kvadratnu jednadžbu odnosno naći njena rješenja. – Trebamo znati formulu za rješenja kvadratne jednadžbe.
5. Korak:	Zapisati svoju procjenu!

Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.	
6. Korak: Izračunavanje.	$x^2 + 12x - 36{,}25 = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-36{,}25)}}{2 \cdot 1}$ $x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{289}}{2}$ $x_1 = \frac{5}{2} \qquad x_2 = -\frac{29}{2}$ Rješenje $x_2 = -\frac{29}{2}$ odbacujemo jer duljina stranice pravokutnika ne može biti negativan broj. Duljine stranica pravokutnika iznose: $\frac{5}{2}$ i $\frac{29}{2}$ dm.
7. Korak: Provjeri dobiveni rezultat. Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka. Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadataku.	Provjera: $x \cdot (x + 12) = 36{,}25$ $\frac{5}{2} \cdot \frac{29}{2} = 36{,}25$ $\frac{145}{2} = 36{,}25$ $36{,}25 = 36{,}25$ Odgovor: Duljine stranica pravokutnika iznose: $\frac{5}{2}$ i $\frac{29}{2}$ dm.

Primjer 3. *Terasa ima oblik pravokutnika kojem je jedna stranica za 2 m dulja od druge. Kolike su dimenzije te terase ako je za njezino popločavanje utrošeno 460 keramičkih pločica dimenzija 30x30 cm ?*

Rješenje:

1. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?“* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	Bilješke učenika: – Vizualizacija problema:  1 pločica → kvadrat dimenzija 30x30 cm ukupan broj pločica = 460
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “*	– Trebamo odrediti dimenzije terase odnosno duljinu i širinu pravokutnika.

<table>
<tr><td>„ Što prvo moram saznati?“
„ Što trebam saznati nakon toga?“
„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“</td><td></td></tr>
<tr><td>3. Korak:
Pitaj se: „ Što je u zadatku poznato?“
„ Koji su podaci dani u zadatku?“
Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.</td><td>Poznajemo:
– da je jedna stranica pravokutnika (terase) dulja za 2 m od druge
– oblik i dimenziju pločica s kojima je popločana čitava terasa → površinu terase
$P_{1\ pločice} = 0,3\ m \times 0,3\ m = 0,09\ m^2$
$P_{terase} = 460 \cdot 0,09\ m^2 = 41,4\ m^2$
$P_{terase} = P_{pravokutnika}$
$P_{terase} = x \cdot (x+2)$
$x \cdot (x+2) = 41,4$
$x^2 + 2x - 41,4 = 0$</td></tr>
<tr><td>4. Korak:
Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se:
„ Koji postupak trebam primjeniti?“
„ Koje formule trebam?</td><td>– Trebamo rješiti kvadratnu jednadžbu odnosno naći njena rješenja.
– Trebamo znati formulu za rješenja kvadratne jednadžbe.</td></tr>
<tr><td>5. Korak:
Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.</td><td>Zapisati svoju procjenu!</td></tr>
<tr><td>6. Korak:
Izračunavanje.</td><td>$x^2 + 2x - 41,4 = 0$
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-41,4)}}{2 \cdot 1}$
$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{169,6}}{2}$
$x_1 = 5,51 \quad x_2 = -7,51$
Rješenje $x_2 = -7,51$ odbacujemo jer duljina stranice pravokutnika ne može biti negativan broj.
Duljine stranica pravokutnika iznose: 5,51 i 7,51 m.</td></tr>
<tr><td>7. Korak:
Provjeri dobiveni rezultat.
Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka.
Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadataku.</td><td>Provjera:
$x \cdot (x+2) = 41,4$
$5,51 \cdot (5,51 + 2) = 41,4$
$5,51 \cdot 7,51 = 41,4$
$41,38 \approx 41,4$
Kako smo rješenje kvadratne jednadžbe zaokružili na dvije decimale postoji pogreška tj, odstupanje u rezultati na drugoj decimali, no to nam je prihvatljivo odstupanje.
Odgovor: Dimenzije terase koja ima oblik pravokutnika iznose 5,51 × 7,51 m.</td></tr>
</table>

Nastavnik podjeli svakom učeniku *RL – Primjena kvadratnih jednadžbi*, te ima da jasne i precizne upute za samostalno rješavanje. U prilogu se nalaze papir s kognitivnom metodom „Korak po korak" i *RL – Primjena kvadratnih jednadžbi.*

RL- Primjena kvadratnih jednadžbi

Upute:

Zadane zadatke riješi koristeći se metodom „Korak po korak". Svaki korak metode zapiši i napiši odgovore na postavljena pitanja. Ukoliko postoje neke nepoznate riječi u zadatku pokušaj pronaći njihovo značenje koristeći se internet pretražiteljem ili pitaj svoje ukućane ili nastavnicu.

