Valovi na vodi

Kuzmanić, Matea

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet

Valovi na vodi

Završni rad / Bachelor thesis

Matea Kuzmanić

Split, rujan 2020.

Temeljna dokumentacijska kartica

Sveučilište u Splitu
Prirodoslovno – matematički fakultet
Odjel za fiziku
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Hrvatska

Završni rad

Valovi na vodi

Matea Kuzmanić

Sveučilišni preddiplomski studij Matematika i

Sažetak:
Valovi na vodi se lako uočavaju. Od ranog djetinjstva viđala sam ih u kadi, jezeru i moru. Nesumnjivo sam doživjela veliko estetsko zadovoljstvo promatrajući ih u svoj njihovoj ljepoti i složenosti. Sada želim uživati u intelektualnom zadovoljstvu njihova razumijevanja. Koristeći intuiciju i eksperimente, prijašnje znanje o valovima, te različite uvjete, gradim formulu za valove na vodi u plitkoj i dubokoj vodi. Usprkos pojednostavljenju u kojem sam zanemarila određena svojstva vode, kao što je viskoznost koja je rezultat unutarnjeg trenja, i bazirala se na nježne valove male amplitude, pokazala sam geometrijsku strukturu i relaciju disperzije za takve valove na vodi.

Ključne riječi: valovi na vodi, stojni valovi, dubokovodni valovi, plitkovodni valovi, relacija disperzije

Rad sadrži: 11 stranica, 2 slike, 0 tablica, 3 literaturnih navoda. Izvornik je na hrvatskom jeziku

Mentor: prof. dr. sc. Mile Dželalija

Ocjenjivači: prof. dr. sc. Mile Dželalija
izv. prof. dr. sc. Željana bonačić Lošić
doc. dr. sc. Ivana Weber

Rad prihvaćen: rujan 2020.

Rad je pohranjen u knjižnici Prirodoslovno – matematičkog fakulteta, Sveučilišta u Splitu.

Basic documentation card

University of Split
Faculty of Science
Department of Physics
Ruđera Boškovića 33, 21000 Split, Croatia

Bachelor thesis

Water waves

Matea Kuzmanić

University undergraduate study programme Mathematics and Physics

Abstract:
Water waves are easy to spot. From an early age I saw them in the bathtub, the lake and the sea. I have undoubtedly experienced great aesthetic pleasure by observing them in all their beauty and complexity. Now I want to enjoy the intellectual satisfaction of understanding them. Using intuition and experiments, previous knowledge of waves, and different conditions, I build a formula for water waves in shallow and deep water. Although I neglected certain properties of water like viscosity, which is the result of internal friction, based it on "ideal" water and limited myself to gentle waves of small amplitude. Despite this simplification, I have shown the geometric structure and dispersion relation for such waves on water.

Keywords: water waves, standing waves, shallow-water waves, deep-water waves, dispersion relation

Thesis consists of: 11 pages, 2 figures, 0 tables, 3 references. Original language: Croatian

Supervisor: Ph. D. Mile Dželalija

Reviewers: Prof. Dr. Mile Dželalija
Assos. Prof. Dr. Željana Bonačić Lošić
Assist. Prof. Dr. Ivana Weber

Thesis accepted: September, 2020.

Thesis is deposited in the library of the Faculty of Science, University of Split.

Sadržaj

1 Uvod

Valovi su svuda oko nas. Iako su svi valovi "prirodni", tj. uočeni su u prirodi, neke valove nakon otkrića i dugogodišnjih proučavanja znastvenici su iskoristili i razvili u nešto novo. Što su se valovi više proučavali tako je znanost i tehnologija više napredovala. Današnji način života je nezamisliv bez primjene različitih valova. Jedna od mnogih vrsta valova koji su se otkrili i time unaprijedili tehnologiju je radio val (eng. *radio wave*). Radio val se koristi u radioprijemniku, televiziji, navigaciji (GPS), kontroli zračnog prometa, mobilnih telefona, igračaka na daljinsko upravljanje. Pošto su zvuk i svjetlost valne prirode, također, njihovim proučavanjem smo razvili razne stvari, kao štu su instrumenti: gitara, klavijatura, bubnjevi, itd. Napredak znanosti o valu nije samo pridonijela fizici, već i drugim znanostima. Npr. rengen, tj. x-zrake, koji se koristi u medicini, je elektromagnetski val.

