

# Mjerenje mase pomoću Kiblove vage: Nova definicija kilograma

---

**Matko, Sandra**

**Master's thesis / Diplomski rad**

**2020**

*Degree Grantor / Ustanova koja je dodijelila akademski / stručni stupanj:* **University of Split, University of Split, Faculty of science / Sveučilište u Splitu, Prirodoslovno-matematički fakultet**

*Permanent link / Trajna poveznica:* <https://urn.nsk.hr/urn:nbn:hr:166:625473>

*Rights / Prava:* [In copyright](#)/[Zaštićeno autorskim pravom.](#)

*Download date / Datum preuzimanja:* **2025-01-15**

*Repository / Repozitorij:*

[Repository of Faculty of Science](#)



Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet

**MJERENJE MASE POMOĆU KIBBLEOVE  
VAGE: NOVA DEFINICIJA KILOGRAMA**

Diplomski rad

Sandra Matko

Split, srpanj 2020.

*Zahvaljujem mentoru prof. dr. sc. Ivici Avianiju na velikoj pomoći prilikom pisanja diplomskog rada, brojnim ispravcima, poticaju i višesatnim konzultacijama. Veliko hvala Tončiju Čakariću na izradi vage.*

*Zahvaljujem djeci, mužu i roditeljima na bezuvjetnoj potpori i motivaciji.*

## Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu  
Prirodoslovno – matematički fakultet  
Odjel za fiziku  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Diplomski rad

### MJERENJE MASE POMOĆU KIBBLEOVE VAGE: NOVA DEFINICIJA KILOGRAMA

Sandra Matko

Sveučilišni diplomski studij Fizika, nastavnički smjer

#### Sažetak:

U svrhu poučavanja nove definicije kilograma, nadogradnjom stare laboratorijske vage, izrađen je demonstracijski prototip Kibbleove vage. U odnosu na LEGO vagu, ova vaga radi tako da zavojnice miruju, a magneti se gibaju pri čemu se brzina magneta mjeri praćenjem gibanja laserskog spota pomoću programa Tracker. Rad vage u modu brzine uspješno je opisan i analiziran pomoću modela prisilnog titranja gušenog harmonijskog oscilatora. Pogreška mjerenja iznosi oko 1,5 %, a razlučivost oko 1 mg. Vaga može odlično poslužiti kao vježba za praktikum iz moderne fizike u kojoj se koncepti opće fizike nadovezuju na složenije koncepte moderne fizike i tehnike mjerenja.

**Ključne riječi:** SI sustav, kilogram, Kibbleova vaga

**Rad sadrži:** 49 stranica, 45 slika, 8 tablica, 25 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku

**Mentor:** prof. dr. sc. Ivica Aviani

**Ocjenjivači:** prof. dr. sc. Ante Bilušić  
prof. dr. sc. Mile Dželalija

**Rad prihvaćen:** 24. 07. 2020.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

## Basic documentation card

University of Split  
Faculty of Science  
Department of Physics  
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Master thesis

### Measuring mass by a Kibble balance: New definition of kilogram

Sandra Matko

University graduate study programme Physics, orientation Education

#### Abstract:

In order to teach about the new definition of kilogram a demonstration prototype of the Kibble balance was made, by modifying an old laboratory scale. Compared to the LEGO scale, this scale works so that the coils are at rest and the magnets move, whereby the speed of the magnets is measured by tracking the movement of the laser spot using the Tracker program. The operation of the balance in velocity mode has been successfully described and analyzed using a model of forced oscillation of a damped harmonic oscillator. The measurement error is about 1.5% and the resolution about 1 mg. Scale can serve well as an exercise for a practicum in modern physics in which the concepts of general physics build on the more complex concepts of modern physics and measurement techniques.

**Keywords:** SI units, kilogram, Kibble balance

**Thesis consists of:** 49 pages, 45 figures, 8 tables, 25 references. Original language: Croatian

**Supervisor:** Prof. Dr. Ivica Aviani

**Reviewers:** Prof. Dr. Ante Bilušić  
Prof. Dr. Mile Dželalija

**Thesis accepted:** 07/24 2020.

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

## Sadržaj

1. Uvod .....	1
2. Međunarodni sustav mjernih jedinica .....	3
2.1. Povijest kilograma .....	4
2.2. Definicija metra i sekunde .....	6
3. Fizikalna pozadina Kibbleove vage .....	8
3.1. Josephsonov učinak .....	8
3.2. Kvantni Hallov učinak .....	9
4. Definiranje kilograma pomoću Kibbleove vage .....	11
4.1. Mod sile .....	11
4.2. Mod brzine .....	13
5. Definiranje kilograma pomoću rendgenske gustoće kristala (XRCD) .....	16
6. Izrada modela Kibbleove vage .....	19
6.1. Pripremne radnje i konstrukcija vage .....	19
6.2. Eksperimentalni postav za snimanje u modu brzine .....	30
6.3. Pojačanje niskopropusnog filtera .....	32
6.4. Dinamički model vage .....	33
6.5. Analiza rezonantne krivulje .....	35
6.6. Vlastita frekvencija vage .....	37
6.7. Ovisnost induciranog napona i brzine magneta o ulaznom naponu .....	38
6.8. Mjerenja u modu brzine .....	39
6.9. Mjerenje mase u modu sile .....	42
7. Upute za rad u programu Tracker .....	45
8. Zaključak .....	47
9. Literatura .....	48

## 1. Uvod

Prvi pokušaj uspostave standarda za mjerne jedinice koji bi vrijedio u cijelom svijetu zbio se godine 1875. kada je potpisana Konvencija o metru, koja predstavlja početak formiranja međunarodnog sustava mjernih jedinica - SI (*Système International d'Unités*) sustava [1]. Od tada do danas, zahvaljujući razvoju znanosti, posebno metrologije, napravljeni su veliki koraci naprijed u smislu kompletiranja i poboljšanja SI sustava.

Od sedam osnovnih mjernih jedinica, jedinica za masu, kilogram je ostala zadnja čija je definicija uključivala uspoređivanje s predmetom poznate mase. Kilogram je bio definiran kao masa prakilograma. Na temelju mase prakilograma izrađeno je 40 identičnih kopija koje su podijeljene državama potpisnicama konvencije. Problem je nastao kada se uočilo da 40 utega mijenja svoju masu u odnosu na prakilogram, što je značilo da i sam prakilogram nema više konstantnu masu. Propadanja utega se odvijaju različitim tempom. Jedini način na koji se stanje moglo popraviti je da se, kao i ostale mjerne jedinice, kilogram definira preko prirodne konstante, što garantira nepromjenjivost.

To je napravljeno 2019. godine [2] kada su redefinirane četiri od sedam osnovnih jedinica: kilogram, amper, kelvin i mol, čime je bitno unaprijeđena struktura SI sustava. U potpunosti su izbačeni etaloni, poput kilograma iz Sevresa, a mjerne jedinice su definirane isključivo preko vrijednosti fundamentalnih prirodnih konstanti, čime se znatno povećala njihova preciznost, reproducibilnost i neovisnost o opažanju.

Naime, 21.05.2019. stupila je na snagu odluka da kilogram nije više vezan za masu prautege iz Sevresa, već za Planckovu konstantu. Iako u svakodnevnom životu razlika nije uočljiva to je bio veliki iskorak za fiziku. Zahvaljujući nobelovcima Josephsonu i von Klitzingu te Bryanu Kibbleu i njihovim otkrićima, definicija kilograma korjenito je promijenjena.

Nova definicija povezuje mikroskopski svijet kvantne mehanike s našim makroskopskim svijetom u kojem se redovito služimo utegom od 1 kg. To je omogućeno izuzetno preciznim mjerenjima električnog napona i otpora (struje) koja se temelje na makroskopskim kvantnomehaničkim pojavama: Josephsonovom efektu i kvantnom Hallovom efektu. [3]

Istodobno s razvojem standarda za kilogram i tehnološki vrlo zahtjevne precizne Kibbleove vage, postojale su ideje za konstruiranje jednostavnih modela Kibbleove vage u edukacijske svrhe. Postoji nekoliko radova na ovu temu [4-10], u kojima su autori opisali različite konstrukcije Kibbleove vage. U radovima Quinna i suradnika iz 2013. godine [4] te Warda iz 2014. godine [5] opisane su konstrukcije najjednostavnije Kibbleove vage za kućnu izradu, u kojima se koristi zvučnik. Zvučnik sadrži najbitniji dio vage: zavojnicu s magnetom. Zavojnica se pomoću izmjenične struje može pomicati, a njenim se pomicanjem može inducirati napon. Znatno složeniju i točniju vagu su izradili Chao i suradnici 2015. godine [6]. To je vaga od Lego kockica, sastavljena prema uputama Nacionalnog instituta za standarde i tehnologiju

(NIST), što je bila priprema za nadolazeću redefiniciju SI sustava. Geelmuyden i Winther-Larsen su 2016. godine izradili svoju LEGO vagu [7], uz manje izmjene u odnosu na NIST-ovu vagu. Glavna izmjena sastoji se u tome da su zavojnice fiksne, a gibaju se magneti. Slična konstrukcija LEGO vage korištena je i prilikom izrade magistarskih radova [8] i [9]. Vrijedno je još spomenuti magistarski rad [10] iz 2019. godine, u sklopu kojeg su konstruirane i ispitane tri različite vage.

Glavni cilj ovog rada je približiti ideje i složene koncepte nove definicije kilograma učenicima i studentima te kreirati odgovarajuću praktikumsku vježbu.

U radu je dan kratak osvrt na povijest mjerne jedinice kilogram te osnove rada Kibbleove vage, uređaja potrebnog za novu definiciju kilograma. Nadogradnjom stare laboratorijske vage na potpuno neškodljiv način, konstruirana jednostavna verzija Kibbleove vage. Osim što je iskorištena postojeća vaga, konstrukcija je posebna jer su zavojnice fiksne, a magneti se gibaju unutar njih, za razliku od vage kod kojih su magneti fiksni, a zavojnice pomične. Uz to, laser za mjerenje brzine nije montiran na polugu vage nego je položen na njeno postolje. Ove izmjene omogućile su postavljanje dovodnih žica isključivo na fiksne dijelove vage, tako da žice ne ometaju njen rad. Također, na originalan način je riješeno mjerenje brzine magneta, pomoću laserskog spota i programa Tracker za video analizu.

Rad vage je uspješno modeliran i diskutiran pomoću odgovarajućeg fizikalnog modela. Provedena su potrebna mjerenja koja imaju za cilj podešavanje parametara vage za optimalan način rada te provjeru njene osjetljivosti, točnosti i primjenjivosti kao i ograničenja.



## 2. Međunarodni sustav mjernih jedinica

Međunarodni sustav mjernih jedinica, skraćeno SI (fr. *Système International d'Unités*) je sustav mjernih jedinica čija je upotreba zakonom propisana u svim državama svijeta osim u SAD-u, Mjanmaru i Liberiji [11]. Jedinice SI sustava se definiraju u Međunarodnom uredu za mjere i utege (fr. *Bureau International des Poids et Mesures*) sa sjedištem u Sévresu kraj Pariza. Ured djeluje od 1875. godine, tj. od prve konvencije o metru koju je potpisalo 17 država. (fr. *Convention du Mètre*). U Hrvatskoj je SI sustav u upotrebi od 1. siječnja 1981. Mjerne jedinice se dijele na osnovne i izvedene. Osnovnih je 7, te su navedene u obliku: Fizikalna veličina (oznaka fizikalne veličine): mjerna jedinica (oznaka mjerne jedinice) – definicija mjerne jedinice [2, 12]

- **Duljina (l): metar (m)** - Definicija je usvojena na 17. Općoj konferenciji za utege i mjere 1983. g. Metar udaljenost koju svjetlost prijeđe u vakuumu za vrijeme od  $1/299\,792\,458$  s. (detaljnije u poglavlju 2.2)

- **Masa (m): kilogram (kg)** -Definira se uzimajući fiksnu numeričku vrijednost Planckove konstante  $h$  koja iznosi  $6,62607015 \cdot 10^{-34}$  izražena u jedinici Js, koja je jednaka  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

- **Vrijeme (t): sekunda (s)** – Sekunda je trajanje od 9 192 631 770 perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dviju hiperfinskih razina osnovnog stanja atoma cezija-133 ( $^{133}\text{Cs}$ ) na temperaturi od 0 K. (detaljnije u poglavlju 2.2)

- **Električna struja (I): amper (A)** – Definira se uzimajući fiksnu numeričku vrijednost za elementarni naboj  $1,602176634 \cdot 10$  izraženu u jedinici C koja je jednaka A·s.

- **Termodinamička temperatura (T): kelvin (K)** – Definira se uzimajući fiksnu numeričku vrijednost za Boltzmannovu konstantu  $k_B$  koja iznosi  $1,380649 \cdot 10^{-23}$  izražena u jedinici  $\text{JK}^{-1}$ , koja je jednaka  $\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

- **Količina tvari (n): mol (mol)** – Jedan mol ima točno  $6,02214076 \cdot 10^{23}$  elementarnih entiteta (atoma, molekula, iona, elektrona ili bilo kojih čestica ili specificiranih grupa čestica). Taj broj je Avogadrova konstanta  $N_A$  i izražena je u jedinici  $\text{mol}^{-1}$ .

- **Svjetlosna jakost (Is): kandela (cd)** – Predstavlja svjetlosnu jakost zračenja izvora jednobojnog svjetla koja u danom smjeru frekvencije  $540 \cdot 10^{12}$  Hz iznosi  $1/683$  W/Sr. (Sr-steradian je prostorni kut čiji je vrh u središtu kugle i na površini kugle opisuje površinu jednaku kvadratu polumjera. To je bezdimenzionalna jedinica. )

**Tablica 1:** Prikaz veze osnovnih mjernih jedinica i prirodnih konstanti prema novom SI sustavu [12]:

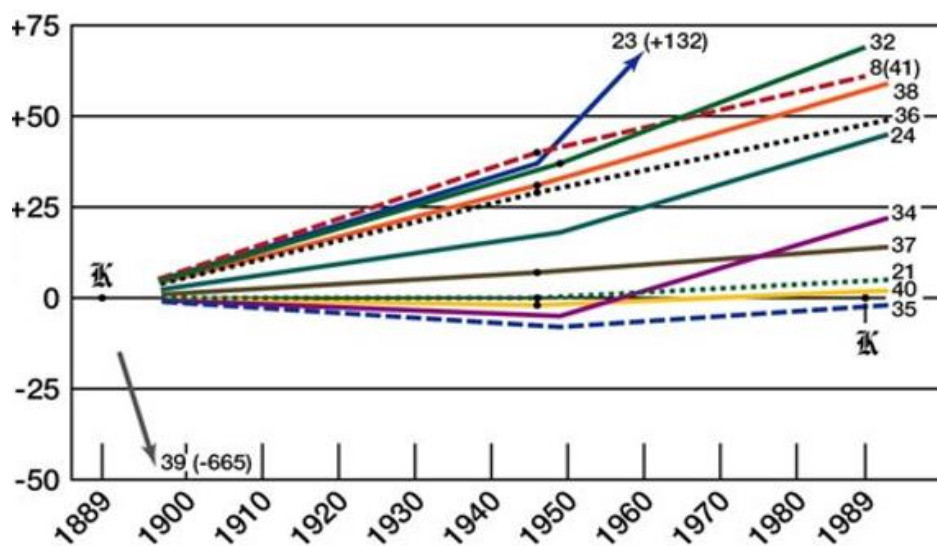
Fizička veličina	Mjerna jedinica	Odnos između osnovnih mjernih jedinica SI sustava i prirodnih konstanti
vrijeme	sekunda	$1 \text{ s} = (1/\Delta\nu_{\text{CS}}) \cdot 9.192631770 \cdot 10^9$
duljina	metar	$1 \text{ m} = (c / \Delta\nu_{\text{CS}}) \cdot 3.066331899 \cdot 10^1$
masa	kilogram	$1 \text{ kg} = (h \Delta\nu_{\text{CS}}/c^2) \cdot 1.475521400 \cdot 10^{40}$
električna struja	amper	$1 \text{ A} = (e \Delta\nu_{\text{CS}}) \cdot 6.789686817 \cdot 10^8$
termodinamička temperatura	kelvin	$1 \text{ K} = (h \Delta\nu_{\text{CS}}/k_{\text{B}}) \cdot 2.266665265 \cdot 10^0$
količina tvari	mol	$1 \text{ mol} = (1/ N_{\text{A}}) \cdot 6.022140760 \cdot 10^{23}$
Jakost svjetlosti	kandela	$1 \text{ cd} = (K_{\text{cd}} h (\Delta\nu_{\text{CS}})^2) \cdot 2.614830482 \cdot 10^{10}/\text{sr}$

## 2.1. Povijest kilograma

Mjerna jedinica je odabrana vrijednost fizičke veličine s kojom se, prilikom mjerenja, uspoređuju sve druge istovrsne fizičke veličine. Mjerna jedinica za masu je kilogram, te je jedina u Međunarodnom sustavu mjernih jedinica (SI sustavu) s prefiksom kilo. Povijesno, kilogram je masa vode koja stane u kocku duljine stranice 0,1 m pri temperaturi od 4 °C. Na temelju te mase izrađen je predmet nazvan međunarodni prototip kilograma (IPK). To je valjak promjera osnovice 39,17 mm i visine istog iznosa. Izrađen je od slitine 90% platine i 10% iridija. Prototip je čuvan u trezoru BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) u predgrađu Pariza, te je od svoje izrade 1899. godine četiri puta bio upotrebljavan za mjerenje. Po uzoru na IPK izrađeni su dodatni predmeti nazvani nacionalni prototipovi kilograma (NPK), kako bi uskladili masu kilograma na svjetskoj razini. Po jedan NPK bio je dodijeljen svakoj državi koja se pridružila konvenciji o metru (Metre Convention) kako bi jedinica za masu unutar te države bila jednoznačno određena.