Zad. 1. Umnožak dvaju realnih brojeva iznosi 176. Koji su to brojevi ako je jedan broj za 5 veći od drugoga?

Zad. 2. Površina pravokutnika je 6 cm^2, a njegov opseg iznosi 10 cm. Koliko iznose duljine stranice pravokutnika?

Zad. 3. Hipotenuza pravokutnog trokuta je za 9 cm dulja od jedne katete i za 2 cm od druge katete. Kolike su stranice tog trokuta?

Zad. 4. Vrt ima oblik kvadrata. Ako mu se svaka stranica produlji za 1 m dobije se kvadrat površine 36 m^2. Kolika je stranica vrta prije produljivanja?

Nastavna jedinica (podtema):	***Usustavljivanje nastavnog sadržaja***
Tip nastavnog sata:	*uvježbavanje (2 školska sata)*

Odgojno-obrazovni ishodi:

MAT SŠ B.2.2.	**Rješava i primjenjuje kvadratnu jednadžbu.**

Ishodi učenja:

Učenici će...	• *rješavati kvadratne jednadžbe* • *razlikovati potpunu i nepotpunu kvadratnu jednadžbu* • *izračunavati diskriminantu kvadratne jednadžbe, te određivati njenu prirodu rješenja* • *primjenivati kognitivnu strategiju „Korak po korak“ pri rješavanju tekstualnih matematičkih zadataka* • *pažljivo iščitavati tekst zadataka te pomoću metode „Korak po korak“ napisati tražene jednadžbe prevođenjem teksta zadatka na matematički jezik*

Nastavna sredstva i pomagala:

Literatura:	Matematika 2, S. Varošanec, Element, (2019)
Nastavna sredstva:	udžbenik s zbirkom zadataka papir s ispisanim sedam koraka metode „Korak po korak“ *RL-Sistematizacija gradiva: Kvadratne jednadžbe*
Nastavna pomagala:	ploča (whiteboard), kreda, radni list, računalo

Makroplan nastavnog sata:

Uvod:

Nastavnik će zajedno s učenicima ponoviti gradivo o kvadratnim jednadžbama, formulu za rješavanje kvadratne jednadžbe, diskriminanti te na koji način utječe diskriminanta na prirodu rješenja kvadratne jednadžbe. Učenici definiraju ili prepoznaju osnovne pojmove kvadratne jednadžbe, ispisuju koeficijente, razlikuju potpunu od nepotpune kvadratne jednadžbe.

Glavni dio sata:

Nastavnik podijeli svakom učeniku *RL- Sistematizacija gradiva: Kvadratne jednadžbe*, te prozivajući pojedinačno učenike rješavaju zadatake na ploči uz diskusiju o postupcima i rezultatima zadataka.

Završni dio sata:

Nastavnik zadaje učenicima domaću zadaću kao pripremu za predstojeći ispit znanja iz cjeline Kvadratne jednadžbe.

Tijek nastavnog sata:

SISTEMATIZACIJA GRADIVA: Kvadratne jednadžbe

Zad. 1. *Riješi kvadratne jednadžbe te ih poveži s tipom kvadratne jednadžbe:*

a) $x^2 + 25 = 0$ **b)** $(2x - 3)(x - 5) + 13x = 0$

c) $3x^2 + 4 = 0$ **d)** $x(x + 3) - 3(x^2 - 2) = 6$

e) $5x^2 + 4x - 1 = 0$ **f)** $(x + 3)^2 + (2x + 1)^2 = (x + 4)^2$

nepotpuna kvadratna jednadžba oblika $ax^2 + c = o, a \neq 0$	kvadratna jednadžba oblika $ax^2 + bx + c = o, a \neq 0$	nepotpuna kvadratna jednadžba oblika $ax^2 + bx = o, a \neq 0$