Iako je znanost dosta napredovala, i dalje postoje nedovoljno istražena područja. Tako imamo i valove koji postoje u teoriji fizike, ali se ne mogu dokazati, tj. ne postoje instrumenti koji bi dokazali, niti možemo dizajnirati instrument koji bi potvrdio neku teoriju. Npr. Pilot val (eng. *pilot wave*) ili Bohmian mehanika (eng. *bohmian mechanics*).

Val je, po definiciji [1], širenje poremećaja kojim se prenosi energija kroz medij, a da se medij kao cjelina ne pomiče. U fizici valovi se mogu grupirati na više načina: po valnoj duljine, po orijentaciji kretanja čestice i smjera energije, po dimenziji. Najčešće grupiranje je na longitudinalne i transverzalne. Valovi se opisuju valnom duljinom, periodom, valnim brojem i frekvencijom.

Šetajući plažom ili obalom jezera možemo uočiti djecu koja bacaju kamenčiće te kako nastaju mali pravilni kružni brjegovi, brodove koje prolaze i kako stvaraju pravilne paralelne brjegove, vjetar kako puše i "pomiče" more ili jezero.

Drugim riječima, valovi na vodi se lako uočavaju. Od ranog djetinjstva viđali smo ih u kadi, jezeru i moru. Nesumnjivo smo doživjeli veliko estetsko zadovoljstvo promatrajući ih u svoj njihovoj ljepoti i složenosti. Sada želimo uživati u intelektualnom zadovoljstvu njihova razumijevanja. To razumijevanje zahtijeva jednostavnost. Zanemarit ćemo stoga neka svojstva stvarne vode. Na primjer, zanemarit ćemo viskoznost, koja je rezultat unutarnjeg trenja. Ograničit ćemo se i na nježne valove male amplitude.

Usprkos našem pojednostavljenju pokazat ćemo geometrijsku strukturu i relaciju disperzije $\omega(t)$ za nježne valove na vodi. Svi rezultati se mogu provjeriti jednostavnim kućnim eksperimentima pomoću kutije za cipele ili akvarija za ribice.

Iako valovi na vodi mogu nastati iz više razloga: vjetar, pomicanje tenkonskih ploča (tada nastaje cunami), bacanje kamenčića, plovidba broda. Mi ćemo zanemariti način kako su nastali, te ćemo gledati samo, kao što smo već rekli, njihovu geometrijsku strukturu i relaciju disperzije.

2 Valovi na vodi

U ravnoteži (tj. kad nema valova) voda je ravna i vodoravna. Kada je prisutan val, postoje dvije sile koje teže sravniti brijeg vala: gravitacija i površinska napetost.

Zbog velike nestlačivosti vode, višak vode koji se pojavi u valnom brijegu mora dolaziti iz susjednih dolova. Pojedinačne kapi vode u valu prema tome podvrgavaju se gibanju koje je neka kombinacija longitudinalnog gibanja.

Ako je ravnotežna dubina vode mala u usporedbi s valnom duljinom, valovi se nazivaju plitkovodnima (eng. *shallow-water waves*) ili plimnim valovima. Ispada da ti valovi imaju brzinu širenja koja je neovisna o duljini vala, ali ovisi o dubini.

Ako je valna duljina mala u usporedbi s ravnotežnom dubinom vode imamo ono što se naziva dubokovodnim valovima (eng. *deep-water waves*). Pojedinačne kapljice vode u putujućem harmoničnom dubokovodnom valu nemaju prosječnu translaciju. Kreću se u krug. Na primjer, plutajuća pluta podvrgava se jednoličnom kružnom kretanju s radijusom jednakim amplitudi harmonijskog vala i periodu jednakim valnom valu. U dolu pluta ima maksimalnu brzinu unatrag; na brijegu ima jednako veliku brzinu prema naprijed. Kapljice vode ispod površine putuju u manjim krugovima; kružni radijus se eksponencijalno smanjuje s povećanjem dubine i zanemarivo je mali nekoliko valnih duljina ispod površine.