U svim društvima trgovina igra vrlo važnu ulogu, a veliki dio trgovanja se izvodi s robom koja se prodaje na kilograme. Trgovina je uspješna jedino ako je jedinica za masu, kilogram, dobro definirana. Tu nastaje problem. Naime, IPK i NPK se vremenom mijenjaju, te nakon nekoliko desetljeća više nemaju jednake mase.

Slika 1 prikazuje promjene mase nekih nacionalnih prototipova kilograma (NPK) u vremenu od 1889. do 1989. godine u odnosu na prototip iz Sevresa, IPK. Najveća odstupanja se uočavaju kod prototipova broj 23 koji se nalazi u Finskoj (+132 µg) i broj 39 koji se nalazi u Republici Koreji (-665 µg). Ostale, manje značajne promjene mase NPK navedene su u tablici 2.



*Slika 1. Promjena mase nekih nacionalnih prototipova kilograma u vremenu od 1889. do 1989. godine. Na osi apscisa su navedene godine, a na osi ordinata promjena mase u mikrogramima u odnosu na IPK. [13]*

*Tablica 2. Promjena mase prototipova kilograma sa slike 1 godine u odnosu na IPK [13].*

Broj prototipa	$\Delta m$ ( $\mu\text{g}$ )	Lokacija prototipa
21	+5	Meksiko
24	+45	Španjolska
34	+22	Acad. Sci. Pariz
35	-2	Francuska
36	+49	Norveška
37	+14	Belgija
38	+59	Švicarska
40	+2	Švedska

Zbog navedenog bilo je potrebno redefinirati kilogram, odnosno definirati ga tako da u cijelom svijetu znači isto. To napravljeno tako da je definiran preko Planckove konstante  $h$ .

Novi SI sustav prikazuje svih 7 osnovnih jedinica preko prirodnih konstanti. Prednosti takve definicije su višestruke [1]:

- Mjerna jedinica je uvijek je dostupna onima koji trebaju podatke. Bilo tko može napraviti mjerenje, za razliku od npr. dostupnosti NPK.

- Za prirodne konstante ne postoji rizik od promjene vrijednost nakon što se provedu mjerenja
- Jedinica vezana za neki predmet je stabilna koliko i sam predmet, te je pitanje koliko precizno se može mjeriti. Mjerenja su preciznija kada ne postoji to ograničenje.

## 2.2. Definicija metra i sekunde

Sve do kraja 18. stoljeća, svaka pokrajina u Europi je imala svoju mjernu jedinicu za duljinu. Mjerna jedinica duljine u pojedinoj pokrajini često je predstavljala duljinu nekog dijela tijela lokalnog moćnika, a problemi u trgovini tog vremena su bili očiti. Društvo je težilo nalaženju jedne univerzalne jedinice za duljinu. Preokret je nastao nakon Francuske revolucije. Na konvenciji o metru, kao mjerna jedinica za duljinu uzet je deset milijunti dio četvrtine meridijana koji prolazi kroz Pariz. Mjerna jedinica za duljinu, definirana na ovaj način, bila je dio planeta, nešto zajedničko svim ljudima na Zemlji. Na temelju mjerenja odabranog meridijana napravljen je *Mètre des archives*, a potom i međunarodni prototip metra IPM.

Znanstvenici radili na preciznom mjerenju brzine svjetlosti u vakuumu. Brzina svjetlosti  $c$  je određena s velikom preciznošću, te od 1983. iznosi

$$c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}.$$

Budući da mjerna jedinica za brzinu sadrži metar, znanstvenici su prepoznali priliku za definirati metar preko prirodne konstante  $c$ , kao udaljenost koju svjetlost prijeđe u vakuumu za vrijeme od  $1/299\,792\,458$  s.

Metar je prva SI jedinica koja je definirana preko konstante.

Naziv sekunda potječe od podjele sata i stupnja na manje dijelove. Na latinskom jeziku *pars minuta secunda* znači drugi manji dio. Povijesno u SI sustavu sekunda je definirana je kao  $1/186400$  dio dana. Ovaj faktor proizlazi iz podjele dana u 24 sata, zatim u 60 minuta i na kraju u 60 sekundi. Godine 1967. sekunda je definirana preko prirodne konstante:

Sekunda je trajanje od  $9\,192\,631\,770$  perioda zračenja koje odgovara prijelazu između dviju hiperfinskih razina osnovnog stanja atoma cezija-133 ( $^{133}\text{Cs}$ ) na temperaturi od 0 K.

Kilogram je znatno kompliciraniji za definirati preko prirodne konstante. Ideja o definiciji kilograma preko Planckove konstante je relativno nova, te je postala moguća nakon 1980-ih godina prošlog stoljeća, a temelji se na mjerenjima mase pomoću Kibbleove vage. Princip rada Kibbleove vage te fizikalna pozadina i objašnjenja djelomično su preuzeta iz rada [1].



*Slika 2. Službeni logo SI sustava ustupljen od strane BIPM-a sa 7 osnovnih mjernih jedinica i konstanti preko kojih su definirane [14].*

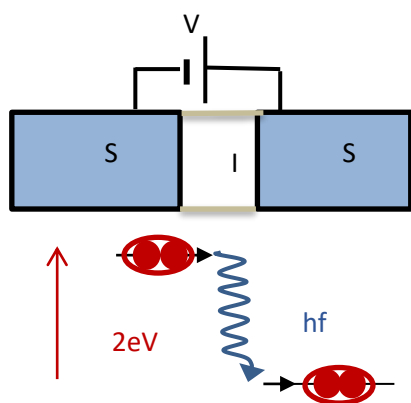
### 3. Fizikalna pozadina Kibbleove vage

#### 3.1. Josephsonov učinak

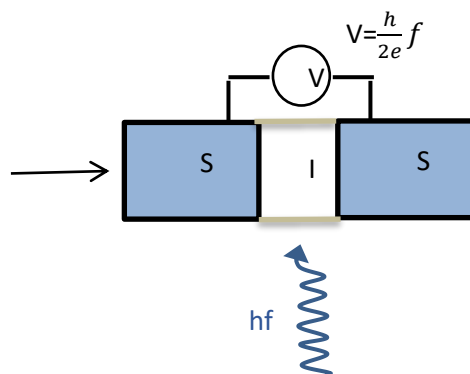
U svrhu razumijevanja principa Kibbleove vage bitno je osvrnuti se na fizikalna otkrića koja su to omogućila. Josephsonov učinak [15], otkriven krajem 60-ih godina prošlog stoljeća, omogućio je iznimnu preciznost pri mjerenju napona te, što je posebno važno, povezanost mjerne jedinice za napon s prirodnim konstantama  $e$  i  $h$ . Učinak se opaža na Josephsonovom spoju, odnosno na spoju dva supravodiča među kojima je barijera (izolator). Iako je barijera izolator, supravodljivi, Cooperovi parovi elektrona prolaze kroz nju procesom koji nastaje zbog njihove kvantne prirode, tuneliranjem. Kada se na spoj priključi izvor napona  $V$ , Cooperovi parovi naboja  $2e$ , koji prelaze barijeru moraju se riješiti viška električne energije  $2eV$  koju im daje izvor. Zbog toga emitiraju elektromagnetski val točno određene frekvencije  $f$ , tako da vrijedi zakon očuvanja energije

$$2eV = hf, \quad (3.1.1)$$

kao što je prikazano na slici 3.



*Slika 3. Josephsonov spoj; kada se dovede napon na barijeru, prijelazom parova elektrona kroz barijeru emitira se EM val frekvencije  $f = \frac{2eV}{h}$*



*Slika 4. Josephsonov spoj; kada se spoj obasja mikrovalnim EM zračenjem, na barijeri se stvara napon  $V = \frac{hf}{2e}$*

Slučaj je moguće promatrati i s druge strane, kako je prikazano na slici 4. Obasjavanjem spoja mikrovalnim EM zračenjem na spoju se stvara električni napon

$$V = \frac{nfh}{2e}, \quad (3.1.2)$$

gdje je  $n$  cijeli broj,  $f$  frekvencija mikrovalnog zračenja,  $h$  Planckova konstanta,  $i$   $e$  elementarni naboj. Kvocijent prirodnih konstanti  $\frac{2e}{h}$  predstavlja Josephsonovu konstantu  $K_J = 483597.891 \cdot 10^9$  Hz/V.

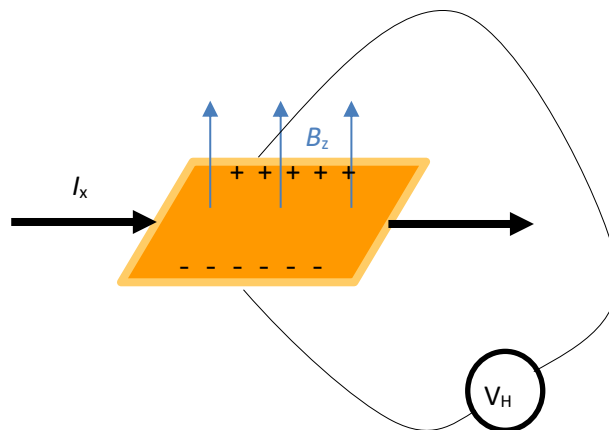
Budući da jedan spoj može dati napon od približno  $40 \mu\text{V}$ , da bi se dobio napon reda veličine volta, potrebno je serijski spojiti veliki broj Josephsonovih spojeva. U tu svrhu izrađeni su supravodljivi čipovi s više stotina tisuća spojeva pomoću kojih se s velikom preciznošću može odrediti napon. Zahvaljujući Josephsonovom učinku razvijena je tehnologija znatno preciznijeg mjerenja napona nego je do tada bilo moguće.

### 3.2. Kvantni Hallov učinak

Za drugo važno otkriće zaslužan je von Klitzing koji je 1980. otkrio kvantni Hallov učinak [16]. Kod Hallovog učinka, na pločici kojom teče struja  $I_x$ , uronjenoj u magnetno polje  $B_z$ , stvara se razlika potencijala  $V_H$  koja je okomita na tok struje i na smjer magnetskog polja [1]

$$V_h = \frac{I_x B_z}{nde}, \quad (3.2.1)$$

gdje je  $d$  debljina uzorka, a  $n$  gustoća nositelja naboja.



Slika 5. Hallov učinak

Hallov otpor  $R_H$  je omjer Hall-ovog napona  $V_H$ , i struje  $I_x$ . Prilikom mjerenja otpora GaAs (galijevoj arsenida) na niskim temperaturama u jakom magnetnom polju otkriveno je da je, ovisno o magnetskom polju, Hallov otpor kvantiziran u pomacima od [1]

$$R = \frac{1}{i} \cdot \frac{h}{e^2}, \quad (3.2.2)$$

te da ovisi samo o prirodnim konstantama. Pojava je nazvana kvantni Hallov efekt, a kvocijent  $h/e^2$  nazvan je Klitzingova konstanta  $R_K = 25\,812,807\,4555\ \Omega$ . Za tanki film, kada debljina uzorka teži nuli uzorak je približno dvodimenzionalan. Posljedica je da gustoća nositelja naboja u magnetskom polju postaje kvantizirana, tj. poprima diskretne vrijednosti višekratnika umnoška elementarnog naboja i magnetnog polja, podijeljenih debljinom uzorka.

$$n = \frac{ie}{hd} \cdot B_z \quad (3.2.3)$$

Uvrštavanjem dobivenog izraza u izraz za Hallov napon pokrate se  $B_z$  i  $n$ , te dobivamo

$$V_h = \frac{I_x h}{ie^2} \quad (3.2.4)$$

Otkriće kvantnog Hallovog učinka je imalo velik utjecaj na mjerenje otpora. Postala je dostupna metoda za određivanje otpora samo preko cijelog broja  $i$ , i dvije prirodne konstante: Planckove konstante  $h$  i elementarnog naboja  $e$ .

Ako se mjerna jedinica Planckove konstante  $J_s$  prikaže preko osnovnih jedinica pojavljuju se još i kilogram i metar.

$$J_s = \text{kgm}^2\text{s}^{-1}$$

Dakle, pruža se mogućnost definirati kilogram preko Planckove konstante.

Kako je opisano u poglavlju 3.1 Josephsonov učinak se može koristiti za precizno mjerenje razlike potencijala u voltima. Razlika je dana izrazom (3.1.1). Važnost izraza je ovisnost napona o frekvenciji.

U poglavlju 3.2 opisano je kako je moguće koristiti Hallov kvantni efekt za precizno mjerenje otpora. Princip je moguće iskoristiti za mjerenje jakosti struje. Kada se otpornik serijski spoji sa zavojnicom nastaje pad napona na krajevima otpornika koji se može mjeriti koristeći Josephsonov učinak. Međutim, otpor otpornika mora također biti precizno određen. To se postiže usporedbom otpora otpornika s kvantnim Hallovim otporom. Pošto su napon i otpor poznati, preko Ohmovog zakona poznata je i jakost struje.

$$I = \frac{V_h}{R_h} \quad (3.2.5)$$

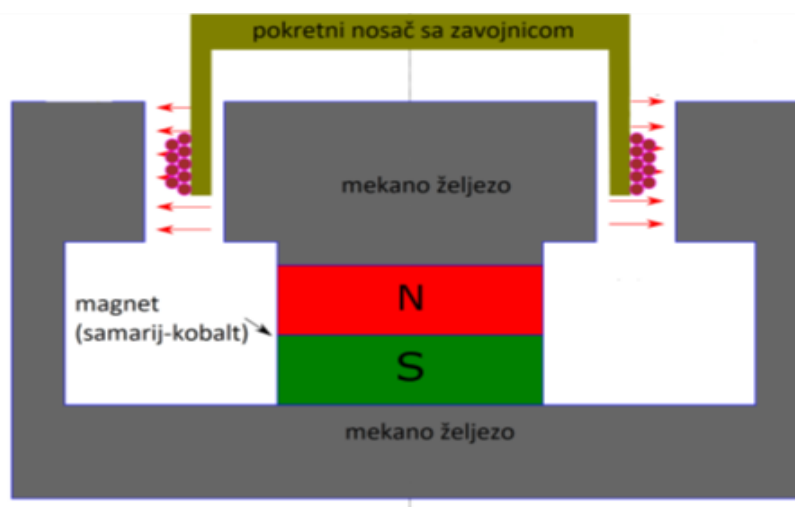
Važnost ove veze je to što se sve veličine od interesa mogu prikazati preko frekvencije, koja se jako precizno može mjeriti. Kako Kibbleova vaga koristi navedena dva principa (4.2.5) bit će objašnjeno u poglavljima 4.1 i 4.2 nakon što se odgovori na pitanje što je zapravo Kibbleova vaga i što ona radi.



## 4. Definiranje kilograma pomoću Kibbleove vage

Vagu je konstruirao 1974. dr. Bryan Kibble (1938.-2017.) metrolog u Nacionalnom laboratoriju za fiziku u Ujedinjenom Kraljevstvu. U početku korištena je za točnije određivanje Ampera, jedinice za jakost struje.

U središtu vage nalazi se elektromagnetni uređaj sastavljen od pokretljive zavojnice i fiksnog magneta. Pojednostavljen prikaz nalazi se na slici 6. Stalni magnet najčešće izrađen od slitine samarija i kobalta smješten je u željeznom kućištu, kako bi se minimalizirao utjecaj vanjskog magnetnog polja. Magnetsko polje iznosi od 0.4 T do 0.9 T.



*Slika 6. Pojednostavljen prikaz elektromagnetnog uređaja u Kibblovoj vazi. Slika je preuzeta iz rada [1]*

Uređaj koristi dva načina rada: *mod sile*, s opterećenjem i *mod brzine*, bez opterećenja. Kibble je otkrio da je kombiniranjem mjerenja ovih dvaju načina moguće izraziti masu i eliminirati veličine koje je teško točno izmjeriti. Slijedi detaljniji opis postupka.

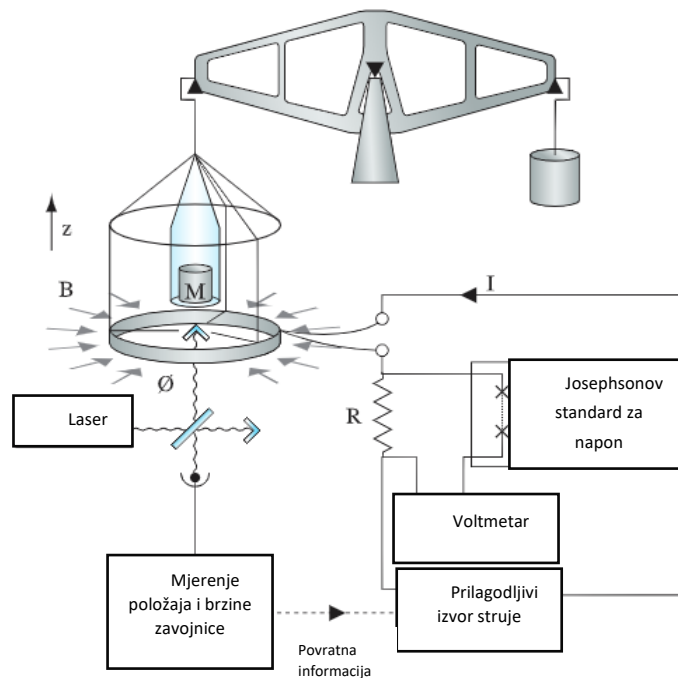
### 4.1. Mod sile

Neka je vaga na početku u ravnoteži. Stavljanjem utega na pokretni nosač, pod djelovanjem njegove težine, nastaje neravnoteža. Puštanjem struje kroz zavojnicu javlja se Amperova sila koja vraća vagu u ravnotežni položaj. Uređaj je konstruiran tako da su smjerovi struje i magnetskog polja međusobno okomiti i leže u horizontalnoj ravnini pa je Amperova sila usmjerena prema gore ili prema dolje i može se prikazati izrazom

$$F_L = BIl \quad (4.1.1)$$

gdje je  $I$  struja,  $B$  magnetsko polje, a  $l$  duljina zavojnice u magnetskom polju.