Zad. 2. *Izračunaj diskriminantu, te odredi prirodu rješenja kvadratne jednadžbe:*

a) $x^2 - 8x + 16 = 0$ **b)** $x^2 - x - 2 = 0$ **c)** $5x^2 - 12x + 9 = 0$

Zad. 3. *Pojednostavni i riješi kvadratne jednadžbe:*

a) $(x + 1)(x - 4) + 3x = 0$

b) $x(x + 3) = 3(x + 12)$

c) $(x - 3)^2 = 16$

d) $(x - 2)^2 + (2x + 3)^2 = 13 - 4x$

Zad. 4. *Umožak dvaju realnih brojeva brojeva iznosi 176. Koji su to brojevi ako je jedan za 5 veći od drugoga?*

Rješenje:

1. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?“* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	**Bilješke učenika:** – O množenju dvaju realnih brojeva.
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “* *„ Što prvo moram saznati?“* *„ Što trebam saznati nakon toga?“* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“*	– Odrediti realne brojeve čiji umnožak je 176, ti realni brojevi se razlikuju za 5.
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?“* *„ Koji su podaci dani u zadatku?“* Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.	– Poznajemo da je umnožak dvaju realnih brojeva jednak 176. Označimo te tražene realne brojeve: x → 1. realni broj x+5 → 2. realni broj Zapišimo jednadžbu: $x \cdot (x+5) = 176$
4. Korak: Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se: *„ Koji postupak trebam primjeniti?“* *„ Koje formule trebam?“*	– Trebamo rješiti kvadratnu jednadžbu odnosno naći njena rješenja. – Trebamo znati formulu za rješenja kvadratne jednadžbe.
5. Korak: Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.	Zapisati svoju procjenu!
6. Korak: Izračunavanje.	$x \cdot (x+5) = 176$ $x^2 + 5x = 176$ $x^2 + 5x - 176 = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-176)}}{2 \cdot 1}$ $= \frac{-5 \pm \sqrt{729}}{2}$ $x_1 = 11 \quad x_2 = -16$ <u>1. rješenje:</u> 1. realni broj → 11 2. realni broj → 16

	<u>2. rješenje:</u> 1. realni broj → -16 2. realni broj → -11
7. Korak: Provjeri dobiveni rezultat. Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka. Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadataku.	<u>1. rješenje:</u> $x_1 \cdot (x_1 + 1) = 176$ $11 \cdot 16 = 176$ <u>2. rješenje:</u> $x_2 \cdot (x_2 + 1) = 176$ $-16 \cdot (-11) = 176$ Odgovor: Traženi uzastopni cijeli brojevi su 11 i 16 te brojevi -11 i -16.

Zad. 5. *Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za 2 cm, a površina mu je 48 cm^2. Koliki je opseg tog pravokutnika?*

Rješenje:

.. Korak: Pažljivo čitaj tekst zadataka i pitaj se: *„O čemu se ovdje radi?“* Zamisli situaciju opisanu u tekstu zadatku. *„Jesam li dobro shvatio zadatak?“* *„Ima li nepoznatih riječi u tekstu zadatka?“* Ako ne razumiješ značenje nekih riječi ili nepoznaješ njihovo značenje, odmah pitaj nastavnicu.	Bilješke učenika: – U zadatku je zadan pravokutnik čije duljine stranica ne znamo, no poznajemo njihov međusoban odnos.
2. Korak: Ponovo pročitaj tekst zadataka, može i naglas. Pitaj se: *„ Što se u ovom zadatku traži? “* *„ Što prvo moram saznati?“* *„ Što trebam saznati nakon toga?“* *„ Koje je konačno pitanje na koje moram odgovoriti?“*	– Odrediti duljine stranica danog pravokutnika.
3. Korak: Pitaj se: *„ Što je u zadatku poznato?“* *„ Koji su podaci dani u zadatku?“* Zapiši sve odgovore i činjenice iz zadatka u bilježnicu.	Poznajemo: – da je jedna stranica pravokutnika za 2 cm dulja od druge – površinu danog pravoknika koja iznosi 48 cm^2 $P_{pravokutnika} = x \cdot (x+2)$ $48 = x \cdot (x+2)$ Zapišimo jednadžbu: $x \cdot (x+2) = 48$ $x^2 + 2x - 48 = 0$
4. Korak: Još jednom pročitaj zadatak i pitaj se: *„ Koji postupak trebam primjeniti?“* *„ Koje formule trebam?“*	– Trebamo rješiti kvadratnu jednadžbu odnosno naći njena rješenja.