2.1 Ravni valovi (eng. s*traight waves*)

Uzmimo u obzir da valovi na vodi imaju jednu valnu duljinu λ i duge ravne paralelne brjegove i dolove. Takvi valovi se zovu ravni valovi. Oni su dvodimenzionalna analogija trodimenzionalnog ravninskog vala (eng. *plane wave*).

Pretpostavimo da imamo beskonačno jezero jednolike dubine h. Kada nema valova površina jezera je ravna što označavamo s $y = 0$. Uzmimo da je pozitivna os y usmjerena prema gore. Uzet ćemo da je smjer širenja valova u horizotalnom smjeru po osi $\hat{x}$. Što znači da su brjegovi i dolovi vala duž linija okomitih na os $\hat{x}$.

Neka x i y određuju ravnotežni položaj dane kapi vode. (Nebitno gdje ta kap vode padne unutar gibanja vala njen ravnotežni položaj je (x, y). Ravnotežni položaj označava određenu kap i ne govori nam gdje je ta kap kada postoji val.) Varijabla x ide od $x = -\infty$ do $x = +\infty$. Varijabla y ide od $y = -h$ (dno jezera) do $y = 0$ (površina jezera).

Kada je val prisutan zadana kap se pomiče kombiniranjem pokreta gore-dolje (po y osi) i naprijed-nazad (po x osi). Označimo s $\psi(x, y, t)$ trenutni vektorski pomak od ravnotežnog stanja kapi vode s obzirom na ravnotežno stanje (x, y). Vektor pomaka u ravnom valu u vodi ima samo x i y komponentu:

$$\psi(x, y, t) = \hat{x}\psi_x(x, y, t) + \hat{y}\psi_y(x, y, t). \tag{2.1}$$

Trenutna brzina kapljice vode s koordinatama ravnoteže je parcijalna derivacija od ψ po vremenu:

$$v(x, y, t) = \frac{\partial\psi(x,y,t)}{\partial t} = \hat{x}\,\frac{\partial\psi_x}{\partial t} + \hat{y}\,\frac{\partial\psi_y}{\partial t}\,. \tag{2.2}$$

2.2 Svojstva idealne vode

U ovom podpoglavlju ćemo ispitivati neka svojstva idealne vode.

2.2.1 Očuvanje mase

Znamo da je očuvanje električnog naboja dano jednadžbom kontinuiteta:

$$\nabla \cdot (\rho v) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \tag{2.3}$$

Jednadžba (2.3) samo kaže da razlog zašto se gustoća naboja ρ u beskonačno malom volumenu mijenja u vremenu je zato što trenutni ρv istječe s površine volumena. U ovom slučaju s ρ označimo gustoću vode tada jednadžba (2.3) prikazuje očuvanje mase. U dobroj aproksimaciji voda je nestlačiva. Stoga gustoća mase ρ je konstanta, neovisna o vremenu i poziciji, i zbog toga je desna strana jednadžbe (2.3) nula. Također možemo uzeti u obzir ρ s lijeve strane jednadžbe (2.3) i zanemariti ga. Onda koristeći jednadžbu (2.2) možemo prikazati v:

$$0 = -\frac{\partial \rho}{\partial t} = \nabla \cdot (\rho v) = \rho(\nabla \cdot v) \tag{2.4}$$

tj.

$$0 = \nabla \cdot \mathrm{v} = \nabla \cdot \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \psi) \tag{2.5}$$

tj.

$$\nabla \cdot \psi = \text{konstanta}. \tag{2.6}$$

2.2.2 Odsutnost mjehurića

Konstanta u jednadžbi (2.5) može biti samo nula. U protivnome, po Gaussovom teoremu, površinski integral od ψ po površini male sfere ne bi bio nula što bi značilo da imamo mjehuriće. Mi pretpostavljamo da nemamo mjehuriće. Tako smo pronašli da očuvana, nestlačiva, bez mjehurića voda zadovoljava:

$$\nabla \cdot \psi = \frac{\partial \psi_x(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial \psi_y(x,y,t)}{\partial y} = 0. \qquad (2.7)$$