U ravnotežnom položaju Amperova sila jednaka je težini utega.



*Slika 7. Shema Kibbleove vage prilikom rada u modu sile u kojem se uspostavlja ravnoteža Amperove sile i težine utega na vagi. [17]*

Shema Kibbleove vage prilikom rada u modu sile prikazana je na slici 7. Na desnoj strani vage nalazi se protuteg koji drži ravnotežu s pokretnim nosačem na kojem je zavojnica, na lijevoj strani. Vaga se dovodi u ravnotežu puštanjem struje kroz zavojnicu. Provođe se dva mjerenja. Prvo mjerenje je bez utega, pri čemu se struja  $I_1$  podesi tako da je vaga u nultom, početnom položaju. Zatim se na lijevi krak vage doda uteg mase  $m$ . Potrebna je jakost struje  $I_2$  da se vaga vrati u početni položaj. Razlika u iznosu dviju Amperovih sila jednaka je težini dodanog utega

$$(I_2 - I_1) \cdot B \cdot l = mg \quad (4.1.2)$$

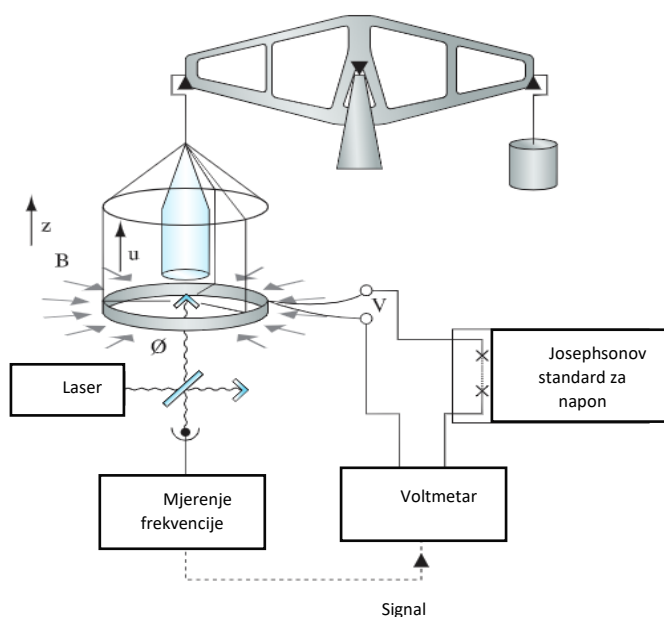
Zahvaljujući primjeni Josephsonovog i von Klitzingovog otkrića, struja se može mjeriti s velikom apsolutnom točnošću. Iznos otpora na kojem se mjeri pad napona prethodno se odredi usporedbom s von Klitzingovim otporom (konstantom), a napon se mjeri usporedbom s naponom Josephsonovog spoja (čipa), čime se odredi jakost struje s apsolutnom točnošću  $1 \cdot 10^{-8}$ , odnosno s točnošću od osam značajnih znamenki.

Protuteg na desnoj strani može se podesiti tako da su dvije struje približno jednakog iznosa, a suprotnog smjera, što dokida pogreške nesimetričnosti poput histereze materijala i utjecaj konačne veličine zavojnice.

Dakle, masu utega moguće je povezati s jakošću struje, međutim faktor  $Bl$  nije moguće precizno odrediti s točnošću potrebnom za bolju definiciju kilograma. Rješenje za ovaj problem Kibble je našao u dodatnom mjerenju.

## 4.2. Mod brzine

U modu brzine zavojnica se pomiče vertikalno kroz magnetsko polje, a mjeri se brzina zavojnice i inducirani napon. Kibble je shvatio da je napon koji se inducira u zavojnici vage ako se ona giba u istome magnetskom polju proporcionalan nepoznatom faktoru  $Bl$ , odnosno da je omjer Amperove sile i struje jednak omjeru Faradayevog induciranog napona i brzine gibanja zavojnice.



Slika 8. Skica rada Kibbleove vage u modu brzine [17].

Zbog vertikalnog gibanja zavojnice i horizontalnog polja, inducirani napon je

$$V = Blv, \quad (4.2.1)$$

gdje je  $V$  inducirani napon a  $v$  brzina zavojnice. Obje veličine moguće je precizno mjeriti, s nesigurnošću manjom od  $10^{-8}$ . Dijeljenjem jednačbi (4.1.2) i (4.2.1), uz pretpostavku jednakog faktora  $Bl$  dobivamo

$$mgv = V\Delta I. \quad (4.2.2)$$

To je tzv. jednačba snage, koja povezuje mehaničku snagu utega sa snagom električne struje, pri čemu je nepoznati faktor  $Bl$  eliminiran. Kibbleova vaga je uređaj koji uspoređuje mehaničku i električne snagu, opisanu jednačbom snage.

U izrazu (4.2.2) faktor  $Bl$  smo pokratili zato jer smo pretpostavili da Amperov i Faradayev zakon primjenjujemo u idealnim uvjetima. Međutim, jedan faktor dolazi iz moda brzine, a drugi iz moda sile. Postavlja se pitanje je li to isti faktor. Uvjeti koji moraju biti zadovoljeni da bi se  $Bl$  zaista mogao pokratiti diskutirani su u radu [17]. Naime, ako su jedine značajne sile uzrokovane gravitacijom ili interakcijom struje i magnetnog polja, ako su pomaci zavojnice horizontalnoj ravnini zanemarivi, a njen položaj isti u oba moda, tada je i faktor  $Bl$  približno jednak u oba moda. Stoga je bitno paziti da vaga bude pažljivo nivelirana, a zavojnica pažljivo centrirana kako njen nagib ne bi stvorio sile ili pomake u smjerovima koji nisu vertikalni.

Cilj mjerenja je odrediti masu utega pa izraz (4.2.2) možemo zapisati eksplicitno

$$m = \frac{V\Delta I}{gv} \quad (4.2.3)$$

U Kibbleovoj vagi napon i struja mjere se usporedbom s Josephsonovim naponom i von Klitzingovim otporom, koji se mjere preko karakterističnih frekvencija pa za snagu električne struje vrijedi izraz

$$V\Delta I = \frac{ih}{4r} f_v \cdot (f_1 - f_2), \quad (4.2.4)$$

gdje je  $f_v$  frekvencija signala koja odgovara naponu  $V$  iz moda brzine, a  $f_1$  i  $f_2$  frekvencije dobivene iz mjerenja struja  $I_1$  i  $I_2$  u modu sile.

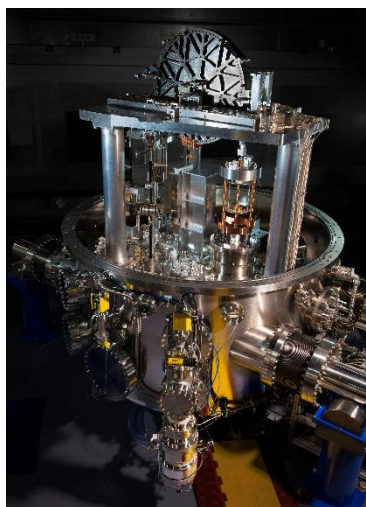
Nakon uvrštavanja (4.2.4) u (4.2.3) slijedi izraz za masu

$$m = \frac{ih}{4rv} f_v \cdot (f_1 - f_2). \quad (4.2.5)$$

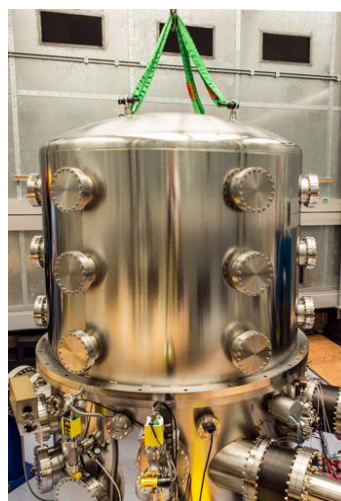
Izraz pokazuje da se struja i napon, a time i masa utega mjere preko frekvencija.

Do 2019. godine Kibbleova vaga se koristila za mjerenje Planckove konstante. Potrebne su bile poznate veličine: masa (na temelju IPK), lokalna vrijednost za akceleraciju sile teže, brzina zavojnice, te dvije frekvencije korištene za Josephsonov učinak. Nakon 2019. godine, vrijednost Planckove konstante je fiksirana, a vaga se koristi za mjerenje mase, odnosno za definiciju kilograma.

Trenutno najpreciznija Kibbleova vaga je NIST-4, četvrta generacija vage u Nacionalnom institutu za standarde i tehnologiju u Americi. Smještena je u laboratoriju duboko pod zemljom u kontroliranim uvjetima. Visoka je približno 2,5 m i prekrivena metalnim pokrovom unutar kojeg je vakuum. Zavojnica je sačinjena od približno 1,4 km žice, a cijeli magnetni sistem koji proizvodi magnetno polje od 0,55 T ima masu od oko 1000 kg. Istovremeno mjeri napon, struju, brzinu i akceleraciju sile teže. Uređaj mjeri masu do na mikrogram.



*Slika 9. Kibbleova vaga, NIST, USA  
bez pokrova [18]*



*Slika 10. Kibbleova vaga, NIST, USA  
s pokrovom [18]*

## 5. Definiranje kilograma pomoću rendgenske gustoće kristala (XRCD)

Postoji još jedan način određivanja veze Planckove konstante i mase, a to je mjerenjem gustoće kristala pomoću x-zraka (*X-ray crystal density: XRCD*). Ova metoda svodi se na precizno određivanje Avogadrove konstante iz koje se zatim računa Planckova konstanta ili masa. Veza između Avogadrove i Planckove konstante nalazi se u izrazu izvedenom iz Bohrovog modela atoma vodika [19]

$$h = \frac{cM_u A_r(e)\alpha^2}{2R N_a} \quad (5.1)$$

gdje je  $M_u$  konstanta molarne mase,  $A_r$  relativna atomska masa elektrona,  $\alpha$  konstanta fine strukture,  $R$  Rydbergova konstanta i  $N_a$  Avogadrova konstanta.

Konstanta molarne mase i brzina svjetlosti su određene s visokom točnošću, a pogreška kombinacije konstanti  $\frac{A_r(e)\alpha^2}{R}$  je  $4.5 \cdot 10^{-10}$ , tako da je moguće odrediti Planckovu konstantu preko Avogadrove s pogreškom manjom od  $10^{-9}$ .

Uz precizno određenu konstantu  $h$ , može se odrediti masa elektrona [19]

$$m_e = \frac{2hR}{\alpha^2 c} \quad (5.2)$$

te se relativna masa bilo kojeg atoma može iskazati u odnosu na  $m_e$

$$m_x = m_e \cdot r_x, \quad (5.3)$$

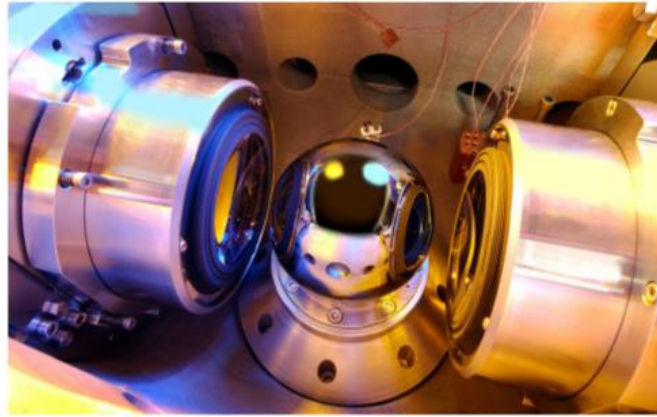
gdje je  $r_x$  omjer mase atoma  $x$  i mase elektrona.

Uz poznatu masu atoma, za definiranje kilograma potrebno je prebrojiti atome makroskopskog objekta, što nije moguće postići brojenjem pojedinačnih atoma u razumnom vremenu. Rješenje ovog problema pronađeno je u geometrijskom razmatranju. Zahvaljujući poluvodičkoj industriji koja je posljednjih desetljeća usavršila sintezu kristala silicija, silicij je moguće sintetizirati kao približno savršen kristal, s jako malo nečistoća. Silicij kristalizira u dijamantnu strukturu s 8 atoma kubičnoj ćeliji dimenzije približno  $a = 5.4$  angstrema. Broj atoma u makroskopskom objektu dobije se tako da se volumen objekta podijeli s volumenom jedne ćelije, te se pomnoži s brojem atoma u ćeliji.

Broj atoma u kristalu silicija oblika kugle, promjera  $d$  te konstante rešetke  $a$  dan je izrazom:

$$N = 8 \cdot \frac{V(\text{kugle})}{V(\text{ćelije})} = \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{d}{a}\right)^3 \cdot \pi. \quad (5.4)$$

Međutim, savršenu kuglu je teško napraviti, te je potrebno precizno odrediti odstupanja od oblika kugle. To je postignuto mjerenjem pomoću interferometra, tako da dijametar kugle izmjeren u stotinu različitih orijentacija.



*Slika 11. Kugla silicija u interferometru - uređaju koji precizno mjeri promjer kugle u različitim orijentacijama. [20]*

Uz to, u prirodi postoje 3 stabilna izotopa silicija,  $^{28}\text{Si}$ ,  $^{29}\text{Si}$  i  $^{30}\text{Si}$ , čije se mase razlikuju, te je potrebno poznavati srednju masu silicija koja se dobije iz

$$m_{\text{Si}} = (f_{28}r_{28} + f_{29}r_{29} + f_{30}r_{30})m_e, \quad (5.5)$$

gdje je  $f_{28}$  vjerojatnost da je nasumičan atom upravo izotop  $^{28}\text{Si}$ , a  $r_{28}$  omjer mase izotopa  $^{28}\text{Si}$  i mase elektrona. Analogne oznake vrijede i za ostale izotope.

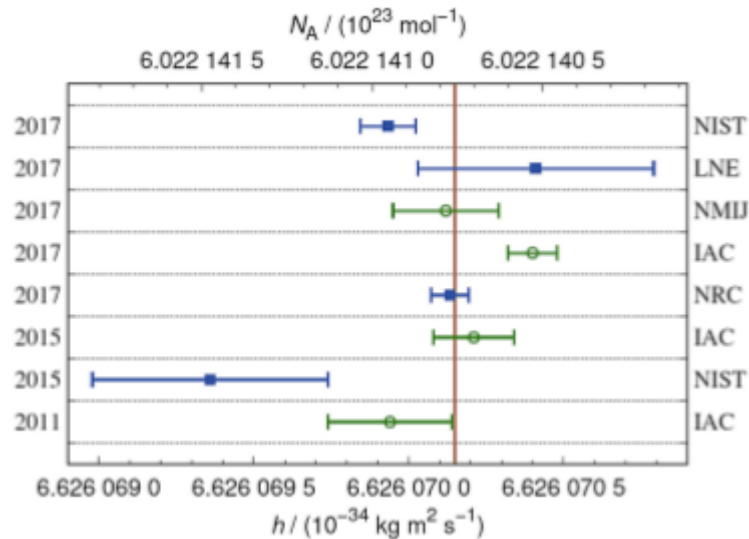
U prirodnom siliciju vrijedi približno  $f_{29}=0.047$  i  $f_{30}=0.030$ , s tim da svaki uzorak silicija nema isti postotak pojedinih izotopa. Da bi se smanjila greška bilo je potrebno obogatiti silicij najčešćim izotopom  $^{28}\text{Si}$ . Zahvaljujući tehnologiji razvijenoj za vrijeme Hladnog rata, zbog potrebe za obogaćenim uranom, postignuta je vrijednost  $f_{28}\approx 0.99995$ , čime je postignut zadovoljavajuće mali udio  $f_{29}+f_{30} < 5\cdot 10^{-5}$ , a time i prihvatljiva pogreška u određivanju prosječne mase atoma silicija.

Kao rezultat ovih razmatranja dobije se izraz za masu kugle silicija:

$$m = N \cdot m_{\text{Si}} = \frac{4\pi d^3}{3a^3} \cdot (f_{28}r_{28} + f_{29}r_{29} + f_{30}r_{30}) \cdot \frac{2hR}{\alpha^2 c}. \quad (5.6)$$

Budući da u realnom kristalu postoje vakancije i intersticijski atomi, prosječan broj atoma u ćeliji je različit od 8 i potrebno ga je prilagoditi. Traži se velika preciznost mjerenja konstante rešetke  $a$  koja se mjeri difrakcijom rendgenskih zraka. Uređaj za mjerenje kombinira rendgenski interferometar s optičkim, pri čemu se povezanost s metrom dobiva iz valne duljine laserskih zraka. Za mjerenje promjera kugle načinjena su dva specijalna interferometra: jedan u Njemačkoj, a jedan u Japanu. Mjerenja se provode tako da se mjeri optički put između leća interferometra sa i bez kugle. Razlika u putevima je traženi promjer kugle. Uzima se prosječna vrijednost dobivena iz mnogobrojnih mjerenja.

Nekoliko silicijevih kugli je načinjeno i karakterizirano na opisani način. Najtočnije mjerenje  $N_A$  ima neodređenosti od  $1,2 \cdot 10^{-8}$ . Slika 12 prikazuje rezultate svih mjerenja  $N_A$  i  $h$  kombiniranih kako bi se dobile konačne vrijednosti preporučene od CODATA-e. (Committee on data, International science council)



**Slika 12.** Rezultati preciznih mjerenja  $h$  i  $N_a$  koji su uzeti u obzir prilikom određivanja fiksne vrijednosti  $h$  i  $N_a$  u novom SI sustavu (crvena linija). Kvadratići označavaju vrijednosti dobivene Kibblovom vagom, a kružići vrijednosti dobivene XRCD metodom. Na lijevoj strani nalaze se godine objavljivanja pojedinog rezultata dok je na desnoj strani navedena kratica instituta koji je radio mjerenje. [1]



## 6. Izrada modela Kibbleove vage

U svrhu demonstracije principa na kojem se zasniva uvođenja nove definicije kilograma, izrađena je i testirana jednostavna Kibbleova vaga. Prije same izrade napravljene su pripremne radnje kako bi se dobio osjećaj o redu veličine mjerenih napona i mogućim komplikacijama.