	– Trebamo znati formulu za rješenja kvadratne jednadžbe.
5. Korak: Procjeni koji bi odgovor u ovom zadatku imao smisla. Zapiši tu procjenu te ćeš je kasnije usporediti s dobivenim rezultatom.	Zapisati svoju procjenu!
6. Korak: Izračunavanje.	$x^2 + 2x - 48 = 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-48)}}{2 \cdot 1}$ $x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{196}}{2}$ $x_1 = 6 \quad x_2 = -8$ Rješenje $x_2 = -8$ odbacujemo jer duljina stranice pravokutnika ne može biti negativan broj. Duljine stranica pravokutnika iznose: 6 i 8 cm.
7. Korak: Provjeri dobiveni rezultat. Usporedi dobiveni rezultat sa svojom procjenom iz 5. koraka. Napiši odgovor riječima na postavljeno pitanje u zadatku.	Provjera: $x \cdot (x + 2) = 48$ $6 \cdot 8 = 48$ $48 = 48$ Odgovor: Duljine stranica pravokutnika iznose: 6 i 8 cm.

Grupa **A** **Matematika 2**	Ime i prezime: _______________________________________ Razred: _______________	Broj bodova: **/ 22,5**
		Postotak:
		Ocjena:

Ispit znanja- KVADRATNA JEDNADŽBA

1. **(3 boda)** Zaokruži ispravan odgovor(T-točno, N-netočno).

a) U kvadratnoj jednadžbi $x^2 + 5x + 6 = 0$, vodeći (kvadratni) koeficijent je jednak $a = 1$.

T N

b) U kvadratnoj jednadžbi $ax^2 + bx + c = 0$, koeficijent b se zove slobodni koeficijent.

T N

c) Diskriminanta kvadratne jednadžbe je broj $D = \sqrt{b^2 - 4ac}$.

T N

2. **(6,5 bodova)** Riješi kvadratne jednadžbe:

a) $x^2 + 5x + 6 = 0$

Rješenje:

$$a = 1, b = 5, c = 6 \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm 1}{2} \text{ (0,5)}$$

$$x_1 = -2, \qquad x_2 = -3 \text{ (1)}$$

b) $(2x+1)(x-1) = 0$

Rješenje:

$$2x^2 - x - 1 = 0 \text{ (0,5)}$$

$$a = 2, b = -1, c = -1 \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-1)}}{2 \cdot 2} \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{4}$$

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm 3}{4} \text{ (0,5)}$$

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -\frac{1}{2} \text{ (1)}$$

3. **(4 boda)** Izračunaj diskriminantu, te bez rješavanja jednadžbe odredi vrstu rješenja jednadžbe:

a) $x^2 - 4x + 4 = 0$

Rješenje:

$a = 1, b = -4, c = 4$ (0,5)

$D = b^2 - 4ac$ (0,5)

$D = 0$ (0,5)

$\rightarrow$ rješenja su realna i jednaka (0,5)

b) $4x^2 - 3x + 6 = 0$

Rješenje:

$a = 4, b = -3, c = 6$ (0,5)

$D = b^2 - 4ac$ (0,5)

$D = -87$ (0,5)

$\rightarrow$ rješenja su kompleksno-konjugirana (0,5)

4. **(4 boda)** Umnožak dvaju realnih brojeva iznosi 180. Koji su to brojevi ako je jedan za 3 veći od drugoga?

Rješenje:

1. broj	x (0,5)
2. broj	x+3 (0,5)

$$x \cdot (x + 3) = 180 \text{ (0,5)}$$

$$x^2 + 3x - 180 = 0$$

$$a = 1, b = 3, c = -180$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-180)}}{2 \cdot 1} \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{729}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 27}{2}$$

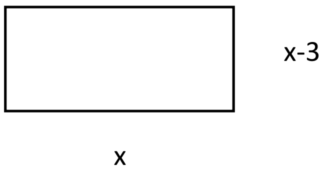
$$x_1 = 12, \qquad x_2 = -15 \text{ (1)}$$

Odgovor: Traženi brojevi su parovi brojeva; 1. par su 12 i 15, a 2. par su -12 i -15. (1)

5. (5 bodova) Duljine stranice pravokutnika razlikuju se za 3 cm, a površina mu je 70 cm^2.