2.2.3 Odsutnost vrtloga

U vrtlogu, linijski integral brzine v po kružnici koja zatvara vrtlog nije nula. Na beskonačnoj maloj skali, prisutnost malih vrtloga bi značilo da rotacija od v nije nula. Mi pretpostavljamo da nema vrtloga i time da vrijedi:

$$0 = \nabla \times v = \nabla \times \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \psi) \qquad (2.8)$$

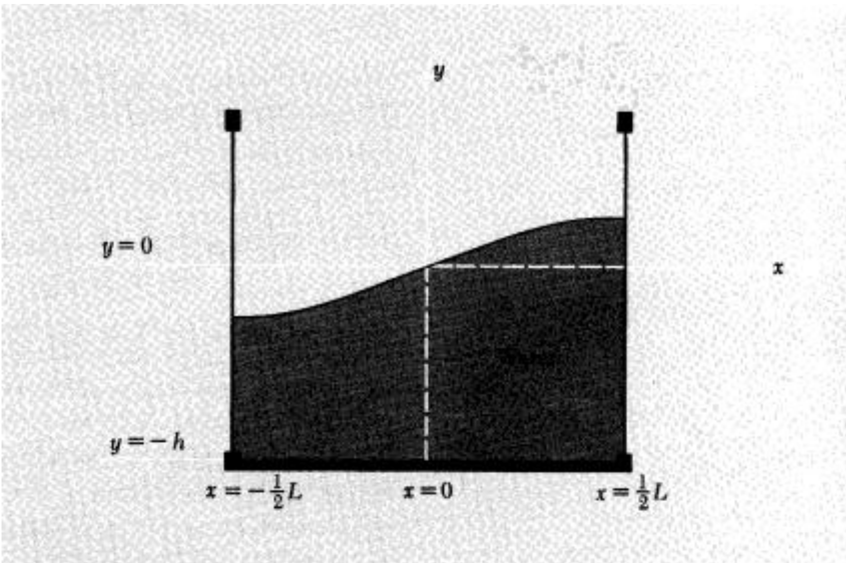
tj.

$$\nabla \times \psi = \hat{z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\psi_y - \frac{\partial}{\partial y}\psi_x\right) = 0. \qquad (2.9)$$

2.3 Stojni valovi na vodi (eng. *standing water waves*)

Stojni val je val u kojem neke točke sredstva titraju s maksimalnom amplitudom, a neke uopće ne titraju.[2]

Mi želimo koristiti intuiciju da nađemo formulu za val na vodi bez previše algebre. Uzmimo neku posudicu ili akvarij u obliku kvadra i napunimo ga vodom. Njihajući lagano posudu s lijeva na desno, uzduž osi x, pokušamo pronaći mod (eng. *mode*) oblika sinusoide. Možemo primjetiti da najniži mod je sličan onome prikazanome na slici 1.



Slika 1: *Najniži sinusoidalan mod u kvadrastom akvariju (slika preuzeta iz knjige: Berkeley physics course-volume III: waves)*

Ako umiješamo talog kave u vodu, tada možemo vidjeti kako se voda giba. Primjetit ćemo da sav talog kave je nepomičan u isto vrijeme, i da su pomaci od x i y nula. To je ono što smo očekivali od normalnog moda, tj. za stojeći val: svi stupnjevi slobode osciliraju u fazi. Stoga možemo zaključiti da za dovoljno male oscilacije vremenska ovisnost od ψ_x i ψ_y je dana harmoničkim oscilatorom s istom konstantom faze, tj. vremenska ovisnost je dana zajedničkim faktorom $cos\omega t$.

Nadalje, pretpostavimo da je vertikalni pomak ψ_y u ovisnosti od x je onaj sinusoidalnog stojećeg vala. Ako mod izgleda kao na slici 1. onda ψ_y ima čvor u $x = 0$. Stoga ψ_y sadrži faktor $sinkx$ i pišemo:

$$\psi_y\,(x, y, t) = \cos \omega t \, \sin kx\, f(y) \tag{2.10}$$

gdje je $f(y)$ za sad nepoznata funkcija od y.