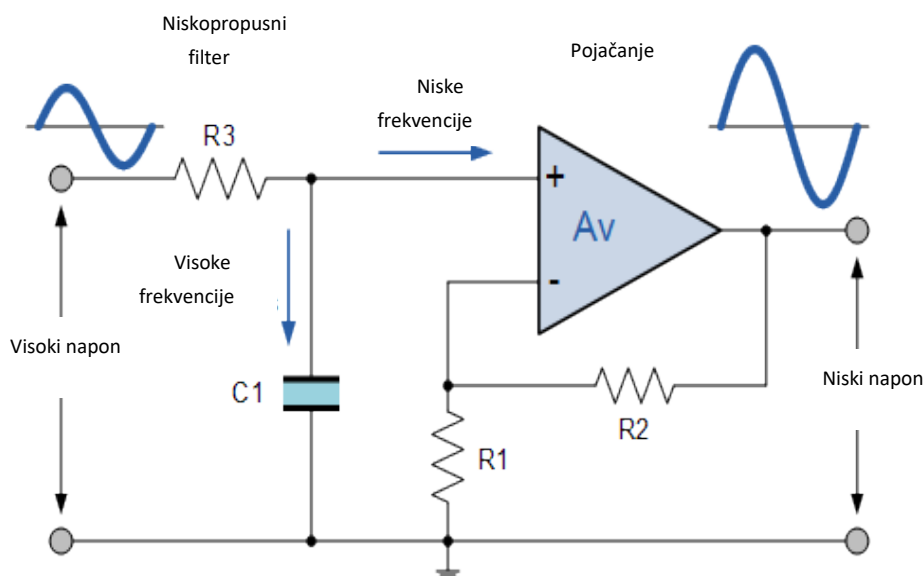
### 6.1. Pripremne radnje i konstrukcija vage

Zavojnici smo oblikovali namatanjem bakrene žice na plastični kolut, postavili na stol tako da leži na svojoj osnovici i spojili je na osciloskop. Magnete smo ovjesili o oprugu i postavili ih u sredinu zavojnice tako da slobodno titraju gore-dolje, duž njene osi. Nakon ručne pobude titranja opruge, oblik napona inducirano u zavojnici promatrali smo na osciloskopu.

S obzirom da se radi o harmonijskom titranju, inducirani napon bi trebao biti oblika što pravilnije sinusoide. Uočeno je da zavojnica treba biti dovoljno dugačka tako da magneti titraju u njenoj sredini. U slučaju kada titraju blizu vrha ili dna zavojnice na sinusoidi se uočavaju nepravilnosti.

Sinusoida je bila podebljana, a amplituda joj je iznosila samo nekoliko milivolti, što je nedovoljno za preciznija mjerenja pomoću našeg osciloskopa. Razlog širokog traga sinusoide je šum gradske mreže.

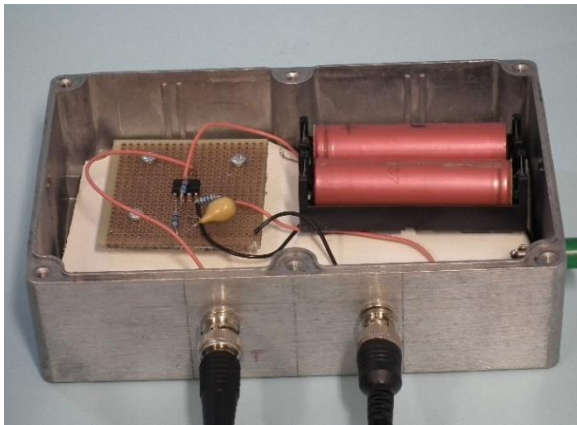
- **Niskopropusni filter**



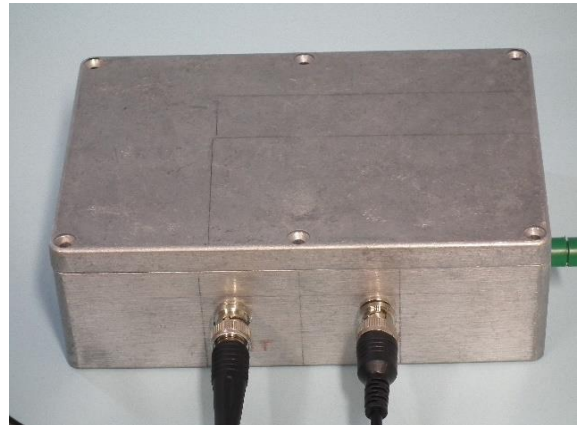
*Slika 13. Shema niskopropusnog filtera.*

Da bi uklonili opažene nedostatke konstruirali smo aktivni nisko-propusni filter s pojačanjem signala. Filter se sastoji od operacijskog pojačala te otpornika i kondenzatora u povratnoj vezi. Za napajanje se koriste dvije litijeve baterije od 4.2 V spojene u protuspoju, između kojih je uzemljenje, tako da na svojim izvodima daju napon od  $\pm 4.2$  V. Spoj je smješten u metalnu kutiju koja ga, djelujući kao Faradayev kavez, štiti od šuma gradske mreže. Filter ne propušta šum gradske mreže te tako stanjuje sinusoidu i čini je glađom.

Zavojnica je zatim spojena na generator sinusoidnog signala, te je promatrano kako amplituda prisilnog titranja magneta unutar zavojnice ovisi o naponu i frekvenciji pobude.

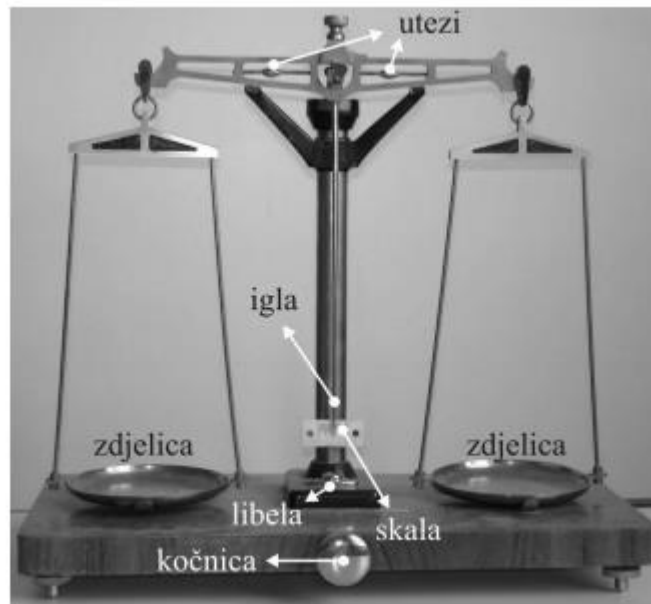


*Slika 14. Niskopropusni filter (otvoren)*



*Slika 15. Niskopropusni filter (zatvoren)*

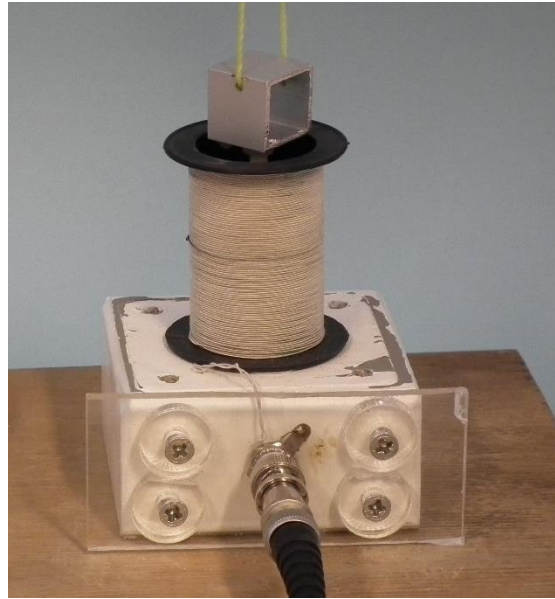
Konstrukcija vage opisane u poglavlju 4. je komplicirana i tehnički zahtjevna, tako da je konstruirana nešto jednostavnija verzija. Korištena je stara laboratorijska vaga kakva je prikazana na slici 16.



*Slika 16. Stara laboratorijska vaga koja je adaptirana za konstrukciju Kibbleove. Slika preuzeta iz skripte za Praktikum iz Opće fizike 1, pmfst.*

- **Zavojnice**

Zavojnice su izrađene namatanjem bakrene žice promjera 0,2 mm na plastični kolut promjera 35 mm. Električni otpor zavojnica iznosi približno 8,9  $\Omega$ . Zavojnice su spojene na koaksijalne utičnice i pričvršćene na drvena postolja. Zavojnica za pobudu vage, prikazana slici 17, je spojena na generator napona. Zavojnica za indukciju se nalazi na drugom kraku vage i spojena je na osciloskop.



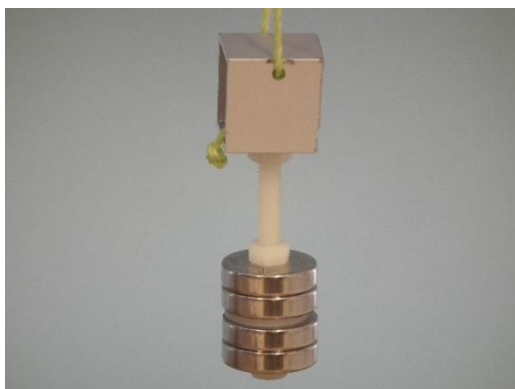
*Slika 17. Zavojnica*

Unutar zavojnica nalaze se neodimijski magneti.

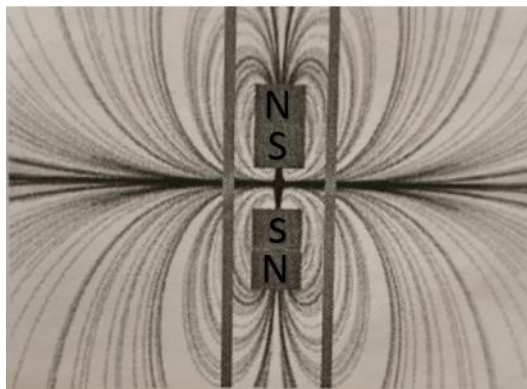
- **Magneti**

Stara laboratorijska vaga modificirana je na način da su umjesto zdjelica za utege i teret ovješeni neodimijski magneti [21]. Oni slobodno ulaze u zavojnice koje su postavljene na postolje. U svaku od zavojnica ulaze 4 magneta kakvi su prikazani na slici 18. Magneti su oblika diska s rupom u sredini, kroz koju prolazi plastični držač koji ih međusobno povezuje. Držač je pričvršćen za aluminijski nosač na koji se stavlja predmet čiju masu želimo izmjeriti. Cijela konstrukcija je ovješena debljim koncem na krak vage kao što je prikazano na slici 20.

Bitan je način slaganja magneta, odnosno kako su usmjereni njihovi polovi. Na slici 18. se uočavaju 2 para magneta između kojih je plastična pregrada (disk). Polovi parova magneta su usmjereni u istom smjeru te zajedno čine jedan veći magnet. Parovi su odvojeni plastičnom pregradom i postavljeni nasuprotno, tako da im istovrsni polovi najbliži. Na ovaj način dobiven je oblik silnica kakav je prikazan na slici 19.



*Slika 18. Magneti*



*Slika 19. Simulacija silnica magnetskog polja nasuprotno spojenih magneta unutar zavojnice. Slika preuzeta iz rada [7].*

Razlog takvog postavljanja magneta krije se u Lenzovom pravilu, prema kojem je magnetsko polje struje, inducirane u zavojnici, uvijek usmjereno tako da se protivi promjeni postojećeg polja.

U skladu s Lenzovim pravilom, prilikom gibanja jednog magneta prema gore, pri vrhu zavojnice polje se povećava pa inducirana struja stvara polje koje je usmjereno prema dolje. Istodobno, na donjem kraju zavojnice polje se smanjuje, pa inducirana struja stvara polje u smjeru postojećeg polja, odnosno prema gore. Te dvije inducirane struje su suprotnoga smjera te se poništavaju. Zato je i inducirani napon mali.

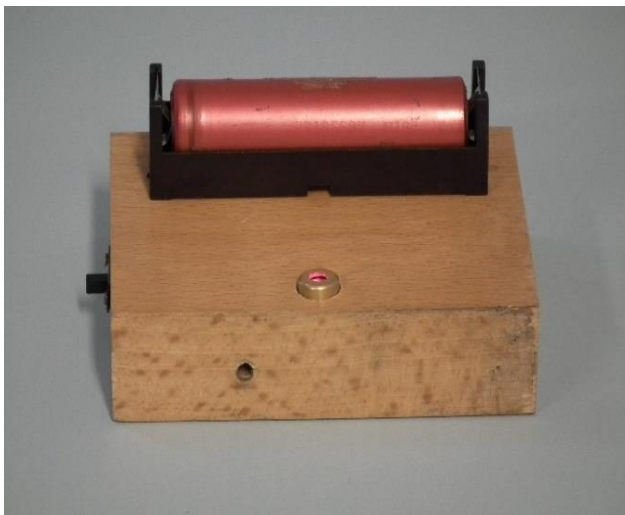
Ako se kroz zavojnicu gibaju dva nasuprotno spojena magneta, kao na slici 18, zbog promjene pola struja inducirana s donje strane mijenja smjer te se inducirane struje na oba kraja zavojnice međusobno zbrajaju. Zato je i inducirani napon velik.



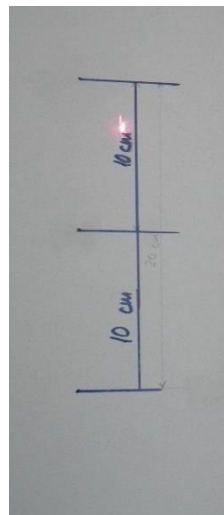
*Slika 20. Magneti ovješeni o krakove vage.*

- **Laser, ogledalo i podloga**

U svrhu proučavanja malih oscilacija magneta u zavojnici i mjerenja njihove brzine, na postolje vage postavljen je laser usmjeren vertikalno prema gore. Laserska zraka pada na zrcalo pričvršćeno u sredini poluge vage pod kutom od  $45^\circ$ , odbija se približno horizontalno te pada na zaslon udaljen 245 cm. Na zaslonu je vidljiva svijetla točka, laserski spot. Pomicanje poluge vage rotira zrcalo pri čemu se laserski spot pomiče gore-dolje. Promatranje gibanja spota na zaslonu omogućuje precizno proučavanje gibanja vage, određivanje ravnotežnog položaja te mjerenje brzine magneta. Na podlozi je označena dužina duljine 10, odnosno 20 cm, koja služi za baždarenje pomaka. Izgled lasera je prikazan na slici 21, dok je zaslon s laserskim spotom prikazan na slici 22.

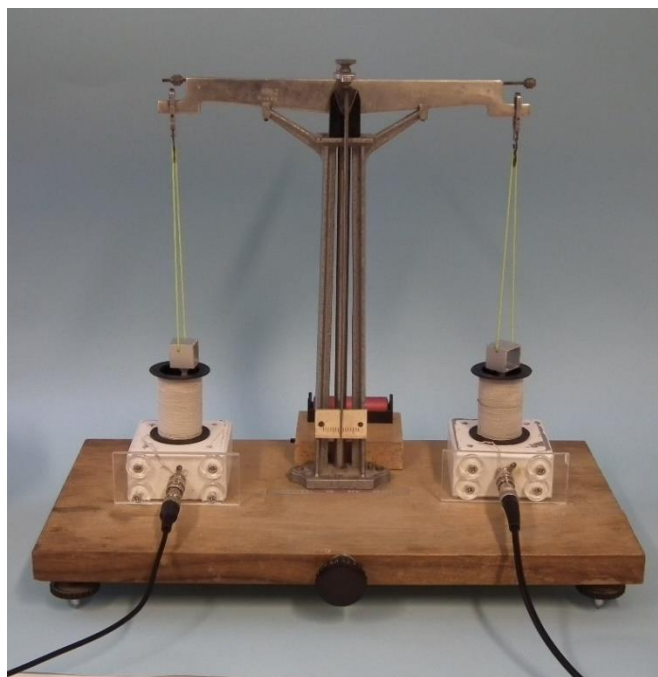


*Slika 21. Laser u drvenom kućištu usmjeren vertikalno prema gore i litijeva baterija za napajanje.*



*Slika 22. Zaslon s laserskim spotom. Plavim flomasterom je označena dužina duljine 10 cm koja služi za baždarenje.*

Konačan izgled vage je prikazan na slici 23.