Koliko iznose duljine stranica pravokutnika?

Rješenje:



(1) – skica i ideja zadataka

$$x \cdot (x-3) = 70 \text{ (0,5)}$$

$$x^2 - 3x - 70 = 0$$

$$a = 1, b = -3, c = -70 \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-70)}}{2 \cdot 1} \text{(0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{289}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{3 \pm 17}{2} \text{ (0,5)}$$

$$x_1 = 10, \qquad x_2 = -7 \text{ (0,5)}$$

→ rješenje $x_2 = -7$ odbacujemo jer duljina stranice ne može biti negativna vrijednost (0,5)

Odgovor: Duljina stranica pravokutnika su 10 cm i 7 cm. (1)

Grupa **B** **Matematika 2**	Ime i prezime: ___________________________________ Razred: ______________	Broj bodova: **/22,5**
		Postotak:
		Ocjena:

Ispit znanja - KVADRATNA JEDNADŽBA

1. (3 boda) Zaokruži ispravan odgovor (T-točno, N-netočno).

a) U kvadratnoj jednadžbi $x^2 - 7x + 12 = 0$, linearni koeficijent je jednak $b = 7$.

T N

b) U kvadratnoj jednadžbi $ax^2 + bx + c = 0$, koeficijent a se zove linearni koeficijent.

T N

c) Ako je diskrimimanta $D = 0$ onda su rješenja kvadratne jednadžbe realna i različita.

T N

2. (6,5 bodova) Riješi kvadratne jednadžbe:

a) $4x^2 - 4x + 37 = 0$

Rješenje:

$a = 4, b = -4, c = 37$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 37}}{2 \cdot 4}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{-576}}{8}$

$x_{1,2} = \frac{4 \pm 24i}{8}$ (0,5)

$x_1 = \frac{4+24i}{8}, \qquad x_2 = \frac{4-24i}{8}$ (1)

b) $(x+1)(x+5) - 5 = 0$

Rješenje:

$x^2 + 6x = 0$ (0,5)

$a = 1, b = 6, c = 0$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 0}}{2 \cdot 1}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{36}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{-6 \pm 6}{2}$ (0,5)

$x_1 = 0, \qquad x_2 = -6$ (1)

3. **(4 boda)** Izračunaj diskriminantu, te bez rješavanja jednadžbe odredi vrstu rješenja jednadžbe (napiši):

a) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

Rješenje:

$a = 4, b = 12, c = 9$ (0,5)

$D = b^2 - 4ac$ (0,5)

$D = 0$ (0,5)

$\rightarrow$ rješenja su realna i jednaka (0,5)

b) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Rješenje:

$a = 1, b = -7, c = 12$ (0,5)

$D = b^2 - 4ac$ (0,5)

$D = 1$ (0,5)

$\rightarrow$ rješenja su realna i različita (0,5)

4. **(4 boda)** Umnožak dvaju realnih brojeva iznosi 198. Koji su to brojevi ako je jedan za 7 manji od drugoga?

Rješenje:

1. broj	x (0,5)
2. broj	x-7 (0,5)

$$x \cdot (x - 7) = 198 \text{ (0,5)}$$

$$x^2 - 7x - 198 = 0$$

$$a = 1, b = -7, c = -198$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-198)}}{2 \cdot 1} \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{841}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{7 \pm 29}{2}$$

$$x_1 = 18, \qquad x_2 = -11 \text{ (1)}$$

Odgovor: Traženi brojevi su parovi brojeva; 1. par su 18 i 11, a 2. par su -18 i -11. (1)

5. (5 bodova) Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za 5 cm, a površina mu je 150 cm^2. Koliko iznose duljine stranica pravokutnika?

Rješenje:

x-5

x

(1) – skica i ideja zadataka

$$x \cdot (x-5) = 150 \text{ (0,5)}$$

$$x^2 - 5x - 150 = 0$$

$$a = 1, b = -5, c = -150 \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-150)}}{2 \cdot 1} \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{625}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 25}{2} \text{ (0,5)}$$

$$x_1 = 15, \qquad x_2 = -10 \text{ (0,5)}$$

→ rješenje $x_2 = -10$ odbacujemo jer duljina stranice ne može biti negativna vrijednost (0,5)

Odgovor: Duljina stranica pravokutnika su 15 cm i 10 cm. (1)

Grupa **IN** **Matematika 2**	Ime i prezime: ____________________________________ Razred: ______________	Broj bodova: / **15** Postotak: Ocjena:

Ispit znanja - KVADRATNA JEDNADŽBA

1. (3 boda) Nadopuni rečenicu:

U kvadratnoj jednadžbi $ax^2 + bx + c = 0$, koeficijent a se zove ____________________; koeficijent b se zove ____________________ i koeficijent c se zove ____________________ .