2.4 Granični uvjeti na zidovima

Na krajevima spremnika kapljice vode mogu ići samo gore i dolje, ne mogu napustiti zid. Dakle mjesto gdje ψ_y ima maksimume (na zidovima) je mjesto gdje ψ_x ima čvorove. Zato moramo imati $\cos kx$ za ψ_x umjesto $\sin kx$ kod ψ_y:

$$\psi_x\,(x, y, t) = \cos \omega t \cos kx \;\, g(y) \tag{2.11}$$

gdje je $g(y)$ za sad nepoznata funkcija od y.

2.5 Odnos horizontalnog i vertikalnog kretanja

Iskorist ćemo činjenicu da divergencija i rotacija od ψ je nula. Ako iskoristimo te činjenice u jednadžbama (2.10) i (2.11) dobivamo:

$$\nabla \cdot \psi = 0; \qquad -kg(y) + \frac{df(y)}{dy} = 0; \tag{2.12}$$

$$\nabla \times \psi = 0; \qquad \frac{dg(y)}{dy} - kf(y) = 0. \tag{2.13}$$

Možemo eliminirati $g(y)$ iz jednadžba (2.12) i (2.13) tako da diferenciramo jednadžbu (2.12) po y i iz jednadžbe (2.13) izvučemo dg/dy. Tada dobijemo jednadžbu:

$$\frac{d^2 f}{dy^2} = k^2 f, \tag{2.14}$$

koja ima opće rješenje:

$$f(y) = Ae^{ky} + Be^{-ky}. \tag{2.15}$$

Ako uvrstimo ovo rješenje u jednadžbu (2.12) tada dobivamo da za $g(y)$ vrijedi:

$$g(y) = Ae^{ky} - Be^{-ky}. \tag{2.16}$$

2.6 Granični uvjeti na dnu

Na dnu jezera ne postoje vertikalni pomaci kapljica vode, tj. ne mogu napustiti dno. Uvjet da je $\psi_y = 0$ za $y = -h$ je ekvivalentno $f(y) = 0$ za $y = -h$. Tada iz jednadžbe (2.15) dobivamo da je $B = -Ae^{-2kh}$.

Iz svega ovoga dobivamo konačnu jednadžbu za stojeći sinusoidalni val na vodi unutar jezera jednolike dubine h:

$$\psi_y = A\cos\omega t \sin kx \,(e^{ky} - e^{-2kh}e^{-ky}) \tag{2.17}$$

$$\psi_x = A\cos\omega t \cos kx \,(e^{ky} + e^{-2kh}e^{-ky}) \tag{2.18}$$

Jednadžbe (2.17) i (2.18) prikazuju trenutni pomak kapi vode u odnosu na ravnotežni položaj (x, y). Kao što možemo primjetiti iz ovih jednadžbi kretanje dane kapi u stojećem valu u vodi se sastoji od harmoničkog oscilatora duž ravne crte u (x, y) ravnini. Ovo se isto može primjetiti promatrajući talog kave u posudi.

2.7 Dubokovodni valovi

Ako je dubina h puno veća od valne duljine, onda faktor e^{-2kh} teži u nula i možemo zanemariti drugi pribrojnik u jednadžbama od $f(y)$ i $g(y)$. U tom slučaju jednadžbe (2.17) i (2.18) postanu:

$$\psi_y = A\cos\omega t \sin kx \, e^{ky} \tag{2.19}$$

$$\psi_x = A\cos\omega t \cos kx \, e^{ky} \tag{2.20}$$

Vidimo da je val sinusoidalan u x smjeru i eksponencijalan u y smjeru. Duljina prigušenja amplitude δ je $1/k$ što je jednako $\lambda/2\pi$. Konstanta $\lambda/2\pi$, koje se naziva reduciranom valnom duljinom (eng. *reduced wavelength*), se označava s $ƛ$. Tako za dubokovodne valove vrijedi:

$$f(y) = e^{ky} = e^{-k|y|} = e^{-|y|/ƛ}; \tag{2.21}$$

duljina prigušene amplitude za dubokovodne valove jednaka je reduciranoj valnoj duljini. Stoga amplituda oscilacije kapi vode čiji ravnotežni položaj je jedna valna duljina ispod površine je manja od kapi na površini za $e^{-2\pi} \approx 1/500$. Možemo primjetiti da je dovoljno da ravnotežna dubina vode bude jedna valna duljina da bi pomak vode na dnu bio zanemariv i time "dubokovodni val" bude dobra aproksimacija.