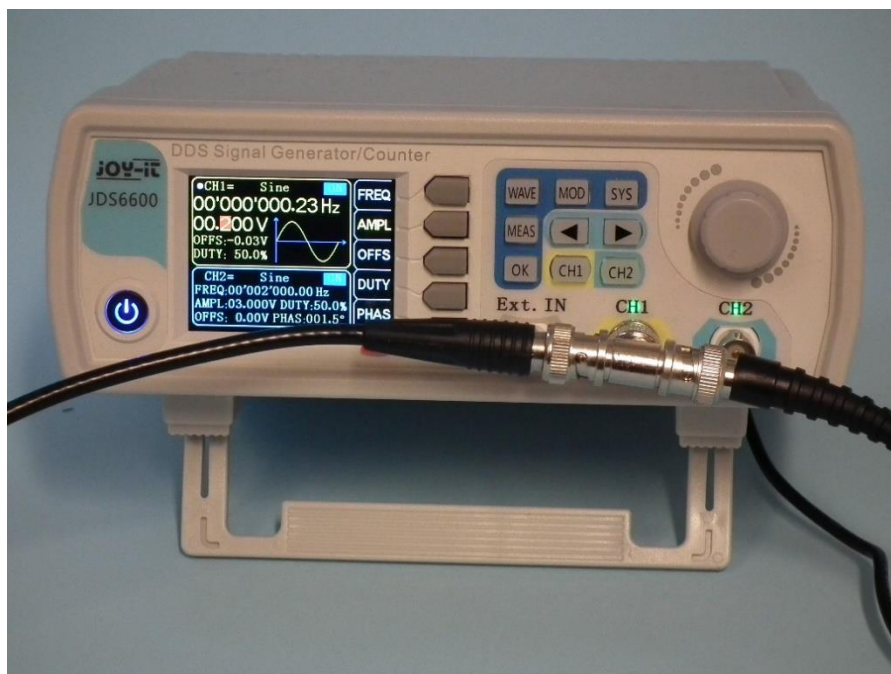
*Slika 23. Kibbleova vaga načinjena modifikacijom stare laboratorijske vage.*



- **Generator signala**

Zavojnica na desnoj strani je spojena na generator izmjeničnog napona (DDS Signal Generator/Counter; JOY-IT JDS6600) na kojem je moguće postaviti izlazni signal frekvencije od 0 Hz do 60 000,000 Hz te napona od 0 V do 19,940 V. Slika 24. prikazuje generator na kojem je na prvom kanalu (Ch1) podešen izlazni sinusni signal frekvencije 0.23 Hz, amplitude napona od 0,2 V

Bitno je uočiti opciju offset, koja izlaznom naponu generatora dodaje istosmjernu komponentu. Ovu opciju smo koristili za vraćanje vage u ravnotežni položaj, nakon postavljanja utega, prilikom rada u modu sile. Opcija dopušta promjene izlaznog napona u koraku od najmanje 0,01 V, što daje minimalnu promjenu jakosti struje u zavojnici od 0,17 mA i predstavlja limitirajući faktor prilikom određivanja struje potrebne za vraćanje vage u ravnotežni položaj.



*Slika 24. Generator sinusnog napona.*

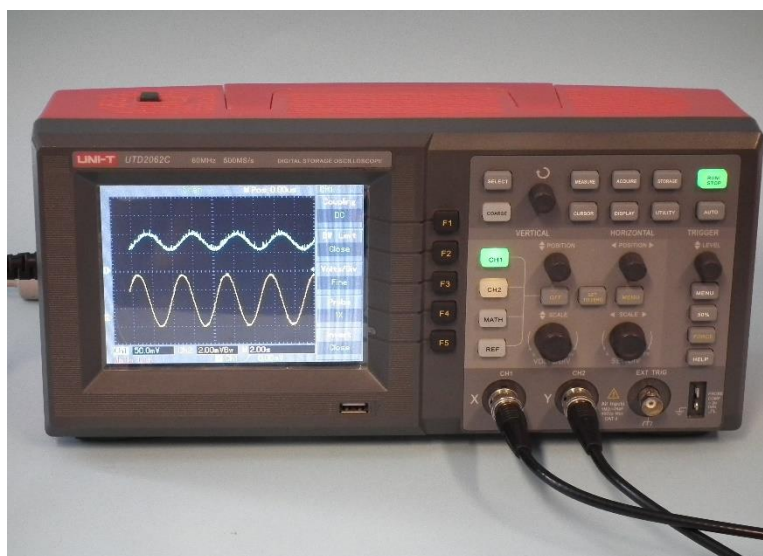
- **Osciloskop**

Napon kojim se pobuđuje desna zavojnica i napon koji se inducira u lijevoj zavojnici vage se očitavaju na dvokanalnom digitalnom osciloskopu UNI-T, UTD2062C, prikazanome na slici 25. Koordinatni sustav zaslona osciloskopa može se podesiti tako da je na  $x$  osi vrijeme ili napon s odabranog kanala, a na  $y$  osi je napon. Jedinična podjela skale za vremensku os  $x$  može se postaviti na vrijednosti od 5 ns do 50 s (u slučaju na slici 25. to su 2 s). Na zaslonu se uočavaju dvije sinusoidne krivulje. Plava krivulja (na zaslonu gore) je signal koji šalje generator na desnu zavojnicu, a očitava se na kanalu 1. Jedinična podjela skale  $y$  osi za kanal 1 je 50 mV. Druga, žuta, sinusoidna krivulja (na zaslonu dolje) je inducirani napon na lijevoj zavojnici, koji se



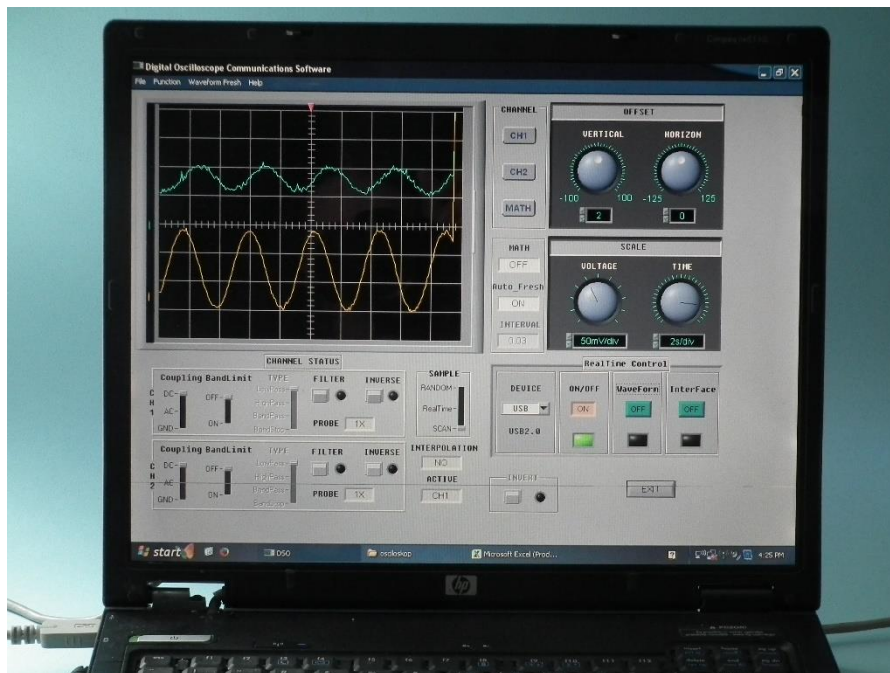
očitava na kanalu 2. Jedinična podjela skale za kanal 2 je 2 mV. Jedinična podjela skale za os y može se postaviti na vrijednost od 2 mV do 5 V.

Navedene dvije krivulje su dane za usporedbu, međutim inducirani napon je podatak koji je potrebno zabilježiti i dalje analizirati. Za očitavanje vrijednosti napona na osciloskopu potrebno je uključiti opciju *MEASURE* (mjerenje), zatim pomoću gumba *RUN/STOP* (kreni/stani) pokrenuti i zaustaviti mjerenje. Kada se prvi put pritisne gumb tada osciloskop mjeri, a kada se opet pritisne gumb, mjerenje se zaustavlja, a osciloskop prikazuje izmjerene vrijednosti maksimalne i minimalne vrijednosti napona, amplitude napona, frekvencije te ostalih parametara signala. Važno je napomenuti da očitana vrijednost *peek to peek* nije amplituda nego razlika između maksimalne i minimalne vrijednosti napona, iako na osciloskopu piše amplituda. Očitanu vrijednost potrebno je podijeliti s 2 kako bi se dobila amplituda napona.



*Slika 25. Osciloskop*

U svrhu lakšeg prikupljanja podataka moguće je koristiti računalo na kojem se nalazi program *Digital oscilloscope communications software* koji preko USB priključka komunicira s osciloskopom. Izgled sučelja programa prikazan je na slici 26. Podaci prikazani na zaslonu prijenosnog računala odgovaraju onima na zaslonu osciloscopa. Dodatna pogodnost programa je filter signala. Za numeričko filtriranje signala na oba kanala program nudi opcije: *low pass*, *high pass*, *band pass* i *band stop* filter. Naša aparatura zahtjeva niskopropusni (*low pass*) filter, međutim za potrebe aparature izrađen je poseban analogni filter, koji ujedno pojačava signal, pa numerički filter programa nije potrebno koristiti.



Slika 26. Zaslona računala sa sučeljem programa koji komunicira s osciloskopom.

Za prijenos podataka s osciloskopa potrebno je kliknuti na gumb *ON* i *WaveForm* nakon čega sučelje programa prikazuje zaslon osciloskopa. Pristup mjernim podacima omogućen je u obliku tablice, odabirom opcije *Function/Data table*. U tablici se nalaze podatci 250 točaka s oba kanala osciloskopa, koje je moguće pohraniti u obliku Excel datoteke. Za primjer, na slici 27. i 28. prikazani su podaci za prvih 5 točaka.

1 Channel1					
2	NO.	Voltage	Voltage_Unit	Time	Time_Unit
3	1	50.00	mV	80.00	ms
4	2	50.00	mV	160.00	ms
5	3	56.00	mV	240.00	ms
6	4	52.00	mV	320.00	ms
7	5	56.00	mV	400.00	ms

Slika 27. Prvih 5 točaka kanala 1.

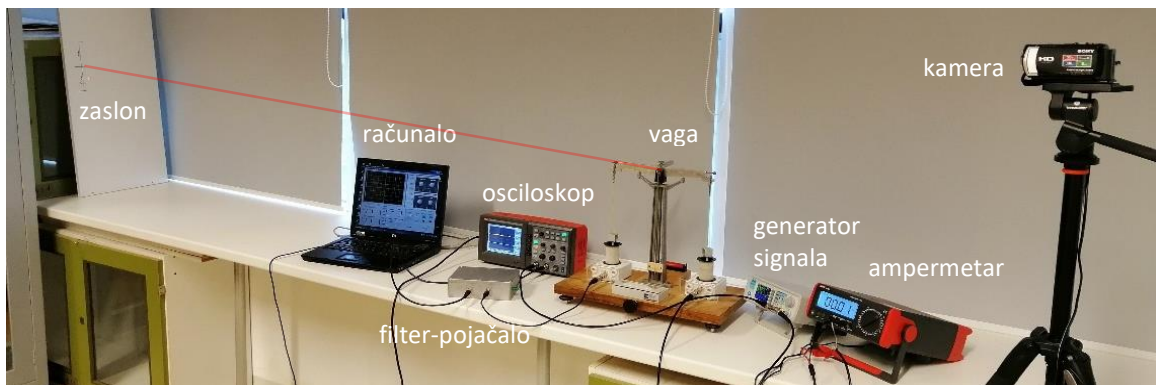
253 Channel2					
254	NO.	Voltage	Voltage_Unit	Time	Time_Unit
255	1	0.16	mV	80.00	ms
256	2	0.16	mV	160.00	ms
257	3	0.40	mV	240.00	ms
258	4	0.72	mV	320.00	ms
259	5	1.04	mV	400.00	ms

Slika 28. Prvih 5 točaka kanala 2.

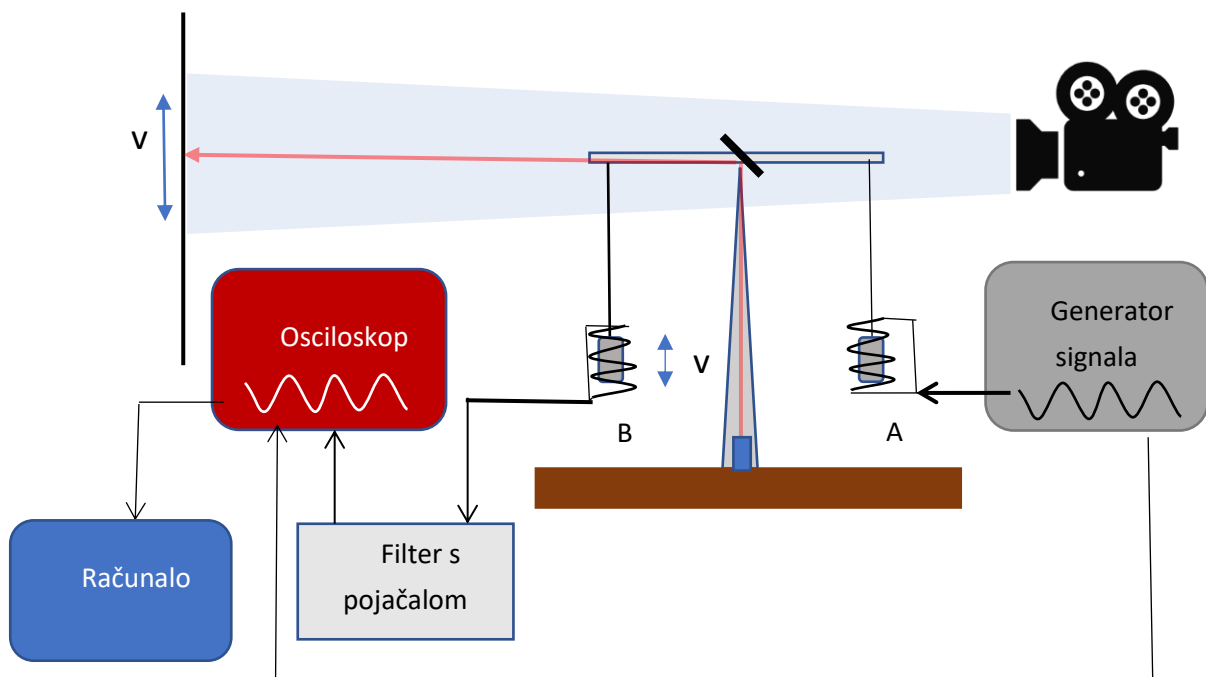


## 6.2. Eksperimentalni postav za snimanje u modu brzine

Eksperimentalni postav Kibbleove vage prikazan je na slici 31. te shematski na slici 32. Kada vaga radi u modu brzine generator signala šalje izmjeničnu struju frekvencije  $\omega$  kroz desnu zavojnicu. Magnetsko polje zavojnice djeluje na stalni magnet koji se nalazi u njoj i pomiče ga gore-dolje. Magnet visi na poluzi vage pa se zbog toga ona njiše i pomiče drugi magnet, u lijevoj zavojnici, također gore-dolje. U njoj se inducira napon frekvencije  $\omega$  koji se filtrira i pojačava u niskopropusnom filteru te snima i mjeri na osciloskopu. Po potrebi, izmjereni signal se pohranjuje u računalu. Istodobno se laserska zraka odbija od zrcala na poluzi i pada na zaslon stvarajući laserski spot. Spot slijedi pomicanje magneta gibajući se gore-dolje. Njegovo gibanje snima se digitalnom kamerom i analizira pomoću programa Tracker [22].

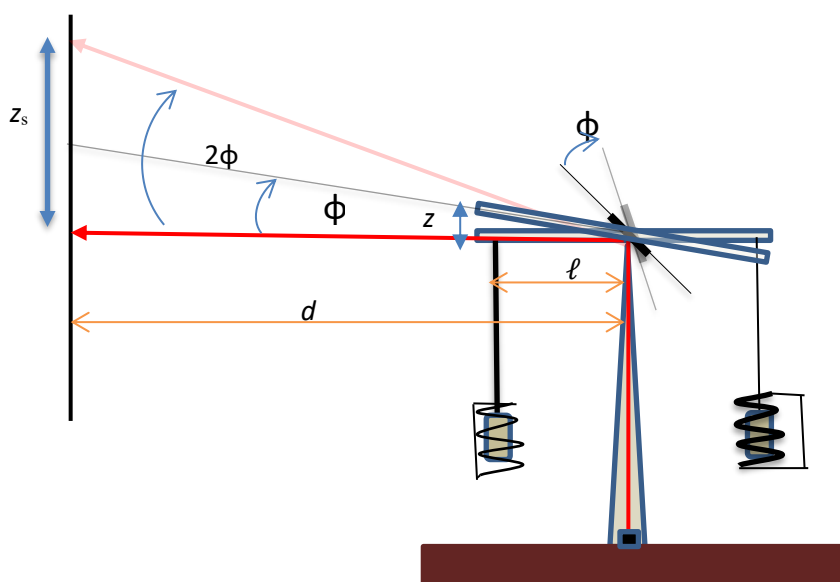


*Slika 31. Eksperimentalni postav Kibbleove vage s potrebnom opremom.*



Slika 32. Shema spajanja aparature potrebne za mjerenje u modu brzine.

Slika 33. prikazuje princip mjerenja pomaka magneta. Crvenom, debljom, linijom označena je laserska zraka koja izlazi vertikalno prema gore, odbija se od zrcala približno horizontalno te pada na udaljeni zaslon. Iz slike možemo zaključiti da kad se poluga vage zakrene za kut  $\varphi$ , laserska zraka se zakrene za kut  $2\varphi$ . To je zbog toga što se i upadna i reflektirana zraka zakrenu za kut  $\varphi$ . Iz pomaka spota na zaslonu potrebno je izračunati pomak magneta.



Slika 33. Prikaz pomaka laserske zrake. Ako se poluga vage zakrene za kut  $\varphi$ , laserska zraka se zakrene za kut  $2\varphi$ .

U našem postavu vrijedi:

$\ell = 13$  cm je duljina kraka vage.

$d = 245$  cm je udaljenost između zrcala i zaslona.