2. (6 bodova) Riješi kvadratne jednadžbe, prethodno ispiši sve koeficijente svake jednadžbe:

c) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Rješenje:

$a = 1, b = -7, c = 12$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$ (0,5)

$x_1 = 4, \qquad x_2 = 3$ (1)

d) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

Rješenje:

$a = 4, b = 12, c = 9$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8}$

$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 0}{8}$ (0,5)

$x_{1,2} = -\frac{3}{2}$ (1)

3. (2 boda) Izračunaj diskriminantu, te bez rješavanja jednadžbe odredi vrstu rješenja jednadžbe:

$9x^2 - 3x + 2 = 0$

Rješenje:

$a = 9, b = -3, c = 2$ (0,5)

$D = b^2 - 4ac$ (0,5)

$D = -63$ (0,5)

$\rightarrow$ rješenja su kompleksno-konjugirana (0,5)

4. **(4 boda)** Umnožak dvaju cijelih brojeva koji se razlikuju za 2 iznosi 63. Koji su to brojevi?

Rješenje:

1. broj	x (0,5)
2. broj	x+2 (0,5)

$$x \cdot (x+2) = 63 \text{ (0,5)}$$

$$x^2 + 2x - 63 = 0$$

$$a = 1, b = 2, c = -63$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-63)}}{2 \cdot 1} \text{ (0,5)}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 16}{2}$$

$$x_1 = 7, \qquad x_2 = -9 \text{ (1)}$$

Odgovor: Traženi brojevi su parovi brojeva; 1. par su 7 i 9, a 2. par su -9 i -7. (1)

Grupa **PP** **Matematika 2**	Ime i prezime: ________________________________ Razred: ____________	Broj bodova: **/ 14** Postotak: Ocjena:

Ispit znanja - KVADRATNA JEDNADŽBA

Šalabahter:

Rješenja kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = o, a \neq 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

1. (3 boda) Nadopuni rečenicu:

U kvadratnoj jednadžbi $ax^2 + bx + c = 0$, koeficijent a se zove ________________; koeficijent b se zove _________________ i koeficijent c se zove _________________ .

2. (5 bodova) Riješi kvadratne jednadžbe, prethodno ispiši sve koeficijente svake jednadžbe:

a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

Rješenje:

$a = 1, b = -7, c = 12$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{2}$ (0,5)

$x_1 = 4, \quad x_2 = 3$ (1)

b) $4x^2 + 12x + 9 = 0$

Rješenje:

$a = 4, b = 12, c = 9$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{12^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9}}{2 \cdot 4}$ (0,5)

$x_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{8}$

$x_{1,2} = \frac{-12 \pm 0}{8}$ (0,5)

$x_{1,2} = -\frac{3}{2}$ (1)

3. **(2 boda)** Izračunaj diskriminantu, te bez rješavanja jednadžbe odredi vrstu rješenja jednadžbe:

$9x^2 - 3x + 2 = 0$

Rješenje:

$a = 9, b = -3, c = 2$ (0,5)

$D = b^2 - 4ac$ (0,5)

$D = -63$ (0,5)

$\longrightarrow$ rješenja su kompleksno-konjugirana (0,5)

4. **(4 boda)** Umnožak dvaju cijelih brojeva koji se razlikuju za 2 iznosi 63. Koji su to brojevi?

Rješenje:

1. broj	x (0,5)
2. broj	x+2 (0,5)

$x \cdot (x + 2) = 63$ (0,5)

$x^2 + 2x - 63 = 0$

$a = 1, b = 2, c = -63$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-63)}}{2 \cdot 1}$$ (0,5)

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{256}}{2}$$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm 16}{2}$$

$x_1 = 7, \qquad x_2 = -9$ (1)

Odgovor: Traženi brojevi su parovi brojeva; 1. par su 7 i 9, a 2. par su -9 i -7. (1)