2.8 Plitkovodni valovi

Pod plitkovodni val smatramo val kojem je ravnotežna dubina h mala u usporedbi s λ. U tom slučaju, ovisnost ψ_x i ψ_y o y možemo aproksimirati s prvih par članova Taylorovog reda od $f(y)$ i $g(y)$. Tako možemo pokazati da, za $h \ll \lambda$, jednadžbe (2.17) i (2.18) pretvore u:

$$\psi_y = 2A \cos \omega t \sin kx \, [k(y+h)] \tag{2.22}$$

$$\psi_x = 2A \cos \omega t \cos kx \tag{2.23}$$

Primjetimo da za plitkovodne valove horizontalni pomak ψ_x ne ovisi o parametru y. Vertikalni pomak ψ_y linearno varira ovisno o dubini kapi, s time da postiže maksimum na površini i nula na dnu. Na površini maksimum vertikalnog pomaka je manji od maksimuma horizotalnog pomaka za $h/\lambda \ll 1$.

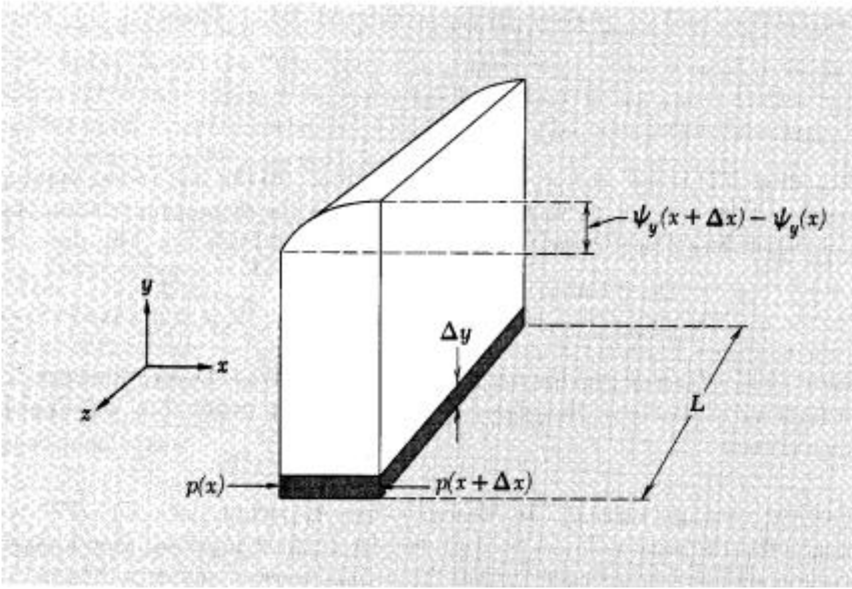
U našem modelu "idealne vode" mi smo zanemarili trenje vode o hrapavo (neravno) dno. Kod dubokovodnih valova ovaj propust nije važan, dok kod plitkovodnih valova je važan. U pokusu s pravokutnom tavom se može primjetiti da talog kave nestane s područja maksimalne horizontalne brzine i skupi se na mjesto gdje je horizontalna brzina uvijek nula, tj. maksimalna za vertikalni pomak. Zanemarili smo još i "unutarnje" trenje tekućine, viskoznost.

2.9 Disperzijski odnos gravitacijskih valova na vodi (eng. *gravitational water waves*)

Promatrali smo geometrijsku strukturu (idealnih) vodenih valova, ali nismo spomenili relaciju između "oblika" (valna duljina i dubina) i frekvencije. To je zato što nismo spomenili povratnu silu (eng. *return force*). (Prisjetimo se da sila povratka po jedinici pomaka po jedinici mase je ω^2.)