Iz pravokutnog trokuta s katetama  $d$  i  $z_s$ , slijedi:

$$z_s = d \cdot \operatorname{tg} 2\varphi = d \cdot \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}^2\varphi}, \quad (6.2.1)$$

dok iz manjeg pravokutnog trokuta, s katetama  $z$  i  $l$ , slijedi:

$$z = \ell \operatorname{tg}\varphi \quad (6.2.2)$$

Omjer ovih dvaju pomaka daje:

$$\frac{z}{z_s} = \frac{\ell \operatorname{tg}\varphi (1 - \operatorname{tg}^2\varphi)}{d 2\operatorname{tg}\varphi} \quad (6.2.3)$$

$$z = \frac{\ell}{2d} z_s \left( 1 - \left( \frac{z}{\ell} \right)^2 \right) \quad (6.2.4)$$

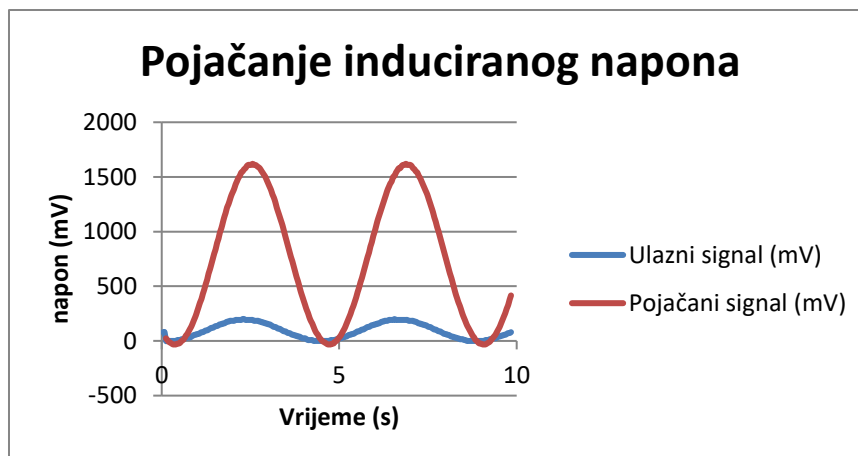
U našim mjerenjima tipičan iznos člana je  $(z/l)^2 = (10/250)^2 = 0.04^2 = 0,0016$  pa ga za naše potrebe možemo zanemariti. Dakle, odnos pomaka magneta i laserskog spota približno je dan je izrazom:

$$z = \frac{\ell}{2d} z_s = 0,053 z_s \quad (6.2.5)$$

Isti omjer vrijedi i za odnos brzina magneta i spota. Iz toga vidimo da sustav mjerenja s laserskom zrakom prividno povećava pomak magneta približno dvadeset puta i na taj način omogućuje znatno preciznije mjerenje.

### 6.3. Pojačanje niskopropusnog filtera

Niskopropusni filter, osim što eliminira šum gradske mreže, ujedno služi i kao pojačalo induciranog napona pa je za točno mjerenje induciranog napona potrebno izmjeriti njegovo pojačanje. To smo napravili tako da smo signal generatora signala podesili na vrijednost amplitude napona od 0,200 V i frekvenciju 0,230 Hz. Taj signal spojili smo direktno na kanal 1 osciloskopa te preko filtera na kanal 2 osciloskopa. Slika 34. prikazuje usporedbu ovih signala koje je snimio osciloskop. Signal iz generatora signala označen je plavom krivuljom, a pojačani signal crvenom krivuljom. Očitani podaci prikazani su tablično i grafički.



*Slika 34. Grafički prikaz ulaznog signala direktno iz generatora (plava krivulja) i nakon prolaska kroz pojačalo (crvena krivulja)*

**Tablica 3.** Minimalna i maksimalna vrijednost i amplituda ulaznog signala direktno iz generatora i nakon prolaska kroz pojačalo:

	Maksimalna vrijednost (mV)	Minimalna vrijednost (mV)	Amplituda (mV)
Ulazni signal	200	0	100
Pojaćani signal	1620	-32	826

Iz omjera amplituda ovih signala slijedi da pojaćanje signala niskopropusnog filtera iznosi **8,26**.

#### 6.4. Dinamički model vage

Gibanje magneta u zavojnici se može opisati jednađbom gibanja za prigušeni oscilator s vanjskom pobudom u obliku [23]:

$$\frac{d^2}{dt^2}z(t) + \Gamma \frac{d}{dt}z(t) + \omega_0^2 z(t) = \frac{F(t)}{m}, \quad (6.4.1)$$

gdje je

$$F(t) = F_0 e^{-i\omega t} \quad (6.4.2)$$

vanjska sila.

Rješenje ove diferencijalne jednađbe tražimo u obliku periodične funkcije koja opisuje prisilno titranje frekvencijom vanjske pobude:

$$z(t) = A e^{-i\omega t}. \quad (6.4.3)$$

Uvrštavanjem izraza (6.4.3) u diferencijalnu jednađbu (6.4.1) za amplitudu prisilnog titranja dobivamo

$$A = \frac{\frac{F_0}{m}}{-\omega^2 - \Gamma i\omega + \omega_0^2}, \quad (6.4.4)$$

a za njen iznos

$$|A| = \frac{\frac{F_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}. \quad (6.4.5)$$

U sljedećem koraku tražimo amplitudu induciranog napona. Prema Faradayevom zakonu napon induciran u zavojnici je:

$$U = -N \frac{d\Phi}{dt}, \quad (6.4.6)$$

gdje je  $N$  broj namotaja zavojnice, a  $\Phi$  magnetski tok.

Pošto je

$$\Phi = BS, \quad (6.4.7)$$

slijedi:

$$U = -NS \frac{dB}{dt} = -NS \frac{dB}{dz} \frac{dz}{dt} = -NS \frac{dB}{dz} v \quad (6.4.8)$$

Iz izraza (6.4.8) vidimo da je inducirani napon proporcionalan brzini gibanja magneta.

Brzina je vremenska derivacija pomaka, tj.

$$v = \frac{dz}{dt} = -i\omega A e^{-i\omega t} \quad (6.4.9)$$

$$v = -i\omega z. \quad (6.4.10)$$

Kombinirajući izraze (6.4.4)-(6.4.8) dobivamo izraz za iznos induciranog napona

$$U = ANS \frac{dB}{dz} \omega. \quad (6.4.11)$$

Uzimajući u obzir (6.4.6) za frekvencijsku ovisnost iznosa amplitude napona induciranog u zavojnici dobivamo

$$U = \frac{C\omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \Gamma^2 \omega^2}}, \quad (6.4.12)$$

gdje je faktor

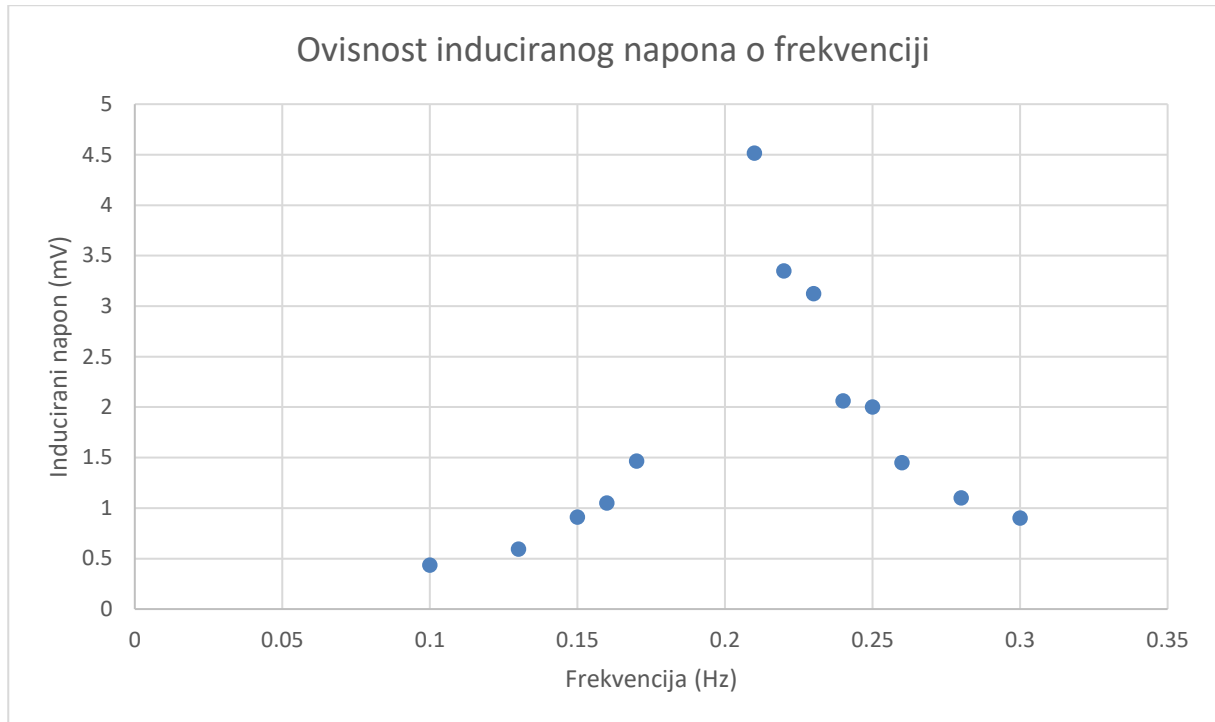
$$C = \frac{F_0}{m} ANS \frac{dB}{dz}. \quad (6.4.13)$$

Faktor  $C$  je približno konstantan za male pomake magneta u sredini zavojnice, kada je gradijent magnetskog polja unutar zavojnice približno konstantan,  $\frac{dB}{dz} \approx const.$ , tj. ako gradijent polja ne ovisi o amplitudi titranja. U suprotnom inducirani napon nije sinusoidan.



## 6.5. Analiza rezonantne krivulje

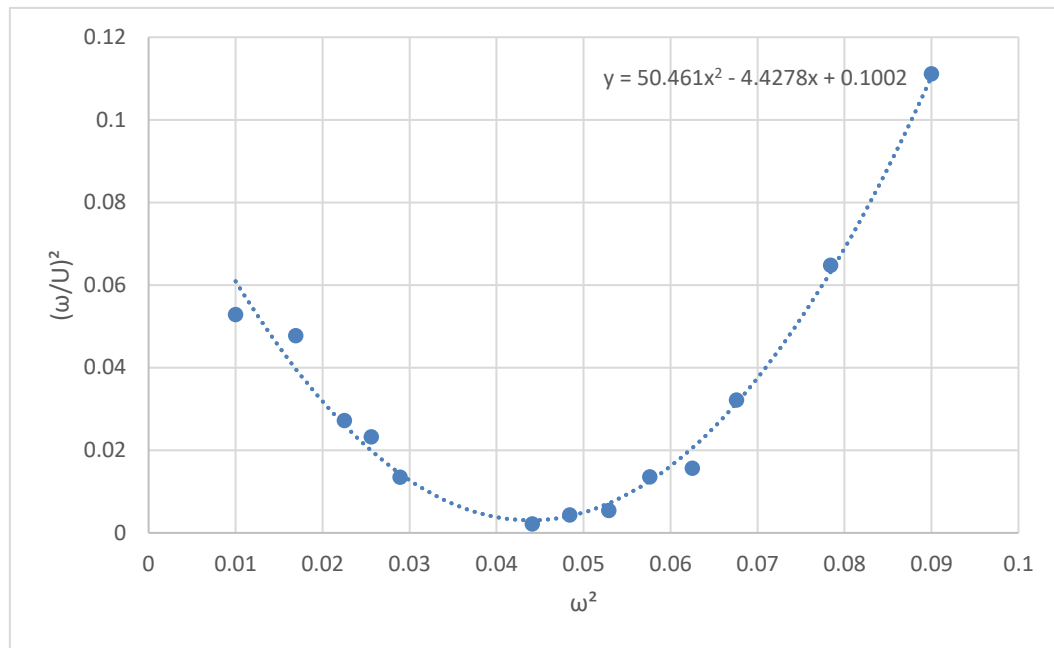
Odziv vage na sinusoidnu pobudu za frekvencije bliske vlastitoj frekvenciji vage prikazan je na slici 35. Generator je postavljen na napon od 0,2 V, a frekvencija je mijenjana u rasponu od 0,1 do 0,3 Hz. Nakon svake promjene frekvencije bilo je potrebno sačekati minutu-dvije da se uspostavi nova stabilna vrijednost amplitude prisilnog titranja. Amplituda induciranog napona mjerena je na osciloskopu pomoću opcije *Measure*.



*Slika 35. Ovisnost induciranog napona u lijevoj zavojnici o frekvenciji signala pobude desne zavojnice. Uočava se da za frekvencije 0,18 Hz, 0,19 Hz i 0,20 Hz nisu zabilježene vrijednosti induciranog napona. Razlog tome je blizina rezonantne frekvencije koja je uzrokovala velike amplitude titranja pa je titranje vage bilo nepravilno.*

Mjerenja amplituda induciranog napona lijeve zavojnice kao funkcija frekvencije pobude desne zavojnice prikazana je na slici 35. U skladu s izrazom (6.4.12) Uočavamo porast amplitude titranja kada se frekvencija pobude približava vlastitoj frekvenciji titranja vage. Da bi usporedili rezultate mjerenja s teorijskim izrazom (6.4.12), primijetimo da recipročnu vrijednost kvadrata amplitude napona  $U$  možemo zapisati u obliku polinoma. Točnije, uzmemo li da je  $x = \omega^2$ , a  $y = (\omega/U)^2$ , jednadžbu (6.6) možemo zapisati u obliku kvadratne funkcije

$$y = \frac{1}{C^2} x^2 + \frac{-2\omega_0^2 + \Gamma^2}{C^2} x + \frac{\omega_0^4}{C^2}. \quad (6.5.1)$$



*Slika 36. Modificirani prikaz frekventne karakteristike vage pogodan za analizu.*

Eksperimentalne vrijednosti varijabli  $x$  i  $y$  izračunate iz eksperimentalnih rezultata za  $U$  i  $\omega$  sa slike 35. prikazane su kružićima na slici 36. Interpolacija tih rezultata kvadratnom funkcijom, metodom najmanjeg kvadrata, prikazana točkastom krivuljom, za koeficijente kvadratne funkcije daje sljedeće vrijednosti:

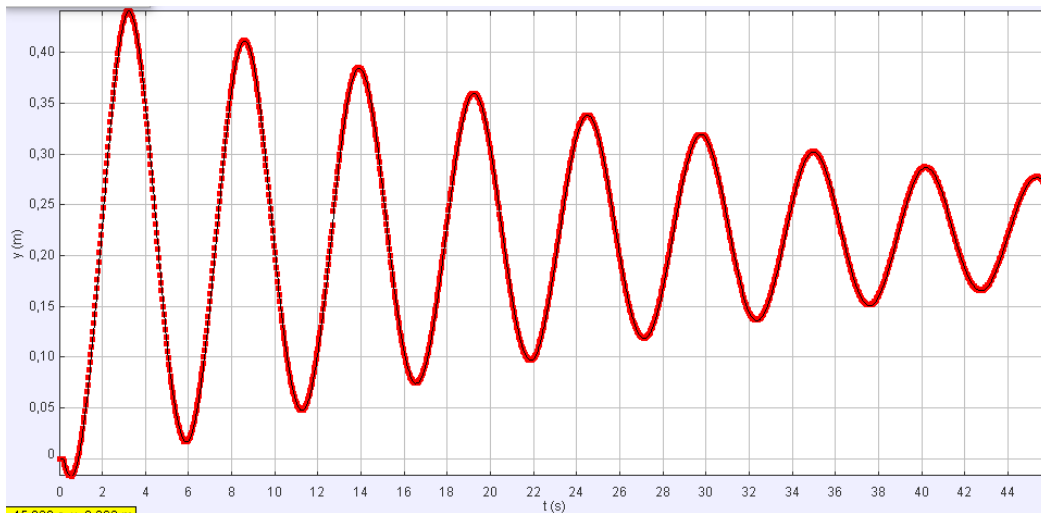
$$\frac{1}{C^2} = 50,461; \frac{-2\omega_0^2 + \Gamma^2}{C^2} = -4,4278; \frac{\omega_0^4}{C^2} = 0,1002. \quad (6.5.2)$$

Iz tih vrijednosti dobiju se vrijednosti: za  $C = 0,1408$  mV/s, za vlastitu frekvenciju  $\omega_0 = 0,212$  s<sup>-1</sup> te za faktor gušenja  $\Gamma = 0,0466$  s<sup>-1</sup>.

Najpravičniji titraji se mogu postići kada se frekvencija pobude postavi dovoljno blizu rezonantne frekvencije. Tada je moguće dobiti dovoljno velike amplitude titranja uz male napone pobude. Zbog toga je titranje vage približno slobodno, odnosno povratna sila je uglavnom gravitacijska pa je titranje harmonijsko. U slučaju kada se značajno odmaknemo od rezonantne frekvencije potreban je veliki napon pobude za postizanje odgovarajuće amplitude titranja. Tada je titranje izrazito prisilno pa sve nelinearnosti elektromagnetskog sustava dolaze do izražaja. Nelinearnost nastaje i zbog toga što magneti vise na koncu pa sila pobude djeluje samo prema dolje, kada konac povlači polugu vage. Drugim riječima, pobuda je oblika pozitivnih dijelova sinusoide.

## 6.6. Vlastita frekvencija vage

Vlastitu frekvencije njihanja vage, odnosno titranja magneta  $\omega_0$  izmjerili smo tako što smo pobudili vagu na titranje, a onda isključili pobudu. Titranje vage bez pobude se nastavlja vlastitom frekvencijom te se zaustavi nakon nekoliko minuta. Za vrijeme prigušenog titranja laserski spot je sniman kamerom te je snimak obrađen u programu Tracker. Položaj laserskog spota na zaslonu, kao funkcija vremena, prikazan je na slici 37. Izbrojano je 8 titraja za vrijeme od 42 s, odnosno 1 titraj za vrijeme od 5,2 s, što daje vlastitu frekvenciju titranja od 0,19 Hz.