Pošto svi pokretni dijelovi imaju istu vrijednost ω^2 u modu, možemo pronaći relaciju između mod frekvencije (eng. *mode frequency*) i mod oblika (eng. *mode shape*) razmatranjem gibanja jednog stupnja slobode jednog pokretnog dijela kada znamo oblik moda. U našem problemu taj oblik je prikazan jednadžbama (2.17) i (2.18). Zato je dovoljno promatrati pomak samo u x smjeru (ili y) jedne kapi vode. Mi ćemo promatrati pomak od x u beskonačnom malom volumenu vode koja se nalazi blizu površine.

Uzmimo mali volumen koji se u ravnoteži proteže na malu udaljenost Δx duž smjera širenja x, udaljenost L duž "nezanimljivog" smjera z, i male vertikalne udaljenosti Δy. U usporedbi s valnom duljinom Δx i Δy bi trebali biti mali. Povratna sila duž x ovog volumena je jednaka površini strane $L\Delta y$ volumena puta razlici između tlakova u x i u $x + \Delta x$. Tražena razlika u tlakovima dana je s ρg (gustoća mase puta akceleracija Zemljine sile teže (eng. *gravitational acceleration*)) pomnožena s razlikom u visini dviju strana volumena, tj. razlika u ψ_y na te dvije strane kao što je prikazano na slici 2. Razlika u ψ_y na te dvije strane je zapravo



Slika 2: *Gravitacijska povratna sila duž x na elementu volumena vode. Zasjenjeni volumen doživljava silu koja je proporcionalna razlici tlaka $p(x+\Delta x)-p(x)$. Ova razlika tlaka proporcionalna je razlici u visini vode $\psi_y(x+\Delta x)-\psi_y(x)$. (slika preuzeta iz knjige: Berkeley physics course-volume III: waves)*

derivacija od ψ_y po x puta Δx. Tako nalazimo:

$$\begin{aligned} F_x &= -L\Delta y[p(x+\Delta x)-p(x)] \\ &= -L\Delta y\rho g\big[\psi_y(x+\Delta x)-\psi_y(x)\big] \\ &= -L\Delta y\Delta x\rho g\frac{\partial\psi_y}{\partial x} \\ &= -(\Delta M)g\left[\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right]_{y=0} \end{aligned} \tag{2.24}$$

gdje je $\Delta M \equiv \rho L\Delta y\Delta x$ masa vode u volumenu. Ova sila proizvodi akceleraciju duž x. Akceleracija duž x je $\partial^2\psi_x/\partial t^2$ što je jednako $-\omega^2\psi_x$ zbog harmonijskog gibanja. Tada po drugom Newtonov zakonu za masu ΔM vrijedi:

$$F_x = (\Delta \mathrm{M})\frac{\partial^2\psi_x}{\partial t^2}, \tag{2.25}$$

koristeći (2.24) dobivamo:

$$(\Delta M)g\left[\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right]_{y=0} = (\Delta M)\omega^2[\psi_x]_{y=0}. \tag{2.26}$$

Ako uvrstimo (2.17) i (2.18) u (2.26) dobijemo:

$$\omega^2 = gk\frac{(1-e^{-2kh})}{(1+e^{-2kh})} \tag{2.27}$$

Jednadžba (2.27) je željena relacija disperzije. U našim posebnim slučajevima duboko i plitko vodnih gravitacijskih valova relacija disperzije i odgovarajuće fazne brzine se mogu izvući iz jednadžbe (2.27) i to su:

Duboka voda: $\omega^2 = gk$ $\quad v_\varphi = \sqrt{g\lambda}$ (2.28)

Plitka voda: $\omega^2 = gk(h/\lambda)$ $\quad v_\varphi = \sqrt{gh}$ (2.29)

Možemo primjetiti da plitkovodni gravitacijski valovi su nedisperzivni. Dubokovodni gravitacijski valovi su disperzivni, te njihova faza brzine se dupla kada se valna duljina poveća četiri puta.

2.10 Valovi površinske napetosti (eng. *surface tension waves*)

Pri izvođenju jednadžbe (2.27) relacije disperzije mi zanemarujemo površinsku napetost unutar povratnoj sili. Za zadani volumenski element istisnute vode doprinos površinske napetosti povratnoj sili je proporcionalan s T (konsanti površinske napetosti) puta zakrivljenost površine. Zakrivljenost površine je proporcionalna s k^2, tj. doprinos površinske napetosti je proporcionalna s Tk^2. Doprinos gravitacije je proporcionalna s težinom Mg, tj. s ρg. Tako možemo zaključiti da relativni doprinos ω^2 od površinske napetosti i gravitacije je proporcionalan bezdimenzionalnom omjeru $Tk^2/\rho g$.

2.11 Putujući valovi na vodi (eng. *traveling water waves*)

Pomaci putujućih valova na vodi su:

$$\psi_y = A\cos(\omega t - kx)\,(e^{ky} - e^{-2kh}e^{-ky}) \tag{2.30}$$

$$\psi_x = A\sin(\omega t - kx)\,(e^{ky} + e^{-2kh}e^{-ky}) \tag{2.31}$$

Iz jednadžbi (2.30) i (2.31) vidimo da za dubokovodne putujuće valove dana kapljica vode putuje kružno u xy ravnini, pomiću se naprijed kad su na brijegu i nazad kad su u dolu. Inače, za vodu dubine h kapi putuju po elipsi. Ovo eliptično kretanje je slično kružnom kretanju koje imamo kod dubokovodnih putujućih valova samo je krug "zgnječen" na vrhu i na dnu (tava, more, jezero). Bar je tako u slučaju kada zanemarimo trenje na dnu. U slučaju da uzmemo i trenje u obzir, onda voda putuje relativno lagano naprijed (na brjegovima), ali kad se vraća dolom trlja se od dnu. Rezultat toga je da se voda pomakne više naprijed na brjegovima nego unazad u dolu te dođe do velike translacije vode. U tom slučaju, valovi su blizu "pucanja". Tako prekidači (eng. *brakers*) (težak morski val koji se na obali ili plićaku razbije u bijelu pjenu) nose vodu sa sobom. (Povratni tok je "podzemni".) Ronilac koji pliva na, kako on smatra, sigurnoj udaljenosti od mora od stjenovite plaže, može biti u nevolji kad naiđe val izuzetno duge valne duljine.

3 Zaključak

U ovom radu smo proučavali valove na vodi. Usprkos pojednostavljenju u kojem smo zanemarili određena svojstva vode, kao što je viskoznost koja je rezultat unutarnjeg trenja, i bazirali se na nježne valove male amplitude, pokazali smo geometrijsku strukturu i relaciju disperzije za takve valove na vodi.

Koristeći intuiciju i eksperimente, prijašnje znanje o valovima, te različite uvjete, gradimo formulu za valove na vodi. U ovom radu smo izveli približne formule po kojima se kapljice vode pomiču u dubokoj ili plitkoj vodi. Pošto smo koristili intuiciju i eksperimente, promatrali smo vode manjih površina i ograđene zidovima.

Ovaj rad bih se mogao poboljšati uzimajući u obzir sve što smo zanemarili. Viskoznost vode, i time različiti tip vode bi mogao promijeniti rezultate i formule koje smo dobili. Rad bi se mogao još poboljšati ako bismo uzeli u obzir kako je val nastao. Isto tako povećanjem površine, micanjem zidova i promjenom idealnog dna, te promatranjem valova u prirodi, kao što su more, jezera i rijeka.

Ovim radom smo se dotakli samo određenih valova. O valovima u tekućinama, time i na vodi znamo dosta, ali još uvijek ne sve. Nadamo se da će se istraživanja nastaviti, jer ovako zanimljivi i po život opasni objekti zaslužuju naše zanimanje.

4 Literatura

[1] Hrvatska enciklopedija, URL: https://www.enciklopedija.hr/Natuknica.aspx?ID=63780, (18. 9. 2020.)

[2] Hrvatska enciklopedija, URL: https://www.enciklopedija.hr/natuknica.aspx?ID=58219, (18. 9. 2020.)

[3] Frank S. Crawford, Jr., *Berkley physics course-volume III: waves*, McGraw-Hill, Sjedinjene Američke države, 1968.