*Slika 37. Položaj laserskog spota na zaslonu kao funkcija vremena tijekom vlastitog titranja vage. Na osi x je vrijeme u sekundama, a na osi y položaj laserske točke. Uočavamo i da je razmak između maksimuma konstantan dok se amplituda titranja s vremenom smanjuje.*

## 6.7. Ovisnost inducirano napona i brzine magneta o ulaznom naponu

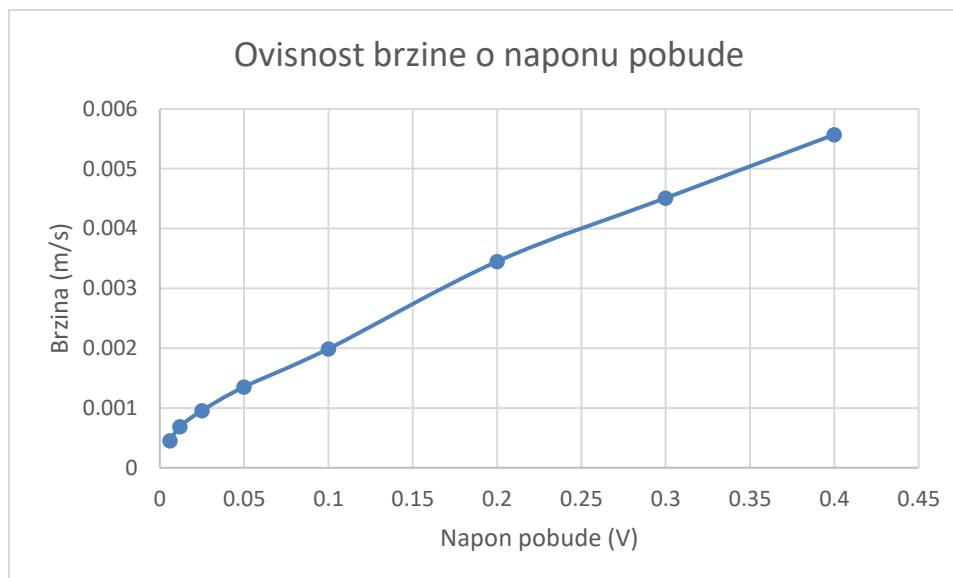
Nakon mjerenja s različitim frekvencijama, provedena su mjerenja s fiksnom frekvencijom od 0,23 Hz, i različitim vrijednostima napona. Promatrana je ovisnost brzine i inducirano napona o ulaznom naponu. Očitane vrijednosti inducirano napona su umanjene 8,26 puta koliko iznosi pojačanje pojačala. S obzirom da je pojačanje signala utjecalo i na brzinu magneta u zavojnici, potrebno je prilagoditi i vrijednosti brzine.

U sljedećoj tablici prikazani su dobiveni podaci.

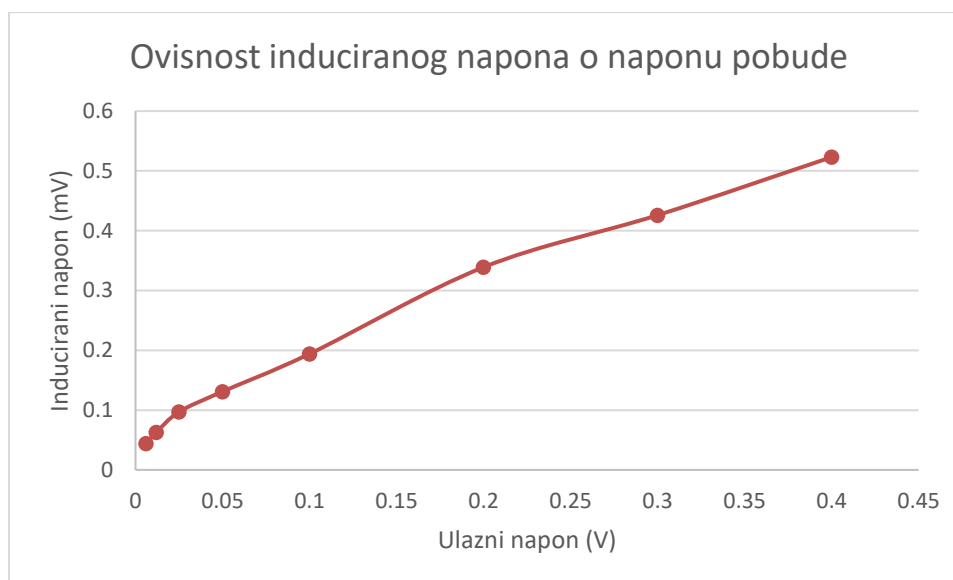
**Tablica 4.** Rezultati mjerenja brzine i inducirano napona. Ulazni signal je postavljen na 0,06 V do 0,4 V, a frekvencija je fiksna (0,23 Hz).

Ulazni napon (V)	Brzina uz pojačanje (m/s)	Inducirani napon uz pojačanje (mV)	Brzina bez pojačanja (m/s)	Inducirani napon bez pojačanja (mV)
0,4	0,21	4,32	0,00557	0,523
0,3	0,17	3,52	0,00451	0,426
0,2	0,13	5,48	0,00345	0,339
0,1	0,075	1,60	0,00199	0,194
0,05	0,051	1,08	0,00135	0,131
0,025	0,036	0,80	0,00095	0,097
0,012	0,026	0,52	0,00069	0,063
0,06	0,017	0,36	0,00045	0,044

Slike 38. i 39. prikazuju ovisnost brzine, odnosno inducirano napona o ulaznom naponu.



*Slika 38. Ovisnost brzine o naponu pobude pri  $f=0,23$  Hz*



*Slika 39. Ovisnost inducirano napona o naponu pobude pri  $f=0,23$  Hz*

Prilikom mjerenja očitani su podaci uz korištenje pojačala, čiji je utjecaj potrebno isključiti prije korištenja rezultata u računu.

## 6.8. Mjerenja u modu brzine

Signal pobude je postavljen na nominalnu vrijednost napona od 0,2 V i frekvenciju 0,23 Hz. Nakon uključivanja, generator signala šalje izmjenični napon na zavojnicu za pobudu, čime započinje titranje vage. Amplituda titraja se povećava te nakon približno dvije minute poprima ravnotežnu vrijednost. Pomaci magneta induciraju napon u odzivnoj zavojnici koji se filtrira i pojačava 8,26 puta te mu ukloni šum prije nego ga očita na osciloskopu. Podaci s osciloskopa

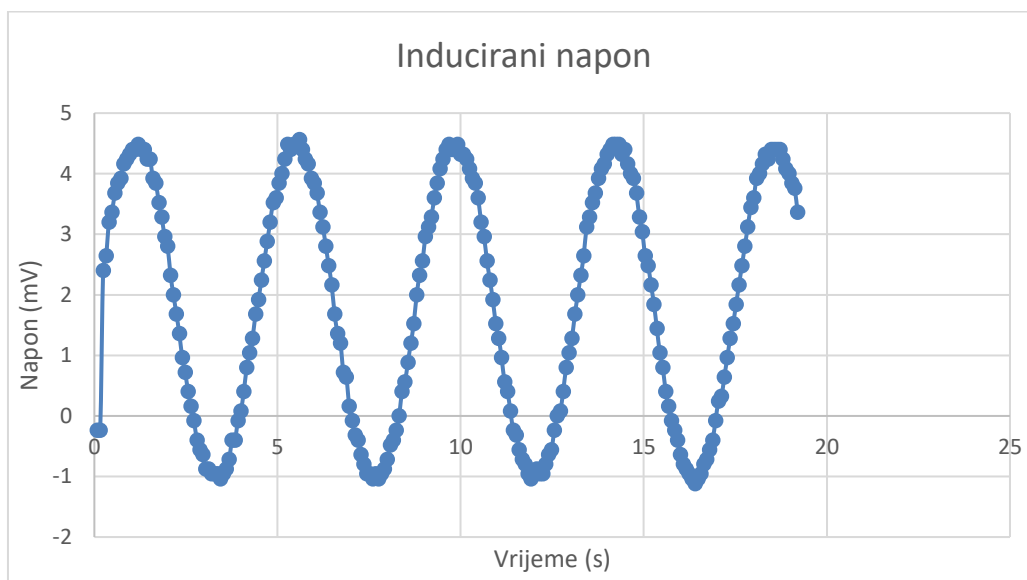
su dostupni i na računalu koje komunicira s osciloskopom. Istovremeno sa snimanjem induciranog napona snima se i gibanje laserskog spota na zaslonu, odnosno gibanje magneta u zavojnici.

Vrijednosti induciranog napona su na računalu spremljene u obliku excel datoteke. Kao primjer u tablici 5. prikazano je nekoliko vrijednosti napona.

**Tablica 5.** vrijednosti induciranog napona očitane pomoću osciloskopa.

NO.	Voltage	Voltage_Unit	Time	Time_Unit
1	-0.24	mV	80.00	ms
2	-0.24	mV	160.00	ms
3	2.40	mV	240.00	ms
4	2.64	mV	320.00	ms
5	3.20	mV	400.00	ms

Izgled signala induciranog napona prikazan je na slici 40.



**Slika 40.** Napon induciran u zavojnici. Maksimalne vrijednosti su 4,56 mV, a minimalne -0,96 mV, što daje amplitudu od 2,76 mV.

Očitani podaci su sažeti u sljedećoj tablici:

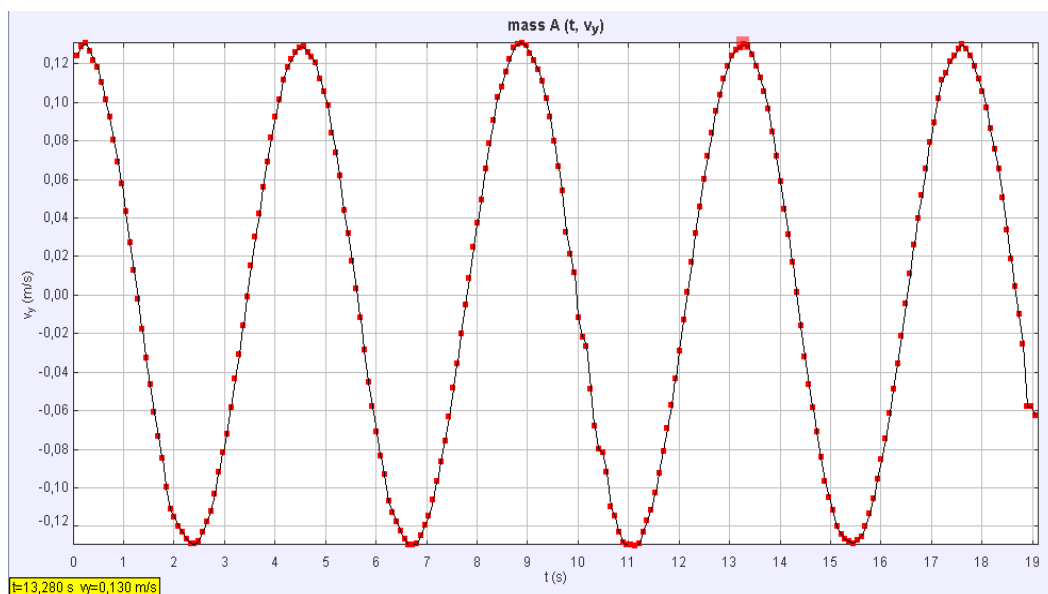
**Tablica 6.** Minimalna i maksimalna vrijednost i amplituda očitanoog induciranog napona za ulazni signal od 0,2 V i 0,23 Hz.

	max	min	A
Ind.napon (mV)	4,56	-0,96	2,76

Inducirani napon  $U$  u zavojnici se dobije tako da se očitani pojačani napon  $U_p$  koji iznosi 2,76 mV umanji 8,26 puta.

$$U = \frac{U_p}{8,26} \quad (6.8.1)$$

Brzina magneta je dobivena preko brzine snimane laserske točke. Brzina laserske točke se odredi analizom snimaka gibanja laserske točke u programu Tracker. Detaljnije upute za rad s programom Tracker su dane u poglavlju 7, a vrlo detaljne u diplomskim radovima [24] i [25]. Obrada snimke dala je brzinu spota, koja je grafički prikazana na slici 41.

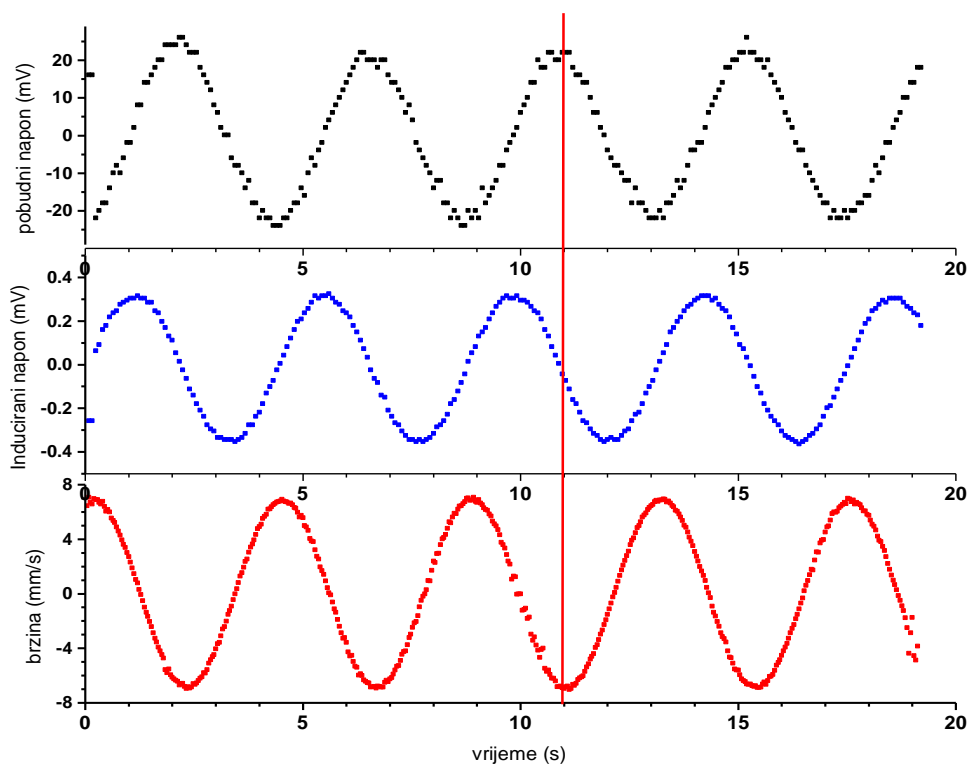


**Slika 41.** Na osi  $x$  nalazi se vrijeme u sekundama, a na osi  $y$  brzina projicirane laserske točke u  $m/s$ . Amplitude brzine predstavljaju prolazak točke kroz ravnotežni položaj. Uočava se označena točka na 4. brijegu, čije su vrijednosti dane u žutom pravokutniku u donjem lijevom dijelu grafa. U ovom mjerenju je 9 ekstrema, a kao konačna brzina uzeta je aritmetička sredina tih 9 vrijednosti, odnosno  $0,131 m/s$ .

Program Tracker bilježi podatke i u obliku tablice. Kao primjer dana je tablica 7. za prvih  $0,32 s$  mjerenja. Prvi stupac predstavlja vrijeme, drugi amplitudu, a treći brzinu. Vrijednosti se bilježe svakih  $0,04 s$ .

**Tablica 7.** Rezultati mjerenja gibanja laserskog spota u programu Tracker. Prvi stupac predstavlja vrijeme, drugi amplitudu, a treći brzinu laserskog spota.

t (s)	y (m)	v <sub>y</sub> (m/s)
0,000	4,985E-2	
0,040	5,435E-2	0,122
0,080	5,959E-2	0,134
0,120	6,503E-2	0,126
0,160	6,971E-2	0,124
0,200	7,496E-2	0,132
0,240	8,024E-2	0,130
0,280	8,537E-2	0,130
0,320	9,064E-2	0,126



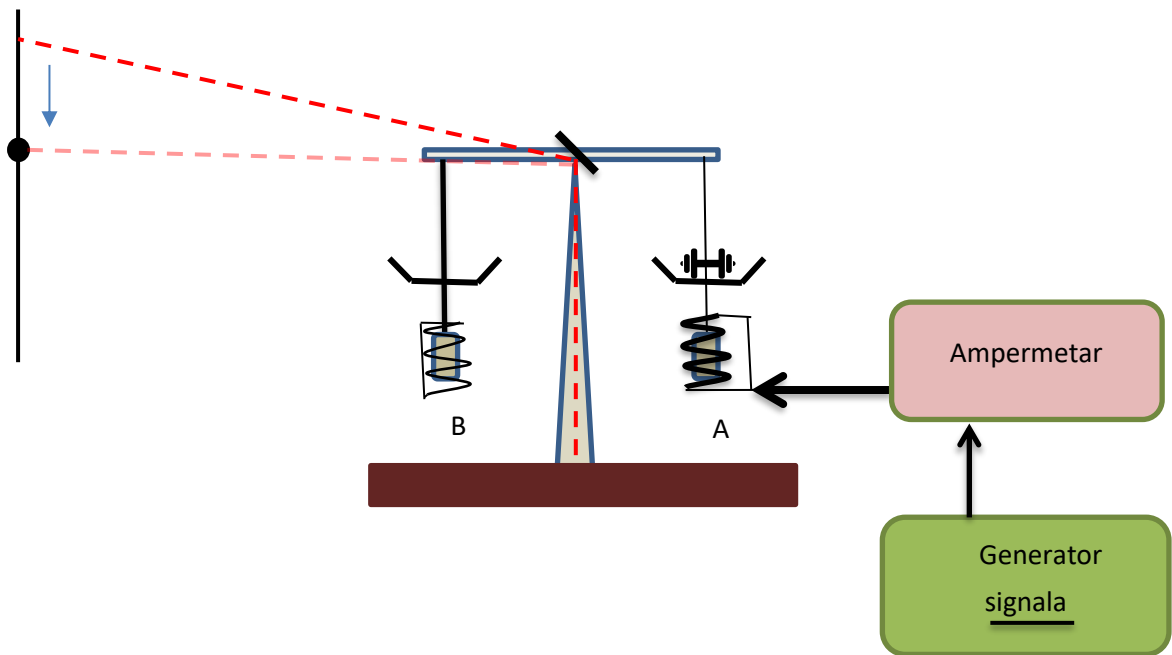
**Slika 42.** Usporedba signala pobudnog napona u zavojnici za pobudu te induciranog signala i brzine magneta u zavojnici za odziv prilikom mjerenja u modu brzine.

## 6.9. Mjerenje mase u modu sile

Za mjerenje mase u modu sile potrebno je koristiti aparaturu kao što je shematski prikazano na slici 43. Prvo je potrebno odrediti ravnotežni položaj vage. Vagu bez tereta otkočimo te sačekamo minutu-dvije da se umiri u ravnotežnom položaju. Na zaslonu označimo ravnotežni položaj laserskog spota. Zatim na nosač tereta jednog kraka vage dodamo predmet čiju masu



želimo izmjeriti. Zbog neravnoteže vaga se zakrene pa se i laserski spot odmakne. Puštanjem istosmjerne struje iz generatora signala kroz zavojnicu, vagu polako vraćamo u ravnotežni položaj. Struja potrebna da se vaga s teretom vrati u ravnotežni položaj mjeri se ampermetrom. Preporučljivo je uteg i premjestiti na drugi krak vage kako bi se otklonile pogreške zbog nesimetrije sustava. Ovaj postupak je poželjno ponoviti nekoliko puta za provjeru reproducibilnosti mjerenja.



*Slika 43. Shematski prikaz aparature za mjerenje mase predmeta u modu sile.*

Uteg korišten za mjerenje prikazan je na slici 44.



*Slika 44. Uteg od 200 mg postavljen na nosač tereta.*

Prilikom mjerenja u modu sile, prvo je stavljen uteg na nosač tereta zavojnice A, zatim je premješten na nosač tereta zavojnice B. Postupak je ponovljen tri puta. Dobiveni su rezultati prikazani u tablici 8.

**Tablica 8.** Struje potrebne da se vaga vrati u ravnotežni položaj nakon postavljenog utega:

Struja zavojnice kada je uteg na poziciji A (mA)	Struja zavojnice kada je uteg na poziciji B (mA)	Srednja vrijednost struje zavojnice (mA)
20,74	21,10	20,92
20,32	20,83	20,575
20,41	20,71	20,56

Struja zavojnice određena kao aritmetička sredina srednjih vrijednosti je  $I = 20,685$  mA, pri čemu najveće odstupanje od aritmetičke sredine iznosi 0,235 mA, što daje maksimalnu pogrešku od 1,13%.

Nepoznatu masu tereta  $m$  određujemo prema izrazu (4.2.3), gdje  $g$  akceleracija sile teže,  $v$  brzina magneta,  $V$  inducirani napon i  $I$  struja potrebna da se vaga vrati u ravnotežni položaj nakon stavljanja tereta mase  $m$ . Brzina i inducirani napon su mjereni u modu brzine, dok je jakost struje mjerena u modu sile. Izmjerene vrijednosti za brzinu i za inducirani napon treba korigirati množenjem odgovarajućim faktorima pojačanja. Nakon uvrštavanja navedenih korekcija, i izražavanja tražene veličine  $m$ , izraz (4.2.3) prelazi u

$$m = \frac{U_p}{8,26} \cdot I \cdot \frac{2d}{glv_s} \quad (6.9.1)$$

$$m = \frac{0,00276 \text{ V}}{8,26} \cdot 0,020685 \text{ A} \cdot \frac{2 \cdot 2,45 \text{ m}}{9,81 \text{ m/s}^2 \cdot 0,13 \text{ m} \cdot 0,131 \text{ m/s}}$$

$$\mathbf{m = 203 \text{ mg}}$$




Pošto stvarna masa utega iznosi 200 mg, dobivena je masa s greškom od 1,5 %.

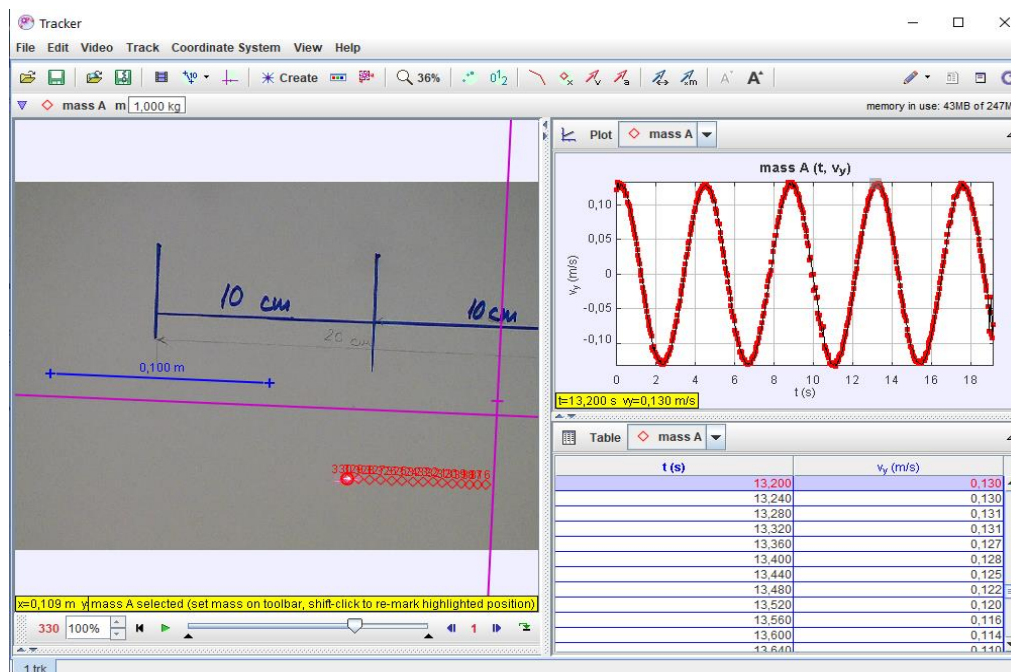
Važno je shvatiti promjenu koncepta kilograma koju uvodi Kibbleova vaga. Korištenjem Kibbleove vage masa predmeta se u potpunosti izražava preko električnih i mehaničkih veličina: napona, jakosti struje, brzine i ubrzanja slobodnog pada, bez usporedbe s nekom drugom poznatom masom (etalonom). Provjera mjerne jedinice za masu u izrazu (6.9.1) zaista daje kilogram:

$$m = \frac{[V][A][m]}{\frac{[m]}{[s^2]}[m]\frac{[m]}{[s]}} = \frac{\frac{[W]}{[A]}\cdot[A]}{\frac{[m^2]}{[s^3]}} = \frac{\frac{[J]}{[s]}}{\frac{[m^2]}{[s^3]}} = \frac{[N][m]}{\frac{[m^2]}{[s^2]}} = \frac{[kg][m][m]}{\frac{[m^2]}{[s^2]}[s^2]} = [kg].$$

## 7. Upute za rad u programu Tracker

Gibanje laserskog spota na zaslonu snimano je kamerom. Za analizu mjerenja u modu brzine, odnosno za određivanje brzine spota korišten je program Tracker. Slijedi detaljan opis postupka.

Kada se program otvori, prvi korak je učitati video koji se želi analizirati (*File*→*Open file*). Za analizu snimke je važno da se na snimci nalazi oznaka poznate duljine kako bi se moglo napraviti baždarenje koordinatnog sustava. Baždarenje se napravi odabirom ikone  (*New*→*Calibration stick*) nakon čega se prate upute programa (*Shift-click* za označavanje krajnje točke dužine). Kada je dužina označena, dodjeli joj se duljina. Nakon baždarenja, potrebno je odrediti osi koordinatnog sustava. Definicija osi koordinatnog sustava počinje odabirom ikone . Odmah se prikaže koordinatni sustav s označenim pozitivnim smjerom osi  $x$ . Gibanje laserske točke je, u našem slučaju vertikalno, odnosno po osi  $y$ , ali je snimka zarotirana. U tom slučaju potrebno je zarotirati koordinatni sustav, tako da gibanje točke bude zaista po osi  $y$  (angle from horizontal, upisati željeni kut, u ovom slučaju približno  $90^\circ$ ), što je jednostavnije napraviti od rotacije videa. Kao posljednja pripremna radnja, mora se označiti detalj snimke (laserski spot) čiju je brzinu potrebno odrediti. To se radi odabirom ikone  (*Create*→*Point Mass*) te se prate upute programa, odnosno koristi *shift-click to mark*, a nakon toga pomoću *Track*→*Mass A*→*Autotracker* odabire izbornik za praćenje detalja.



**Slika 45.** Sučelje programa Tracker nakon analize videa. Na lijevoj strani je video snimka s označenim položajima praćenog laserskog spota, a na desnoj generirani  $v$ - $t$  grafi

Istodobnim stiskanjem tipki *shift-control-click* označava željeni dio snimke (laserski spot) čije gibanje treba pratiti. Klikom na gumb *Search* program započinje praćenje pri čemu automatski bilježi položaj spota u svakoj sličici videa, u našem slučaju u vremenskim razmacima od 0,04 s. Kako bi program radio bez poteškoća bitno da je podloga na kojoj se snima gibanje spota čista, odnosno da spot ne prelazi preko crta, slova, brojeva ili drugih nepravilnosti.

Izmjerene podatke program prikazuje grafički i tablično, što je prikazano na slici 45. Program inicijalno prikazuje  $x-t$  graf. Pošto u našem slučaju promatramo brzinu spota po osi  $y$ , potrebno je promijeniti  $y$  os grafa tako da prikazuje brzinu  $v_y$ (m/s), umjesto položaja  $x$ (m). Ponuđene opcije se biraju klikom na oznaku osi  $x$ (m). U donjem lijevom dijelu grafa uočava se žuti pravokutnik koji daje koordinate odabrane točke na grafu.

Generirana tablica inicijalno daje 3 stupca: vrijeme  $t$  te  $x$  i  $y$  koordinate spota. Vrijednosti koje prikazuje tablica biraju se klikom na gumb *Table*, odmah iznad tablice, gdje čega se označi  $v_y$ , pošto je to traženi podatak. Nakon obavljenog mjerenja i odabira veličina od interesa, sučelje programa izgleda kako je prikazano na slici 45.

## 8. Zaključak

Izrađen je demonstracijski prototip Kibbleove vage. Prototip se zasniva na LEGO vagi koju je Predložio Nacionalni Institut za Standarde (NIST) za potrebe obrazovanja. Vaga je napravljena nadogradnjom stare laboratorijske vage, dodavanjem odgovarajućih modula koji ne mijenjaju njenu osnovnu funkciju. Za to je bilo potrebno izraditi odgovarajuće nosače, ugraditi neodimijske magnete, izraditi zavojnice, izraditi električne priključke, ugraditi laser te izraditi niskopropusni filter s pojačalom.

Mogućnost korištenja većine dijelova postojeće laboratorijske vage velika je prednost i znatno olakšava izradu vage u odnosu na LEGO vagu. Uvedena su i poboljšanja konstrukcije u odnosu na LEGO vagu. Umjesto zavojnica gibaju se magneti, dok su zavojnice postavljene na podnožje vage. Uz to, laser nije postavljen na polugu vage nego je postavljen na njeno podnožje. Na taj način dovodne žice nisu u vezi s pokretnim dijelovima vage i ni na koji način ne ometaju njen rad. Također, umjesto uporabe optičkog senzora, brzina magneta mjeri se praćenjem gibanja laserskog spota pomoću programa Tracker.

Rad vage u modelu brzine uspješno je opisan i analiziran pomoću modela prisilnog titranja gušenog harmonijskog oscilatora. Provedena su mjerenja potrebna za podešavanje parametara vage za optimalan način rada te provjeru njene osjetljivosti, točnosti i primjenjivosti.

Posebnost vage je u tome što je moguće dobiti vrijednost mase bez uspoređivanja s nekom drugom poznatom masom, već isključivo mjerenjem struje, napona i brzine. Za masu kalibriranog utega od 200 mg vaga je dala vrijednost od 203 mg što je pogreška mjerenja od 1,5 %. Osjetljivost vage je približno 1,2 mm/mg, s obzirom na pomak laserskog spota na zaslonu, dok je razlučivost oko 1 mg.

Rad s vagom podrazumijeva poznavanje koncepata magnetske sile, elektromagnetske indukcije, harmonijskog titranja, rezonantne frekvencije, rada s generatorom signala i osciloskopom, filtriranje i usrednjavanje signala te rad s programom za video analizu. U tom kontekstu vaga može odlično poslužiti kao vježba za praktikum iz moderne fizike u kojoj se koncepti opće fizike izvrsno nadovezuju na složenije koncepte moderne fizike i tehnike mjerenja.

## 9. Literatura

- [1] S. Schlamminger, Redefining the Kilogram and Other SI Units, IOP Publishing Ltd 2018, Gaithersburg, Bristol, 2018. <https://10.1088/978-0-7503-1539-5>
- [2] S. Knotts, J. Mohr, and W. D. Phillips, An Introduction to the New SI, *The Physics Teacher* 55, 16 (2017); <https://doi.org/10.1119/1.4972491>
- [3] I. Aviani, *Kilogram više nije artefakt: Kako objasniti njegovu novu definiciju pomoću Planckove konstante*, XIV. hrvatski simpozij o nastavi fizike, Zadar, 23. - 25. travnja 2019.
- [4] T. Quinn, L. Quinn, and R. Davis, A simple watt balance for the absolute determination of mass, *Phys. Educ.* 48, 601–606 (2013). <https://doi.org/10.1088/0031-9120/48/5/601>
- [5] R J Ward, Minimal watt balance, *Phys. Educ.* 49 277 2014
- [6] L. S. Chao, S. Schlamminger, D. B. Newell, J. R. Pratt, F. Seifert, X. Zhang, G. Sineriz, M. Liu, and D. Haddad, A LEGO Watt balance: An apparatus to determine a mass based on the new SI, *Am. J. Phys.* 83, 913 (2015), <https://doi.org/10.1119/1.4929898>
- [7] A. Geelmuyden and S. G. Winther-Larsen, Lego watt balance, Special report in experimental physics, University of Oslo, Oslo 2016. (<https://heim.ifi.uio.no/sebastwi/FYS2150/Lego%20Watt%20Balance.pdf>)
- [8] F. Weibull and F. Persson, Demonstrative Watt balance scale in Lego, Master thesis, Chalmers University of Technology Göteborg 2015. <https://odr.chalmers.se/bitstream/20.500.12380/255166/1/255166.pdf>
- [9] D. Szabo and T. Nguyen, LEGO model of Watt balance scale, Master thesis, Halmstad University 2016, <https://www.divaportal.org/smash/get/diva2:912815/FULLTEXT01.pdf>
- [10] T. G. Mametja, An uncertainty budget for the precursor Watt balance for South Africa, Master Thesis, Department of Physics, Faculty of Science, University of Cape Town 2019. [https://open.uct.ac.za/bitstream/handle/11427/31583/2019\\_Mametja\\_Thapelo\\_Given.pdf?sequence=4&isAllowed=y](https://open.uct.ac.za/bitstream/handle/11427/31583/2019_Mametja_Thapelo_Given.pdf?sequence=4&isAllowed=y)
- [11] Wikipedija, [https://hr.wikipedia.org/wiki/Me%C4%91unarodni\\_sustav\\_mjernih\\_jedinica](https://hr.wikipedia.org/wiki/Me%C4%91unarodni_sustav_mjernih_jedinica) (05.10.2019.)
- [12] V. Lopac, D. Hrupec, What Exactly Are the New Definitions of Kilogram and Other SI Units? *The Physics Teacher* 58, 58 (2020), <https://doi.org/10.1119/1.5141976>
- [13] G. Girard, The third periodic verification of National prototypes of the kilogram (1988.-1992.), *Metrologia* 31 317, 1994. <https://doi.org/10.1088/0026-1394/31/4/007>

- [14] Bureau international des poids et mesures, <https://www.bipm.org/en/measurement-units> (05.10.2019)
- [15] J. Clarke, The Josephson effect and  $e/h$ , *Am. J. Phys.* 38, 1071–1095 (1970).
- [16] J. Eisenstein, The quantum Hall effect, *Am. J. Phys.* 61, 179–183 (1993).
- [17] R. Schlamminger, The Watt or Kibble balance; A technique for implementing the new SI definition of the unit of mass, *Metrologia* 53 A46–A74 (2016)
- [18] National Institute of Standards and Technology, <https://www.nist.gov> , (10.7.2020)
- [19] D. Stock and M. de Mirandes, The revision of the SI – the result of three decades of progress in metrology, *Metrologia* 56 049502 (2019). <https://doi.org/10.1088/1681-7575/ab0013>
- [20] Physikalisch technische bundesanstalt, <https://www.ptb.de/>, (10.7.2020.)
- [21] I. Aviani, Neodimijski magneti na satu fizike, *Nastava fizike* 1 45-56 (2015)  
<http://bib.irb.hr/prikazi-rad?&rad=907827>
- [22] I. Aviani, Računalo kao mjerni uređaj, *Nastava fizike* 2, 7-12 (2016)  
<http://bib.irb.hr/prikazi-rad?&rad=907766>
- [23] Howard Georgi, *The Physics of Waves*, Harvard University, 1993. USA  
[https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-03sc-physics-iii-vibrations-and-waves-fall-2016/syllabus/MIT8\\_03SCF16\\_Textbook.pdf](https://ocw.mit.edu/courses/physics/8-03sc-physics-iii-vibrations-and-waves-fall-2016/syllabus/MIT8_03SCF16_Textbook.pdf)
- [24] Dino Butulija, *Metodička obrada periodičnih gibanja analizom video zapisa*, diplomski rad, Prirodoslovno-matematički fakultet Zagreb 2011, voditelj: I. Aviani  
(<http://bib.irb.hr/prikazi-rad?&rad=564901>)
- [25] Neva Margetić, *Metodička obrada gibanja analizom video zapisa*, diplomski rad Prirodoslovno-matematički fakultet Zagreb 2011, voditelj: I. Aviani  
(<http://bib.irb.hr/prikazi-rad?&rad=560678> )